Модельное дезагрегирование макроэкономической статистики[1]

Вржещ В.П., Поспелов И.Г., Хохлов М.А.

Рассматривается трехпродуктовое разложение макроэкономической статистики. За основу взят макроэкономический баланс по использованию, который разворачивается в балансы трех модельных продуктов: экспортного, импортного и внутреннего. Предлагается упрощенная модель общего равновесия, в которой потребление и накопление представляются как CES-функции полезности от потоков импортного и внутреннего продуктов, а ВВП – как CES-функция замещения от объемов производства внутреннего и экспортного продуктов. Дефляторы потребления и накопления при этом выражаются как сопряженные к указанным функциям индексы цен. В конечном счете удается получить дополнительно к балансам четыре неявные связи между десятью величинами: пятью составляющими основного макроэкономического баланса и пятью их дефляторами. Эти неявные связи в течение последних 10 лет с высокой точность выполняются на несглаженной (сохраняющей сезонные колебания) квартальной статистике Российской Федерации.

Ключевые слова: макроэкономический баланс; дефляторы; CES; дезагрегирование; квартальная статистика; экспорт; импорт.

1. Потребность в трехпродуктовом описании экономики

Работа выполнена в связи с исследованиями по моделированию современной российской экономики, проводящимися в отделе математического моделирования

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ проект № 09-01-13534-офи_ц, гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект № НШ – 2982.2008.1).

Вржещ В.П. – аспирант, факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра исследования операций, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, e-mail: valentin.vrzheshch@gmail.com

Поспелов И.Г. – д.ф.-м.н., член-корр. РАН, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН (ВЦ РАН), главный научный сотрудник отдела математического моделирования экономических систем, профессор кафедры математической экономики и эконометрики Государственного университета – Высшей школы экономики, e-mail: pospeli@ccas.ru

Хохлов М.А. – младший научный сотрудник, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, e-mail: khokhlov@ccas.ru

Статья поступила в Редакцию в феврале 2010 г.

экономических систем Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН. Долгое время в ВЦ РАН в рамках системного анализа развивающейся экономики [2, 3] разрабатывались в основном однопродуктовые модели[2]. Однако сейчас описание стало явно неадекватным как достигнутой точности моделей, так и усилившемуся расхождению дефляторов отдельных составляющих макроэкономического баланса (см. рис. 1). Данная работа представляет попытку разрешить эти трудности.

Сразу следует предупредить, что мы отнюдь не предлагаем замкнутую самостоятельную процедуру анализа статистики. Наша цель – предложить модель, которая за счет введения некоторых внутримодельных ненаблюдаемых величин объясняет наблюдаемую динамику основных макроэкономических показателей, как в текущих ценах, так и в реальном выражении. По этой же причине мы не обсуждаем, насколько соответствуют теоретическим представлениям методы построения макроэкономических балансов статистическими службами. Наша цель – воспроизвести в модели имеющуюся статистику, а не исправить ее.

Будем исходить из основного макроэкономического баланса по использованию (ОМБ) **в основных ценах**, который имеет вид

(1) *ВВП = Валовое накопление + Конечное потребление + Экспорт – Импорт.*

Фактически между правой и левой частями балансов (1), (2) имеется *статистическое расхождение* ~1% от ВВП [5]. В настоящей работе **мы вычитаем расхождение из ВВП.**

Как известно, первичная информация для ОМБ собирается в деньгах (в текущих ценах), а затем специальными и во многом неформальными процедурами дефлятирования, разными для разных составляющих, ОМБ приводится к «реальным величинам» (неизменным ценам). ОМБ в неизменных ценах мы будем записывать как

$$Y(t) = J(t) + C(t) + E(t) - I(t). \tag{2}$$

Тогда исходный баланс в текущих ценах можно записать как

$$p_Y(t)Y(t) = p_J(t)J(t) + p_C(t)C(t) + p_E(t)E(t) - p_I(t)I(t), \tag{3}$$

где $p_Y(t)$, $p_J(t)$, $p_C(t)$, $p_E(t)$, $p_I(t)$ – базовые **дефляторы** соответственно ВВП, накопления, конечного потребления, экспорта и импорта (в рублях). Подчеркнем, что мы в данном случае определяем значения этих дефляторов просто как отношения соответствующих величин в ОМБ, измеренных в текущих и неизменных ценах. Их несглаженная квартальная динамика по данным [5] показана на рис. 1.

В однопродуктовых моделях баланс (2) рассматривается как условие равновесия на рынке однородного агрегированного продукта. В модели равновесия одному продукту (*аддитивному*) соответствует одна цена (дефлятор ВВП), поэтому однопродуктовая модель может одновременно воспроизвести реальные (2) и номинальные величины с точностью, не превосходящей различия в индексах цен составляющих ОМБ. В настоящее время такая точность становится уже явно недостаточной, что и послужило основным стимулом к проведению настоящего исследования.

---

[2] Однопродуктовое описание производства и потребления в этих моделях дополнялось описанием кредитно-денежной сферы, гораздо более детализированным и реалистичным, чем это обычно делается в макромоделях экономики.

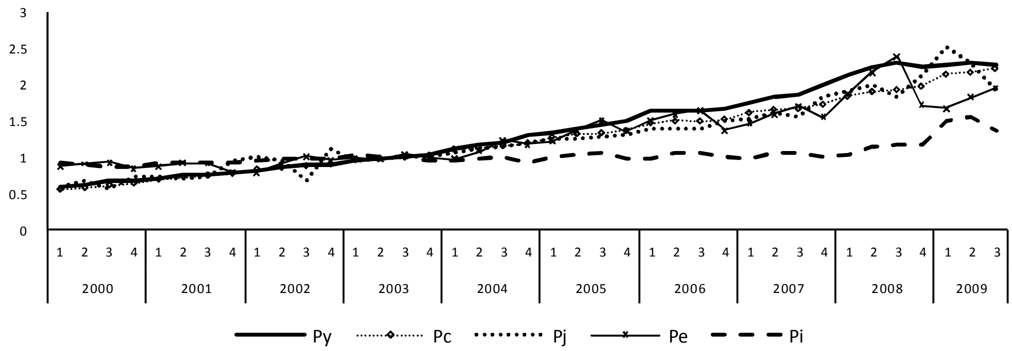

Рис. 1. Дефлятор ВВП (Py), дефлятор конечного потребления (Pc), дефлятор валового накопления (Pj), дефлятор экспорта (Pe), дефлятор импорта (Pi).

