ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2011, том 438, № 4, с. 1–4

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.816

СУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО НА ОСНОВЕ УЧЕТА ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО НАБОРА ЧИСЛОВОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ОТНОШЕНИИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

© 2011 г. В. Д. Ногин, О. В. Басков

Представлено академиком С.К. Коровиным 21.01.2011 г.

Поступило 17.02.2001 г.

Многие прикладные задачи экономического и технического характера могут быть сформулированы в виде задачи многокритериального выбора с несколькими числовыми функциями. Специфика многокритериальных задач заключается в том, что лицо, принимающее решение (ЛПР), приступая к выбору, как правило, не в состоянии четко выразить свои интересы и предпочтения, на основе которых следует сделать этот выбор. Тем самым ЛПР, начиная поиск множества (в частном случае – одноэлементного) “наилучших” элементов, не располагает точным определением этого понятия. Часто эти “наилучшие” элементы выявляются в ходе принятия решения на основе имеющейся информации о предпочтения ЛПР.

Предложено много процедур и методов решения многокритериальных задач в зависимости от типа и характера информации о предпочтениях ЛПР [1, 2]. Нередко эти процедуры носят эвристический характер и приводят к принципиально различным “наилучшим” решениям. По мнению подавляющего большинства исследователей “наилучшие” решения следует искать в множестве парето-оптимальных (эффективных, компромиссных) вариантов. Это обстоятельство нашло свое выражение в принципе Эджворта–Парето, сравнительно недавно получившем аксиоматическое обоснование [3]. Тем самым, проблема выбора множества “наилучших” вариантов может быть переформулирована как проблема сужения множества Парето.

Рассмотрим модель многокритериального выбора [3], которая содержит множество исходных вариантов X, векторный критерий $y = f(x) = (f_1(x), f_1(x), \ldots, f_m(x))$ и асимметричное бинарное отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве X. Пусть $Y = f(X)$, а $\succ_Y$ есть бинарное отношение, заданное на множестве Y и индуцированное отношением $\succ_X$ следующим образом: $x_1 \succ_X x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \succ_Y \succ_Y f(x_2)$ для всех $x_1 \in \tilde{x}_1$, $x_2 \in \tilde{x}_2$; $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$, где $\tilde{X}$ – совокупность классов эквивалентности, порожденных отношением эквивалентности $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ на множестве X. Множества выбираемых (“наилучших”) вариантов и векторов обозначим $C(X)$ и $C(Y) = f(C(X))$ соответственно. Это те множества, которые подлежат нахождению в процессе выбора. Множество парето-оптимальных вариантов относительно векторного критерия f на множестве X обозначается $P_f(X)$.

Сузить множество Парето ($P_f(X)$, т.е. удалить из рассмотрения некоторые парето-оптимальные элементы, можно при наличии дополнительной информации о предпочтениях ЛПР. Наиболее надежными и простыми с точки зрения их получения являются сведения о готовности ЛПР идти на определенный компромисс. Этот компромисс нередко заключается в том, что ЛПР соглашается понести некоторые потери по каким-то непринципиальным критериям ради получения определенной выгоды по критериям, которые имеют приоритетное значение для данного ЛПР.

Учет подобной информации об отношении предпочтения ЛПР, которое изначально обычно полностью неизвестно самому ЛПР, положено в основу аксиоматического подхода к решению проблемы сужения множества Парето, развиваемого почти три последних десятилетия [3]. Сначала было установлено, каким образом следует использовать единственное сообщение (один “квант информации”) в виде двух наборов чисел, один из которых указывает верхние допустимые пределы потерь для ЛПР по одной группе непринципиальных критериев, а другой – величины выигрышей для принципиально важных критериев, большие или равные которым ЛПР желало бы получить, идя на компромисс. В последующем были исследованы возможности использования тех или иных наборов такого рода сообщений (нескольких “квантов информации”) для сужения множества Парето.

Санкт-Петербургский государственный университет

На геометрическом языке наличие "кванта информации" об отношении предпочтения ЛПР означает [3] выполнение соотношения $u \succ_Y \mathbf{0}$, при некотором $u \in N^m$, где N^m – множество m-мерных векторов, имеющих по крайней мере одну строго положительную и одну строго отрицательную компоненты. Задание же набора "квантов информации" равносильно выполнению соотношения $u^i \succ_Y \mathbf{0}$, $i = 1, 2, ..., k$.

