

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ  
НИЖНИЙ НОВГОРОД

Научно-учебная лаборатория количественного анализа  
и моделирования экономики

*В.А. Филимонов*

**МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

Препринт Р1/2010/06

Серия Р1

Научные доклады лаборатории  
количественного анализа и  
моделирования экономики

Нижний Новгород  
НФ ГУ ВШЭ  
2010

УДК 330.4  
ББК 65в6  
Ф 53

Редактор серии Р1  
“Научные доклады лаборатории количественного анализа и  
моделирования экономики ”  
*А.М. Силаев*

**Филимонов А.В. Мультифрактальные модели временных рядов.**  
Препринт Р1/2010/06. – Нижний Новгород: НФ ГУ-ВШЭ, 2010. – 45 с.

Целью настоящей работы является обзор существующих мультифрактальных моделей непрерывного времени для финансовых временных рядов. В работе приводятся основные понятия мультифрактального формализма для временных рядов и рассматриваются такие модели, как модель мультифрактального случайного блуждания (MRW), квазимультифрактальная модель и модель самовозбуждающегося мультифрактального процесса (SEMF). Обсуждаются основные свойства моделей, их достоинства и недостатки, а также применимость для описания стохастического поведения котировок ценных бумаг. Основное внимание в работе уделено наиболее перспективной модели самовозбуждающегося мультифрактального процесса, количественно описывающей большинство важнейших эмпирических закономерностей финансовых временных рядов.

УДК 330.4  
ББК 65в6

## Введение

Вероятностное описание финансовых временных рядов началось с работ Л. Башелье, в 1900 году [1] предложившего использовать модель броуновского движения для описания поведения цен акций. Благодаря своей простоте модель броуновского движения (винеровского процесса) получила широкое распространение и легла в основу множества теорий, таких как, например, теория ценообразования опционов Блэка-Шоулза. Обратной стороной простоты данной модели явилось слишком грубое приближение «белого шума» — приращения цены предполагались статистически независимыми нормально распределенными случайными величинами — не учитывающее сложное поведение реальных финансовых величин. Хотя изучение статистических свойств колебаний цен различных финансовых инструментов началось более полувека назад, только в последние два десятилетия интенсивное развитие вычислительной техники позволило провести детальный анализ значительного количества данных о поведении цен акций и индексов на различных временных интервалах. Обобщением результатов подобных исследований стали сформулированные эмпирические законы (так называемые «stylized facts») для финансовых временных рядов [2–4].

К числу данных эмпирических закономерностей, которые могут рассматриваться как отличия поведения реальных финансовых временных рядов от поведения модельного винеровского процесса, относятся следующие:

1. *Отсутствие линейной автокорреляции приращений цены*, кроме малых внутрисуточных масштабов времени — значение автокорреляции отличимо от шума только на временах меньших 15-25 минут, где значительную роль играют эффекты микроструктуры рынка.
2. *Наличие долгой памяти у волатильности*. Несмотря на отсутствие автокорреляции приращений со знаком, автокорреляционная функция абсолютных значений приращений цены (или автокорреляционная функция волатильности) спадает чрезвычайно медленно и существенно отличается от нуля даже на временах порядка сотни дней при рассмотрении пяти-минутных приращений. Медленное спадание данной автокорреляцион-

ной функции часто описывается степенным законом с показателем степени  $0.2 \lesssim \beta \lesssim 0.4$ .

3. *Плотность вероятности приращений цены существенно негауссова, что выражается в наличии тяжелых хвостов.* Многочисленные исследования показывают, что данная плотность вероятности обладает степенной асимптотикой с показателем степени  $2 \lesssim \gamma \lesssim 4$ . Однако вопрос о форме всего распределения остается открытым — хорошие результаты дает аппроксимация t-распределением Стьюдента и усеченное распределение Леви.
4. *Переменяемость и кластеризация волатильности.* На всех временных масштабах поведение приращений цены существенно нерегулярно — интервалы повышенной волатильности перемежаются с интервалами относительно небольшого изменения цены, всплески волатильности, обусловленные тяжелыми хвостами плотности вероятности, имеют тенденцию к кластеризации во времени.
5. Все перечисленные выше закономерности имеют следствием наличие мультифрактальных свойств у временной динамики цен. Наличие свойств масштабной инвариантности говорит о схожести механизмов ценообразования на различных временных интервалах, в то же время нетривиальность данных свойств (выраженная в нелинейности так называемого мультифрактального спектра) свидетельствует об отличии в динамике высокочастотной (секундной, минутной) и низкочастотной (дневной, недельной) торговли. 4
6. Финансовые временные ряды обладают так называемым «эффектом рычага» («leverage effect»), проявляющимся в асимметрии корреляционной функции приращений цены и волатильности (или абсолютных приращений). Так прошлые значения приращений отрицательно коррелированы с будущими значениями волатильности (причем корреляционная функция спадает по степенному закону для отдельных акций и по экспоненциальному — для индексов [5]), предыдущие значения волатильности практически некоррелированы с будущими значе-

ниями приращений цены. С точки зрения временной динамики это означает, что значительные падения цены приводят к существенному росту волатильности, в то время как влияние положительного роста цены на последующую волатильность не такое сильное.

7. *Наличие пузырей и крахов.* В то время как описанные выше закономерности имели строгое математическое описание в терминах тех или иных статистических характеристик, количественное описание подобных критических явлений весьма нетривиально, однако десятки потрясений разной степени тяжести на протяжении более 400 лет истории (начиная с «тюльпаномании» 1585-1637 годов и заканчивая финансовым кризисом переживаемым в настоящее время) позволяют говорить о том, что пузыри (периоды суперэкспоненциального роста) и обвалы цен являются неотъемлемым свойством финансовых рынков [6].

Вопрос разработки модели, описывающей перечисленные эмпирические законы, является одним из наиболее острых вопросов современной финансовой математики. Необходимость в подобных моделях возникает как в задачах управления рисками, так и в задачах разработки и оценки новых финансовых инструментов.

Как уже было сказано, исходная модель (*геометрического*) *броуновского движения* использует слишком грубое приближение и не обладает ни одним из перечисленных свойств. При этом обобщение данной модели на случай ненулевой корреляции приращений — процесс *гробного броуновского движения* [7] — оказался неприменимым к финансовым данным, в силу наличия памяти не только у волатильности, но и у приращений со знаком.

В силу относительной простоты широкое распространение получили *авторегрессионные модели (AR-модели)* [8] и *авторегрессионные модели условной гетероскедастичности (ARCH/GARCH-модели)* [9]. Благодаря возможности обобщения данные модели породили целые семейства AR-подобных и ARCH-подобных моделей, описывающих те или иные эмпирические свойства, так, например, для описания тяжелых хвостов плотности вероятности была предложена *GARCH-t модель* [10], медленно спадающая автокорреляционная функция волатильности описывается, например, *моде-*

лью *FIGARCH* [11], а модель *EGARCH* [12] позволяет количественно описать «эффект рычага». Существенным недостатком данного разнообразия моделей (всего на данный момент насчитывается более 50 ARCH-подобных моделей [13]) служит их относительная «узкопрофильность» — большинство из авторегрессионных моделей нацелены на воспроизведение соответствующих корреляционных функций или плотностей вероятности, но не позволяют охватить все перечисленные эмпирические закономерности.

В частности, нетривиальные свойства масштабной инвариантности, присущие ценам реальных активов, не могут быть точно воспроизведены при помощи авторегрессионных моделей. Наиболее богатым с точки зрения охватываемых свойств классом финансовых моделей являются мультифрактальные модели, отражающие наличие долгой памяти в сочетании с иерархической организацией на различных временных масштабах. Мультифрактальные процессы могут рассматриваться как обобщение дробного броуновского движения, которое обладает монофрактальными характеристиками с единственным показателем (показателем Херста). Одной из первых удачных попыток описать мультифрактальную иерархическую структуру стала *марковская мультифрактальная модель (Markov Switching Multifractal, MSM)* [14–16], значительным преимуществом которой для финансовых приложений стала относительно простая процедура калибровки параметров, в то же время экономическая интерпретация дискретных иерархических каскадов не достаточно очевидна. *Модель мультифрактального случайного блуждания (Multifractal Random Walk, MRW)* [17, 18] явилась первой стохастической моделью описывающей непрерывный случайный процесс, обладающий строгими мультифрактальными свойствами. Обратной стороной математической строгости стала необходимость использования корреляционной функции для лог-приращений, логарифмически спадающей до заданного интегрального масштаба, имеющую следствием расходимость моментов приращений высокого порядка. От данных недостатков была избавлена *квазимультифрактальная модель* [19–22], обладающая мультифрактальными свойствами на некотором ограниченном интервале масштабов. Отсутствие мультифрактальных свойств на бесконечно больших и бесконечно малых масштабах не только снимает

математические противоречия, но и отражает свойства реальных случайных процессов.

Все описанные выше мультифрактальные модели были экзогенными, т.е. осуществляли точечное преобразование внешнего производящего шума (интерпретируемого как эффективный «поток новостей» в финансовой математике). В то же время многочисленные исследования показывают, что поведение цены нельзя описать исключительно влиянием внешних новостей (например, [23]) и динамика финансовых рынков является эндогенной, т.е. обладает обратной связью — значения цены определяются не только экзогенными новостями в текущий момент времени, но и всей предыдущей историей цены данного актива. Данное свойство финансовых рынков получило название «рефлексивности» [24]. Следует отметить, что свойство «рефлексивности» хорошо описывается авторегрессионными моделями из семейств AR и ARCH/GARCH. Первой эндогенной мультифрактальной моделью стала модель *самовозбуждающегося мультифрактального процесса (Self-Excited Multifractal Process, SEMF)* [25]. В рамках данной модели возможно количественное описание всех основных эмпирических закономерностей, включая «эффект рычага», описание которого в рамках эндогенных мультифрактальных моделей затруднено.

## **Теория мультифрактальных случайных процессов**

Понятие мультифрактального случайного процесса появилось в результате переосмысления и обобщения каскадных моделей, впервые описанных в работах Л. Ричардсона [26] и получивших широкое распространение благодаря феноменологическим теориям турбулентности А. Колмогорова  $K41$  [27] и  $K62$  [28]. Обязанная своим основным развитием гидродинамической теории турбулентности [29], теория мультифрактальных случайных процессов нашла широкое применение в различных областях науки. Одной из наиболее важных практических областей применения данных моделей служит теория финансовых рынков, где мультифрактальные процессы с успехом используются для моделирования стохастиче-

ческих процессов котировок ценных бумаг [15–17, 30–34]. Кроме того, значительный интерес к мультифрактальным моделям проявляется в геофизике, где мультифрактальные процессы используются для описания и анализа последовательностей землетрясений и порожденных ими «афтершоков» [35, 36], в биологии мультифрактальные спектры сердечного ритма человека используются для диагностирования патологий [37–39], в статистической теории колебаний мультифрактальные свойства были обнаружены в некоторых режимах стохастического резонанса [40, 41] и динамики связанных хаотических систем [42]. Потенциальным приложением теории масштабно-инвариантных процессов является также теория телетрафика [43, 44], однако вопрос о наличии мультифрактальных свойств последнего в настоящий момент не решен однозначно [45].

Лежащий в основе теории мультифрактальных процессов *мультифрактальный формализм*, изначально предложенный для статистического анализа особенностей масштабных свойств сингулярных мер [46–49], опирается на понятие *фрактала*, введенное Б. Мандельбротом [50, 51] и получившее широкое распространение после его работы 1982 г. [52]. Первоначальное определение фрактала, предложенное Мандельбротом:

**Определение 1** *Фрактальным множеством называется множество, размерность Хаусдорфа которого строго больше его топологической размерности.*

при всей его правильности и точности было слишком ограничено и исключало многие фракталы, встречающиеся в физике и математике (например, так называемые *кривые Пеано* [53], принадлежащие классу *заполняющих пространство кривых*). Позже Мандельброт расширил свое определение, заменив его следующим [54]:

**Определение 2** *Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в некотором смысле подобны целому.*

Следует отметить, что в настоящее время не существует строгого и полного определения фрактала [55–57] и оба определения Мандельброта используются одинаково часто.

Развитие теории мультифрактальных процессов было связано с интенсивным изучением математических моделей диффузии. Первыми подобными моделями непрерывного времени, не обладаю-



щими, правда, мультифрактальными свойствами, явились *винеровский процесс (броуновское движение)* [58] и его обобщение — *дробное броуновское движение (fractional Brownian motion, fBm)* [7]. Винеровским процессом называется случайный процесс  $W(t)$ , реализация которого почти всюду непрерывна, а приращения  $W(t + \Delta t) - W(t)$  на интервале времени  $\Delta t > 0$  независимы и распределены по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией  $\Delta t$ . Дробным броуновским движением называется случайный процесс  $B_H(t)$  такой, что

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[ (t - \tau)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2} \right] dW(\tau) + \int_0^t (t - \tau)^{H-1/2} dW(\tau) \right\}, \quad (1)$$

где  $0 < H < 1$ ,  $\Gamma(\cdot)$  обозначает гамма-функцию, а  $dW(\tau)$  — приращения винеровского процесса, называется дробным броуновским движением с показателем  $H$ . Являясь частным случаем дробного броуновского движения, винеровский процесс описывается показателем  $H = 1/2$ .

