English translation is provided below.

Магистратура по математике
факультета математики НИУ ВШЭ
Требования к поступающим

Вступительные испытания на магистерскую программу по математике состоят из письменного экзамена по математике и квалификационного теста по английскому языку. Экзамен по математике содержит семь задач. Каждая задача оценивается в 20 баллов. Экзамен оценивается по 100-балльной системе. Оценка вычисляется как минимум из 100 и набранного числа баллов. Минимальный зачетный балл по математике равен 21. Продолжительность экзамена по математике — 300 минут. Результаты теста по английскому языку учитываются только как зачет или незачет и не учитываются при конкурсном отборе абитуриентов. Минимальный зачетный балл по английскому языку равен 31.

Поступающие в магистратуру факультета математики должны продемонстрировать знание следующих тем:

(1) элементы комбинаторики (сочетания, перестановки) и теории вероятностей (независимость, условные вероятности).
(2) Теория групп: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечнопорожденных абелевых групп. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные группы, группы симметрий, матричные группы, группы вычетов.
(3) Теория колец: кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.
(4) Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность.
(5) Теория полей: поля, характеристика, структура конечных полей.
(6) Топология: открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}^n$. Компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения, равномерная непрерывность, равномерная сходимость. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Накрытия, гомотопии, триангуляции, фундаментальная группа.
(7) Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов.

(8) Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, теорема о производной сложной функции, ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.
(9) Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега в $\mathbb{R}^n$. Теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.
(10) Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники).
(11) Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, интеграл Коши, теорема о вычетах, лемма Шварца.
(12) Дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности, решение уравнений методом разделения переменных, линейные уравнения первого и второго порядков, однородные уравнения. Уравнения с частными производными первого порядка: метод характеристик.

Master of Science Programme in Mathematics
Faculty of Mathematics, NRU HSE
Admission requirements

Admission tests for the Master of Science programme in Mathematics include a written exam in Mathematics and a qualifying English language test. Mathematics exam consists of seven problems. Each problem is worth 20 points. The exam grade is computed out of 100. It is equal to the minimum of 100 and the total number of points obtained. The lowest passing grade for the exam in Mathematics is 21. The duration of the exam is 300 minutes. The English language test results are accounted for as pass or fail only, and the grade obtained on the test is not used for ranking the candidates. The lowest passing grade for the English language test is 31.

All candidates for the M.Sc. positions in Mathematics at the Faculty of Mathematics, NRU HSE, must demostrate the knowledge of the following subjects:

(1) basics of combinatorics (combinations, permutations) and probability theory (independence, conditional probabilities).
(2) Group theory: groups, subgroups, cosets, homomorphisms, quotient groups, structure of finitely generated commutative groups. It is also required that basic examples of groups be known, including symmetric groups, alternating groups, symmetry groups, matrix groups, groups of residues.
(3) Theory of rings: rings, ideals, quotient rings, direct product of rings, the Chinese Remainder Theorem, Euclidean rings, unique factorization property, invertible, prime and irreducible elements, prime and maximal ideals. Particular examples known to the candidate must include complex numbers, Gaussian integers, rings of residues, rings of polynomials and formal power series, matrix rings.

(4) Linear algebra: vector spaces and linear maps, bases, dimension, systems of linear equations, Jordan normal form, characteristic and minimal polynomials, quadratic forms, positive definite forms.
(5) Fields, characteristic, structure of finite fields.
(6) Topology: open and closed subsets of $\mathbb{R}^n$. Compactness, connectivity, interior and closure, dense and nowhere dense sets. Continuous maps, uniform continuity, uniform convergence. The Intermediate Value Theorem. Coverings, homotopies, triangulations, fundamental group.
(7) Limits of sequences and limits of functions, convergence of series.
(8) Differential calculus: differentials of maps from $\mathbb{R}^m$ to $\mathbb{R}^n$, the Chain Rule, Taylor series, methods of finite-dimensional optimization, Lagrange multipliers.
(9) Integral calculus: Lebesgue measure and integral in $\mathbb{R}^n$. The Fubini theorem. Computations of arc lengths and surface areas using integrals.
(10) Geometry: affine and projective spaces, affine and projective maps, second degree curves (conics).
(11) Complex analysis: complex derivative, holomorphic functions, Cauchy integral, the Residue Theorem, the Schwartz lemma.
(12) Differential equations: the existence and uniqueness theorem, separation of variables, linear first and second order ODEs, homogeneous equations. First order partial differential equations: the method of charateristics.