Использовать обычный путь построения более подробной модели на основе данных межотраслевого баланса (МОБ) в данном случае не представляется возможным. Модель экономики России, о которой идет речь, строится в квартальном или даже месячном разрезе с горизонтом в два-три года, а МОБ собирался раз в год, публиковался с задержкой в 3 года, а в настоящее время в обычном смысле уже не собирается. Поэтому мы решили пойти путем *дезагрегирования* ОМБ, используя прежде всего зафиксированную статистикой разницу индексов цен его составляющих.

2. Нелинейное дезагрегирование макроэкономического баланса

Чтобы пояснить логику наших рассуждений, представим себе, что мы можем проследить происхождение и способ использования всего множества $\mathfrak{G}$ продуктов (товаров и услуг), обращающихся в экономике страны, и соответствующие цены $p_g(\tau)$, $g \in \mathfrak{G}$ за время от некоторого базового $\tau = t_0$ до текущего периода $\tau = t$. При этом мы можем различить импортные $g \in \mathfrak{I}$ и отечественные продукты, а среди последних те, что предназначены на экспорт $g \in \mathfrak{E}$, и те, что предназначены для внутреннего использования $g \in \mathfrak{X}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{I} + \mathfrak{E} + \mathfrak{X}$. Тогда можно написать следующие детальные материальные балансы[3]:

$$X^g(t) = E^g(t), \qquad g \in \mathfrak{E}; \tag{4}$$

$$X^g(t) = X_V^g(t) + X_C^g(t) + X_J^g(t), \qquad g \in \mathfrak{X}; \tag{5}$$

$$I^g(t) = I_V^g(t) + I_C^g(t) + I_J^g(t), \qquad g \in \mathfrak{I}. \tag{6}$$

Здесь $X^g(t)$, $I^g(t)$, $E^g(t)$ – объемы соответственно производства, импорта и экспорта продукта g, а величины с индексами V, C, J – объемы использования этого продукта как промежуточного, потребительского и инвестиционного соответственно.

[3] Небольшим для России реэкспортом мы пренебрегаем.

Фактически балансы (4)−(6) составить, конечно, невозможно. Во-первых, список товаров и услуг необозримо велик ($\sim 10^9$) и постоянно обновляется. Во-вторых, все возрастающую часть благ составляют *неаддитивные* блага − знания, информация и другие блага, которые получатель может *тиражировать*, т.е. передавать другим, не теряя сам. Неаддитивные блага не удовлетворяют балансовым уравнениям по самой своей природе. Однако при анализе статистики условными балансами (4)−(6) можно пользоваться, поскольку именно такое представление о движении благ пока лежит в основе всего учета.

Умножая балансы (4)−(6) на цены базового периода $p_g(t_0)$ и складывая по группам $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{X}$, получаем агрегированные балансы

$$(7)\qquad X^{\mathfrak{E}}(t) = E, \quad X^{\mathfrak{E}}(t) = \sum_{g\in\mathfrak{E}} p_g(t_0) X^g(t);$$

$$(8)\qquad X = X^{\mathfrak{X}}(t) = X_V^{\mathfrak{X}}(t) + X_C^{\mathfrak{X}}(t) + X_J^{\mathfrak{X}}(t),$$
$$X_U^{\mathfrak{X}}(t) = \sum_{g\in\mathfrak{X}} p_g(t_0) X_U^g(t), \qquad U = \varnothing, V, C, J;$$

$$(9)\qquad I = I_V^{\mathfrak{J}}(t) + I_C^{\mathfrak{J}}(t) + I_J^{\mathfrak{J}}(t), \quad I_U^{\mathfrak{J}}(t) = \sum_{g\in\mathfrak{J}} p_g(t_0) I_U^g(t), \qquad U = \varnothing, V, C, J,$$

где E и I − теоретические аналоги наблюдаемых объемов текущих экспорта и импорта в неизменных ценах.

Складывая балансы (7)−(9), получаем теоретический аналог ОМБ[4] (2), где

$$C = X_C^{\mathfrak{X}}(t) + I_C^{\mathfrak{J}}(t), \quad J = X_J^{\mathfrak{X}}(t) + I_J^{\mathfrak{J}}(t),$$

а ВВП, как и положено, равен разности выпуска и всех текущих затрат

$$Y = X^{\mathfrak{E}}(t) + X^{\mathfrak{X}}(t) - X_V^{\mathfrak{X}}(t) - I_V^{\mathfrak{J}}(t).$$

Отсюда следует, что экспорт и импорт в ОМБ (1), (2) должны входить полными, а не как-либо «очищенными»[5].

Главная идея работы состоит в том, чтобы от модельного баланса одного продукта (2) перейти к естественным с экономической точки зрения модельным балансам трех продуктов экспортного E, импортного I и внутреннего X, хотя последний и оказывается ненаблюдаемым. Трудность еще состоит и в том, что по промежуточным затратам квартальных данных не бывает.

Последнюю трудность мы предлагаем преодолеть следующим способом. Будем считать, что использование в качестве сырья и комплектующих импортных продуктов

---

[4] Если различать продукты не только по внутреннему и внешнему использованию, но и по использующим их отраслям и рассматривать экспорт как один из видов использования продуктов, то, суммируя балансы типа (5)−(6) по группам продуктов, получим теоретический аналог таблиц использования (Use) в МОБ.

[5] Сравнивая данные ОМБ, МОБ и платежного баланса, можно убедиться, что разница внешних и внутренних цен на экспортные товары учитывается в ОМБ как экспорт торговых услуг.

