ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2012, том 446, № 1, с. 21–24

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.1

ГЛОБАЛЬНЫЕ ДОПУСКИ В ЗАДАЧАХ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С АДДИТИВНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ

© 2012 г. Б. И. Гольденгорин, П. М. Пардалос, В. В. Чистяков

Представлено академиком С.Н. Васильевым 05.03.2012 г.

Поступило 30.03.2012 г.

После получения оптимального решения задачи комбинаторной оптимизации (ЗКО) естественным шагом является анализ его чувствительности, т.е. выяснение зависимости этого решения от изменения исходных данных. Интерес к анализу чувствительности обусловлен следующими обстоятельствами:

1) исходные данные ЗКО могут быть заданы неточно или иметь естественную неопределенность. В этом случае проверяется степень доверия как к самому оптимальному решению, так и к выводам, основанным на нем;

2) моделирование существенных свойств искомого оптимального решения в терминах ЗКО зачастую является трудным процессом. Тогда на основе оптимального решения упрощенной ЗКО лицо, принимающее решение, интересуется, в какой степени это оптимальное решение удовлетворяет свойствам, неучтенным при редуцировании задачи.

В простейшем анализе чувствительности исследуются возмущения только одного элемента оптимального решения. Целью изучения таких возмущений является нахождение допусков, определяемых как максимальное изменение индивидуальной стоимости (веса, расстояния, времени и т.п.), сохраняющее оптимальность заданного решения при условии сохранения неизменными остальных данных ЗКО.

Интерес к понятию допуска связан с тем фактом, что максимальное значение допусков элементов задачи (называемое горлышковым допуском) является оценкой радиуса устойчивости оптимального решения, на которой основаны переборные алгоритмы решения различных ЗКО. Первое неявное использование допусков восходит к методу Фогеля нахождения наиболее близкого к оптимальному базисного решения в симплекс-методе решения транспортной задачи [10] и построению эвристики для решения трехиндексной задачи о назначении [1]. В числе случаев успешного использования допусков [4] отметим алгоритмы точного [2, 12] и приближенного [3, 7] решения несимметричной задачи коммивояжера.

При помощи минимальных значений допусков авторам удается получить необходимые и достаточные условия единственности оптимального решения ЗКО с аддитивной целевой функцией и множеством невложенных друг в друга допустимых решений. Кроме того, понятие допуска определено локально, т.е. относительно одного выбранного оптимального решения. В данной работе вводится понятие глобального допуска относительно множества всех оптимальных решений (раздел 2) и доказывается, что предположение о невложенности множества допустимых решений ЗКО можно ослабить (раздел 3), что обобщает известные соотношения для экстремальных значений допусков. В частности, формулируется новый критерий единственности оптимального решения ЗКО с аддитивной целевой функцией, основанный на равенствах между локально и глобально определенными допусками (леммы 2, г) и 3, а)).

1. ЗАДАЧА КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Пусть X – конечное множество мощности $|X| \geq 2$, называемое основным множеством, и $\mathcal{S} \subset 2^X$ – набор непустых подмножеств X. Для функции C: $X \to [0, \infty)$, называемой функцией стоимости, определим аддитивную целевую функцию $f = f_C$ на $\mathcal{S}$ правилом: $f_C(S) = \sum\limits_{x \in S} C(x)$ для всех $S \in \mathcal{S}$. Задача комбинаторной оптимизации на четверке исходных данных $(X, C, \mathcal{S}, f_C)$, коротко ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$, состоит в том, чтобы минимизировать или максимизировать функцию f на $\mathcal{S}$. Для определенности ниже будем рассматривать задачу минимизации: найти $S^* \in \mathcal{S}$, для которых $f(S^*) \leq f(S)$ для всех $S \in \mathcal{S}$. Любое такое множество S^* называется оптимальным решением и $f^* = f(S^*) = \min\limits_{S \in \mathcal{S}} f(S)$ – оптималь-

Нижегородский филиал
Национального исследовательского университета
"Высшая школа экономики"
Университет Флориды, Гейнсвилл, США

ным значением ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$. В этом смысле набор $\mathcal{S}$ удобно называть множеством допустимых решений и обозначить через $\mathcal{S}^*$ множество всех оптимальных решений указанной ЗКО. Ясно, что $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ и $|\mathcal{S}^*| \geq 1$. Поскольку $f(S^*) = f^*$ для всех $S^* \in \mathcal{S}^*$, то удобно также положить $f(\mathcal{S}^*) = f^*$.

