

Время выполнения: 240 мин

Задача 1.

Решите уравнение

$$\left(\sqrt{2 \operatorname{tg} x - \frac{1}{x}} + 2\right)(5x^2 - 14x + 8) = 0.$$

Решение.

Первый сомножитель не равен нулю. Поэтому $5x^2 - 14x + 8 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{4}{5}$. Проверим

выполнение условия $2 \operatorname{tg} x - \frac{1}{x} \geq 0$.

1) $x = 2$, $2 \operatorname{tg} 2 - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2 \geq \frac{1}{4}$. Но $\operatorname{tg} 2 < 0$, т.к. $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$. Не подходит.

2) $x = \frac{4}{5}$, $2 \operatorname{tg} \frac{4}{5} - \frac{5}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{4}{5} \geq \frac{5}{8}$. Верно, т.к. $\operatorname{tg} \frac{4}{5} > \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 > \frac{5}{8}$.

Ответ: $\frac{4}{5}$

Критерии оценки

Найдены корни уравнения $5x^2 - 14x + 8 = 0$ – 1 балл

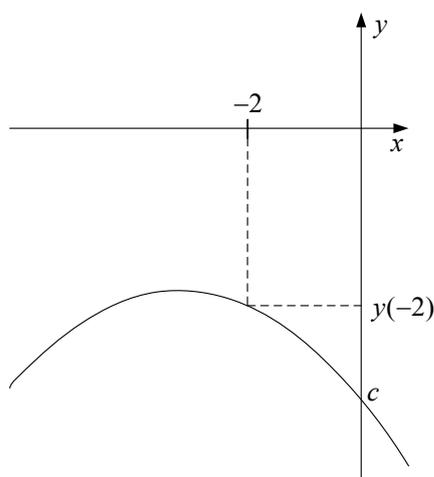
Проведён отбор корней по условию $2 \operatorname{tg} x - \frac{1}{x} \geq 0$ – 3 балла.

Сумма – 4 балла

Задача 2.

Известно, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней и $4a + c < 2b$. Какой знак имеет число c ?

Решение.



Пусть $a = 0$. Тогда $bx + c = 0$. Корней нет, если $b = 0$. Но тогда $c = 0$, что противоречит условию $c < 2b$. Итак, $a \neq 0$.

По условию задачи парабола $y = ax^2 + bx + c$ не пересекает ось Ox и $y(-2) = 4a - 2b + c < 0$. Отсюда следует, что ветви параболы направлены вниз и вся парабола расположена в нижней полуплоскости (см. рис.) Тогда $c = y(0) < 0$.

Ответ: $c < 0$

Критерии оценки

Рассмотрен случай $a = 0$ – 1 балл

Получен правильный ответ с обоснованием – 4 балла.

Сумма – 5 баллов

Задача 3.

Решите в целых числах уравнение

$$x^2 = y^2 - 2y + 9.$$

Решение.

$x^2 = y^2 - 2y + 9 \Leftrightarrow x^2 = (y-1)^2 + 8 \Leftrightarrow x^2 - (y-1)^2 = 8 \Leftrightarrow (x+y-1)(x-y+1) = 8$. Целые числа $x+y-1$ и $x-y+1$ имеют одинаковую чётность (т.е. оба числа одновременно либо чётные, либо нечётные), т.к. их разность $2y-2$ делится на 2. Поскольку произведение этих чисел равно 8, то возможны только четыре случая:

$$1) \begin{cases} x+y-1=4 \\ x-y+1=2 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x+y-1=2 \\ x-y+1=4 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} x+y-1=-4 \\ x-y+1=-2 \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} x+y-1=-2 \\ x-y+1=-4 \end{cases}.$$

Отсюда находим решения:

$$1) \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}.$$

Ответ: (3; 2); (3; 0); (-3; 0); (-3; 2)

Критерии оценки

Получены решения без обоснования, что других решений нет – 1 балл

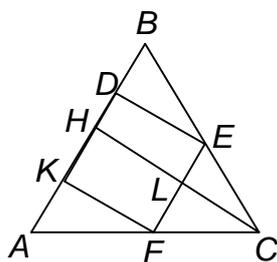
Дано обоснование, что других решений нет – 5 баллов.

Сумма – 6 баллов

Задача 4.

Можно ли внутри равнобедренного треугольника с боковым ребром 5 см и основанием 6 см разместить квадрат площадью $5,9 \text{ см}^2$?