(стройматериалов, оборудования, деталей и т.п.) диктуется не столько технологическими ограничениями, сколько требованиями потребителей и заказчиков. Поэтому мы заменяем балансы (8), (9) модельными балансами

(10) $$X = J_X + C_X,$$

(11) $$I = J_I + C_I,$$

где J_I – импорт, связанный с инвестициями, включая, например, и импортное оборудование для завода, и импортные материалы для его постройки;

C_I – импорт, связанный с потреблением, включая, например, иномарку и импортный кинескоп для телевизора отечественной сборки;

J_X – внутреннее производство, связанное с инвестициями, включая, например, услуги строительных организаций и электроэнергию, затраченную при строительстве;

C_X – внутреннее производство, связанное с потреблением, включающее, например, торговые услуги по продаже иномарки.

Подчеркнем, что в (10), (11) все величины, кроме I, чисто модельные. Мы не собираемся сопоставлять их с какими-либо наблюдаемыми показателями.

В рамках модели мы предполагаем, что величины C_I, C_X определяются рыночными механизмами с учетом предпочтений потребителя. Если предпочтения потребителя можно описать *линейно-однородной функцией полезности* $g(C_I, C_X)$, то эта функция определяется однозначно с точностью до множителя и может рассматриваться как агрегированный индекс объема потребления набора продуктов $\langle C_I, C_X \rangle$ [3; 6]. Именно так мы попытаемся смоделировать наблюдаемый объем потребления в (2)

(12) $$C = g(C_I, C_X).$$

Аналогично *линейно-однородная функция полезности для инвестора* $h(J_I, J_X)$ определяет в модели валовое накопление в (2)

(13) $$J = h(J_I, J_X).$$

Следует заметить, что ожидать простых равенств $C = C_I + C_X$ или $J = J_I + J_X$ не приходится, поскольку введенные нами модельные потоки J_I, C_I, J_X, C_X включают не только собственно потребление и инвестиции, но и какие-то потоки текущих затрат, сделанные по требованию потребителя или инвестора (см. (8), (9)).

Второе наше предположение состоит в том, что неучтенные выше факторы производства – труд, основной капитал и природные ресурсы – определяют соотношением типа производственной функции именно величину реального ВВП, но реализована она может быть по-разному за счет выпуска внутреннего и экспортного продуктов. *Возможности замещения при производстве описываются еще одной линейно-однородной функцией свертки*

(14) $$Y = f(X, E)$$

(соотношение $Y = X + E$, опять-таки невозможно, поскольку X включает промежуточный продукт, а Y – нет).

Соотношения (2), (10)–(14), дополненные обсуждаемыми ниже соображениями рациональности поведения экономических агентов, задают предлагаемую нами схему дезагрегирования ОМБ в модели.

Следует заметить, что приведенные выше рассуждения о детальных балансах можно считать просто наводящими соображениями, а соотношения (10)–(14) рассматривать как чисто феноменологическую схему, практически однозначно определяемую требованием описать составляющие макроэкономического баланса как нелинейные свертки потоков минимального числа аддитивных благ, при выполнении условий рациональности (см. раздел 3).

Рассмотрение отечественного и импортного продуктов как частично замещающих друг друга издавна используется в моделях внешней торговли под названием «предпосылка Армингтона». В предложенной Армингтоном модели [7] рассматриваются m стран и n типов продуктов, каждый продукт характеризуется типом и страной происхождения, таким образом образуя $m \times n$ различных продуктов. Товары одного типа, произведенные в разных странах, являются близкими субститутами, поэтому функция полезности для потребителей предполагается разделяемой (сепарабельной) по типам товаров.

Предположение, что продукты одного вида, но разного происхождения являются близкими субститутами, помогает моделировать встречный экспорт (cross-hauling effect), при котором импортируются и экспортируются одноименные товары. Заметим, что в исходной постановке Армингтона сторона предложения не моделировалась.

Предпосылка Армингтона оказала большое влияние на экономическое моделирование, в частности, она часто применяется в вычислимых моделях общего равновесия (CGE) для определения спроса на внутренний и импортный продукты [10]. Нелинейное свертывание продуктов и ресурсов в более крупные агрегаты все больше распространяется в вычислимых моделях общего равновесия. На иерархии нелинейных сверток строится, например, описание производства и потребления в весьма подробной (сотни видов продуктов и ресурсов) модели Австралии [9]. Авторы, впрочем, определяют параметры свертки по одной точке и жалуются на их неустойчивость.

В некоторых CGE-моделях применялось трехэтапное планирование бюджета домохозяйств. На первом этапе расходы распределяются между типами продуктов, на втором этапе расходы на каждый тип продукта делятся между отечественным и импортными представителями каждого типа [8], и на третьем этапе затраты на импорт по каждому типу товара распределяются между странами-производителями.

Чтобы использовать для идентификации все ряды, мы обратимся к анализу финансовых потоков. Соотношения (12)–(14) определяют индексы физического объема накопления, потребления и ВВП. Требование их **линейной однородности** обеспечивает сложение финансовых потоков при нелинейном свертывании реальных потоков (см. утверждение 1 ниже).

Пять соотношений (10)–(14) содержат как раз пять неизвестных временных рядов:

$X(t)$ – квартальный выпуск внутреннего продукта в ценах 2003 г.;

$C_X(t)$ – квартальное использование внутреннего продукта в связи с потреблением;

$J_X(t)$ – квартальное использование внутреннего продукта в связи с накоплением;

$C_I(t)$ – квартальное использование импортного продукта в связи с потреблением;

$J_I(t)$ – квартальное использование импортного продукта в связи с накоплением.

Поэтому соотношений (10)–(14) недостаточно, чтобы определить вид функций $f(\cdot,\cdot)$, $h(\cdot,\cdot)$, $g(\cdot,\cdot)$. Однако у нас есть еще информация о финансовых потоках и дефляторах. Для трех продуктов – экспортного, импортного и внутреннего – мы будем рассматривать три дефлятора: $p_E(t)$, $p_I(t)$, $p_X(t)$, первые два из которых наблюдаемы из статистики (3), а последний должен быть восстановлен в процессе дезагрегирования.