Объединение семейства $\mathcal{S}$ и его пересечение обозначаются через $\cup\mathcal{S} = \{x \in X: (\exists S \in \mathcal{S})\, x \in S\}$ и $\cap\mathcal{S} = \{x \in X: (\forall S \in \mathcal{S}) x \in S\}$ соответственно. Ясно, что $\cup\mathcal{S}^* \subset \cup\mathcal{S}$ и $\cap\mathcal{S}^* \supset \cap\mathcal{S}$. Равенство $\cup\mathcal{S} = \cap\mathcal{S}$ возможно лишь при $|\mathcal{S}| = 1$, а несовпадение $\cup\mathcal{S} \neq \cap\mathcal{S}$ эквивалентно тому, что $|\mathcal{S}| \geq 2$. ЗКО является вырожденной, если $\cup\mathcal{S} = \cap\mathcal{S}$ (только одно допустимое решение) или $\cap\mathcal{S} \in \mathcal{S}$ (оптимальным решением всегда является $\cap\mathcal{S}$), поэтому всюду ниже предполагается, что $|\mathcal{S}| \geq 2$ и $\cap\mathcal{S} \notin \mathcal{S}$.

Приведем примеры ЗКО, определенных на простом взвешенном графе $G = (V, E, C)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 3)$ и множеством ребер $E \subset V \times V$ (или дуг $E = A \subset V \times V$ для ориентированного графа) и C: $E \to [0, \infty)$ – функция стоимости ребер (дуг).

Пример 1. Если $X = E$ и $\mathcal{S}$ – множество гамильтоновых циклов S, т.е. циклов вида $S = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)\} \subset E$ (где все пары из S различны), то целевая функция f имеет вид $f(S) = \sum_{(i,j) \in S} C(i, j)$ для $S \in \mathcal{S}$, и соответствующая ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$ есть симметричная задача коммивояжера (в несимметричном случае $X = A$).

Пример 2. Если $X = A$ и $\mathcal{S}$ – набор множеств $S_\pi \subset A$ вида $S_\pi = \{(1, \pi(1)), (2, \pi(2)), \ldots, (n, \pi(n))\}$, соответствующих всем перестановкам π: $V \to V$ множества V, то целевая функция имеет вид $f(S_\pi) = \sum_{i=1}^{n} C(i, \pi(i))$ для $S_\pi \in \mathcal{S}$, и получающаяся ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$ есть задача о назначении.

2. ГЛОБАЛЬНЫЕ ДОПУСКИ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ X

В этом разделе определяются числовые характеристики элементов $x \in X$, выражающие степень инвариатности оптимальных решений ЗКО относительно возмущения одной отдельно взятой стоимости $C(x)$.

Предположим, что задана ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$.

Для $x \in X$ и числа $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначим через $C_{x,\alpha}$: $X \to \mathbb{R}$ возмущенную на элементе x функцию стоимости: $C_{x,\alpha}(y) = C(y)$, если $y \in X$ и $y \neq x$, и $C_{x,\alpha}(x) = C(x) + \alpha$. Глобальным верхним допуском $u(x)$ элемента x называется наименьшая верхняя граница тех $\alpha \geq 0$, для которых любое оптимальное решение S^* исходной ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$ при $f = f_C$ является также оптимальным решением возмущенной ЗКО $(X, C_{x,\alpha}, \mathcal{S}, f_{C_{x,\alpha}})$. Глобальный нижний допуск $\ell(x)$ элемента x определяется аналогично, если возмущенную выше задачу заменить на ЗКО $(X, C_{x,-\alpha}, \mathcal{S}, f_{C_{x,-\alpha}})$. Ясно, что $0 \leq u(x), \ell(x) \leq +\infty$ и эти значения не зависят от конкретного оптимального решения S^* исходной ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$.

Для того чтобы эффективно вычислять глобальные допуски элементов $x \in X$, положим $\chi_x(y) = 0$, если $y \in X$ и $y \neq x$, и $\chi_x(x) = 1$, и обозначим через δ_x: $2^X \to \{0, 1\}$ меру Дирака (точечную массу), сосредоточенную в x (т.е. для $S \subset X$ имеем $\delta_x(S) = 1$ при $x \in S$ и $\delta_x(S) = 0$ при $x \notin S$). Отметим, что $\delta_x(S) = \sum_{y \in S} \chi_x(y)$ для всех $S \subset X$. Поскольку возмущенная функция стоимости имеет вид $C_{x,\alpha} = C + \alpha\chi_x$ на X, то для возмущенной целевой функции находим, что $f_{C_{x,\alpha}} = f + \alpha\delta_x$ на $\mathcal{S}$. Тогда глобальные допуски элемента $x \in X$ выражаются формулами