Решение.



Пусть $AB = BC = 5$, $AC = 6$. Проведём $CH \perp AB$. Найдём x – сторону квадрата $DEFK$, целиком лежащего внутри треугольника ABC . Площадь треугольника ABC можно найти по формуле

$$\text{Герона } S = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = 12. \text{ Тогда высота } CH = \frac{2S}{AB} = \frac{24}{5}.$$

$$\triangle ECF \sim \triangle BCA, \text{ поэтому } \frac{EF}{AB} = \frac{CL}{CH}; \quad \frac{x}{5} = \frac{\frac{24}{5} - x}{\frac{24}{5}}; \quad x = \frac{120}{49}.$$

Осталось проверить, площадь квадрата $DEFK$ превышает $5,9$.

$$x^2 = \left(\frac{120}{49}\right)^2 = \frac{14400}{2401} > \frac{59}{10} \Leftrightarrow 144000 > 141659.$$

Ответ: можно.

Критерии оценки

Рассмотрен случай, когда сторона квадрата лежит на стороне AC , а вершины – на сторонах AB и BC (площадь такого квадрата меньше, чем $5,9 \text{ см}^2$), другие конфигурации не рассмотрены – 2 балла

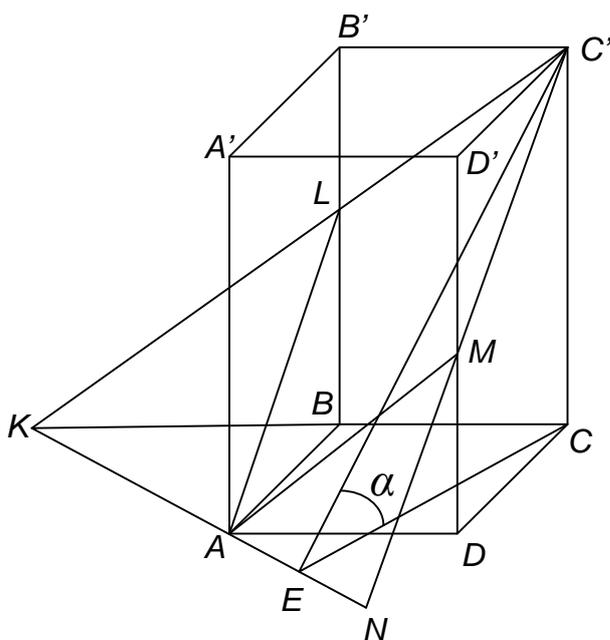
Сумма – 8 баллов

Задача 5.

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ ($AB = 4$, $AD = 3$, $AA' = 12$).

Найдите наименьшую возможную площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через диагональ AC' .

Решение.



Рассмотрим $ALC'M$ – сечение параллелепипеда плоскостью $KC'N$, образующей с плоскостью основания $ABCD$ угол $\alpha = \angle C'EC$. Прямоугольник $ABCD$ является ортогональной проекцией $ALC'M$ на плоскость $ABCD$. Тогда

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{ALC'M}} = \cos \alpha \Rightarrow S_{ALC'M} = \frac{S_{ABCD}}{\cos \alpha} = \frac{12}{\cos \alpha}.$$

Площадь сечения $S_{ALC'M}$ принимает наименьшее значение, когда наибольшее значение принимает $\cos \alpha$, т.е. когда α является наименьшим. Для этого CE должно принимать наибольшее значение,

$$\text{т.к. } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{CC'}{CE}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{12}{CE}\right)^2}}. \text{ Для этого } CE \text{ должно совпадать с } AC \text{ (т.к. } CE \leq AC \text{)}. \text{ Поэтому наибольшее}$$

значение $\cos \alpha$ равно $\frac{AC}{AC'} = \frac{5}{13}$. Тогда наименьшее значение $S_{ALC'M}$ равно

$$\frac{12}{\cos \alpha} = \frac{156}{5} = 31,2$$

Ответ: 31,2

Критерии оценки

Рассмотрено какое-либо сечение плоскостью, проходящей через диагональ AC' – 2 балла
Сумма – 8 баллов

Задача 6.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 2x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 2y^2 + 2y \end{cases}$$

Решение.