3. Рациональность поведения экономических агентов

Чтобы использовать информацию о дефляторах, сделаем некоторые предположения о рациональности поведения экономических агентов. Будем условно считать, что в экономике действуют 5 агентов (см. рис. 2).

Три из них основные:

- ***потребитель***, который покупает для конечного потребления продукты C_I, C_X;
- ***инвестор***, который покупает для реализации инвестиционных проектов продукты J_I, J_X;
- ***производитель***, который производит продукты X, E и продает их на внутреннем и внешнем рынке.

Два агента вспомогательные:

- ***импортер***, который продает на внутреннем рынке импортный продукт I;
- ***экспортер***, который покупает на внутреннем рынке продукт для экспорта E.

Балансы (10), (11) будут рассматриваться как условия равновесия на конкурентных рынках однородных аддитивных благ, внутреннего и импортного продукта соответственно. На таких рынках все участники продают и покупают благо по одной и той же цене.

Для составляющих импортного продукта в балансе (11) в качестве единой цены будем использовать дефлятор p_I.

Для составляющих чисто модельного внутреннего продукта введем модельную (ненаблюдаемую) цену-дефлятор p_X.

Поскольку дефлятор экспорта p_E отличается от всех остальных (см. рис. 2), будем считать, что экспортный продукта продается на особом – внешнем – рынке по цене p_E.

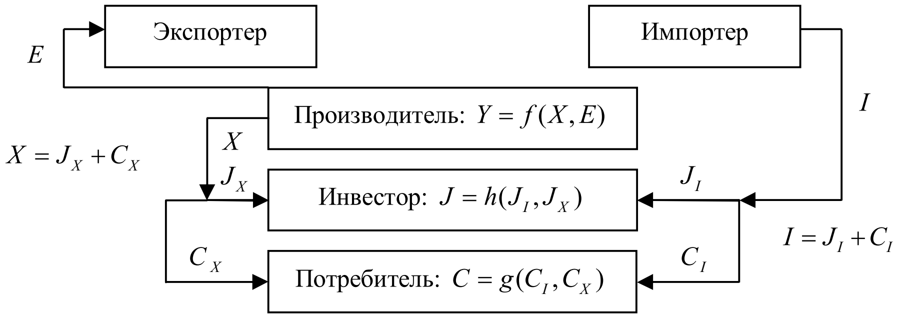

Рис. 2. Схема взаимодействия экономических агентов

Теперь опишем, как формируются спрос и предложение на перечисленных выше рынках. Начнем с потребителя. Купив в период t продукты $C_I(t)$, $C_X(t)$, потребитель понес денежные расходы $\Phi(t) = p_I(t)C_I(t) + p_X(t)C_X(t)$. Эта величина известна нам из статистики: $\Phi(t) = p_C(t)C(t)$ (3). В предположении (12) получаем, следовательно,

$$p_C(t)\,g(C_I(t), C_X(t)) = p_I(t)C_I(t) + p_X(t)C_X(t). \tag{15}$$

А почему был куплен набор продуктов $C_I(t)$, $C_X(t)$, а не какой-то другой? Простейший ответ состоит в том, что при другом наборе продуктов и данных ценах соотношение (12) несовместимо с бюджетным ограничением

$$p_C(t)\,g(C_I, C_X) \le p_I(t)C_I + p_X(t)C_X, \text{ при всех } C_I, C_X \ge 0. \tag{16}$$

Из соотношений (15), (16) следует, что значения $C_I(t)$, $C_X(t)$ доставляют максимум выражению

$$p_C(t)\,g(C_I, C_X) - p_I(t)C_I - p_X(t)C_X \to \max_{C_I, C_X \ge 0}. \tag{17}$$

Предполагая, что функция $g(\cdot,\cdot)$ – гладкая и выпуклая вверх, а также учитывая, что нас интересуют только внутренние точки максимума, получаем необходимые и достаточные условия выполнения[6] (17):

$$\partial_1 g\big(C_I(t), C_X(t)\big) = \frac{p_I(t)}{p_C(t)}, \quad \partial_2 g\big(C_I(t), C_X(t)\big) = \frac{p_X(t)}{p_C(t)}. \tag{18}$$

Однако поскольку функция $g(\cdot,\cdot)$ – линейно-однородна, задача максимизации (17) вырождена. Она имеет нетривиальное решение не при всех соотношениях цен, а когда решение есть, оно не единственно. При этом в точке максимума с необходимостью выполняется равенство (15). Алгебраически это проявляется в том, что част-

[6] Здесь и далее символом ∂_i обозначается частная производная по i-му аргументу.

ные производные $g(\cdot,\cdot)$ суть функции отношения аргументов. Поэтому уравнения (18) не определяют значения $C_I(t)$, $C_X(t)$ по отдельности. Из этих уравнений определяется отношение $C_I(t)/C_X(t)$ и цена $p_X(t)$. Из соображений симметрии удобнее использовать отношение равенств (18)

$$\frac{\partial_1 g\left(C_I(t), C_X(t)\right)}{\partial_2 g\left(C_I(t), C_X(t)\right)} = \frac{p_I(t)}{p_X(t)} \tag{19}$$

и условие (15).

Как известно [6], из (15), (19) можно получить выражение дефлятора $p_C(t)$ как сопряженного индекса цен

$$p_C(t) = g^*(p_I(t), p_X(t)) = \inf_{\substack{C_I, C_X, \\ g(C_I, C_X)>0}} \frac{p_I(t)C_I + p_X(t)C_X}{g(C_I, C_X)}. \tag{20}$$

Рассматриваемая задача обратна задаче агрегирования потребительского спроса [3; 6]. Последняя состоит в представлении потребительских расходов $\Phi(t) = p_I(t)I_C(t) + p_X(t)Y_C(t)$ при известных ценах и объемах покупок в виде произведения индекса цен и индекса объема $\Phi(t) = q\left(p_I(t), p_X(t)\right) \cdot g\left(I_C(t), Y_C(t)\right)$. Пример решения задачи агрегирования спроса приведен в [6]. Здесь же мы ищем индекс объема, зная значения индекса цены $q\left(p_I(t), p_X(t)\right) = p_C(t)$, но не зная объемы покупок и цену $p_X(t)$. Вследствие такого недостатка информации мы не сможем, как в задаче агрегирования, найти индекс объема точно (если он существует), а будем искать его приближенно в параметрическом виде (см. раздел 5).