Данные процессы служат примерами так называемых *самоафинных случайных (self-affine) процессов* — процессов, которые сохраняют статистические свойства при произвольных афинных преобразованиях.

**Определение 3** Случайный процесс  $X = \{X(t); t \geq 0; X(0) = 0\}$  называется самоафинным, если для любого  $c > 0$ , а также произвольного набора отсчетов времени  $t_1, \dots, t_k \geq 0$  выполняется

$$\{X(ct_1), \dots, X(ct_k)\} \stackrel{d}{=} \{c^H X(t_1), \dots, c^H X(t_k)\}, \quad (2)$$

где  $H$  — некоторая постоянная, называемая показателем самоафинности, а знак  $\stackrel{d}{=}$  обозначает эквивалентность в статистическом смысле.

Следует отметить, что понятие самоафинности является более широким, чем используемое в теории геометрических фракталов понятие самоподобия, и включает в себя последнее как частный случай [54, 55].

Для дробного броуновского движения показатель самоафинности совпадает с показателем процесса  $H$ . Процессы  $W(t)$  и  $B_H(t)$  могут интерпретироваться как *фрактальные* также и в том смысле, что график их реализации представляет собой фрактальное множество  $R_t$  с размерностью Хаусдорфа

$$D_0 = \dim_H(R_t) = 2 - H,$$

причем  $1 < D_0 < 2$ .

Для описания сложных масштабных свойств процессов в совместных работах Б. Мандельброта, Л. Кальвета и А. Фишера [59–61] было предложено расширить область применения мультифрактального формализма с понятия меры, распределенной на множестве, на понятие случайного процесса. В частности, было предложено изменить определение моментных функций на определение момента приращений процесса. Данное определение основывалось методе описания мультифрактальных свойств турбулентности на основе структурной функции, предложенном в работе Г. Паризи и У. Фриша [62]. Позднее определения, данные в [59, 60], были модифицированы в работах Ж.-Ф. Музи и Э. Бакри [17, 18, 63].

**Определение 4** Моментом приращений порядка  $q$  случайного процесса  $X(t)$  со стационарными приращениями  $\delta_l X(t) = X(t+l) - X(t)$ ,  $l > 0$  называется *детерминированная функция*

$$M_q(l) = \langle |\delta_l X(t)|^q \rangle = \langle |X(t+l) - X(t)|^q \rangle, \quad (3)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций.

В работе [64] данное определение объединяется с предложенным ранее А. Арнеодо, Ж.-Ф. Музи и Э. Бакри *методом максимумов модулей вейвлет-преобразования (Wavelet-Transform Modulus-Maxima, WTMM)* [65–67], предлагая вместо приращений  $\delta_l X(t)$  в (3) использовать коэффициенты вейвлет-преобразования.

**Определение 5** Если моменты приращений  $M_q(l)$  некоторого процесса  $X(t)$  могут быть представлены в степенном виде

$$M_q(l) = K_q l^{\zeta_q}, \quad (4)$$

где  $K_q$  и  $\zeta_q$  — некоторые функции переменной  $q$ , то говорят, что процесс  $X(t)$  обладает масштабной инвариантностью. При этом величины  $\zeta_q$  носят название масштабного показателя, а зависимость данного показателя от порядка момента  $q$  — мультифрактального спектра процесса.

**Определение 6** Случайный процесс  $X(t)$ , обладающий масштабной инвариантностью называется монофрактальным, если его спектр линеен ( $\zeta_q = qH$ ). Процесс называется мультифрактальным, если он описывается нелинейным мультифрактальным спектром  $\zeta_q$ .

Следует отметить, что степенное выражение для моментов (4) с нелинейным вогнутым спектром  $\zeta_q$ , не может сохраняться на произвольно больших масштабах  $l$ . Действительно, вогнутость спектра обозначает, что для произвольных  $q_1, q_2, w_1, w_2$ , таких что  $q = w_1q_1 + w_2q_2$ , выполняется

$$\zeta_q \equiv \zeta_{w_1q_1+w_2q_2} \geq w_1\zeta_{q_1} + w_2\zeta_{q_2}. \quad (5)$$

Применяя для данных значений  $q_1, q_2, w_1, w_2$  неравенство Гёльдера [68] к выражению для момента приращений (3), получим:

$$\langle |\delta_l X(t)|^q \rangle \leq \left( \langle |\delta_l X(t)|^{q_1} \rangle \right)^{w_1} \left( \langle |\delta_l X(t)|^{q_2} \rangle \right)^{w_2}. \quad (6)$$

После подстановки в (6) степенного выражения для моментов (4) и логарифмирования неравенство преобразуется к виду:

$$\ln K_q + \zeta_q \ln l \leq w_1 \ln K_{q_1} + w_2 \ln K_{q_2} + [w_1\zeta_{q_1} + w_2\zeta_{q_2}] \ln l. \quad (7)$$

Рассматривая большие масштабы ( $l \gg 1$ ), поделим (7) на  $\ln l > 0$  и перейдем к пределу при  $l \rightarrow \infty$ . Результирующее неравенство

$$\zeta_q \equiv \zeta_{w_1q_1+w_2q_2} \leq w_1\zeta_{q_1} + w_2\zeta_{q_2} \quad (8)$$

обозначает *выпуклость* мультифрактального спектра  $\zeta_q$  и является обратным к (5). Необходимость одновременного выполнения неравенств (5) и (8) приводит к линейной форме мультифрактального спектра  $\zeta_q$  и монофрактальным свойствам процесса. Таким образом, мультифрактальные свойства процесса могут существовать только на ограниченных масштабах  $l \ll L$ . Если же функция спектра  $\zeta_q$  не является вогнутой для всех  $q$ , а существуют как вогнутые, так и выпуклые участки (как в случае квазимультифрактального процесса, предлагаемого в данной диссертационной работе),

то аналогичные приведенным выше рассуждения показывают, что интервал масштабов  $l$ , на котором существуют мультифрактальные свойства, также должен быть ограничен снизу:  $l \gg \tau$ . Результирующий интервал масштабов получил свое название из аналогии с теорией турбулентности [29].

**Определение 7** *Интервал масштабов  $l$*

$$\tau \ll l \ll L, \quad (9)$$

*на котором степенной вид моментов приращения (4) мультифрактального процесса  $X(t)$  описывается нелинейной зависимостью масштабного показателя  $\zeta_q$  от порядка  $q$  называется инерционным интервалом. Масштаб  $\tau$  при этом носит название масштаба вязкости, а масштаб  $L$  — интегрального масштаба.*

Необходимо также указать еще одно важное свойство мультифрактального спектра монотонно неубывающего процесса  $X(t)$  со стационарными приращениями  $\delta_l X(t) \geq 0$ . Подставляя в выражение (3) равенство  $\delta_l X(t) = \delta_{l/2} X(t) + \delta_{l/2} X(t + l/2)$  и рассматривая  $q > 1$  получим:

$$M_q(l) = \langle |\delta_l X(t)|^q \rangle \geq \langle |\delta_{l/2} X(t)|^q \rangle + \langle |\delta_{l/2} X(t + l/2)|^q \rangle = 2M_q(l/2).$$

Подставляя в получившееся неравенство степенное выражение момента (4), получим окончательно, что мультифрактальный спектр  $\zeta_q$  должен удовлетворять условию:

$$\zeta_q \geq 1 \quad \text{при } q > 1. \quad (10)$$

Применяя математический аппарат, предложенный Б. Мандельбротом, Л. Кальветом и А. Фишером [59,60], область применимости данного неравенства можно расширить на класс так называемых *субординированных процессов* вида

$$X(t) = B_H[\theta(t)], \quad (11)$$

где  $B_H(t)$  — процесс дробного броуновского движения  $B_H(t)$  с показателем  $H$ , а  $\theta(t)$  — неубывающий мультифрактальный случайный процесс, который в данном случае играет роль мультифрактального времени для процесса  $X(t)$ .

## Дискретные каскадные модели

Примерами монофрактальных случайных процессов являются описанные выше самоафинные процессы такие как дробное броуновское движение, полеты Левй [69, 70] или  $\alpha$ -стабильные процессы [71]. Причем показатель самоафинности в (2) для данных процессов совпадает с коэффициентом  $H = d\zeta_q/dq$ .

Первые мультифрактальные модели основывались на так называемых каскадных правилах [27, 28], которые могут рассматриваться как обобщение понятия самоафинности. Полагая в выражении (2) показатель самоафинности  $H$  случайной величиной, можно записать данное правило для одномерного случая в виде

$$\delta_{l_1} X(t) \stackrel{d}{=} W_{l_1/l_2} \delta_{l_2} X(t), \quad (12)$$

где  $W_{l_1/l_2}$  — случайная величина, не зависящая от значений процесса  $X(t)$  и определяющаяся только отношением  $l_1/l_2$ . Так как выражение (12) может быть рассмотрено для последовательностей масштабов  $l_1, l_2, l_3, \dots$ , величина  $W_\lambda$  должна подчиняться лог-бесконечно делимому закону. В силу своей простоты широкое распространение получили так называемые мультипликативные каскадные модели, для которых были строго обоснована возможность применения мультифрактального формализма [72, 73], доказана сходимость [74], а также было предложено интегральное уравнение с самоподобным ядром для приращений процесса [75].

Простейшая лог-нормальная мультипликативная каскадная модель описывается строго квадратичным спектром

$$\zeta_q = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right) q - \frac{\lambda^2}{2} q^2. \quad (13)$$

При этом коэффициент

$$\lambda^2 = - \left. \frac{d^2 \zeta_q}{dq^2} \right|_{q=0}, \quad (14)$$

определяющий кривизну мультифрактального спектра, носит название *коэффициента перемежаемости (intermittency coefficient)*.

При всей своей простоте каскадные модели описывают широкий класс мультифрактальных спектров. Однако применение их

для описания реальных процессов весьма ограничено в силу трех существенных недостатков: (i) приращения дискретных каскадных процессов нестационарны, и поэтому они не могут являться мультифрактальными в строгом смысле; (ii) масштабная инвариантность дискретных каскадов не обладает непрерывными свойствами — условие (12) выполняется только для дискретного набора масштабов  $l_n$ ; наибольшим же препятствием в использовании моделей, основанных на каскадном правиле, является (iii) отсутствие явной зависимости от времени, т.е. данные модели не описывают процесс в полном смысле.

Следует отметить, что позднее Ж.-Ф. Музи и Э. Бакри, рассматривая мультифрактальные стационарные случайные меры, обобщили понятие каскада на непрерывный случай [32, 64, 76], избавившись от нестационарности приращений, но сохранив при этом строгие мультифрактальные масштабные свойства. Одной из попыток описания явной зависимости от времени, стали так называемые *субординированные процессы (subordinated processes)*, введенные Б. Мандельбротом, Л. Кальветом и А. Фишером [59–61].

## Мультифрактальное случайное блуждание

Первой моделью, обладающей стационарными приращениями и содержащей явную зависимость от времени стала модель *мультифрактальных случайных блужданий (Multifractal Random Walk, MRW)*, предложенная в 2000 г. Ж.-Ф. Музи, Э. Бакри и Ж. Делур [17, 18]. Авторы рассматривали непрерывный предел

$$X(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} X_{\Delta t}(t) \quad (15)$$

дискретного случайного процесса вида

$$X_{\Delta t}(t) = \sum_{k=1}^{t/\Delta t} \delta_{\Delta t} X_{\Delta t}(k\Delta t) = \sum_{k=1}^{t/\Delta t} \epsilon_{\Delta t}[k] e^{\omega_{\Delta t}[k]}, \quad (16)$$

где  $X_{\Delta t}(0) = 0$ ,  $\epsilon_{\Delta t}[k]$  — белый гауссов шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2 \Delta t$ , а  $\omega_{\Delta t}[k]$  — независимый от него коррелированный гауссов случайный процесс. Основываясь на результатах,

полученных для каскадных моделей [77, 78], в которых ковариационная функция логарифма приращений процесса убывала логарифмически, авторы предложили использовать логарифмически-коррелированный процесс  $\omega_{\Delta t}[k]$ :

$$\text{Cov} [\omega_{\Delta t}[k_1], \omega_{\Delta t}[k_2]] = \lambda^2 \ln \rho_{\Delta t} [|k_1 - k_2|], \quad (17)$$

где

$$\rho_{\Delta t}[k] = \begin{cases} \frac{L}{(|k| + 1)\Delta t} & |k| \leq \frac{L}{\Delta t} - 1; \\ 1 & |k| > \frac{L}{\Delta t} - 1, \end{cases}$$

т.е. ограничив масштаб корреляции сверху величиной  $L$ . Непосредственные вычисления, проведенные в работе [17], показывают, что на масштабах  $l \leq L$  процесс (15) обладает строгими мультифрактальными свойствами, описываемыми мультифрактальным спектром

$$\zeta_q = \left( \frac{1}{2} + \lambda^2 \right) q - \frac{\lambda^2}{2} q^2. \quad (18)$$

Отметим, что спектр (18) отличается от спектра (13), присущего лог-нормальным каскадным моделям — в то время, как первый спектр описывает нормально-диффузионные процессы ( $\zeta_2 = 1$ ), второй описывает в общем случае аномально-диффузионные ( $\zeta_2 = 2 - \lambda^2$ ). Также, как было отмечено в [17], на масштабах, существенно превышающих интегральный ( $l \gg L$ ), процесс (15) обладает монофрактальными свойствами ( $\zeta_q = q/2$ ), схожими со свойствами винеровского процесса, так, как если бы производящий шум  $\omega_{\Delta t}[k]$  был дельта-коррелированным.