Вычтем из первого уравнения второе: $y^2 - x^2 = x^3 - 2x^2 + 2x - y^3 + 2y^2 - 2y$, т.е. $y^3 - y^2 + 2y = x^3 - x^2 + 2x$. Рассмотрим функцию $f(u) = u^3 - u^2 + 2u$. Она возрастает, поскольку $f'(u) = 3u^2 - 2u + 2 > 0$ для всех u . Поэтому из равенства $f(y) = f(x)$ следует, что $y = x$. Подставив в первое уравнение системы x вместо y , получим уравнение

$$x^2 = x^3 - 2x^2 + 2x, \quad x^3 - 3x^2 + 2x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$$

Поэтому решения системы суть 1) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

Ответ: (0; 0), (1; 1), (2; 2)

Критерии оценки

Угаданы решения, но не доказано, что других решений нет – 2 балла

Без обоснования указано, что $y = x - 1$ балл

Сумма – 18 баллов

Задача 7.

Найдите, при каких значениях a уравнение

$$ax^2 + (a+1)x + 5a - 1 = 0$$

имеет только целые корни.

Решение.

Если $a = 0$, то $x = 1$. Поэтому значение $a = 0$ подходит.

Пусть $a \neq 0$. Разделим уравнение на a .

$$x^2 + \left(1 + \frac{1}{a}\right)x + 5 - \frac{1}{a} = 0$$

Это уравнение имеет целые корни, поэтому $n = \frac{1}{a}$ – целое число. Перепишем уравнение в

виде: $x^2 + (1+n)x + 5 - n = 0$. Разрешив это уравнение относительно n , получим

$$n = \frac{x^2 + x + 5}{1 - x} = -2 - x - \frac{7}{x - 1}.$$

Т.к. n – целое число, то $x - 1 = \pm 1; \pm 7$. Тогда для $x = 0; -6$ получаем $a = \frac{1}{5}$, а для $x = 2; 8$

получаем $a = -\frac{1}{11}$.

Ответ: $a \in \left\{0; -\frac{1}{11}; \frac{1}{5}\right\}$

Критерии оценки

Рассмотрен случай $a = 0$ – 2 балла

Далее по продвижению.

Сумма – 20 баллов

Задача 8.

Выпишем все буквы русского алфавита без «Ё» и «Й», но с добавлением пробела «_».

Каждой букве соответствует десятичный порядковый номер – её код.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Приведём лишь часть таблицы, где буквам соответствуют двоичные пятизначные коды:

А	Б	В	Г	...	Э	Ю	Я
00001	00010	00011	00100	...	11101	11110	11111

Главная проблема столь простого способа передачи информации заключается в защите передаваемых данных. Один из способов защиты информации – это ввод ключа, или кодового слова, который складывают с кодом сообщения перед его посылкой по каналу связи. Сложение производится в двоичной системе счисления по правилам: $0+0=0$ $1+0=1$ $1+0=1$ $1+1=0$ (такая операция называется сложением по модулю два: обратите внимание, что при сложении единиц в старший разряд ничего не добавляется).

Приведём пример. Пусть дана строка: **БУДУ ДОМА**, кодовое слово: **КЛЮЧ**

Б	У	Д	У	_	Д	О	М	А
00010	10011	00101	10011	00000	00101	01110	01100	00001
01010	01011	11110	10111	01010	01011	11110	10111	01010
К	Л	Ю	Ч	К	Л	Ю	Ч	К
01000	11000	11011	00100	01010	01110	10000	11011	01011
З	Ш	Ь	Г	К	О	Р	Ы	Л

Результат кодирования: **ЗШЬГКОРЫЛ**

Без кодового слова восстановить исходное сообщение невозможно. С другой стороны, алгоритм расшифровки очень прост – достаточно снова прибавить к сообщению ключ по тем же правилам:

З	Ш	Ь	Г	К	О	Р	Ь	Л
01000	11000	11011	00100	01010	01110	10000	11011	01011
К	Л	Ю	Ч	К	Л	Ю	Ч	К
01010	01011	11110	10111	01010	01011	11110	10111	01010
00010	10011	00101	10011	00000	00101	01110	01100	00001
Б	У	Д	У	_	Д	О	М	А

Задания:

Предположим, что у нас есть исходное сообщение

ВСТРЕЧА_В_КАФЕ

и результат кодирования (длина ключа не известна)

БУБСМЦГААРЛ_ЦЦ

1. Определите ключ, которым было зашифровано сообщение.
2. Декодируйте сообщение, зашифрованное тем же ключом:

МВРНГРЧТБУАУТЦ

Решения и критерии оценки

1.