Аналогичные рассуждения применимы и к *инвестору*. Соображения рациональности снова приводят к равенству отношения цен отношению предельных полезностей, аналогичному (19), которое для однородной функции $h(\cdot,\cdot)$ приводит к равенству, аналогичному (15). В результате получаем соотношения

$$\begin{gathered} \frac{\partial_1 h\left(J_I(t), J_X(t)\right)}{\partial_2 h\left(J_I(t), J_X(t)\right)} = \frac{p_I(t)}{p_X(t)}, \\ p_J(t) h\left(J_I(t), J_X(t)\right) = p_I(t)J_I(t) + p_X(t)J_X(t). \end{gathered} \tag{21}$$

Для *производителя* рассуждения несколько изменяются и, следует признать, оказываются менее ясными с экономической точки зрения. Величина $\Pi(t) = p_X(t)X(t) + p_E(t)E(t)$ представляет собой выручку *производителя*. В статистике она выражается как $\Pi(t) = p_Y(t)Y(t)$. Реализующийся набор выпускаемых продуктов $X(t)$, $E(t)$ можно снова выделить среди всевозможных пар величин X, $E \geq 0$ тем, что остальные сочетания несовместимы с (14) при данных ценах. Однако здесь, ввиду не очень ясного экономического смысла функции $f(\cdot,\cdot)$, остаются две формальные альтернативы:

$f(\cdot,\cdot)$ – **выпукла вверх** и

(22) $$p_Y(t)f\left(X,E\right)\leq p_X(t)X+p_E(t)E, \text{ при всех } X,\ E\geq 0;$$

$f(\cdot,\cdot)$ – **выпукла вниз** и

(23) $$p_Y(t)f\left(X,E\right)\leq p_X(t)X+p_E(t)E, \text{ при всех } X,\ E\geq 0.$$

В обоих случаях для однородной функции $f(\cdot,\cdot)$ получаются соотношения

(24) $$\frac{\partial_1 f\left(X(t),E(t)\right)}{\partial_2 f\left(X(t),E(t)\right)}=\frac{p_X(t)}{p_E(t)},\quad p_Y(t)f\left(X(t),E(t)\right)=p_X(t)X(t)+p_E(t)E(t).$$

В дальнейшем будем пользоваться условиями (24), оставляя вопрос об априорных требованиях на знак выпуклости функции $f(\cdot,\cdot)$ как предмет дальнейшего исследования.

Заметим, что мы используем здесь принцип рациональности для описания поведения *макроагентов,* представляющих в модели огромные совокупности реальных субъектов экономики: фирм и домохозяйств. Мы считаем это не только допустимым, но наиболее правильным. Весь 40-летний опыт моделирования советской и российской экономики, накопленный в ВЦ РАН [2; 3], говорит о том, что рациональность поведения проявляется именно в больших совокупностях субъектов, связанных отношениями конкуренции и подражания. Поведение же отдельных субъектов, например государства или отдельной семьи, бывает довольно прихотливым и его надежнее описывать сценариями [4].

4. Система условий дезагрегирования

Итак, мы получаем следующую систему из 11 гипотетических соотношений, которые должны выполняться в каждый период наблюдений:

(25) $$Y(t)=f\left(X(t),E(t)\right),\quad J(t)=h\left(J_I(t),J_X(t)\right),\quad C(t)=g\left(C_I(t),C_X(t)\right),$$

(26) $$\frac{\partial_1 f\left(X(t),E(t)\right)}{\partial_2 f\left(X(t),E(t)\right)}=\frac{p_X(t)}{p_E(t)},\quad \frac{\partial_1 h\left(J_I(t),J_X(t)\right)}{\partial_2 h\left(J_I(t),J_X(t)\right)}=\frac{p_I(t)}{p_X(t)},$$
$$\frac{\partial_1 g\left(C_I(t),C_X(t)\right)}{\partial_2 g\left(C_I(t),C_X(t)\right)}=\frac{p_I(t)}{p_X(t)},$$

(27) $$p_Y(t)\,Y(t)=p_X(t)\,X(t)+p_E(t)\,E(t),\quad p_J(t)\,J(t)=p_I(t)\,J_I(t)+p_X(t)\,J_X(t),$$

(28) $$p_C(t)\,C(t)=p_I(t)\,C_I(t)+p_X(t)\,C_X(t),$$

(29) $$X(t)=J_X(t)+C_X(t),\quad I(t)=J_I(t)+C_I(t),$$

где функции $f(\cdot,\cdot)$, $g(\cdot,\cdot)$, $h(\cdot,\cdot)$ предполагаются гладкими и линейно-однородными, так что по теореме Эйлера

$$
\begin{aligned}
f(X,E) &= X\,\partial_1 f(X,E) + E\,\partial_2 f(X,E),\\
g(C_I,C_X) &= C_I\ \partial_1 g(C_I,C_X) + C_X\ \partial_2 g(C_I,C_X),\\
h(J_I,J_X) &= J_I\ \partial_1 h(J_I,J_X) + J_X\ \partial_2 h(J_I,J_X).
\end{aligned} \tag{30}
$$

Кроме того, исходные данные (после вычитания из ВВП статистических расхождений) удовлетворяют балансам (2), (3). Впрочем, баланс (3) оказывается следствием (27)–(29).

Утверждение 1.

Из соотношений (27)–(29) следует выполнение основного макроэкономического баланса в текущих ценах (3).

Доказательство.

