Время выполнения: 240 мин

Задача 1.
Найдите область определения и множество значений функции

$$y = \sqrt{6x - x^2 - 5}$$

Решение.
Область определения задаётся условием $6x - x^2 - 5 \ge 0,\ 1 \le x \le 5$. Поэтому $D(y) = [1; 5]$.
Поскольку $y = \sqrt{6x - x^2 - 5} = \sqrt{4 - (x-3)^2}$, то $0 \le y \le 2.$ Поэтому $E(y) = [0; 2]$.
Ответ: $D(y) = [1; 5]$, $E(y) = [0; 2]$.
Критерии оценки
Область определения – 1 балл
Множество значений – 3 балла
Сумма – 4 балла

Задача 2.
Решите уравнение

$$x^2 + \sqrt{x} - 2 = 0$$

Решение.
Легко видеть, что уравнение имеет корень $x = 1.$ Функция $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 2$ возрастает на своей области определения $[0; +\infty)$. Поэтому корень $x = 1$ – единственный.
Ответ: $x = 1.$
Критерии оценки
Угадан корень – 1 балл
Обоснована единственность корня – 4 балла
Сумма – 5 баллов

Задача 3.
Школьник Андрей сдавал тест по математике, состоящий из 25 задач. За каждую верно решённую задачу давали 12 баллов, за каждую неверно решённую – отнимали 7 баллов, за задачу, которую школьник не решал, ставили 0 баллов. В результате Андрей получил 74 балла. Сколько задач Андрей не решал?
Решение.
Пусть m – количество правильно решённых задач; n – количество неверно решённых задач; k – количество задач, которые школьник не решал. Тогда $12m - 7n = 74,\ m + n \le 25.$
Отсюда $12m - 74 = 7n \ge 0 \Rightarrow m \ge 7.\ n = \dfrac{12m - 74}{7} \Rightarrow m + \dfrac{12m - 74}{7} \le 25 \Rightarrow m \le 13.$
Из уравнения $12m - 74 = 7n$ следует, что $12m - 74$ делится на 7. Для $m \in [7; 13]$ вычислим выражение $12m - 74$ и остаток от его деления на 7. Результаты вычислений сведём в таблицу:

m	7	8	9	10	11	12	13
$12m - 74$	10	22	34	46	58	70	82
остаток	3	1	6	4	2	0	5

Подходит только $m = 12$. Тогда $n = \dfrac{70}{7} = 10$, а $k = 25 - m - n = 3.$
Ответ: 3
Критерии оценки
Составлены уравнение и неравенство для ограничений – 1 балл

Путём вычисления остатков от деления на 7 найдено значение $m = 12$ – 4 балла.
С помощью неравенства показано, что других решений нет – 2 балла
Сумма – 5 баллов

Задача 4.

Найдите числа a, b, если $a^2 - 2b + 2a = 24$ и известно, что корни уравнения $x^2 - (a+1)x + b = 0$ являются целыми числами.

Решение.

Пусть x_1, x_2 – целые корни квадратного уравнения $x^2 - (a+1)x + b = 0$. Тогда из формул Виета $x_1 + x_2 = a + 1 \Rightarrow a = x_1 + x_2 - 1$, $b = x_1 x_2$. Подставляя эти выражения для a и b в равенство $a^2 - 2b + 2a = 24$ получим $x_1^2 + x_2^2 = 25 = 5^2$. Так как x_1, x_2 – целые числа, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \pm 5 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = \pm 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = \pm 3 \\ x_2 = \pm 4 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = \pm 4 \\ x_2 = \pm 3 \end{cases}.$$

Тогда $\begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \end{cases}, \begin{cases} a = -6 \\ b = 0 \end{cases}, \begin{cases} a = -8 \\ b = 12 \end{cases}, \begin{cases} a = 6 \\ b = 12 \end{cases}, \begin{cases} a = 0 \\ b = -12 \end{cases}, \begin{cases} a = -2 \\ b = -12 \end{cases}.$

Ответ: $(-8;\ 12)$, $(-6;\ 0)$, $(-2;\ -12)$, $(0;\ -12)$, $(4;\ 0)$, $(6;\ 12)$,

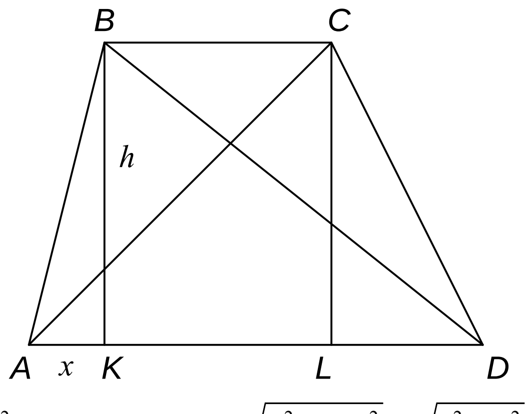
Критерии оценки

Составлены уравнения для корней по теореме Виета – 1 балл
Получено уравнение $x_1^2 + x_2^2 = 25.$ – 2 балла.
Получены корни и вычислены a, b – 5 баллов
Сумма – 8 баллов

Задача 5.

У трапеции длины диагоналей равны 10 и $4\sqrt{13}$, а длины оснований – 6 и 12. Найдите площадь трапеции. Можно ли в эту трапецию вписать окружность? Можно ли вокруг этой трапеции описать окружность?