Переводим фразу и ее зашифрованный вариант в телеграфный двоичный код и складываем по модулю два:

В	С	Т	Р	Е	Ч	А		В		К	А	Ф	Е
00011	10001	10010	10000	00110	10111	00001	00000	00011	00000	01010	00001	10100	00110
00010	10011	00010	10001	01100	10110	00100	00001	00001	10000	01011	00000	10110	10110
Б	У	Б	С	М	Ц	Г	А	А	Р	Л		Ц	Ц
00001	00010	10000	00001	01010	00001	00101	00001	00010	10000	00001	00001	00010	10000
А	Б	Р	А	К	А	Д	А	Б	Р	А		А	Б
												Р	

Ответ: **АБРАКАДАБРА**

Может быть принят также ответ:

АБРАКАДАБРААБР

Баллы	Критерии оценивания
3	Ключ определен верно, решение представлено
2	Возможны два случая: 1) ключ определен, но решение не представлено; 2) решение представлено и в ответе допущено не более трёх ошибок.
1	Идея решения верна, но ключ найден неправильно

2.

Переводим фразу и ключ в телеграфный двоичный код и складываем по модулю два:

М	В	Р	Н	Г	Р	Ч	Т	Б	У	А	У	Т	Щ
01100	00011	10000	01101	00100	10000	10111	10010	00010	10011	00001	10011	10010	11001
00001	00010	10000	00001	01010	00001	00101	00001	00010	10000	00001	00001	00010	10000
А	Б	Р	А	К	А	Д	А	Б	Р	А	А	Б	Р
01101	00001	00000	01100	01110	10001	10010	10011	00000	00011	00000	10010	10000	01001
Н	А		М	О	С	Т	У		В		Т	Р	И

Ответ: НА МОСТУ В ТРИ

Баллы	Критерии выставления
3	Фраза определена верно, решение представлено.
2	Фраза определена верно, но решение не представлено. В ответе не более трёх ошибок
1	Идея решения верна, но ответ неверен.

Задача 9.

Система счисления Майя является комбинацией пятеричной и двадцатеричной систем счисления. Первые четыре цифры обозначаются соответствующим количеством точек. Далее каждая очередная пятерка обозначается горизонтальной чертой. В системе счисления Майя нашлось место и для цифры ноль – она обозначается символом, похожим на глаз. На рисунке 1 приведены цифры Майя.

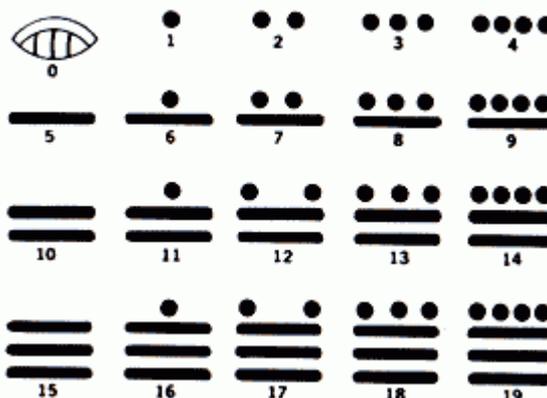


Рис.1 – Цифры Майя



Так у Майя изображалась число 20. При представлении числа цифры писались не слева направо, как привычно для нас, а сверху вниз (т.е. цифра старшего разряда

находилась на «вершине»). Логично предположить, что «вес» разряда получается из «веса» предыдущего разряда домножением на 20, но в этой цепочке есть исключение: вместо $20 \times 20 = 400$ для следующего разряда берется $20 \times 18 = 360$, поэтому и «веса» следующих разрядов не являются степенью 20: 1; 20; 360; 7 200; 144 000; 2 880 000 и т.д. (Существуют разные гипотезы о причинах такого нарушения).

Приведем еще несколько примеров (рис. 2):