Вычитая из первого уравнения в (27)–(28) два остальных, получаем, что

$$
\begin{aligned}
&p_Y(t)Y(t) - p_J(t)J(t) - p_C(t)C(t) =\\
&= p_X(t)X(t) + p_E(t)E(t) - p_I(t)J_I(t) - p_X(t)J_X(t) - p_I(t)C_I(t) - p_X(t)C_X(t).
\end{aligned}
$$

Подставляя сюда выражения для $X(t)$ и $J_I(t)$ из (29), получаем (3). Утверждение доказано.

В (25)–(29) 10 рядов:

$$
Y(t), J(t), C(t), E(t), I(t), p_Y(t), p_J(t), p_C(t), p_E(t), p_I(t) \tag{31}
$$

известны из статистики, поэтому у нас остается 6 неизвестных временных рядов

$$
X(t), C_X(t), J_X(t), C_I(t), J_I(t), p_X(t). \tag{32}
$$

Требуется подобрать не изменяющиеся со временем функции $f(\cdot,\cdot)$, $g(\cdot,\cdot)$, $h(\cdot,\cdot)$ так, чтобы за счет шести рядов (32) все 11 соотношений (25)–(29) выполнялись с приемлемой точностью во все периоды наблюдения.

5. Параметризация дезагрегирующих функций и постановка задачи их идентификации

Функции $f(\cdot,\cdot)$, $g(\cdot,\cdot)$, $h(\cdot,\cdot)$ будем искать в классе наиболее популярных в экономико-математических исследованиях функций с постоянной эластичностью замещения (CES) $u(X,Y) = \left(aX^e + bY^e\right)^{1/e}$, где a, $b \geq 0$, e – постоянные параметры. Именно такие функции, как правило, применяются для упомянутого выше иерархического агрегирования продуктов и ресурсов в CGE-моделях.

Итак, положим в (25), (26)

$$
\begin{aligned}
&f(X,E) = \left(a_f X^{e_f} + b_f E^{e_f}\right)^{1/e_f},\ h(J_I,J_C) = \left(a_h J_I^{\,e_h} + b_h J_C^{\,e_h}\right)^{1/e_h},\\
&g(C_I,C_X) = \left(a_g C_I^{\,e_g} + b_g C_X^{\,e_g}\right)^{1/e_g}.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Из (20) и аналогичных соотношений для *инвестора* и *производителя* получаются следующие выражения для дефляторов

$$p_Y = \left(a_f^{\frac{1}{1-e_f}} p_X^{\frac{e_f}{1-e_f}} + b_f^{\frac{1}{1-e_f}} p_E^{\frac{e_f}{1-e_f}} \right)^{\frac{e_f-1}{e_f}}, \quad p_J = \left(a_h^{\frac{1}{1-e_h}} p_I^{\frac{e_h}{1-e_h}} + b_h^{\frac{1}{1-e_h}} p_X^{\frac{e_h}{1-e_h}} \right)^{\frac{e_h-1}{e_h}},$$

$$p_C = \left(a_g^{\frac{1}{1-e_g}} p_I^{\frac{e_g}{1-e_g}} + b_g^{\frac{1}{1-e_g}} p_X^{\frac{e_g}{1-e_g}} \right)^{\frac{e_g-1}{e_g}}.$$

Теперь получаем задачу идентификации: подобрать коэффициенты a_f, b_f, e_f, a_h, b_h, e_h, a_g, b_g, e_g так, чтобы при некоторых рядах (32) по возможности точно выполнялась переопределенная система соотношений (25)–(29). Для корректной постановки этой задачи надо определить, что значит «по возможности точно».

Будем считать, что финансовые и материальные балансы (27)–(29) должны выполняться действительно точно, а в условиях агрегирования (25) и условиях рациональности поведения (26) допустим отклонения. Поскольку абсолютные значения в левых частях соотношений (25) растут со временем в меру экономического роста, а отношения цен в правых частях (26) остаются во времени примерно постоянными, отклонения в (25) будем оценивать в логарифмической шкале, а отклонения в (26) – в натуральной. Таким образом, мы заменяем равенства (25) на

(34)
$$\ln Y(t) = \frac{1}{e_f} \ln\left(a_f X(t)^{e_f} + b_f E(t)^{e_f} \right) + \varepsilon_1(t),$$

$$\ln J(t) = \frac{1}{e_h} \ln\left(a_h J_I(t)^{e_h} + b_h J_X(t)^{e_h} \right) + \varepsilon_2(t), ,$$

(35)
$$\ln C(t) = \frac{1}{e_g} \ln\left(a_g C_I(t)^{e_g} + b_g C_X(t)^{e_g} \right) + \varepsilon_3(t),$$

а равенства (26) – на

(36)
$$\frac{a_f}{b_f}\left(\frac{X(t)}{E(t)}\right)^{e_f-1} - \frac{p_X(t)}{p_E(t)} = \varepsilon_4(t), \quad \frac{a_h}{b_h}\left(\frac{J_I(t)}{J_X(t)}\right)^{e_h-1} - \frac{p_I(t)}{p_X(t)} = \varepsilon_5(t),$$

$$\frac{a_g}{b_g}\left(\frac{C_I(t)}{C_X(t)}\right)^{e_g-1} - \frac{p_I(t)}{p_X(t)} = \varepsilon_6(t)$$

и будем минимизировать среднеквадратичную погрешность

$$(37) \qquad \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{6}\varepsilon_i(t)^2 \to \min, \text{ где } T \text{ – число наблюдений}$$

по $X(t)$, $C_X(t)$, $J_X(t)$, $C_I(t)$, $J_I(t)$, $p_X(t)$, a_f, b_f, a_h, b_h, a_g, $b_g > 0$, e_f, e_h, e_g, $\varepsilon_i(t)$, $i = 1...6$, $t = 1...T$ при ограничениях (27)–(29) и (34)–(36).

В разделе 5 мы увидим, что ошибки $\varepsilon_i(t)$, получаемые при минимизации функционала (37) при реальных статистических данных, достаточно малы для того, чтобы соотношения (25)–(29) можно было с успехом использовать в любой реальной на сегодня макромодели экономики России. Поскольку другие блоки макромодели неизбежно внесут дополнительные ошибки, борьба за улучшение достигнутого качества приближения в соотношениях (25)–(26), например, путем какого-либо взвешивания ошибок в критерии (37) представляется излишней на данном этапе исследований.