$$u(x) = \sup\{\alpha \geq 0\colon (f + \alpha\delta_x)(S^*) = \min_{S \in \mathcal{S}}(f + \alpha\delta_x)(S) \text{ для всех } S^* \in \mathcal{S}^*\};$$

$$\ell(x) = \sup\{\alpha \geq 0\colon (f - \alpha\delta_x)(S^*) = \min_{S \in \mathcal{S}}(f - \alpha\delta_x)(S) \text{ для всех } S^* \in \mathcal{S}^*\}.$$

Следующие леммы являются подготовительными для основных результатов из раздела 3. Для $x \in X$ положим $\mathcal{S}_+(x) = \{S \in \mathcal{S}: x \in S\}$ и $\mathcal{S}_-(x) = \{S \in \mathcal{S}: x \notin S\}$; эти поднаборы $\mathcal{S}$ не пересекаются и их объединение есть все $\mathcal{S}$. В первой лемме обобщается результат из [9].

Лемма 1. *Для ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$ и $x \in X$ имеем*:

а) $x \in (\cup\mathcal{S}^*)\backslash(\cap\mathcal{S})$ *тогда и только тогда, когда* $u(x) < +\infty$, *и в этом случае* $u(x) = \min_{S \in \mathcal{S}_-(x)} f(S) - f^*$;

б) $x \in (\cup\mathcal{S})\backslash(\cap\mathcal{S}^*)$ *тогда и только тогда, когда* $\ell(x) < +\infty$, *и в этом случае* $\ell(x) = \min_{S \in \mathcal{S}_+(x)} f(S) - f^*$.

Отсюда вытекает, что $u(x) = +\infty$ равносильно $x \in (X\backslash(\cup\mathcal{S}^*)) \cup (\cap\mathcal{S})$, и $\ell(x) = +\infty$ равносильно $x \in (X\backslash(\cup\mathcal{S})) \cup (\cap\mathcal{S}^*)$. В частности, $u(x) = +\infty = \ell(x)$ для всех $x \in (X\backslash(\cup\mathcal{S})) \cup (\cap\mathcal{S})$. Элементы из $X\backslash(\cup\mathcal{S})$ не входят ни в одно допустимое решение, а элементы из $\cap\mathcal{S}$ входят во все допустимые решения, поэтому принятие их в расчет приводит к потерям усилий и времени в оптимизационной процедуре, направленной на решение ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$. Следующее определение исключает эту ситуацию.

ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$ называется канонической, если $\cup\mathcal{S} = X$ и $\cap\mathcal{S} = \emptyset$.

Можно показать, что любая ЗКО сводится к канонической ЗКО с сохранением значений глобальных верхних и нижних допусков. В случае канонической ЗКО поднаборы $\mathcal{S}_+(x)$ и $\mathcal{S}_-(x)$ непусты для всех $x \in X$.

Обозначим через $[\mathcal{S}_+(x)]^*$ множество всех оптимальных решений ЗКО $(X, C, \mathcal{S}_+(x), f)$ и через $f([\mathcal{S}_+(x)]^*) = \min\limits_{\mathcal{S}_+(x)} f$ – ее оптимальное значение; аналогичный смысл придается выражениям $[\mathcal{S}_-(x)]^*$ и $f([\mathcal{S}_-(x)]^*)$. Утверждения леммы 1 принимают вид:

а) $u(x) < +\infty$ лишь при $x \in \cup\mathcal{S}^*$, и $u(x) = f([\mathcal{S}_-(x)]^*) - f(\mathcal{S}^*)$;

б) $\ell(x) < +\infty$ лишь при $x \notin \cap\mathcal{S}^*$, и $\ell(x) = f([\mathcal{S}_+(x)]^*) - f(\mathcal{S}^*)$.

Следовательно, $u(x) = +\infty$ при $x \notin \cup\mathcal{S}^*$, и $\ell(x) = +\infty$ при $x \in \cap\mathcal{S}^*$.

Л е м м а 2. *Для канонической* ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$ *и* $x \in X$ *имеем*:

а) $u(x) = 0$ *лишь при* $x \in (\cup\mathcal{S}^*)\backslash(\cap\mathcal{S}^*)$, *что эквивалентно условию* $\ell(x) = 0$ (в *этом случае* $|\mathcal{S}^*| \geq 2$);

б) $x \in \cap\mathcal{S}^*$, *если и только если* $0 < u(x) < +\infty$;

в) $x \notin \cup\mathcal{S}^*$, *если и только если* $0 < \ell(x) < +\infty$.