Литература/Bibliography:

- Э.Б. Винберг, Курс алгебры, М: Факториал 1999
- А.Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль I, записки лекций `http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-1/m1_total.pdf`
- И.Р. Шафаревич, Основные понятия алгебры, Ижевск: РХД 1999
- И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971
- В.А. Зорич, Математический анализ, М: МЦНМО 2007
- А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976
- В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров, Геометрия, М: МЦНМО 1997
- Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ, Лань 2004
- В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Ижевск: РХД 2000
- В.И. Арнольд, Лекции об уравнениях с частными производными, М: Фазис 1999
- О.Я. Виро, О.А. Иванов, В.М. Харламов и Н.Ю. Нецветаев, Элементарная топология, СПГУ 2007 `http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/topoman/rus-book.pdf`
- M. Artin, Algebra, Addison Wesley 2010
- I. Kaplansky, Linear algebra and geometry, Dover Publications 2003
- W. Rudin, Real and complex analysis, McGraw-Hill 1986

- J. Munkres, Topology, Prentice Hall 2000
- V. Arnold, Ordinary differential equations, Springer 2006

Задачи для подготовки к вступительному экзамену

Practice problems for preparation to the entrance exam

1. Предположим, что группу можно представить в виде объединения двух подгрупп. Докажите, что одна из этих подгрупп совпадает со всей группой.

1. Suppose that a group is representable as a union of two subgroups. Prove that at least one of these subgroups coincides with the group.

2. Найдите σ^{2011}, где σ — следующая перестановка:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Find σ^{2011}, where σ is the following permutation:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Сколько перестановок из n элементов могут быть представлены в виде произведения двух (несовпадающих) транспозиций?

3. How many pernutations of n elements can be represented as a product of two (different) transpositions?

4. Сколько автоморфизмов у группы $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$?

4. How many automorphisms does the group $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ have?

5. Найдите порядок группы $GL_n(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов.

5. Find the order of the group $GL_n(\mathbb{F}_q)$, where $\mathbb{F}_q$ is the field with q elements.

6. Верно ли, что поле из четырех элементов изоморфно подполю поля из восьми элементов? Обоснуйте ответ.

6. Is it true that every field with four elements is isomorphic to a subfield of every field with eight elements? Rigorously justify your answer.

7. Найдите все обратимые элементы
   (1) в кольце многочленов над полем $\mathbb{C}$,
   (2) в кольце целых гауссовых чисел, то есть чисел вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, а $i = \sqrt{-1}$.

7. Find all invertible elements
   (1) in the ring of polynomials over $\mathbb{C}$,
   (2) in the ring of Gaussian integers, i.e. complex numbers of the form $a + bi$, where $a, b \in \mathbb{Z}$, and $i = \sqrt{-1}$.

8. Является ли идеал в (a) $\mathbb{C}[x]$, (b) $\mathbb{C}[[x]]$, (c) $\mathbb{Z}[[x]]$, порожденный элементом x, максимальным? Здесь $R[x]$ обозначает кольцо многочленов с коэффициентами в кольце R, а $R[[x]]$ — кольцо формальных степенных рядов над R.

8. Is the ideal in (a) $\mathbb{C}[x]$, (b) $\mathbb{C}[[x]]$, (c) $\mathbb{Z}[[x]]$, generated by x maximal? Here $R[x]$ denotes the ring of polynomials with coefficients in the ring R, and $R[[x]]$ denotes the ring of formal power series over R.

9. Пусть $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, где d — целое число, не являющееся полным квадратом. Докажите, что 2 не является простым элементом в R (т.е. неверно, что если ab делится на 2, то либо a, либо b делится на 2), однако, при $d \leq -3$, этот элемент неприводим в R (т.е. если $2 = ab$, то либо a, либо b обратим).

9. Set $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, where d is an integer that is not a complete square. Prove that 2 is not a prime in R (i.e. it is not true that if ab is divisible by 2, then a or b is divisible by 2), however, in the case $d \leq -3$, this element is irreducible in R (i.e. if $2 = ab$, then a or b is invertible).