В данной работе предлагаются два универсальных алгоритма (два метода), которые базируется на учете произвольного конечного набора "квантов информации" для сужения множества Парето. Первый (геометрический) алгоритм, принадлежащий первому автору, заключается в решении задачи выпуклого анализа, сформулированной в [3]. Второй (алгебраический) алгоритм, разработанный вторым автором, предполагает последовательный учет имеющегося набора "квантов" на основе линейного оператора, используемого при учете одного "кванта" в теореме 3.5 из [3]. Далее будут считаться выполненными четыре аксиомы "разумного" выбора, сформулированные в [3].

Упомянутая геометрическая задач выпуклого анализа заключается в следующем. Имеется конечный набор векторов $a^1, a^2, ..., a^k \in \mathbf{R}^m$, $k > m$, который порождает острый выпуклый m-мерный конус M. Требуется построить минимальный (по числу) набор векторов $b^1, b^2, ..., b^n$, порождающих конус $\{y \in R^m \mid \langle a^i, z\rangle \geq 0, i = 1, 2, ..., k\}$, двойственный конусу M. Угловые скобки здесь означают скалярное произведение векторов. Следует отметить, что искомые векторы $b^1, b^2, ..., b^n$ всегда существуют и определяются с точностью до положительного множителя.

Для решения этой задачи предлагается следующий алгоритм, на входе которого подается набор векторов $a^1, a^2, ..., a^k$, а на выходе (в памяти) образуется искомый набор векторов.

А л г о р и т м 1. Ш а г 1 (открытие цикла по перебору векторов). Открыть цикл по переменной i от 1 до C_k^{m-1} генерирования всех возможных поднаборов из $m - 1$ векторов набора $a^1, a^2, ..., a^k$.

Ш а г 2 (проверка на линейную независимость). Если текущий i-й поднабор $a^{i1}, a^{i2}, ..., a^{i(m-1)}$, выбранный из $a^1, a^2, ..., a^k$, линейно-зависим, то увеличить номер i на единицу и вернуться к началу шага 2. Когда увеличение номера i невозможно, т.е. $i = C_k^{m-1}$, необходимо перейти к шагу 5. В противному случае, т.е. когда указанный поднабор линейно-независим, выполнить шаг 3.

Ш а г 3 (построение ортогонального вектора). Образовать из вектор-столбцов поднабора $a^{i1}, a^{i2}, ..., a^{i(m-1)}$ квадратную матрицу D n-го порядка, приписав к указанным столбцам справа любой вектор из множества $I_i = \{a^1, a^2, ..., a^k\} \backslash \{a^{i1}, a^{i2}, ..., a^{i(m-1)}\}$, образующий вместе с $a^{i1}, a^{i2}, ..., a^{i(m-1)}$ линейно-независимую систему. Найти последний столбец матрицы $(D^T)^{-1}$, где T – символ транспонирования. Найденный вектор-столбец (обозначим его y^i) следует запомнить.

Ш а г 4 (проверка вектора y^i на принадлежность искомому множеству $b^1, b^2, ..., b^n$). Вычислить скалярные произведения $\langle a^j, y^i\rangle$ для всех векторов $a^j \in I_i$. Если хотя бы одно такое скалярное произведение окажется отрицательным, то удалить из памяти вектор y^i. Увеличить номер i на единицу и перейти на шаг 2 (когда такое увеличение невозможно, выполнить шаг 5).

П р и м е ч а н и е. Для сокращения перебора и исключения в памяти записи одинаковых (с точностью до положительного множителя) искомых векторов для каждого записанного в память вектор y^i, на шаге 4 следует запоминать соответствующий ему набор Y_i из всех векторов $a^1, a^2, ..., a^k$, ортогональных вектору y^i (т.е. тех a^j, для которых $\langle a^j, y^i\rangle = 0$). А на шаге 2 всякий раз в случае, когда текущий поднабор $a^{i1}, a^{i2}, ..., a^{i(m-1)}$ оказывается подмножеством хотя бы одного образованного ранее множества Y_i, пропускать такой поднабор, сразу увеличивая номер i на единицу.