Единственность оптимального решения характеризуется условиями:

г) $|\mathcal{S}^*| = 1$, *если и только если* $0 < u(x) < +\infty$ *для всех* $x \in \cup\mathcal{S}^*$;

д) $|\mathcal{S}^*| = 1$, *если и только если* $0 < \ell(x) < +\infty$ *для всех* $x \in X\backslash(\cap\mathcal{S}^*)$.

В литературе [5, 6, 8, 11] для различных целей изучались и применялись верхние допуски $u_{S^*}(x)$ и нижние допуски $\ell_{S^*}(x)$ элементов $x \in X$ относительно фиксированного оптимального решения S^* рассматриваемой ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$.

В заключение этого раздела установим их связь с глобальными допусками $u(x)$ и $\ell(x)$. В наших обозначениях допуски относительно S^* выражаются соотношениями

$$u_{S^*}(x) = \sup\{\alpha \geq 0\colon (f + \alpha\delta_x)(S^*) = \min_{S \in \mathcal{S}}(f + \alpha\delta_x)(S)\},$$

$$\ell_{S^*}(x) = \sup\{\alpha \geq 0\colon (f - \alpha\delta_x)(S^*) = \min_{S \in \mathcal{S}}(f - \alpha\delta_x)(S)\},$$

и в случае канонической ЗКО имеют место следующие равенства:

$$u(x) = \min_{S^* \in \mathcal{S}^*} u_{S^*}(x) \text{ и } \ell(x) = \min_{S^* \in \mathcal{S}^*} \ell_{S^*}(x)$$
$$\text{для всех } x \in X.$$

При помощи соотношений между допусками и глобальными допусками можно охарактеризовать единственность оптимального решения.

Л е м м а 3. *Для канонической* ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$ *имеем*:

а) $|\mathcal{S}^*| = 1$ *тогда и только тогда, когда найдется* $S^* \in \mathcal{S}^*$ *такое, что* $u = u_{S^*}$ *и* $\ell = \ell_{S^*}$ *на* X;

б) $|\mathcal{S}^*| \geq 2$ *тогда и только тогда, когда для всех* $S^* \in \mathcal{S}^*$ *находим, что* $u \neq u_{S^*}$ *или* $\ell \neq \ell_{S^*}$ *на* X.

Сказанное выше проиллюстрируем следующим простым примером.

П р и м е р 3. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $C(x_1) = 0$, $C(x_2) = 1$, $C(x_3) = 2$ и $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$, где $S_1 = \{x_1, x_2\}$, $S_2 = \{x_2\}$ и $S_3 = \{x_3\}$. Поскольку $f(S_1) = C(x_1) + C(x_2) = 1$, $f(S_2) = C(x_2) = 1$ и $f(S_3) = 2$, то множество оптимальных решений есть $\mathcal{S}^* = \{S_1^*, S_2^*\}$, где $S_1^* = S_1$ и $S_2^* = S_2$, и $f^* = 1$. Значения всех типов допусков приведены в следующих двух таблицах:

x	x_1	x_2	x_3
$u(x)$	0	1	$+\infty$
$u_{S_1^*}(x)$	0	1	$+\infty$
$u_{S_2^*}(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

x	x_1	x_2	x_3
$\ell(x)$	0	$+\infty$	1
$\ell_{S_1^*}(x)$	$+\infty$	$+\infty$	1
$\ell_{S_2^*}(x)$	0	$+\infty$	1

3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДОПУСКОВ

В этом разделе собраны центральные результаты работы об экстремальных значениях глобальных верхних и нижних допусков.

Предположим, что ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$ является канонической.

Скажем, что набор допустимых решений $\mathcal{S}$ состоит из невложенных (друг в друга) множеств, если $S_1\backslash S_2 \neq \phi$ для всех $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, $S_1 \neq S_2$.