Несмотря на наличие строгих мультифрактальных свойств, модель мультифрактальных случайных блужданий обладает двумя существенными недостатками, затрудняющим ее применение для описания реальных процессов. Первый недостаток состоит в том, что дисперсия производящего шума  $\omega_{\Delta t}[k]$

$$\langle (\omega_{\Delta t}[k])^2 \rangle = \lambda^2 \ln \frac{L}{\Delta t}$$

обращается в бесконечность при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Для того, чтобы обеспечить сходимость дисперсии процесса  $X(t)$  авторы положили значение среднего процесса  $\omega_{\Delta t}[k]$  также растущим по логарифмическо-

му закону:

$$\langle \omega_{\Delta t}[k] \rangle = -D [\omega_{\Delta t}[k]] = -\lambda^2 \ln \frac{L}{\Delta t}.$$

Данное решение хоть и обеспечило «физичность» дисперсии самого процесса, но затруднило интерпретацию производящих процессов  $\epsilon_{\Delta t}[k]$  и  $\omega_{\Delta t}[k]$  в приложениях.

Второй недостаток связан с тем, что расчеты показывают строгость спектра (18) для произвольного значения  $q$ . При этом, как показано в [64, 76], процесс (15) может быть представлен в субординированной форме (11), где роль мультифрактального времени  $\theta(t)$  играет лог-нормальный непрерывный мультипликативный каскадный процесс, обладающий мультифрактальным спектром (13). Таким образом, для спектра (18) процесса мультифрактального случайного блуждания должно быть справедливо неравенство (10), которое нарушается при  $q > 1/\lambda^2$ , а значит для старших моментов спектр (18) не имеет физического смысла.

## Квазимультифрактальный случайный процесс

В совместной работе А. Саичева и Д. Сорнетте [19] была предложена модель мультифрактального процесса, избавленная от недостатков каскадных моделей и модели мультифрактального случайного блуждания, описанных в предыдущей главе. Согласно предложенной в [19] модели (позднее в [79] получившей название *лог-нормальной мультифрактальной модели*) приращения  $\delta_l X(t)$  мультифрактального процесса  $X(t)$  имели следующий вид:

$$\delta_l X(t) = \int_t^{t+l} e^{\omega(t')} dt' \quad (19)$$

где  $\omega(t)$  — процесс вида

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^t \mu(t') h(t-t') dt'. \quad (20)$$

Здесь  $\mu(t)$  — белый гауссов шум, а  $h(t)$  — медленно убывающая функция ядра свертки (20), имеющая вид:

$$h(t) = \frac{h_0}{(1+t/\tau)^{\varphi+1/2}}. \quad (21)$$



Введенный в (21) масштаб  $\tau$  соответствует масштабу вязкости инерционного интервала (9).

В работах А. Саичева и В. Филимонова [20–22] было предложено обобщение монотонно растущего лог-нормального процесса (19) на случай процесса со знакопеременными приращениями. Согласно предложенной *квазимультифрактальной модели* приращения  $\delta_l X(t)$  процесса  $X(t)$  имеют вид

$$\delta_l X(t) = \int_t^{t+l} \xi(t') e^{\omega(t')} dt', \quad (22)$$

где  $\omega(t)$  — случайный процесс вида (20), ядро свертки имеет степенной вид (21) с показателем  $0 < \varphi \ll 1$ , а  $\xi(t)$  и  $\mu(t)$  — статистически независимые гауссовы белые шумы, обладающие нулевыми средними  $\langle \xi(t) \rangle = \langle \mu(t) \rangle = 0$  и корреляционными функциями

$$\langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle = D_1 \delta(t_2 - t_1) \quad (23)$$

и

$$\langle \mu(t_1) \mu(t_2) \rangle = D_2 \delta(t_2 - t_1). \quad (24)$$

Основными параметрами квазимультифрактального процесса (22) являются масштаб вязкости  $\tau$ , показатель  $\varphi$  и комбинированный параметр

$$\sigma^2 = 2D_2 \frac{h_0^2 \tau}{\varphi}. \quad (25)$$

Отметим, что квазимультифрактальный процесс (22), (20) описывается ядром (21) с  $\varphi \gtrsim 0$ , в то время как при  $\varphi = 0$  данная модель описывает мультифрактальность с параболическим спектром (18), получаемым в модели мультифрактального случайного блуждания [17, 18]. Добавка малого  $\varphi \ll 1$  в показателе степени в (21) приводит к тому, что корреляция случайного процесса  $\omega(t)$  уже не является логарифмически спадающей, что служило основной причиной возникновения мультифрактальности в модели [17, 18]. Однако как будет показано ниже, ненулевые значения показателя  $\varphi$ , тем не менее, не разрушают мультифрактальные свойства процесса  $X(t)$ .

Для отыскания мультифрактального спектра воспользуемся определением моментов приращений (3), при этом аналитический расчет моментов представляется возможным только для четных значений порядка  $q = 2m$  где  $m = 0, 1, 2, \dots$ . В работе [20] было получено

строгое выражение для моментов приращений процесса (22)

$$M_{2m}(l) = C_{2m} \int_0^l dt_1 \int_0^l dt_2 \dots \int_0^l dt_{2m} \prod_{i=1}^m \prod_{j=i+1}^m G\left(\frac{t_i - t_j}{\tau}\right), \quad (26)$$

где

$$C_{2m} = (2m - 1)!! D_1^m e^{m^2 \sigma^2 / 2},$$

и

$$G(y) = e^{\sigma^2(C(y)-1)}, \quad C(y) = \frac{2\varphi}{h_0^2 \tau} \int_0^\infty h(t)h(t + |y|\tau) dt. \quad (27)$$

Для  $\varphi < 1/2$  интеграл в последнем выражении вычисляется аналитически при помощи гипергеометрической функции  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  [68]:

$$C(y) = \pi \frac{1}{y^{2\varphi}} \frac{\Gamma(2\varphi)}{\Gamma(\varphi + \frac{1}{2})} \sec(\varphi\pi) + \frac{1}{\varphi - \frac{1}{2}} \frac{1}{(y+1)^{\varphi+1/2}} {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2} + \varphi; \frac{3}{2} - \varphi; \frac{1}{y+1}\right). \quad (28)$$

Полученные выражения для моментов приращений (26) позволяют определить мультифрактальный спектр исследуемого процесса  $X(t)$ . Значения масштабных показателей нулевого и второго порядка тривиально:

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_2 = 1,$$

для определения значений мультифрактального спектра высшего порядка воспользуемся понятием *локального масштабного показателя*.

**Определение 8** *Локальным масштабным показателем порядка  $q$  случайного процесса  $X(t)$  со стационарными приращениями  $\delta_l X(t)$  называется функция*

$$\zeta_q(l) = \frac{d \ln M_q(l)}{d \ln l} \equiv \frac{l}{M_q(l)} \frac{dM_q(l)}{dl}, \quad (29)$$

где  $M_q(l)$  — момент приращений (3).

Фактически, локальный масштабный показатель описывает степенную зависимость момента приращений вида

$$M_q(l) = K_q l^{\zeta_q(l)},$$

который отличается от (4) наличием зависимости масштабного показателя  $\zeta_q$  от масштаба  $l$ . Вводя безразмерное время и применяя определение (29) к (26) можно получить следующее выражение для  $\zeta_q(y) \equiv \zeta_q(l/\tau)$  [20] :

$$\zeta_{2m}(y) = \frac{1}{1 - \Delta_m(y)}, \quad (30)$$

где

$$\Delta_m(y) = \frac{\Psi_m(y)}{y}, \quad \Psi_m(y) = \int_0^y x G_m(x) dx \cdot \left\{ \int_0^y G_m(x) dx \right\}^{-1}. \quad (31)$$

и

$$G_m(x) = G(x) \int_0^x dx_1 \dots \int_0^x dx_{m-2} \prod_{i=1}^{m-2} G(x_i) G(x - x_i) \prod_{j=i+1}^{m-2} G(x_i - x_j). \quad (32)$$

Выражение (30), справедливое при  $m > 1$ , позволяет получить для квазимультифрактального процесса (22) ограничение на локальные масштабные показатели, аналогичное выражению (10). Учитывая неотрицательность функций  $G_m(y)$  и, соответственно, неотрицательность  $\Delta_m(y) \geq 0$  можно записать следующее неравенство для  $\zeta_q(y)$ :

$$\zeta_q(y) \geq 1 \quad \text{при } q \geq 2. \quad (33)$$

Заметим также, что для функции  $G(y)$  заданной выражением (27), локальные масштабные показатели  $\zeta_{2m}(y)$  имеют монофрактальные асимптоты при  $y \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow \infty$ , а именно, можно показать, что:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \zeta_{2m}(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \zeta_{2m}(y) = m. \quad (34)$$

Данные асимптотики означают существенную немонотонность функций  $\zeta_{2m}(y)$ , поскольку очевидно, что  $\zeta_{2m}(y) \neq \text{const}$ , и равенство (4) не может быть выполнено строго. Невозможность строгого выполнения равенства (4), однако, не говорит об отсутствии мультифрактальных свойств процесса  $X(t)$ . Так эмпирические данные всегда содержат шумовую составляющую и самоафинные свойства реальных процессов проявляются только на конечном и зачастую достаточно малом диапазоне масштабов [80, 81]. При этом анализ процесса  $X(t)$  показывает существование достаточно продолжительной области масштабов, на которых зависимость  $M_q(l)$  может быть

аппроксимирована чисто степенной зависимостью (4). Для определенных значений параметров  $\sigma^2$  и  $\varphi$ , данная область масштабов может составлять несколько порядков, что позволяет говорить о существовании инерционного интервала и ввести понятие *квазимультифрактального процесса*.

**Определение 9** Будем называть процесс  $X(t)$  обладающим квазимультифрактальными свойствами, если зависимость момента приращений (3) от масштаба  $l$  можно в некотором смысле (едином для всех порядков  $q$ ) аппроксимировать зависимостью

$$\tilde{M}_q(l) = K_q l^{\tilde{\zeta}_q} \quad (35)$$

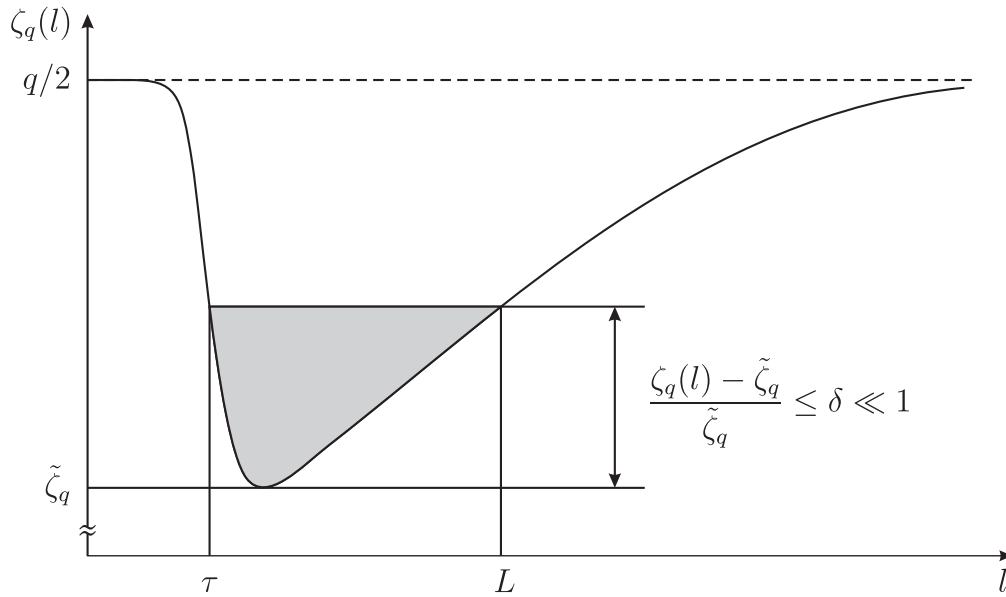
на введенном ранее инерционном интервале (9). Здесь  $\tilde{K}_q$  и  $\tilde{\zeta}_q$  — некоторые постоянные величины, зависящие от порядка момента  $q$ . Величины  $\tilde{\zeta}_q$  назовем эффективными масштабными показателями. Спектром квазимультифрактального процесса в таком случае будем называть зависимость  $\tilde{\zeta}_q$  от порядка  $q$ .