Ш а г 5 (завершение работы алгоритма). В результате выполнения полного цикла по переменной i в памяти будут записаны искомые вектор-столбцы $b^1, b^2, ..., b^n$ (в ходе выполнения алгоритма они получали обозначение y^i).

Т е о р е м а 1. *Векторы $b^1, b^2, ..., b^n$, построенные в результате конечного алгоритма* 1, *образуют минимальный набор векторов*, *порождающих конус*, *двойственный M-мерному острому выпуклому конусу M, порожденному набором векторов $a^1, a^2, ..., a^k \in \mathbf{R}^m$, $k > m$.*

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены четыре аксиомы "разумного" выбора и задан непротиворечивый набор "квантов информации" $u^i \succ_Y 0$, $i = 1, 2, ..., k$* [3].

Тогда для любого множества выбираемых вариантов $C(X)$ имеют место включения

$$C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X). \tag{1}$$

Здесь $P_g(X)$ – множество парето-оптимальных вариантов на исходном множестве X относительно нового n-мерного векторного критерия $g(x) = (\langle b^1, f(x)\rangle, \langle b_2, f(x)\rangle, \langle b^n, f(x)\rangle)$, $n \geq m$, где векторы $b^1, b^2, ..., b^n$ получены в результате применения алгоритма 1 *к набору*, *состоящему из векторов*, *задающих* "*кванты информации*" $u^1, u_2, ..., u_k$ *вместе с m единичными ортами пространства* $\mathbf{R}^m$.

Согласно теореме 2, применяя алгоритм 1, следует построить новый векторный критерий g, относительно которого новое множество Парето дает оценку сверху (1) для неизвестного множества выбираемых вариантов $C(X)$ с учетом имеющегося набора "квантов информации".

Алгебраический подход максимально использует специфику заданного набора "квантов информации" $u^i \succ_Y \mathbf{0}$, $i = 1, 2, ..., k$, и носит последовательный характер, т.е. учет информации производится строго в порядка нумерации имеющихся "квантов".

Пусть имеется вектор $u^1 = (u_1, u_2, ..., u_m)$. Введем множества $A = \{i|u_i > 0\}$, $B = \{j|u_j < 0\}$, $C = \{l|u_l = 0\}$. Когда множества A и B непустые, вектор u_1 порождает "кванта информации" об отношении предпочтения, если $u^1 \succ_Y \mathbf{0}$. Для его учета в теореме 3.5 работы [3] предлагается построить новый векторный критерий g, компоненты которого связаны с компонентами критерия f следующими соотношениями (порядок компонент не существен):

$$g_i = f_i \quad \forall i \in A \cup C,$$
$$g_{ij} = u_i f_j - u_j f_i \quad \forall (i, j) \in A \times B.$$

В матричной форме эти соотношения можно переписать в виде $g = Tf$, где T – прямоугольная матрица соответствующего размера.

Построенный указанным способом критерий g порождает новое множество векторов $Z = g(X)$. На нем индуцировано новое отношение $\succ_Z$, связанное со "старым" отношением следующим образом: $x' \succ_X x'' \Leftrightarrow g(x') \succ_Z g(x'')$. В дальнейшем для краткости индекс (символ множества, на котором действует рассматриваемое отношение) будем опускать. При желании его легко восстановить по контексту. Можно доказать, что индуцированное отношение $\succ$ на новом множестве векторв обладает всеми свойствами, гарантирующими выполнение четырех аксиом "разумного" выбора.

Пусть теперь имеется набор "квантов информации" $u^i \succ \mathbf{0}$, $i = 1, 2, ..., k$. После учета первого "кванта" (указанным выше способом) и построения линейного отображения T оставшимся векторам $u^i \in Y$ в новом множестве возможных векторов поставим в соответствие их образы (векторы) $Tu^i \in Z$. Можно показать, что $u^i \succ \mathbf{0} \Leftrightarrow Tu^i \succ \mathbf{0}$, $i = 1, 3, ..., k$. Это открывает возможность учета каждого последующего "кванта информации" в пространстве образов отображения T.