Т е о р е м а 1. а) *Если* $\mathcal{S}$ *состоит из невложенных множеств и* $S^* \in \mathcal{S}^*$, *то*

$$\min_{y \in X\backslash S^*} \ell(y) = \min_{y \in X\backslash(\cap\mathcal{S}^*)} \ell(y) = \min_{x \in \cup\mathcal{S}^*} u(x) = \min_{x \in \mathcal{S}^*} u(x);$$

б) *для произвольного набора допустимых решений* $\mathcal{S}$ *имеем*

$$\min_{y \in X\backslash(\cap\mathcal{S}^*)} \ell(y) \leq \min_{x \in \cup\mathcal{S}^*} u(x) \leq \min_{y \in X\backslash[(\cap\mathcal{S}^*) \cup (\cup\mathcal{S}_0)]} \ell(y),$$

где $\mathcal{S}_0 = \{S_0 \in \mathcal{S}: \cup\mathcal{S}^* \subset S_0\}$ $(\min\phi = +\infty)$. *В частности, если множества из* $\mathcal{S}$ *невложенные, то* $\mathcal{S}_0 = \phi$ *и* $\min\limits_{y \in X\backslash(\cap\mathcal{S}^*)} \ell(y) = \min\limits_{x \in \cup\mathcal{S}^*} u(x)$;

в) *если функция стоимости C положительна и* $S^* \in \mathcal{S}^*$, *то*

$$\min_{y \in X\backslash S^*} \ell(y) \le \min_{x \in \cup\mathcal{S}^*} u(x) = \min_{x \in S^*} u(x) \le$$
$$\le \min_{y \in X\backslash[(\cap\mathcal{S}^*) \cup (\cup\mathcal{S}_0)]} \ell(y) \le \min_{y \in X\backslash[S^* \cup (\cup\mathcal{S}_0)]} \ell(y),$$

где $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0(S^*) = \{S_0 \in \mathcal{S}: S^* \subset S_0\}$.

На примерах можно убедиться, что предположения в теореме 1 существенны для ее справедливости и все неравенства могут быть строгими.

Случай соотношений между максимальными значениями глобальных верхних и нижних допусков представляется более сложным. Имеет место следующий частичный результат, в котором используются обозначения, введенные перед леммой 2.

Теорема 2. *Пусть в* ЗКО $(X, C, \mathcal{S}, f)$ *набор допустимых решений* $\mathcal{S}$ *состоит из невложенных множеств и* $S^* \in \mathcal{S}^*$ – *единственное оптимальное решение этой* ЗКО. *Имеем*:

а) если $\left(\bigcup\limits_{x \in \mathcal{S}^*} (\cup[\mathcal{S}_-(x)]^*)\right)\backslash S^* = X\backslash S^*$, *то* $\max\limits_{y \in X\backslash S^*} \ell(y) \le \max\limits_{x \in S^*} u(x)$;

б) *если* $S^* \subset \bigcup\limits_{y \in X\backslash S^*} (X\backslash(\cap[\mathcal{S}_+(y)]^*))$, *то* $\max\limits_{x \in S^*} u(x) \le \max\limits_{y \in X\backslash S^*} \ell(y)$.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0057. Первый и третий авторы поддержаны также грантом Научного фонда НИУ ВШЭ, коллективный исследовательский проект “Учитель–Ученики” № 11-04-0008.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Balas E., Saltzman M. J.* // Oper. Res. 1991. V. 39. P. 150–161.
2. *Germs R., Goldengorin B., Turkensteen M.* // Comput. Oper. Res. 2012. V. 39. № 2. P. 291–298.
3. *Ghosh D., Goldengorin B., Gutin G., Jäger G.* In: Mathematical Programming and Game Theory for Decision Making. Singapore: World Sci. Publ., 2008. P. 47–59.
4. *Goldengorin B., Jäger G., Molitor P.* // J. Computer Sci. 2006. V. 2. № 9. P. 716–734.
5. *Goldengorin B., Sierksma G.* // SOM Research Report 03a30. Groningen: Univ. Groningen, 2003. P. 1–6.
6. *Gusfield D.* // Networks. 1983. V. 13. № 2. P. 191–196.
7. *Gutin G., Goldengorin B., Huang J.* // J. Heuristics. 2008. V. 14. № 2. P. 169–181.
8. *Jäger G.* The Theory of Tolerances with Applications to the Traveling Salesman Problem. Habilitationsschrift, Kiel, 2010.
9. *Libura M.* // Discrete Appl. Math. 1991. V. 30. № 2/3. P. 197–211.
10. *Reinfeld N.V., Vogel W.R.* Mathematical Programming. Prentice-Hall: Englewood Cliffs (N.J.), 1958.
11. *Shier D. R., Witzgall C.* // Networks. 1980. V. 10. № 4. P. 277–291.
12. *Turkensteen M., Ghosh D., Goldengorin B., Sierksma G.* // Europ. J. Oper. Res. 2008. V. 189. № 3. P. 775–788.