Наиболее адекватным способом определения эффективного масштаба, представляется метод, учитывающий особенность поведения локального показателя  $\zeta_q(l)$  на инерционном интервале вдали от границ ( $\tau \ll l \ll L$ ), т.е. на масштабах, на которых процесс носит существенно мультифрактальный характер [20]. В данной области масштабов зависимость  $\zeta_q$  от  $l$  имеет единственный экстремум (минимум), причем величина этого минимума существенно зависит от параметров процесса  $\varphi$  и  $\sigma^2$  (примерный вид функции  $\zeta_q(y)$  приведен на рис. 1). Отметим, что данный минимум является единственным на всем диапазоне масштабов  $0 < l < +\infty$ , что позволяет использовать его для определения не только эффективных масштабных показателей, но и самих величин масштаба вязкости и интегрального масштаба для квазимультифрактального процесса.

**Определение 10** Будем называть эффективным масштабным показателем величину абсолютного минимума функции  $\zeta_q(l)$ :

$$\tilde{\zeta}_q = \min_l \zeta_q(l). \quad (36)$$

При этом инерционный интервал можно определить как интервал масштабов, на котором относительная погрешность аппроксимации кривой  $\zeta_q(l)$  значением  $\tilde{\zeta}_q$  не превышает заданную величину



**Рис. 1.** К определению эффективного масштабного показателя и инерционного интервала квазимультифрактального процесса

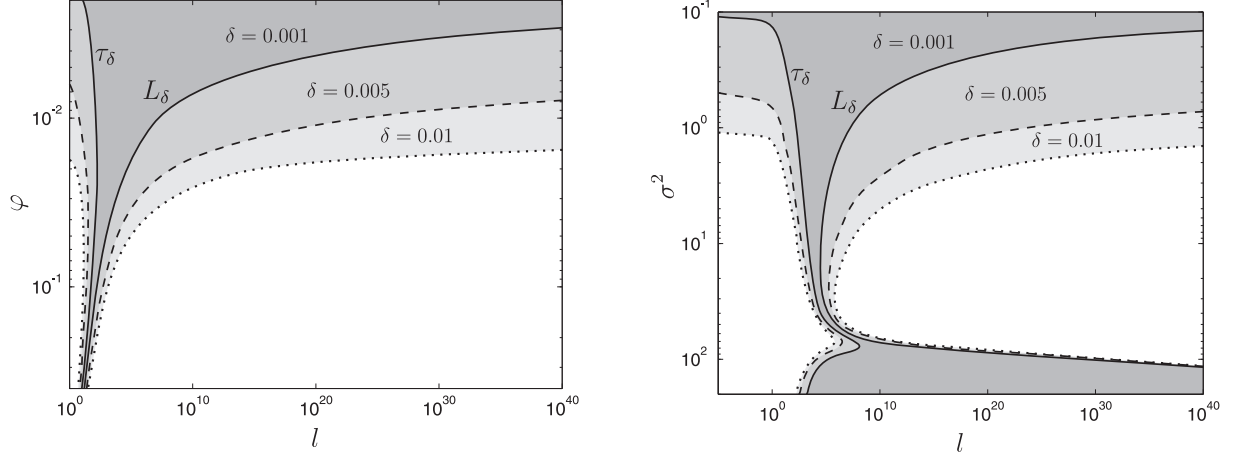
$\delta \ll 1$  (рис. 1):

$$\frac{\zeta_q(l) - \tilde{\zeta}_q}{\tilde{\zeta}_q} \leq \delta. \quad (37)$$

Графики зависимости инерционного интервала от параметров процесса представлены на рис. 2. Из графиков видно, что инерционный интервал, определенный с погрешностью 0.5% может занимать до 40 порядков и более при  $\varphi \leq 0.01$  и уменьшается до 3-4 порядков при  $\varphi = 0.1$ . При  $\varphi > 0.5$  инерционный интервал становится незначительным, простираясь на масштабах  $l$  менее одного порядка. Другими словами, чем сильнее мультифрактальные свойства процесса, тем уже инерционный интервал масштабов, в котором эти свойства проявляются.

Однако описанная выше зависимость не является монотонной. При больших значениях  $\sigma^2$  может наступать эффект «насыщения» локальных показателей. Согласно неравенству (33) локальные показатели порядка  $q > 2$  не могут быть меньше 1, поэтому при увеличении параметров  $\sigma^2$  или  $\varphi$ , сопровождающимся уменьшением эффективного масштабного показателя  $\tilde{\zeta}_q$ , при некоторых значениях параметров наступает момент, когда значение  $\tilde{\zeta}_q$  становится равным 1, после чего дальнейшее увеличение параметров сопровождается уширением области инерционного интервала.

Зная вид локальных показателей  $\zeta_q(y)$  для различных  $q$ , мож-



**Рис. 2.** Графики зависимостей инерционного интервала  $\tau_\delta < l < L_\delta$  квазимультифрактального случайного процесса  $X(t)$  от параметра  $\varphi$  для  $\sigma^2 = 1$  (слева) и от параметра  $\sigma^2$  для  $\varphi = 0.01$  (справа) для различных значений  $\delta$  и  $q = 4$

но получить вид мультифрактального спектра используя определение (36). На рис. 3 кружками изображены дискретные отсчеты спектра полученные в результате численных расчетов. Из графика видно, что при изменении параметра  $\sigma^2$  спектр процесса в заданном диапазоне порядков  $0 \leq q \leq 20$  меняется от практически линейного  $\tilde{\zeta}_q = q/2$  при  $\sigma^2 = 0.1$  до существенно нелинейного при  $\sigma^2 \sim 5$ . Также следует отметить, что при  $q \rightarrow \infty$  спектр  $\tilde{\zeta}_q$  обладает асимптотикой  $\tilde{\zeta}_q = 1$ .

Полученные спектры могут быть аппроксимированы с помощью следующей универсальной функции:

$$\tilde{\zeta}_q = \frac{q}{2} + \left(1 - \frac{q}{2}\right) \Lambda^2 \left( \frac{k_0 \sigma^2 q}{\left(1 + (\varphi_0/\varphi)^a\right)^{1/a}} \right), \quad (38)$$

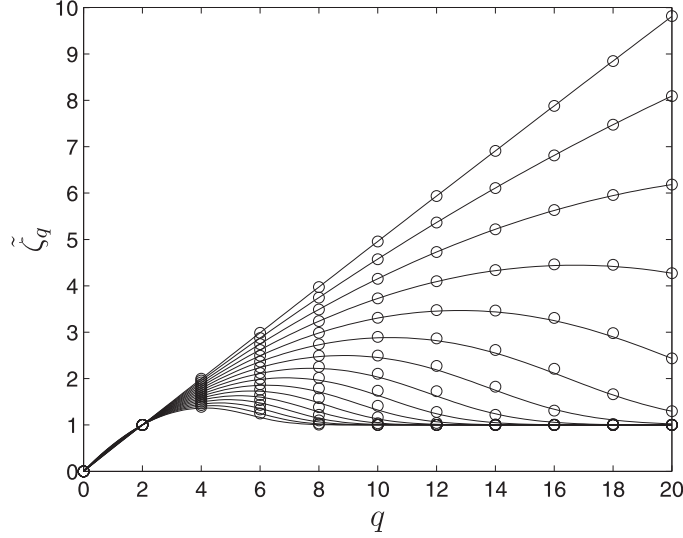
где

$$\Lambda^2(x) = \frac{x}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x - (1 - \nu)}{\varkappa} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x - (1 + \nu)}{\varkappa} \right) \right]. \quad (39)$$

и

$$\varkappa = 0.2, \quad \nu = 0.01, \quad k_0 = 0.068, \quad \varphi_0 = 0.137, \quad a = 0.783. \quad (40)$$

Для рассмотрения реализаций изучаемого процесса, дискретизуем модель (22). Назовем дискретным квазимультифрактальным



**Рис. 3.** График квазимультифрактальных спектров  $\tilde{\zeta}_q$  процесса  $X(t)$  для  $\varphi = 0.03$  и  $\sigma^2 = 0.1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15$  (сверху-вниз) рассчитанных строго (кружки) и полученных из универсального выражения (38) (сплошные линии)

процессом последовательность случайных величин  $X_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , такую, что [21, 22]:

$$X_n = \nu \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i e^{\omega_i}, \quad (41)$$

причем  $\xi_i$  и  $\omega_i$  — независимые стационарные гауссовы случайные процессы, обладающие нулевыми средними и корреляционными матрицами

$$\{\mathbb{B}_\xi\}_{i,j} \equiv \langle \xi_i \xi_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad \{\mathbb{B}_\omega\}_{i,j} \equiv \langle \omega_i \omega_j \rangle = \frac{\sigma^2}{4} C(|i - j|), \quad (42)$$

где  $\delta_{i,j}$  — символ Кроннекера [68], а функция  $C(y)$  задается выражением (27). На рис. 4–5 представлены реализации процесса  $X_n$  для параметров  $\nu = 1$ ,  $\varphi = 0.01$  и  $\sigma^2 = 0.1; 5; 10; 20; 50; 100$ . Кроме того, на рисунке приведены графики реализаций нормированных приращений процесса

$$d_n \equiv \frac{1}{\nu} (X_{n+1} - X_n) = \xi_n e^{\omega_n}. \quad (43)$$

При фиксированном  $\varphi$  и малых значениях параметра  $\sigma^2$  амплитуда  $\omega_n$  в (43) мала, а соответственно, мала и корреляция приращений  $d_n$ . Результирующий процесс  $X_n$  при этом обладает практически монофрактальными свойствами. Так, процесс  $d_n$  на рис. 4а

представляет собой практически белый гауссов шум, а  $X_n$ , — соответственно, винеровский процесс. Данному случаю отвечает практически линейный спектр на рис. 3.

С ростом  $\sigma^2$  мультифрактальные свойства процесса начинают проявляться сильнее. Внешне это проявляется в наличии резких «фронтов» процесса  $X_n$ , нетипичных для винеровского процесса (рис. 4b). На графиках  $d_n$  это проявляется в появлении нерегулярной структуры приращений — перемежаемости участков с большой и малой дисперсиями (*эффекта кластеризации волатильности (volatility clustering)* [2]). С дальнейшим увеличением параметра  $\sigma^2$  усиливается перемежаемость структуры приращений, а вместе с ней и «изломанность» реализаций  $X_n$  (рис. 4c,d). Со спектральной точки зрения увеличение  $\sigma^2$  приводит к росту кривизны мультифрактальных спектров (рис. 3).