Чтобы $Tu^i \succ \mathbf{0}$, $i = 2, 3, ..., k$, можно было рассматривать как соотношения, задающие "кванты информации", необходимо, чтобы каждый из векторов Tu^i имел хотя бы одну положительную и хотя бы одну отрицательную компоненты. Если среди векторов есть такой, все компоненты которого неположительны, то оказывается, что исходный набор "квантов" противоречив, т.е. соотношения $u^i \succ \mathbf{0}$ в рамках аксиом "разумного" выбора одновременно выполняться не могут. Если же среди векторов Tu^i есть вектор с неотрицательными компонентами. то его можно отбросить, так как дополнительной информации он не несет, поскольку в условиях выполнения указанных аксиом всякий ненулевой вектор v с неотрицательными компонентами удовлетворяет соотношению $v \succ \mathbf{0}$.

Таким образом, задача последовательного учета s "квантов информации" об отношении предпочтения сводится к задаче учета предыдущих $s - 1$ "квантов" с последующим применением теоремы 3.5 из [3] к соответствующим образам.

Перейдем к изложению алгоритма 2 в последовательной форме. Пусть к шагу $s \geq 1$ уже учтены $s - 1$ "квантов информации" и остаются неучтенными последующие "кванты" $T_{s-1}...T_1u^i \succ \mathbf{0}$, $i = s$, $s + 1, ..., k$. В левой части последнего соотношения записано произведение матриц $T_{s-1}, T_{s-2}, ..., T_1$ и вектор u^i.

А л г о р и т м 2. Ш а г s.1. В соответствии с теоремой 3.5 из [3] построить линейное преобразование T_s, учитывающее "квант информации" $u^s \succ \mathbf{0}$.

Ш а г s.2. Построить векторы T_s, $T_{s-1}...T_1u^i$, $i = 1$, $s + 1, ..., k$.

Ш а г s.3. Отбросить векторы T_{s-1}, t_{s-2}, $t_1u^i \geq \mathbf{0}$.

Ш а г s.4. Если среди построенных на шаге s.2 векторов есть такие, все компоненты которых неположительны, то завершить работу алгоритма 2 с сообщением о противоречивости исходного набора "квантов информации".

Шаг s.5. Если есть оставшиеся неучтенные "кванты", перейти на шаг $s + 1$. Иначе завершить работу алгоритма 2, считая результатом матрицу $T_sT_{s-1}...T_1$.

Т е о р е м а 3. П*усть выполнены четыре аксиомы "разумного" выбора* [3]. *Если набор "квантов информации"* $u^i \succ_Y \mathbf{0}$, $i = 1, 2, ..., k$, *противоречие, то алгоритм* 2 *завершается выдачей сообщения о противоречивости. Если указанный набор "квантов" непротиворечив, то алгоритм* 2 *заканчивает свою работу построением такой матрицы* Q, *что для любого множества выбираемых вариантов* $C(X)$ *справедливы включения* (1), *где* $P_g(X)$ – *множество парето-оптимальных вариантов на множестве* X *относительно векторного критерия* $g(x) = Qf(x)$. *При этом множество* $P_g(X)$ *не зависит от нумерации "квантов информации"*.

Итак, алгоритм 1 позволяет найти минимальный по числу компонент векторный критерий g, для которого верны включения (1). Алгоритм 2 генерирует новый векторный критерий g, который, вообще говоря, отличается от полученного с помощью алгоритма 1, причем размерность последнего критерия может оказаться заметно выше минимальной. В дальнейшем предполагается продолжить изучение сформулированных выше алгоритмов и, в частности, модифицировать второй из них таким образом, чтобы в результате его работы исключались “лишние” компоненты векторного критерия.

Работа поддержана грантом РФФИ № 11–07–00449а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петровский А.Б.* Теория принятия решений. М.: Издат. центр “Академия”. 2009.
2. *Ногин В.Д.* Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. № 1. С. 98–112.
3. *Ногин В.Д.* Принятие решений в многокритериальной среде. Количественный подход. 2 изд. М.: Физматлит, 2005.