Ограничения-равенства (27)–(29) в задаче (37) позволяют исключить часть переменных и свести задачу с $(9 + 6T)$ переменными к задаче с $(9 + 2T)$ неизвестными, которыми оказываются параметры производственных функций и два ряда $C_X(t)$ и $p_X(t)$. Тем не менее задача остается достаточно сложной, поэтому мы использовали общие методы оптимизации встроенные в системы Maple и Gauss.

6. Использованные данные и результаты идентификации

Для идентификации использовались *несглаженные* квартальные данные по основному макроэкономическому балансу в текущих основных ценах (номинальные) и в основных среднегодовых ценах 2003 г. (реальные) за период с I квартала 2000 г. по III квартал 2009 г. [5] (всего 39 наблюдений). Эти данные позволили получить прямым вычислением ряды (32).

Вычисленные параметры функций (33) приведены в табл. 1, где во второй строке указаны оценки и стандартные отклонения (в скобках), в третьей строке указаны уровни значимости каждого отдельного параметра при нулевой гипотезе о равенстве параметра нулю (p-value). Среднеквадратичное отклонение (среднее $\varepsilon_i^2(t)$) равно 0,014.

Таблица 1.

Оценки параметров дезагрегирующих функций

	a_h	a_g	a_f	b_h	b_g	b_f	e_h	e_g	e_f
Оценки (стандартное отклонение)	0,25 (0,24)	0,18 (0,16)	0,58 (0,07)	0,75 (0,15)	0,66 (0,16)	0,24 (0,07)	0,00 (0,67)	−0,31 (0,70)	−0,32 (0,26)
p-value	0,28	0,27	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,66	0,23

Для получения стандартных отклонений использовался дельта-метод [1]. На основании оценок стандартных отклонений тестируются гипотезы на равенство нулю коэффициентов производственных функций (33), т.е. проверяется их значимость. Коэффициенты a_h и a_g, стоящие перед импортными компонентами в производственных функциях *инвестора* и *потребителя*, оказываются незначимыми на 10-процентном уровне значимости. Остальные коэффициенты перед факторами производства a_f, b_f, b_h, b_g не равны нулю на 1-процентном уровне значимости, чего нельзя сказать о степенных параметрах e_h, e_g, e_f. Гипотезы о равенстве нулю элементов рядов $Y_C(t)$ и $p_X(t)$ отвергаются на 1-процентном уровне значимости.

Хотя дезагрегирование ОМБ предназначено для использования в более полной модели экономики России, содержательное рассмотрение его результатов представляет определенный интерес.

Эластичность замещения внутреннего товара экспортным равна 0,76, т.е. функция $f(X,E)$ выпукла вверх, и реализуется случай (22). Эластичность замещения внутреннего товара импортным в инвестиционном и потребительском секторах равна 1,003 и 0,763 соответственно. Это, грубо говоря, означает, что при росте относительной цены импорта к внутреннему продукту на 1% соотношение использования импортного и внутреннего продуктов упадет на 1,003% и 0,763% в инвестиционном и потребительском секторах соответственно.

Рис. 3–8 иллюстрируют достигнутую точность выполнения идентифицируемых равенств (234 равенства «подгоняются» за счет выбора 87 неизвестных).

Рис. 3–5 показывают, что собственно дезагрегирующие соотношения (25), (33) выполняются практически точно, причем на периоде, включающем кризисный 2009 г., когда экспорт и импорт резко упали. Это, кроме всего прочего, говорит о том, что конкретный способ (37), которым мы свертывали ошибки отдельных уравнений в оценочный функционал, скорее всего, не играл особой роли.

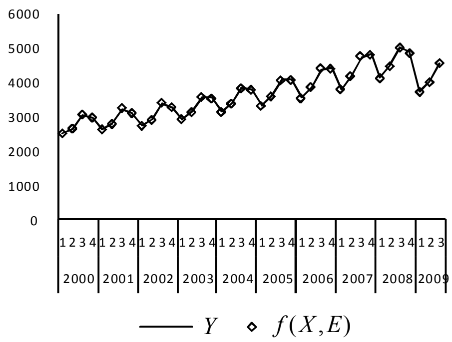

Рис. 3. Динамика реального ВВП и его модельного выражения через реальный экспорт и модельный ряд производства внутреннего продукта

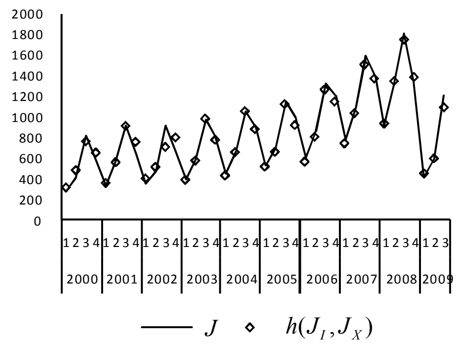

Рис. 4. Динамика реального валового накопления и его модельного выражения через использование импортного и внутреннего продукта в связи с накоплением

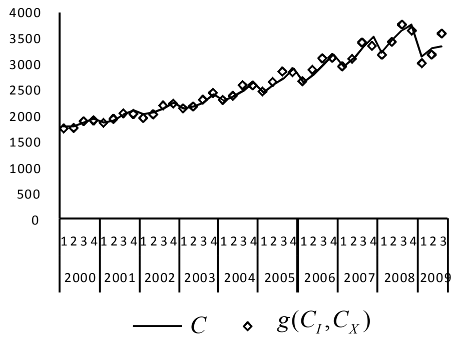

Рис. 5. Динамика реального конечного потребления и его модельного выражения через использование импортного и внутреннего продукта в связи с потреблением