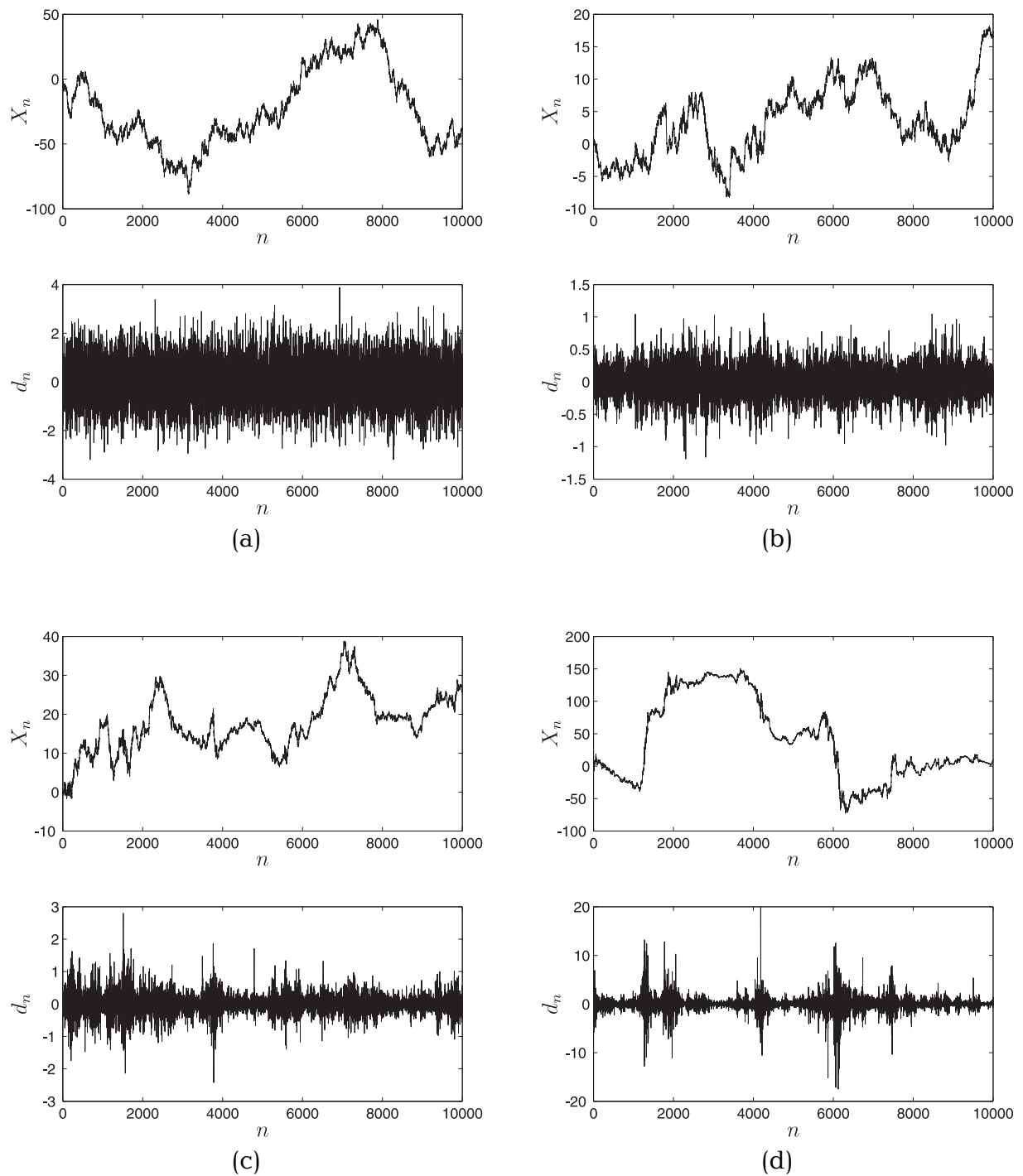
Увеличение  $\sigma^2$  также сопровождается появлением значительного количества аномально больших приращений  $d_n$ , приводящих к значительным «скачкам» процесса  $X_n$ . Наличие перемежаемости при этом приводит к тому, что при больших значениях  $\sigma^2$  приращения  $d_n$  становятся похожими на некоторый импульсный процесс, а  $X_n$  — на обобщенный телеграфный процесс (рис. 5). Мультифрактальный спектр при этом становится сильно нелинейным — максимум  $\zeta_q$  сдвигается к значениям  $q = 2 - 3$ , и уже при  $q = 4 - 6$  спектр  $\zeta_q$  выходит на асимптотику  $\zeta_q = 1$ . При еще большем увеличении  $\sigma^2$ , когда приращения представляют собой набор импульсов, спектр практически утрачивает максимум, сразу же выходя на асимптотическое значение.

Как было отмечено выше, важным параметром, определяющим динамику мультифрактальных процессов является коэффициент перемежаемости  $\lambda^2$  (14), который в случае квазимультифрактального процесса (22) со спектром (39) равен

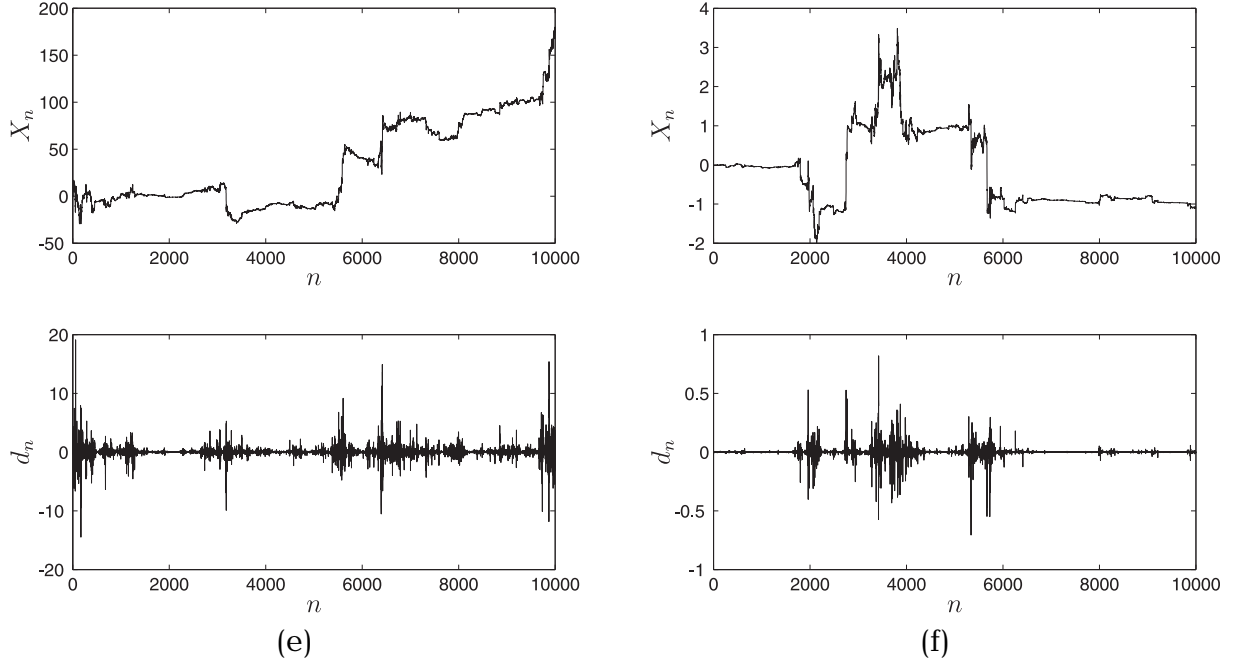
$$\lambda^2 = \frac{1}{4} \Lambda^2 \left( \frac{4k_0\sigma^2}{\left(1 + (\varphi_0/\varphi)^a\right)^{1/a}} \right), \quad (44)$$

Значения  $\lambda^2$ , соответствующие параметрам процессов, изображенных на рис. 4–5 равны соответственно  $\lambda^2 = 0.0004; 0.021; 0.043; 0.085; 0.211; 0.25$ . На основании значения коэффициента перемежаемо-





**Рис. 4.** Реализации дискретного квазимультифрактального процесса  $X_n$  и его приращений  $d_n$  для  $\varphi = 0.01$  и  $\sigma^2 = 0.1$  (a),  $\sigma^2 = 5$  (b),  $\sigma^2 = 10$  (c) и  $\sigma^2 = 20$  (d)



**Рис. 5.** Реализации дискретного квазимультифрактального процесса  $X_n$  и его приращений  $d_n$  для  $\varphi = 0.01$  и  $\sigma^2 = 50$  (e) и  $\sigma^2 = 100$  (f)

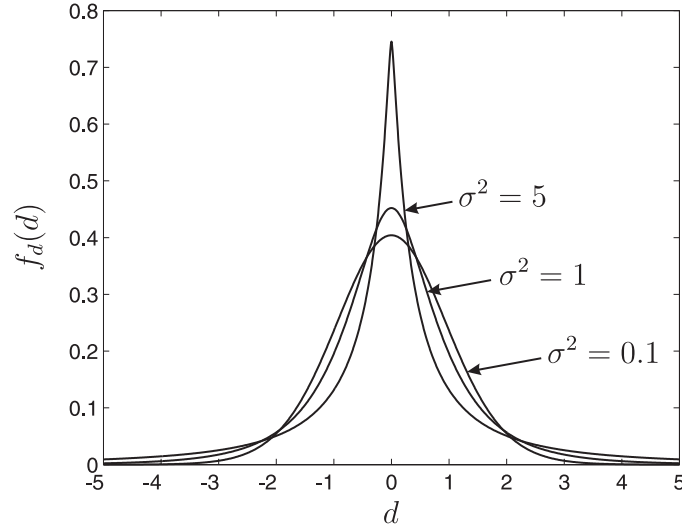
сти, разнообразие динамики квазимультифрактального процесса можно подразделить на три различных режима:

- *слабо мультифрактальный* ( $\lambda^2 \lesssim 0.02$ ), в котором свойства квазимультифрактального процесса близки к свойствам винеровского процесса;
- *умеренно мультифрактальный* ( $0.02 \lesssim \lambda^2 \lesssim 0.2$ ), в котором проявляется эффект перемежаемости и плотность вероятности становится существенно негауссовой;
- *сильно мультифрактальный* ( $0.2 \lesssim \lambda^2 \leq 0.25$ ), в котором доминирующую роль в динамике процесса играют «скачки» процесса, вызванные тяжелыми хвостами плотности вероятности.

Наличие больших «выбросов» у приращений говорит о существенной негаусовости вероятностного распределения  $d_n$ . Строгое выражение для функции распределения приращений дискретного квазимультифрактального процесса 41 имеет вид:

$$f_d(d) = \frac{1}{\pi\sigma} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{d^2 t^2}{2} - 2\frac{\ln^2 t}{\sigma^2}\right) dt. \quad (45)$$

На рис. 6 представлен вид плотности вероятности (45) для различных значений  $\sigma^2$ . Видно, что в то время как при  $\sigma^2 = 0.1$  форма кривой функции распределения близка к нормальной, с увеличением же параметра  $\sigma^2$  форма графика становится все более отличной от гауссовой. График плотности вероятности (45), построенный в ло-



**Рис. 6.** Функция распределения приращений  $d$  дискретного квазимультifrактального процесса (41) для  $\varphi = 0.01$  и  $\sigma^2 = 0.1; 1; 5$

гарифмическом масштабе 7, подтверждает наличие у приращений  $d_n$  процесса  $X_n$  тяжелых хвостов плотности вероятности. В частности, из графиков виден практически степенной закон функции распределения  $f(d) \sim d^{-\alpha}$  при  $\sigma^2 > 10$ , сохраняющийся на интервале достаточно продолжительном интервале значений  $d$ .

Переमेжаемость реализаций приращений является следствием длинной памяти  $d_n$ . Следует отметить, что дельта-коррелированность приращений

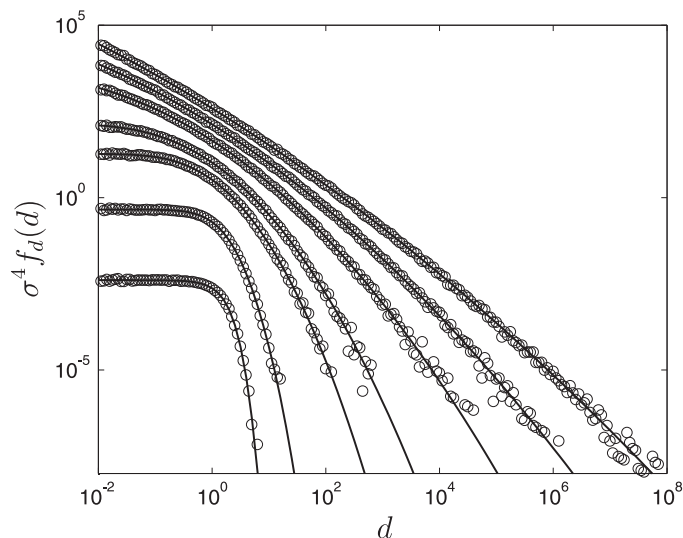
$$\langle d_n d_m \rangle = e^{\sigma^2/2} \delta_{n,m}$$

не говорит об отсутствии памяти. Наличие медленно спадающих хвостов высших моментных функций, таких как, например, корреляция квадратов приращений

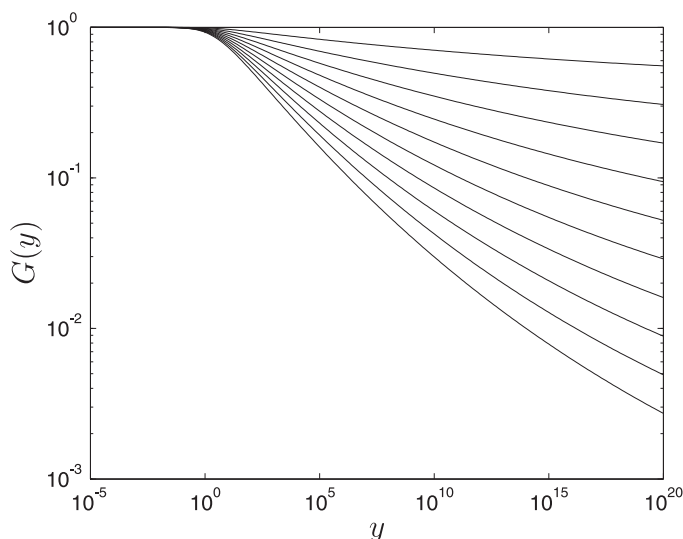
$$\langle d_n^2 d_m^2 \rangle = e^{2\sigma^2} G(|n - m|),$$

где функция  $G(y)$  задана выражением (27), свидетельствует о наличии длительного последействия у процесса  $d_n$  (рис. 8).