10. Докажите, что многочлен $x^3 + 27x^2 + 5x + 97$ неприводим над целыми числами.

10. Prove that the polynomial $x^3 + 27x^2 + 5x + 97$ is irreducible over integers.

11. Конечно ли множество различных подполей в $\mathbb{C}$, изоморфных полю $\mathbb{R}$?

11. Is it true that there are only finitely many subfields of $\mathbb{C}$ isomorphic to the field $\mathbb{R}$?

12. Можно ли правильный 14-угольник построить циркулем и линейкой?

12. Is it possible to construct a regular 14-gon by means of a straighedge and a compass?

13. Найдите кубический многочлен с целыми коэффициентами, корнями которого являются квадраты корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

13. Find a cubic polynomial with integer coefficients, whose roots are squares of the roots of the polynomial $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

14. Чему равно произведение попарных разностей корней степени n из 1?

14. Compute the product of all pairwise differences of n-th degree roots of unity.

15. Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ, а минимальный μ, где

(1) $\chi(\lambda) = (\lambda^6 - 1)$, $\mu(\lambda) = (\lambda^3 - 1)$;
(2) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$;
(3) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^5(\lambda - 2)^5$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$?

Если да, приведите пример такой матрицы. Если нет, докажите.

15. Does there exist a matrix, whose characteristic polynomial is equal to χ, and whose minimal polynomial is equal to μ, where

(1) $\chi(\lambda) = (\lambda^6 - 1)$, $\mu(\lambda) = (\lambda^3 - 1)$;
(2) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$;
(3) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^5(\lambda - 2)^5$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$?

If the answer is yes, then give an example of such matrix. If the answer is no, then prove.

16. Найдите минимальный многочлен квадратной $n \times n$ матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & a_3 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

16. Find the minimal polynomial of the square $n \times n$ matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & a_3 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

17. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.

17. Prove that every open subset of $\mathbb{R}^n$ can be represented as a union of countably many closed sets.

18. Пусть A и B — подмножества в $\mathbb{R}$. Докажите, что подмножество $A \times B$ в $\mathbb{R}^2$ замкнуто тогда и только тогда, когда оба подмножества A и B замкнуты.

18. Let A and B be subsets of $\mathbb{R}$. Prove that the subset $A \times B$ of $\mathbb{R}^2$ is closed if and only if both sets A and B are closed.

19. Пусть C — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что существует такая последовательность $x_n \in C$, что любую точку множества C можно получить в качестве частичного предела этой последовательности.

19. Let C be a closed subset of $\mathbb{R}^n$. Prove that there exists a sequence $x_n \in C$ such that every point of the set C can be obtained as a partial limit of this sequence.

20. Отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *собственным*, если прообраз относительно f всякого компактного множества компактен. Докажите, что любой комплексный многочлен f, рассматриваемый как отображение плоскости комплексных чисел в себя, является собственным отображением.

20. A map $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is said to be *proper* if the full preimage of every compact set under f is compact. Prove that every complex polynomial f regarded as a self-map of the plane of complex numbers is a proper map.

21. (a) Существует ли непрерывное отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, такое, что $f(\mathbb{R}^2) = [0, 1]$, и множество $f^{-1}(x)$ ограниченно для любого $x \in [0, 1]$?

(b) Тот же вопрос при дополнительном предположении, что f монотонно, то есть прообраз всякого связного множества связен.

21. (a) Does there exist a contunuous map $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ such that $f(\mathbb{R}^2) = [0, 1]$, and the set $f^{-1}(x)$ is bounded for every $x \in [0, 1]$?

(b) The same question under the additional assumption that f is monotone, i.e. the preimage of every connected set is connected.

22. Пусть пространство X получается из двумерного тора склеиванием двух точек в одну. Найдите фундаментальную группу пространства X.

22. Suppose that the topological space X is obtained from the two-dimensional torus by identifying two different points of it. Find the fundamental group of the space X.

23. Пусть A — множество в $\mathbb{R}^3$, являющееся объединением оси z, единичной окружности в плоскости x, y и точки $(3, 3, 0)$. Докажите, что фундаментальная группа множества $\mathbb{R}^3 - A$ содержит подгруппу, изоморфную группе $\mathbb{Z}$.