$$19 \times 360 + 13 \times 20 + 13 = 7113_{10}$$

$$10 \times 360 + 0 \times 20 + 7 = 3607_{10}$$

$$2 \times 7200 + 0 \times 360 + 6 \times 20 + 5 = 14525_{10}$$

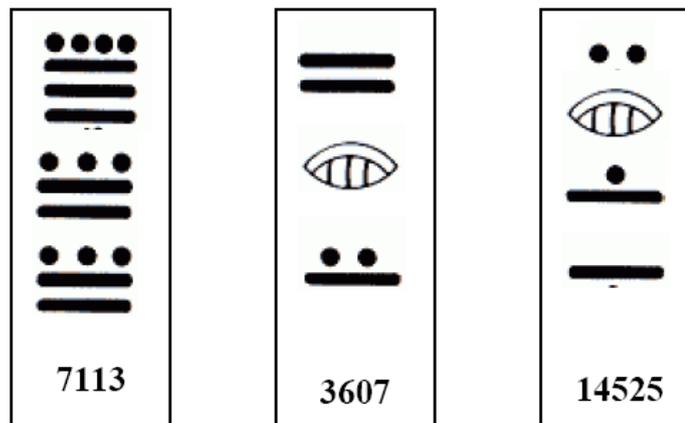


Рис. 2 – Примеры

Задания:

1. Число $288\,725_{10}$ отобразите в системе Майя.
2. Какое десятичное число записано на рис. 3?



Рис. 3

3. Напишите программу, которая будет переводить целые числа из диапазона от 0 до 10 000 000 в систему Майя. При выводе для отображения точек можно использовать точки или звездочки, для изображения горизонтальных линий – тире или знаки подчеркивания, для нуля – обычную цифру ноль. Между цифрами добавлять пустые строки. Например:

Вход:	Выход:
3607	----

	0
	**

Обязательно укажите, какой язык программирования используется и для какого компилятора программа предназначена.

Решения и критерии оценки

1.

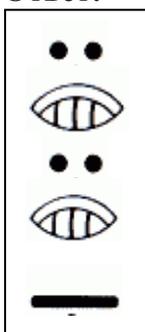
$$288\ 725_{10} = 2 * 144\ 000 + 0 * 7\ 200 + 2 * 360 + 0 * 20 + 5 * 1$$

Таким образом, число будет составлено из цифр

2 0 2 0 5

В алфавите Майя

Ответ:



Баллы	Критерии оценивания
2	Ответ верен, решение представлено.
1	Возможны два случая: 1. ответ верен, но решение не представлено; 2. решение представлено и в нём имеются арифметические ошибки.

2.

На рис. 3 записаны следующие цифры:

5 2 0 6 19

$$5 * 144\ 000 + 2 * 7\ 200 + 0 * 360 + 6 * 20 + 19 * 1 = 734\ 539_{10}$$

Ответ: 734 539₁₀

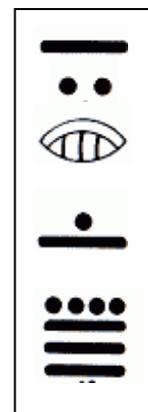


рис. 3

Баллы	Критерии выставления
2	Ответ верен, решение представлено.
1	Возможны два случая: 1. ответ верен, но решение не представлено; 2. решение представлено и в нём имеются арифметические ошибки.

3.

Далее приводится решение на языке Паскаль. Решение может быть приведено на любом языке программирования или на алгоритмическом языке.

```
var
n,y,k,p,c,i:longint;

begin
readln (n);

y := 1;
k := 1;
while n>=y do
begin
  if k = 2 then p := 18 else p := 20;
  y := y * p;
  k := k+1
end;
y := y div p;
k := k - 1;

while y>0 do
begin
  k := k - 1;
  if k = 2 then p := 18 else p := 20;
  c := n div y;
  n := n mod y;
  y := y div p;

  if c =0 then
    writeln(0)
  else
    begin
      if c mod 5 <> 0 then
        begin
          for i := 1 to c mod 5 do
            write('*');
          writeln
        end;
      for i := 1 to c div 5 do
        writeln('----');
      end;
    end;
  writeln

end;

end.
```

Баллы	Критерии оценивания
6	Алгоритм верен, задача решена.
3-5	Возможны следующие случаи: 1) алгоритм неэффективен; 2) алгоритм не реализован до конца; 3) программа содержит семантические и синтаксические ошибки.

1-2	Задача в целом не решена, но написаны алгоритмы для некоторых этапов решения задачи.
-----	--

Задача 10. На вход машины «Буквоешка» подается цепочка символов, состоящая только из латинских букв «a» и «b». Первое, что делает «Буквоешка», – дописывает в начало строки символ «Z». Далее к строке применяются правила замены подстрок:

- (1) Zaa → Z
- (2) Zbb → Z
- (3) Zab → Za
- (4) Zba → Za
- (5) Zb → Z
- (6) Za → *Yes
- (7) Z → *No

Каждый раз список правил просматривается на предмет применимости, начиная с 1-го. Применение правил останавливается, если в результате применения правила появляется * (она в итоговую строку не включается).