Как видно из приведенного анализа, модель квазимультifrактального случайного процесса качественно описывает все основ-



**Рис. 7.** Графики плотностей вероятности  $\sigma^4 f_d(d)$  приращений квазимультифрактального процесса (41) для  $\varphi = 0.01$  и  $\sigma^2 = 0.1; 1; 5; 10; 25; 50; 100$  (снизу–вверх), полученные из аналитического выражения (45) (сплошные линии) и из обработки результатов численного моделирования (кружки)



**Рис. 8.** График функции  $G(y)$  для значений  $\varphi = 0.01$  и  $\sigma^2 = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$  (сверху–вниз)

ные эмпирические закономерности, присущие ценам реальных финансовых рынков. Однако финансовая интерпретация модели (22) или (41) достаточно затруднена. Как и модель мультифрактального случайного блуждания, квазимультифрактальная модель принадлежит к классу моделей стохастической волатильности. Однако в то время как эндогенные авторегрессионные модели стохастической волатильности обладают только одним внешним шумовым источником ( $\xi(t)$ ), моделирующим эффективный «поток новостей»,

описанные выше экзогенные мультифрактальные модели требуют наличие второго шумового источника ( $\omega(t)$ ) для описания волатильности, финансовый смысл которого неясен. Необходимо также отметить, что описание «эффекта рычага» в моделях мультифрактального случайного блуждания и квазимультифрактальной модели требует модификации последних, а именно — введения искусственной корреляции между процессами  $\xi(t)$  и  $\omega(t)$ , еще более усложняющей интерпретацию.

## Самовозбуждающийся мультифрактальный процесс

Как уже было отмечено, общей характеристикой всех существующих мультифрактальных моделей, описывающих явную зависимость процесса от времени (субординированных мультифрактальных моделей [59, 60], модели мультифрактальных случайных блужданий [17, 18] и ее обобщения — лог-бесконечно делимого мультифрактального процесса [64] и квазимультифрактальной модели [19, 20]) является отсутствие явно заданного последствия в описании процесса, а длинная память процесса моделируется медленно спадающей корреляционной функцией одного из шумовых источников, входящих в модель. Для описания эндогенной природы финансовых рынков В. Филимоновым и Д. Сорнетте был предложен *самовозбуждающийся мультифрактальный процесс* [25], являющийся развитием квазимультифрактального процесса (22). В дискретной форме приращения  $d_n = X_n - X_{n-1}$  самовозбуждающегося мультифрактального процесса  $X_n$  имеют вид

$$X_n = \sum_{i=0}^n d_i, \quad d_i = \sigma \xi_i \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma} \sum_{j=0}^{i-1} d_j h_{i-j-1} \right\}, \quad (46)$$

где  $\xi_i$  — дискретный случайный процесс, в частном случае представляющий собой последовательность независимых гауссовых случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями,  $\sigma$  — масштабный коэффициент, играющий роль амплитуды  $\xi_i$ , а  $h_i$  — некоторое ядро, отвечающее за память процесса. В настоя-

щей работе рассматривались следующие функции ядра: степенное

$$h_n = h_0 n^{-\varphi-1/2}, \quad (47)$$

экспоненциальное

$$h_n = h_0 e^{-\varphi n} \quad (48)$$

и тривиальное

$$h_n = h_0. \quad (49)$$

Естественным обобщением дискретной модели (46) на случай непрерывного процесса может выступать решение  $X(t)$  следующего стохастического интегро-дифференциального уравнения:

$$dX(t) = \sigma \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^t h(t-t') dX(t') \right\} dW(t), \quad (50)$$

где  $h(t)$  — функция-ядро, описывающее память системы, а через  $dW(t)$  обозначены приращения обычного винеровского процесса. В отличие от (46), в выражении (50) нижний предел в интеграле равен минус бесконечности для удобства математического описания. Для рассмотрения конечной нестационарной реализации можно не ограничивая общности положить  $X(t) = dX(t) = 0$  при  $t < 0$ .

В модели (46) процесс  $\xi_i$  представляет собой некоторый внешний экзогенный шум, воздействующий на систему, а ядро  $h_i$  — внутреннюю эндогенную реакцию системы на совокупность внешнего воздействия и собственной предыстории. Будучи развитием квазимультифрактальной модели, самовозбуждающийся мультифрактальный процесс также может рассматриваться как простейшее мультифрактальное обобщение ARCH/GARCH моделей. С другой стороны, данная модель может быть рассмотрена также и как развитие упрощенной (зависящей только от времени) «мультифрактальной модели возбуждения напряжений» (*Multifractal Stress Activation, MSA*) [35, 36], предложенной для описания последовательностей землетрясений и порожденных ими «афтершоков». При этом процесс  $\xi_i$ , имеющий в геофизических приложениях смысл амплитуды первичных толчков, при описании финансовых временных рядов может интерпретироваться как некоторый эффективный «поток новостей».

Следует отметить, что и модель мультифрактальных случайных блужданий и квазимультифрактальные модели накладывали стро-

гие ограничения на вид ядра  $h(t)$  процесса. Так, в модели случайных блужданий (15) ядро имело вид  $h(t) \sim 1/\sqrt{t}$  на интегральном масштабе и  $h(t) = 0$  вне его. При этом, быстрое спадание ядра  $h(t)$  разрушает мультифрактальные свойства процесса, а более медленное — лишает процесс физического смысла. Квазимультифрактальная модель (22) описывается степенным ядром (21) и существует для  $\varphi > 0$ , при этом, как показывают расчеты, процесс обладает нетривиальными мультифрактальными свойствами на достаточно продолжительном инерционном интервале только при  $\varphi \ll 1$  (рис. 2). Тем временем, самовозбуждающийся мультифрактальный процесс, несмотря на схожесть выражений (41) и (46), сохраняет определенность для произвольного невозрастающего ядра. В частности, для предельного случая  $h(t) = h_0$  можно найти строгое решение стохастического дифференциального уравнения (50) [25]:

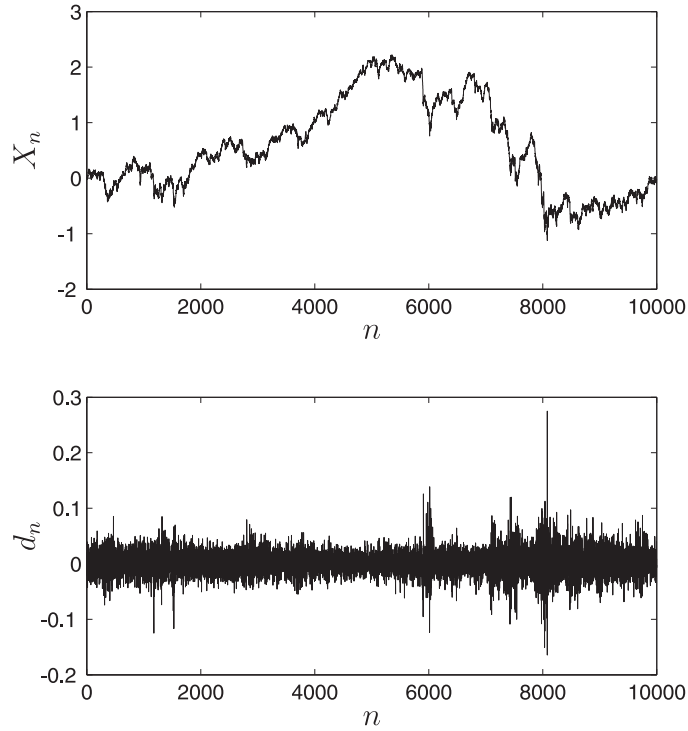
$$X(t) = \frac{\sigma}{h_0} \ln [h_0 B_2(t)]. \quad (51)$$

Процесс  $B_2(t)$  не обращается в бесконечность на конечном интервале времени, и, кроме того, строго положителен для всех  $t > 0$ , поэтому процесс  $X(t)$  является ограниченным по модулю на произвольном конечном интервале.

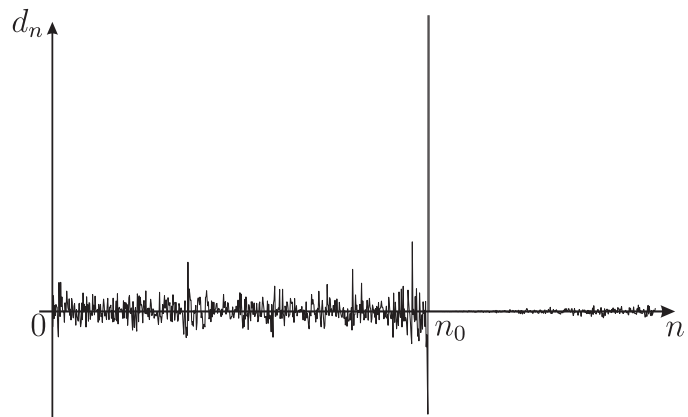
На рис. 9 приведен пример реализации самовозбуждающегося мультифрактального процесса со степенным ядром (47). Из графика видна значительная перемежаемость приращений, являющаяся следствием длинной памяти процесса. Следует отметить, что несмотря на отсутствие конечно-временной сингулярности, проиллюстрированное выше для предельного случая постоянного ядра, при некоторых условиях реализации процесса могут обладать значительными «всплесками» значений приращений, приводящим к последующему сильному уменьшению их амплитуды на достаточно продолжительном интервале (рис. 10). Причиной описанных «всплесков» является последовательность отрицательных значений внешнего шума  $\xi_n$  («негативных новостей»), приводящая к росту показателя экспоненты

$$\omega_n = -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=0}^{n-1} d_i h_{n-i-1} \quad (52)$$

в выражении для приращений процесса (46). Первый после данной последовательности положительный отсчет шума  $\xi_{n_0}$  приводит



**Рис. 9.** Реализации самовозбуждающегося мультифрактального процесса  $X_n$  со степенным ядром (47) и его приращений  $d_n$  для  $\sigma = 1$ ,  $\varphi = 0.01$  и  $h_0 = 0.05$



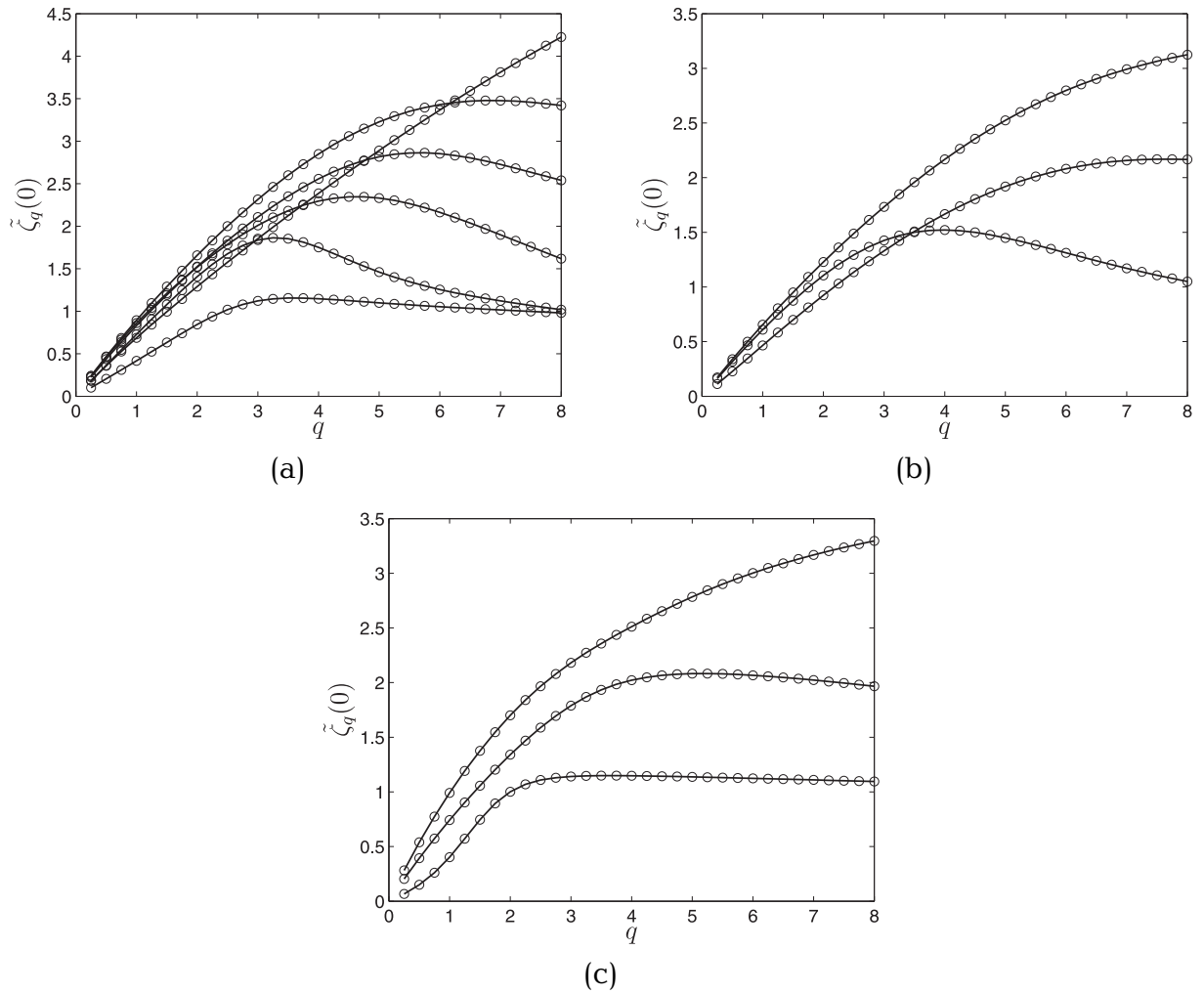
**Рис. 10.** Иллюстрация «всплеска» приращений самовозбуждающегося мультифрактального процесса (46)