23. Let A be a subset of $\mathbb{R}^3$ that is the union of the z-axis, the unit circle in the x, y-plane and the point $(3, 3, 0)$. Prove that the fundamental group of the set $\mathbb{R}^3 - A$ contains a subgroup isomorphic to the group $\mathbb{Z}$.

24. Вычислите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ с точностью до 0,01. Дайте строгое обоснование того, что ответ получен с заданной точностью.

24. Compute the sum of the series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ with two decimal digits. Rigorously justify that your answer satisfies the required precision.

25. Докажите, что

$$\limsup_{n\to\infty} \sin(nx) = 1.$$

для почти всех x по мере Лебега.

25. Prove that

$$\limsup_{n\to\infty} \sin(nx) = 1.$$

for almost all x with respect to the Lebesgue measure.

26. Докажите, что всякую непрерывно дифференцируемую функцию на числовой прямой можно представить в виде разности двух непрерывных строго возрастающих функций.

26. Prove that every continuous differentiable function on $\mathbb{R}$ can be represented as a difference of two continuous strictly increasing functions.

27. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — интегрируемая функция. Докажите, что существует такое число $t \in [0, 1]$, что

$$\int_0^t f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx.$$

27. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an integrable function. Prove that there is a number $t \in [0, 1]$ such that

$$\int_0^t f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx.$$

28. Пусть A и B — матрицы $n \times n$. Найдите смешанную производную $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ матрично-значной функции $f(x, y) = \exp(xA + yB)$ при $x = y = 0$. (Производные функций со значениями в матрицах определяются точно так же, как производные числовых функций).

28. Let A and B be $n \times n$ matrices. Compute the mixed derivative $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ of the matrix-valued function $f(x, y) = \exp(xA+yB)$ at the point $x = y = 0$. (Derivatives of matrix-valued functions are defined in the same way as derivatives of ordinary real or complex-valued functions).

29. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема почти всюду (в смысле меры Лебега), и почти всюду $f'(x) = 1$. Следует ли отсюда, что $f(1) - f(0) = 1$? Если да, докажите. Если нет, приведите контрпример.

29. A function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is differentiable almost everywhere (in the sense of the Lebesgue measure), and $f'(x) = 1$ almost everywhere. Does this imply that $f(1) - f(0) = 1$? If the answer is yes, then prove. If the answer is no, then give a counterexample.

30. Существуют ли гладкие функции f_1, f_2, $f_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, такие, что множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

гомеоморфно вещественной проективной плоскости, и при этом в каждой точке множества X дифференциалы функций f_1, f_2, f_3 линейно независимы?

30. Do there exist smooth functions f_1, f_2, $f_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ such that the set

$$X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

is homeomorphic to the real projective plane, and, at every point of the set X, the first differentials of the functions f_1, f_2, f_3 are linearly independent?

31. Вычислите интеграл

$$\int \max(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

по кубу $0 \le x_i \le 1$, $i = 1, \ldots, n$.

31. Compute the integral

$$\int \max(x_1, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

over the cube $0 \le x_i \le 1$, $i = 1, \dots, n$.

32. Пусть $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно определенная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Вычислите интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-q(x_1, \dots, x_n))\, dx_1 \dots dx_n.$$

32. Let $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a positive definite quadratic form on $\mathbb{R}^n$:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Compute the integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-q(x_1, \dots, x_n))\, dx_1 \dots dx_n.$$

33. Рассмотрим функцию f, голоморфную в единичном диске $|z| \le 1$. Докажите, что

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{|z|=1} f(z) \log(z) dz,$$

где в левой части интегрирование ведется по прямолинейному отрезку $[0, 1]$, а в правой — по единичной окружности с направлением обхода против часовой стрелки (делается только один обход, начинающийся в 1). Выбирается ветвь логарифма, действительная на положительной полуоси действительной прямой.

33. Consider a function f that is holomorphic in the unit disk $|z| \le 1$. Prove that

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{|z|=1} f(z) \log(z) dz,$$

where in the left-hand side, the integration is performed over the straight line interval $[0, 1]$, and in the right-hand side over the unit circle traversted once in the counterclockwise direction starting at 1. We choose the branch of the logarithm that takes real values on the positive ray in the real line.