Задания:

1. Что получится на выходе машины, если входная последовательность имеет вид:
 - 1.1) «bbbabbaaaaa»
 - 1.2) «abbbaaaabb»
2. Напишите последовательность номеров правил, которые применяются при обработке строк:
 - 2.1) «bbbabbaaaaa»
 - 2.2) «abbbaaaabb»
3. Какую функцию обработки строки реализует приведенный алгоритм?
4. Реализуйте алгоритм в виде программы. На вход программы поступает строка длиной не более 250 символов, на выходе – результирующая строка. Проверку корректности самой строки проводить не требуется.

Укажите, какой язык программирования используется и для какого компилятора программа предназначена.

Решения и критерии оценки

1.1

bbbabbaaaaa	
Zbbbabbaaaaa	по (2)
Zbabbaaaaa	по (4)
Zabbaaaaa	по (3)
Zabaaaaa	по (3)
Zaaaaaa	по (1)
Zaaaa	по (1)
Zaa	по (1)
Z	по (7)
No	

Ответ: No

Баллы	Критерии оценивания
2	Ответ верен, решение представлено.
1	Ответ верен, но решение не представлено.

1.2

abbbaaaabb

Zabbbaaaabb по (3)

Zabbaaaabb по (3)

Zabaaaabb по (3)

Zaaaaabb по (1)

Zaaabb по (1)

Zabb по (3)

Zab по (3)

Za по (6)

Yes

Ответ: Yes

Баллы	Критерии оценивания
2	Ответ верен, решение представлено.
1	Ответ верен, но решение не представлено. Допущена ошибка в одном правиле.

2.1

Решение см. 1.1

Ответ: 24331117

Баллы	Критерии оценивания
2	Ответ верен, решение представлено.
1	Возможны два случая: 1) ответ верен, но решение не представлено; 2) решение представлено, но допущена ошибка в одном правиле.

2.2

Решение см. 1.2

Ответ: 33311336

Баллы	Критерии оценивания
2	Ответ верен, решение представлено.
1	Возможны два случая: 1) ответ верен, но решение не представлено; 2) решение представлено, но допущена ошибка в одном правиле.

3.

Правила (2)-(5) удаляют из строки все буквы 'b'.

Правило (1) удаляет парные буквы 'a'.

Правило (6) будет выполнено только в том случае, если все парные буквы 'a' удалены и осталась одна буква без пары. В этом случае программа отвечает 'Yes'.

Правило (7) будет выполнено только в том случае, если все буквы 'a' удалены (а они удалялись попарно). В этом случае программа отвечает 'No'.

Таким образом, программа выдает 'Yes', если количество букв 'a' нечетно, а если четно – то 'No'.

Ответ:**Алгоритм реализует функцию проверки нечетности количества букв 'a' во введенной строке.**

Баллы	Критерии выставления
2	Верный ответ с обоснованием.

1	Ответ содержит правильную «идею», но не точен.
---	--

4,

Далее приводится решение на языке Паскаль. Решение может быть приведено на любом языке программирования или на алгоритмическом языке.

Var

s:string; k: integer;

begin

readln(s);

s := 'Z' + s;

repeat

k := pos('Zaa',s);

if k <> 0 then

delete(s,k+1,2)

else

begin

k := pos('Zbb',s);

if k <> 0 then

delete(s,k+1,2)

else

begin

k := pos('Zab',s);

if k <> 0 then

delete(s,k+2,1)

else

begin

k := pos('Zba',s);

if k <> 0 then

delete(s,k+1,1)

else

begin

k := pos('Zb',s);

if k <> 0 then

delete(s,k+1,1)

else

begin

k := pos('Za',s);

if k <> 0 then

s := '*Yes'

else

begin

k := pos('Z',s);

if k <> 0 then

s := '*No'

end

end

end

end

end

end

```
end;  
until pos('*',s) <> 0;
```

```
delete(s,1,1);  
writeln(s)
```

```
end.
```

Баллы	Критерии оценивания
6	Алгоритм верен и эффективен, задача решена.
3-5	Возможны следующие случаи: 1) алгоритм неэффективен; 2) алгоритм не реализован до конца; 3) программа содержит семантические и синтаксические ошибки.
1-2	Задача в целом не решена, но написаны алгоритмы для некоторых этапов решения задачи.