к большому положительному «всплеску»  $d_{n_0} = \xi_{n_0} e^{\omega_{n_0}}$ . Вследствие большой амплитуды данное слагаемое будет доминировать в сумме (52) на протяжении интервала времени, длительность которого определяется скоростью спада функции-ядра  $h_n$ . Следует отметить, что вследствие несимметричности экспоненциальной обратной связи в (46), последовательность положительных отсчетов шума  $\xi_n$  не приводит к росту показателя  $\omega_n$  и отрицательному «всплеску» приращений. Данная асимметрия является родствен-



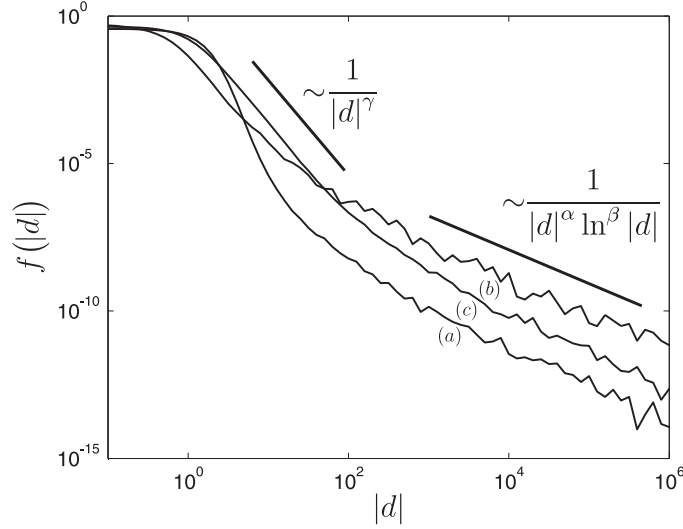
ной описанному ранее «эффекту рычага».

В общем случае приращения самовозбуждающегося мультифрактального процесса (46) являются нестационарными. Несмотря на невозможность использования при этом классического определения мультифрактального спектра (4), данное определение можно обобщить, рассматривая масштабные показатели, зависящие от времени. На рис. 11 изображены полученные при помощи численного моделирования ансамбля из  $M = 10^8$  реализаций графики квазимultiфрактальных спектров процесса для трех различных типов ядра  $h_n$ . Как видно из рис. 11, самовозбуждающийся



**Рис. 11.** Графики квазимultiфрактальных спектров процесса  $X_n$  для  $\sigma = 1$  и (a) степенного ядра (47) с  $\varphi = 0.1$  и  $h_0 = 0.1; 0.12; 0.14; 0.16; 0.18; 0.2$  (сверху-вниз), (b) экспоненциального ядра (48) с  $\varphi = 0.1$  и  $h_0 = 0.04; 0.06; 0.08$  (сверху-вниз) и (c) постоянного ядра (49) с  $h_0 = 0.08; 0.1; 0.2$  (сверху-вниз)

ся мультифрактальный процесс описывает широкий диапазон мультифрактальных спектров — от практически монофрактального



**Рис. 12.** График функции распределения приращений процесса  $X_n$  для  $\sigma = 1$  и (a) степенного ядра (47) с  $\varphi = 0.1$  и  $h_0 = 0.1$ , (b) экспоненциального ядра (48) с  $\varphi = 0.01$  и  $h_0 = 0.1$  и (c) постоянного ядра (49) с  $h_0 = 0.02$

(при  $h_0 = 0.1$  и степенном ядре (47)) до сильно мультифрактального (при  $h_0 > 0.15$ ). Следует еще раз подчеркнуть, что сложная экспоненциальная обратная связь в (46) приводит к нетривиальным мультифрактальным свойствам процесса, даже в случае использования быстрого спадающего экспоненциального ядра (48).

Упомянутая выше сложная экспоненциальная обратная связь также имеет следствием наличие тяжелых хвостов функции распределения приращений  $f_d(d)$ . Рис. (12) иллюстрирует вид эмпирической плотности вероятности величины  $d_N$  для  $N = 10^3$ , полученной при помощи численного моделирования  $M = 10^8$  реализаций самовозбуждающегося мультифрактального процесса с ядрами различного вида. На представленных графиках можно выделить три различных области — область плато при малых значениях  $d$ , промежуточную асимптотику и тяжелый хвост распределения. Практически постоянное плато при  $d \lesssim \sigma$  является следствием тяжелого, почти степенного хвоста отрицательной ветви функции распределения показателя  $\omega_n$  (52). Промежуточная асимптотика при  $2\sigma \lesssim d \lesssim 20\sigma$  функции распределения  $f_d(d)$  имеет степенной вид

$$f_d(d) \sim \frac{1}{d^\gamma}, \quad (53)$$

где  $2 \lesssim \gamma \lesssim 6$ , а тяжелый хвост на всем диапазоне рассмотренных значений  $200\sigma \lesssim d \lesssim 10^6\sigma$  может быть аппроксимирован выраже-

нием

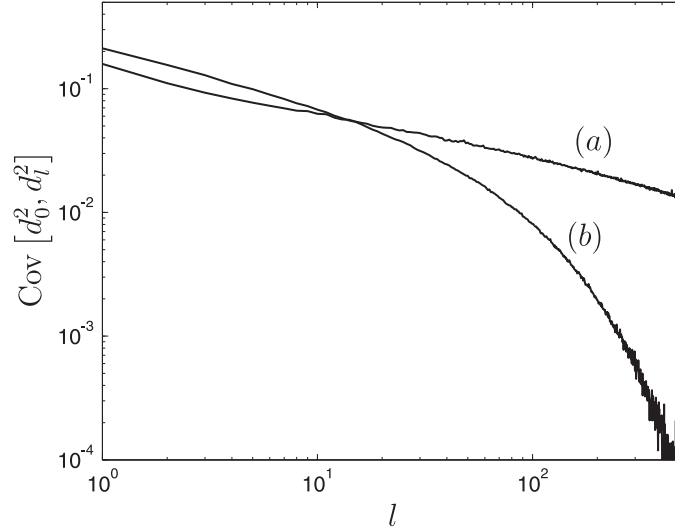
$$f_d(d) \sim \frac{1}{d^\alpha \ln^\beta d}, \quad (54)$$

где  $\alpha \sim 1$  и  $\beta \sim 2$ . Конкретные значения  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  зависят от вида функции  $h_n$  в (46). Например, для степенного ядра (47) и  $\sigma = 1$ ,  $\varphi = 0.01$  и  $h_0 = 0.3$  значения показателей асимптотик:  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 3.3$  и  $\gamma = 3.8$ . Получаемые значения показателя промежуточной асимптотики  $\gamma$  хорошо согласуются с эмпирическими функциями распределения величины прибыльности в теории финансовых рынков, где асимптотика функции  $f_d(d)$  в диапазоне  $0.01 \leq d \leq 0.2$  описывается степенным законом (53) с показателем  $3 \leq \gamma \leq 5$  [2, 3]. Таким образом значение параметра  $\sigma$  для финансовых приложений модели (46) составляет  $\sigma \approx 0.01$ . Тяжелый хвост (54), отвечающий так называемому «*dragon-king*» режиму [82], является следствием описанных выше «всплесков» приращений (рис. 10).

Аналогично квазимультифрактальному процессу и процессу мультифрактальных случайных блужданий нетривиальные свойства масштабной инвариантности самовозбуждающегося мультифрактального процесса (46) являются проявлением длинной, близкой к степенной памяти процесса. При этом, как и в случае других моделей, приращения процесса являются дельта-коррелированными ( $\langle d_n d_{n+l} \rangle = 0$ ), а длительное последствие отражается в моментных функциях высших порядков, в частности, в коэффициенте ковариации квадратов приращений

$$\text{Cov} [d_n^2, d_{n+l}^2] = \frac{\langle d_n^2 d_{n+l}^2 \rangle - \langle d_n^2 \rangle \langle d_{n+l}^2 \rangle}{\sqrt{\langle d_n^4 \rangle - [\langle d_n^2 \rangle]^2} \sqrt{\langle d_{n+l}^4 \rangle - [\langle d_{n+l}^2 \rangle]^2}}. \quad (55)$$

При проведении численного моделирования удобно вычислять (55) с использованием условных средних с условием  $|d_n| < d_{\max}$ , в которых учитываются только реализации, не содержащие «выбросов» — приращений больше некоторой заданной величины  $d_{\max}$ . Тем самым исключаются редкие реализации, отвечающие тяжелому хвосту (54) функции распределения, существенно усложняющие вычисление средних. На рис. 13 приведены примеры коэффициентов ковариации самовозбуждающегося процесса со степенным и экспоненциальным ядрами, полученные при помощи численного моделирования ансамбля из  $M = 10^8$  реализаций при  $d_{\max} = 10^4$ .



**Рис. 13.** График коэффициента ковариации (55) самовозбуждающегося мультифрактального процесса (46) для  $\sigma = 1$  и (a) степенного ядра (47) с  $\varphi = 0.01$  и  $h_0 = 0.08$  и (b) экспоненциального ядра (48) с  $\varphi = 0.01$  и  $h_0 = 0.05$

Результаты расчетов показывают, что, что форма коэффициента ковариации совпадает с формой ядра процесса — приращения процесса со степенным ядром (47) обладают степенной ковариационной функцией, а с экспоненциальным (47) — экспоненциальной.

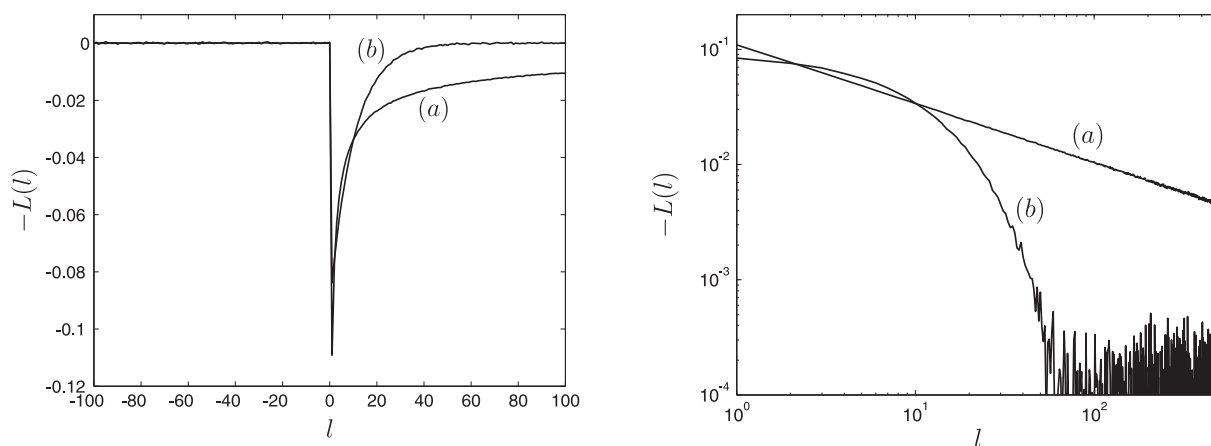
Отличительным свойством самовозбуждающегося мультифрактального процесса является возможность количественного описания в рамках модели упомянутого выше «*эффекта рычага*» — асимметрии корреляционной функции приращений процесса  $d_n$  и их абсолютных значений  $|d_n|$ . Данный эффект заключается в отрицательной корреляции прошлых приращений  $d_n$  и их будущих абсолютных значений  $|d_m|$ ,  $m > n$ , при практически полном отсутствии корреляции предшествующих модулей приращений  $|d_n|$  и последующих значений  $d_n$ . Количественно «*эффект рычага*» описывается при помощи функции

$$L(l) = \frac{\langle d_n d_{n+l}^2 \rangle}{[\langle d_n^2 \rangle]^{3/2}}, \quad (56)$$

которая должна равняться нулю для  $l < 0$  и быть отрицательной для  $l > 0$ . Согласно эмпирическим данным [5] функция  $L(l)$  при  $l > 0$  имеет быстро спадающий экспоненциальный характер для финансовых индексов. Для индивидуальных акций авторы работы [5] также делают вывод об экспоненциальной зависимости  $L(l)$ , однако следует отметить, что большая зашумленность анализиру-

емых данных позволяет говорить также о степенной аппроксимации.