34. Известно, что все корни комплексного многочлена имеют положительную мнимую часть. Докажите, что все корни его производной тоже имеют положительную мнимую часть.

34. It is known that all roots of a complex polynomial have positive imaginary part. Prove that all roots of its derivative also have positive imaginary part.

35. Пусть $f \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен степени ≥ 2. Докажите, что сумма вычетов 1-формы $dz/f(z)$ по всем комплексным нулям многочлена f равна нулю. Верно ли это утверждение, если f имеет степень 1?

35. Let $f \in \mathbb{C}[z]$ be a polynomial of degree ≥ 2. Prove that the sum of residues of the 1-form $dz/f(z)$ over all complex roots of the polynomial f is equal to zero. Is this true in the case, where f has degree 1?

36. Вычислите интеграл
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx.$$

36. Compute the integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx.$$

37. Пусть f_1, f_2, f_3, $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — четыре многочлена степени 2 на плоскости (не обязательно однородных). Докажите, что если четыре точки A_1, A_2, A_3, $A_4 \in \mathbb{R}^2$ лежат на одной прямой, то определитель матрицы $(f_i(A_j))$, $i, j = 1, \ldots, 4$, равен нулю.

37. Let f_1, f_2, f_3, $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be four second degree polynomials on the plane (not necessarily homogeneous). Prove that if four points A_1, A_2, A_3, $A_4 \in \mathbb{R}^2$ belong to the same line, then the determinant of the matrix $(f_i(A_j))$, $i, j = 1, \ldots, 4$, is equal to zero.

38. Сколько существует 9-значных чисел, сумма цифр которых нечетна?

38. How many 9-digit numbers are there, whose sum of digits is odd?

39. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение
$$xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11?$$

39. Find the number of solutions of the following equation in positive integers:
$$xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

40. Баскетболист Косоруков собирается выполнить серию из 100 бросков по кольцу. При первом броске он всегда попадает, при втором — всегда промахивается, а при каждом последующем броске вероятность попадания равна проценту попаданий при всех предыдущих бросках из этой серии. Какова вероятность того, что он попадет ровно 50 раз?

40. Basketball player Kosorukov makes a series of 100 shots. When shooting the first ball, he always makes it to the basket; when shooting the second ball, he always misses. For all subsequent shots, the probability of a successful shot is the number of previous successful shots divided by the number of all shots already made. What is the probability that he misses the basket exactly 50 times?

41. Найдите максимальное возможное число точек пересечения диагоналей выпуклого n-угольника.

41. Find the maximal possible number of intersection points between the diagonals of a convex n-gon.

42. Можно ли на плоскости расположить окружность и параболу таким образом, чтобы их пересечение состояло ровно из двух точек, причем в одной окружность касалась бы параболы, а в другой — нет?

42. Is it possible to place a circle and a parabola in the plane so that their intersection consist of exactly two points, one point being a point of tangency, and the other point a transveral intersection?

43. Составьте дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют все окружности на плоскости (рассматриваемые локально, вблизи точек с невертикальными касательными, как графики функций от одной переменной).

43. Form a differential equation satisfied by all circles in the plane that are viewed locally, near points with non-vertical tangent lines, as graphs of one-variable functions.

44. Найдите систему уравнений

$$\ddot{r} = f(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}), \quad \ddot{\phi} = g(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi})$$

в полярных координатах, решения которой в декартовых координатах (x, y) имеют вид $x = at + b$, $y = ct + d$, где a, b, c, d — произвольные числа, не зависящие от t.

44. Find a system of equations

$$\ddot{r} = f(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}), \quad \ddot{\phi} = g(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi})$$

in polar coordinates, whose solutions in the Cartesian coordinates (x, y) have the form $x = at + b$, $y = ct + d$, where a, b, c, d are arbitrary numbers independent of t.

45. Найдите производную решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} + \theta x = te^{-t}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ по параметру θ при $\theta = 0$.

45. Find the derivative of the solution of the differential equation

$$\ddot{x} - \dot{x} + \theta x = te^{-t}$$

subject to the initial condition $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ by the parameter θ for $\theta = 0$.