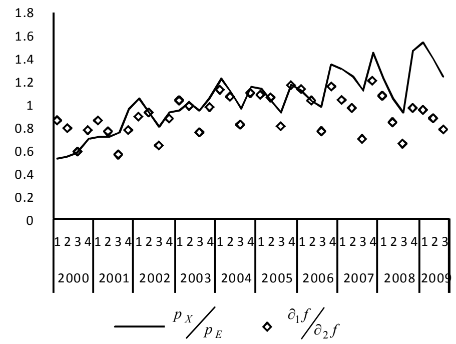

Рис. 6. Отношение дефляторов и отношение предельных возможностей замещения внутреннего и экспортного продуктов при производстве

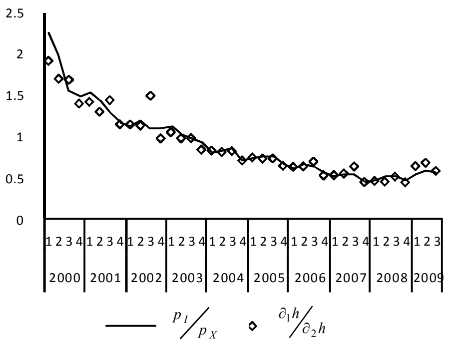

Рис. 7. Отношение дефляторов и отношение предельных полезностей для инвестора

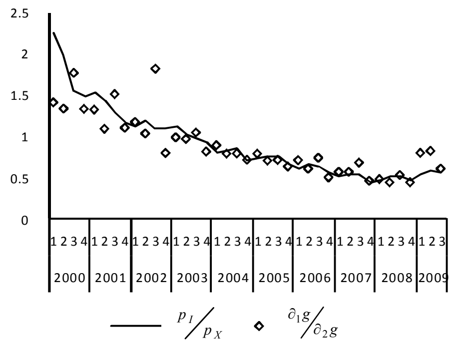

Рис. 8. Отношение дефляторов и отношение предельных полезностей для потребителя

Условия рациональности (26), как показывают рис. 6–8, выполняются менее точно, но и в этом случае обе стороны этих условий имеют как общий нетривиальный тренд, так и общую фазу сезонных колебаний. Расхождения касаются в основном амплитуды колебаний. Расчеты по более реалистичным моделям общего равновесия показывают, что это расхождение может быть связано с тем, что в (26) не учтено влияние искажающих налогов (в первую очередь импортных и экспортных пошлин).

Если подходить к делу чисто эмпирически и отвлечься от введенных в модели ненаблюдаемых величин, то можно сказать, что соотношения (25)–(29) после идентификации функций $f(\cdot,\cdot)$, $g(\cdot,\cdot)$, $h(\cdot,\cdot)$ **неявно задают дополнительно к балансам** (2), (3) **четыре *нелинейных* связи между 10 наблюдаемыми рядами**[7]: реальным ВВП

[7] Формально 11 соотношений (25)–(29) после исключения шести ненаблюдаемых задают пять связей между наблюдаемыми, но одна из них в силу утверждения 1 эквивалентна балансу (3).

$Y(t)$, валовым накоплением $J(t)$, конечным потреблением $C(t)$, экспортом $E(t)$, импортом $I(t)$ и их дефляторами $p_Y(t), p_J(t), p_C(t), p_E(t), p_I(t)$. И **эти зависимости достаточно точно выполняются на статистике, сохраняющей сезонные колебания, на протяжении 39 кварталов, включая кризис**! Во всяком случае, это говорит против часто высказываемых сомнений в качестве официальной статистики. Чтобы такие связи обнаруживались, статистика, по меньшей мере, должна быть органичным последовательно построенным целым.

Введенные ненаблюдаемые величины показывают, что выявленные связи не противоречат экономической теории (см. раздел 2), хотя сами эти ненаблюдаемые величины выглядят несколько необычно с точки зрения привычных статистических данных. Напомним, что мы связали части промежуточного продукта не с производством, а с конечным использованием.

В заключение отметим, что предложенная методика в настоящее время проходит опробование в новой версии модели межвременного равновесия экономики России, разрабатываемой по заказу Центрального банка РФ. В этой модели дефляторы импорта $p_I(t)$ и экспорта $p_E(t)$ считаются экзогенными величинами, реальные величины ВВП $Y(t)$, накопления $J(t)$ и потребления $C(t)$ (точнее, их зависимость от цен-дефляторов) определяются эндогенно другими соотношениями модели, а пять величин – дефляторы $p_Y(t)$, $p_J(t)$, $p_C(t)$, а также реальные объемы экспорта $E(t)$ и импорта $I(t)$ – определяются соотношениями (2), (25)–(29), (33) с коэффициентами, показанными в табл. 1.

* * *

Авторы выражают глубокую благодарность проф. Э.Б. Ершову и проф. Г.Г. Канторовичу за обсуждение, в результате которого прояснились многие содержательные аспекты исследования, выполненного первоначально довольно формально.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анатольев С.* Эконометрика для продолжающих. Курс лекций. М.: Российская экономическая школа, 2004.

2. *Андреев М.Ю., Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.А.* Новая технология моделирования экономики и модель современной экономики России. М.: МИФИ, 2007.

3. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996.

4. *Поспелов И.Г.* Моделирование российской экономики в условиях кризиса // Вопросы экономики. 2009. №11. С. 50–75.

5. Федеральная служба государственной статистики. (http://www.gks.ru)

6. *Шананин А.А.* Проблема интегрируемости и обобщенный непараметрический метод анализа потребительского спроса // Труды МФТИ. Т. 4. 2009. С. 84–96.

7. *Armington P.S.* A Theory of Demand for Products Distinguished by Place of Production: International Monetary Fund Staff Papers 16. 1969. P. 159–176.

8. *Dixon P.B., Parmenter B. R., Sutton J., Vincent D.P.* ORANI: A Multisectoral Model of the Australian Economy. Amsterdam: North Holland, 1982.

9. *Dixon P.B., Rimmer M.T.* Forecasting and Policy Analysis with a Dynamic CGE Model of Australia: Monash University Center of Policy Studies Working Paper № OP-90. June 1998. (http://www.monash.edu.au/policy/)

10. *Lloyd P.J., Zhang X.-G.* The Armington Model // Government of the Commonwealth of Australia – Productivity Commission: Productivity Commission Staff Working Paper. January 2006.