На рис. (14) представлен график функции  $L(l)$  для самовозбуждающегося мультифрактального процесса. Из рисунка видно, что функция  $L(l)$  асимметрична и имеет вид, характерный для цен реальных активов, причем характер функции  $L(l)$  соответствует коэффициенту ковариации (55), и совпадает по виду с ядром  $h_n$  процесса.



**Рис. 14.** График функции  $L(l)$  (56) для самовозбуждающегося мультифрактального процесса (46) для  $\sigma = 1$  и (а) степенного ядра (47) с  $\varphi = 0.01$  и  $h_0 = 0.05$  и (b) экспоненциального ядра (48) с  $\varphi = 0.1$  и  $h_0 = 0.04$  в линейном (слева) и логарифмическом (справа) масштабах

## Список литературы

1. Bachelier L. Théorie de la spéculation. 1900.
2. Cont R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues // Quantitative Finance. 2001. Vol. 1. P. 223–236.
3. Bouchaud J.-P., Potters M. Theory of financial risks: from statistical physics to risk management. 2000.
4. Holland N. Handbook of Financial Markets: Dynamics and Evolution (Handbooks in Finance). 2009.
5. Bouchaud J.-P., Matacz A., Potters M. Leverage Effect in Financial Markets: The Retarded Volatility Model // Physical Review Letters. 2001. Vol. 87, no. 22. P. 228701+.
6. Sornette D. Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems. 2002.
7. Mandelbrot B. B., Ness J. W. V. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications // SIAM Review. 1968. Vol. 10, no. 4. P. 422–437.
8. Beran J. Statistics for long-memory processes. 1994.
9. Bollerslev T., Chou R. Y., Kroner K. F. ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence // Journal of Econometrics. 1992. Vol. 52, no. 1-2. P. 5–59.
10. Bollerslev T. A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return // The review of economics and statistics. 1987. Vol. 69, no. 3. P. 542–547.
11. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. 1986. Vol. 31, no. 3. P. 307–327.
12. Nelson D. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach // Econometrica: Journal of the Econometric Society. 1991. Vol. 59, no. 2. P. 347–370.
13. Bollerslev T., Todorov V. Estimation of Jump Tails. 2010.

14. Calvet L. E., Fisher A. J. How to Forecast Long-Run Volatility: Regime Switching and the Estimation of Multifractal Processes // Journal of Financial Economics. 2004. Vol. 2, no. 1. P. 49–83.
15. Calvet L. E., Fisher A. J. Multifrequency news and stock returns // Journal of Financial Economics. 2007. Vol. 86, no. 1. P. 178–212.
16. Calvet L. E., Fisher A. J. Multifractal Volatility: Theory, Forecasting, and Pricing. 2008.
17. Bacry E., Delour J., Muzy J.-F. A multivariate multifractal model for return fluctuations. 2000.
18. Bacry E., Delour J., Muzy J.-F. Multifractal random walk // Physical Review E. 2001. Vol. 64, no. 2. P. 026103+.
19. Saichev A., Sornette D. Renormalization of branching models of triggered seismicity from total to observable seismicity // The European Physical Journal B. 2006. Vol. 51. P. 443–459.
20. Саичев А. И., Филимонов В. А. О спектре диффузионного мультифрактального процесса // ЖЭТФ. 2007. Т. 132, № 5. С. 1235–1244.
21. Саичев А. И., Филимонов В. А. Численное моделирование диффузионного квазимультифрактального процесса // ЖЭТФ. 2008. Т. 134, № 2. С. 381–389.
22. Саичев А. И., Филимонов В. А. Численное моделирование реализаций и спектры квазимультифрактального диффузионного процесса // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 87, № 9. С. 592–596.
23. Cutler D. M., Poterba J. M., Summers L. H. What moves stock prices? // Journal of Portfolio Management. 1987. Vol. 15, no. 3. P. 4–12.
24. Soros G. The Alchemy of Finance: Reading the Mind of the Market. 1988.
25. Filimonov V., Sornette D. Self-Excited Multifractal Dynamics. 2010.
26. Richardson L. F. Weather Prediction by Numerical Process. 1922.

27. Колмогоров А. Н. О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР. 1941. Т. XXXI, № 2. С. 99–101.
28. Kolmogorov A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number // Journal of Fluid Mechanics. 1962. Vol. 13, no. 1. P. 82–85.
29. Frisch U. Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov. 1995.
30. Lux T. The Markov-Switching Multifractal Model of Asset Returns // Journal of Business and Economic Statistics. 2008. Vol. 26, no. 2. P. 194–210.
31. Zunino L., Tabak B., Figliola A. et al. A multifractal approach for stock market inefficiency // Physica A. 2008. Vol. 387, no. 26. P. 6558–6566.
32. Bacry E., Kozhemyak A., Muzy J.-F. Log-Normal continuous cascades: aggregation properties and estimation. Application to financial time-series. 2008.
33. Muzy J.-F., Delour J., Bacry E. Modelling fluctuations of financial time series: from cascade process to stochastic volatility model // The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems. 2000. Vol. 17, no. 3. P. 537–548.
34. Pochart B., Bouchaud J.-P. The skewed multifractal random walk with applications to option smiles // Quantitative Finance. 2002. Vol. 2, no. 4. P. 303–314.
35. Sornette D., Ouillon G. Multifractal Scaling of Thermally Activated Rupture Processes // Physical Review Letters. 2005. Vol. 94, no. 3. P. 038501+.
36. Ouillon G., Sornette D., Ribeiro E. Multifractal Omori law for earthquake triggering: new tests on the California, Japan and worldwide catalogues // Geophysical Journal International. 2009. Vol. 178, no. 1. P. 215–243.



37. Ivanov P. C. C., Amaral L. A., Goldberger A. L. L. et al. Multifractality in human heartbeat dynamics // *Nature*. 1999. Vol. 399, no. 6735. P. 461–465.
38. Amaral L. A. A. N., Ivanov P. C. C., Aoyagi N. et al. Behavioral-Independent Features of Complex Heartbeat Dynamics // *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 86, no. 26. P. 6026–6029.
39. Ching E. S. C., Tsang Y. K. Multifractality and scale invariance in human heartbeat dynamics // *Physical Review E*. 2007. Vol. 76, no. 4. P. 041910–8.
40. Silchenko A., Hu C. K. Multifractal characterization of stochastic resonance // *Physical Review E*. 2001. Vol. 63, no. 4. P. 041105+.
41. Anishchenko V. S., Astakhov V., Neiman A. et al. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments*. 2007.
42. Pavlov A. N., Sosnovtseva O., Ziganshin A. R. et al. Multiscality in the dynamics of coupled chaotic systems // *Physica A*. 2002. Vol. 316, no. 1-4. P. 233–249.
43. Riedi R. H., Vehel J. L. TCP traffic is multifractal: a numerical study. INRIA Research Report #3129. 1997.
44. Vehel J. L., Sikdar B. A multiplicative multifractal model for TCP traffic. 2001. P. 714–719.
45. Veitch D., Hohn N., Abry P. Multifractality in TCP/IP traffic: the case against // *Computer Networks*. 2005. Vol. 48, no. 3. P. 293–313.
46. Grassberger P. Generalized dimensions of strange attractors // *Physics Letters A*. 1983. Vol. 97, no. 6. P. 227–230.
47. Benzi R., Paladin G., Parisi G., Vulpiani A. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1984. Vol. 17, no. 18. P. 3521–3531.
48. Feigenbaum M. J. Some characterizations of strange sets // *Journal of Statistical Physics*. 1987. Vol. 46, no. 5. P. 919–924.

49. Jensen M. H., Kadanoff L. P., Procaccia I. Scaling structure and thermodynamics of strange sets // *Physical Review A*. 1987. Vol. 36, no. 3. P. 1409–1420.
50. Mandelbrot B. B. *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. 1975.
51. Mandelbrot B. B. *Fractals: Form, Chance and Dimension*. 1977.
52. Mandelbrot B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. 1982.
53. Peano G. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane // *Mathematische Annalen*. 1890. Vol. 36, no. 1. P. 157–160.
54. Mandelbrot B. B. Self-Affine Fractals and Fractal Dimension // *Physica Scripta*. 1985. Vol. 32, no. 4. P. 257–260.
55. Feder J. *Fractals*. 1988.
56. Schroeder M. *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise*. 1992.
57. Falconer K. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. 2003.
58. Borodin A. N., Salminen P. *Handbook of Brownian Motion: Facts and Formulae*. 1996.
59. Mandelbrot B. B., Fisher A. J., Calvet L. E. A Multifractal Model of Asset Returns. Cowles Foundation Discussion Paper #1164. 1997. URL: <http://ideas.repec.org/p/cwl/cwldpp/1164.html> (дата обращения: 17.02.2010).
60. Mandelbrot B. B., Fisher A. J., Calvet L. E. Large Deviations and the Distribution of Price Changes. Cowles Foundation Discussion Paper #1165. 1997. URL: <http://ideas.repec.org/p/cwl/cwldpp/1165.html> (дата обращения: 17.02.2010).
61. Mandelbrot B. B. *Fractals and Scaling In Finance*. 1997.
62. Parisi G., Frisch U. On the singularity structure of fully developed turbulence. 1985. P. 84–87.

63. Muzy J.-F., Bacry E., Kozhemyak A. Extreme values and fat tails of multifractal fluctuations // *Physical Review E*. 2006. Vol. 73, no. 6. P. 066114+.
64. Bacry E., Muzy J.-F. Log-Infinitely Divisible Multifractal Processes // *Communications in Mathematical Physics*. 2003. Vol. 236, no. 3. P. 449–475.
65. Muzy J.-F., Bacry E., Arneodo A. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data // *Physical Review Letters*. 1991. Vol. 67, no. 25. P. 3515–3518.
66. Muzy J.-F., Bacry E., Arneodo A. Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method // *Physical Review E*. 1993. Vol. 47, no. 2. P. 875–884.
67. Muzy J.-F., Bacry E., Arneodo A. The multifractal formalism revisited with wavelets // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1994. Vol. 4, no. 2. P. 245–302.
68. Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 1965.
69. Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M., Klafter J. Strange kinetics // *Nature*. 1993. Vol. 363, no. 6424. P. 31–37.
70. Klafter J., Shlesinger M. F., Zumofen G. Beyond Brownian Motion // *Physics Today*. 1996. Vol. 49, no. 2. P. 33–39.
71. Samorodnitsky G., Taqqu M. S. *Stable non-Gaussian random processes: stochastic models with infinite variance*. 1994.
72. Molchan G. M. Scaling exponents and multifractal dimensions for independent random cascades // *Communications in Mathematical Physics*. 1996. Vol. 179, no. 3. P. 681–702.
73. Molchan G. M. Turbulent cascades: Limitations and a statistical test of the lognormal hypothesis // *Physics of Fluids*. 1997. Vol. 9, no. 8. P. 2387–2396.

74. Kahane J. P., Peyriere J. Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot // *Advances in mathematics*. 1976. Vol. 22, no. 2. P. 131–145.
75. Castaing B., Gagne Y., Hopfinger E. J. Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence // *Physica D*. 1990. Vol. 46, no. 2. P. 177–200.
76. Muzy J.-F., Bacry E. Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log infinitely divisible scaling laws // *Physical Review E*. 2002. Vol. 66, no. 5. P. 056121+.
77. Arneodo A., Bacry E., Muzy J.-F. Random cascades on wavelet dyadic trees // *Journal of Mathematical Physics*. 1998. Vol. 39. P. 4142–4164.
78. Arneodo A., Bacry E., Manneville S., Muzy J.-F. Analysis of Random Cascades Using Space-Scale Correlation Functions // *Physical Review Letters*. 1998. Vol. 80, no. 4. P. 708–711.
79. Лапинова С. А., Саичев А. И. Универсальный спектр логнормального мультифрактального процесса // *Известия ВУЗов. Радиофизика*. 2008. Т. 51, № 1. С. 171–179.
80. Mandelbrot B. B., Pfeifer P., Biham O. et al. Is Nature Fractal? // *Science*. 1998. Vol. 279, no. 5352. P. 783.
81. Tsonis A. A., Biham O., Malaci O. et al. Fractality in Nature // *Science*. 1998. Vol. 279, no. 5357. P. 1611.
82. Sornette D. Dragon-Kings, Black Swans and the Prediction of Crises // *International Journal of Terraspace Science and Engineering*. 2009. Vol. 2, no. 1.

*Препринт P1/2010/06*

*Серия P1*

*Научные доклады лаборатории количественного анализа и  
моделирования экономики*

Владимир Александрович Филимонов

**МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

Публикуется в авторской редакции