Решение.



Дано: $BC = 6,\ AD = 12,\ AC = 10,\ BD = 4\sqrt{13}$.
Проведём высоты BK и CL. Обозначим $BK = CL = h,\ AK = x.$ Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольников ACL и BDK.

$$\begin{cases} (x+6)^2 + h^2 = 10^2 \\ (12-x)^2 + h^2 = \left(4\sqrt{13}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = 100 - (x+6)^2 \\ h^2 = 208 - (12-x)^2 \end{cases}$$

$$100 - (x+6)^2 = 208 - (12-x)^2 \Leftrightarrow x = 0.$$

$h^2 = 64, h = 8, CD = \sqrt{h^2 + LD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$ Значит, $AB \perp AD,\ AB = h = 8.$

1) Найдём площадь трапеции $S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot h = \dfrac{6+12}{2} \cdot 8 = 72.$

2) Поскольку $AB + CD = 8 + 10 = 18;\ BC + AD = 6 + 12 = 18,$ то суммы противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$ равны, а это условие необходимо и достаточно для того, чтобы в четырёхугольник можно было вписать окружность.

3) Во вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°. Но $\angle BAD + \angle BCA = \angle BAD + \angle BCL + \angle LCD = 90° + 90° + \angle LCD > 180°$. Поэтому вокруг четырёхугольника $ABCD$ нельзя описать окружность.

Ответ: 1) площадь равна 72; 2) вписать можно; 3) описать нельзя.

Критерии оценки

Составлены уравнения для нахождения элементов трапеции – 1 балл
Вычислены параметры трапеции – 3 балла.
Вычислена площадь трапеции – 2 балла
Обосновано, что в эту трапецию можно вписать окружность – 1 балл
Обосновано, что вокруг этой трапеции нельзя вписать окружность – 1 балл
Сумма – 8 баллов

Задача 6.

Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 - 4xy$$

Решение.

1-е решение

Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 - 4xy = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 - 4xy - 1 \geq 4\sqrt[4]{1 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot x^2y^2} - 4xy - 1$$

Тогда

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 - 4xy \geq 4|xy| - 4xy - 1 \geq -1$$

Полученная нижняя оценка для выражения достигается при $x = y = 1$.

2-е решение

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 + x^2y^2 - 2xy + 1 - 1 = (x-y)^2 + (xy-1)^2 - 1 \geq -1.$$

Заметим, что система $\begin{cases} x - y = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$ имеет решение $(x = y = 1)$. Поэтому наименьшее возможное значение выражения равно –1.

Ответ: –1

Критерии оценки

Угадан ответ – 2 балла.
Ответ обоснован – 16 баллов
Сумма – 18 баллов

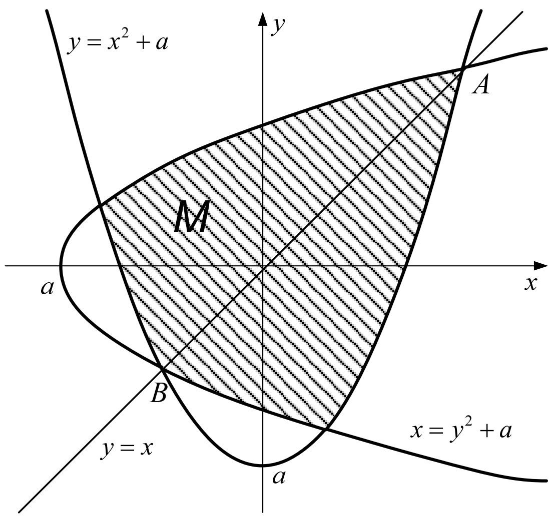
Задача 7.

Найдите все значения *a*, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y \geq x^2 + a \\ x \geq y^2 + a \end{cases}$$

имеет решения и все эти решения удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leq 8$.

Решение.



Изобразим на рисунке штриховкой множество точек $M(x; y)$, координаты которых удовлетворяют исходной системе неравенств.

Параболы $y = x^2 + a$ и $x = y^2 + a$ расположены симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов – прямой $y = x$. Точки A и B лежат на этой прямой. Их координаты можно найти из уравнения $x = x^2 + a \Leftrightarrow x^2 - x + a = 0$.

$x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$.

Тогда $A\left(\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$

Расстояние от любой точки области M до начала координат не превосходит расстояния от точки A до начала координат. Поэтому для того чтобы все решения системы неравенств удовлетворяли неравенству $x^2 + y^2 \le 8$ необходимо и достаточно, чтобы координаты точки A удовлетворяли этому неравенству. Поэтому

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)^2 \le 8 \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2} \le 2 \Leftrightarrow \sqrt{1-4a} \le 3 \Leftrightarrow -2 \le a \le \frac{1}{4}.$$

Ответ: $a \in \left[-2; \dfrac{1}{4}\right]$

Критерии оценки

Верно изображен общий вид области для одного из значений параметров – 4 балла
Найдены координаты точек A и B – 10 баллов.
Найдены границы изменения параметра a – 6 баллов
Сумма – 20 баллов

Задача 8.

В таблице приведена протяженность автомагистралей между соседними населенными пунктами. Если пересечение строки и столбца пусто, то соответствующие населенные пункты не соединены автомагистралями.

	A	B	C	D	K
A		3		10	20
B	3		2	5	14
C		2		1	
D	10	5	1		6
K	20	14		6	

Задания:

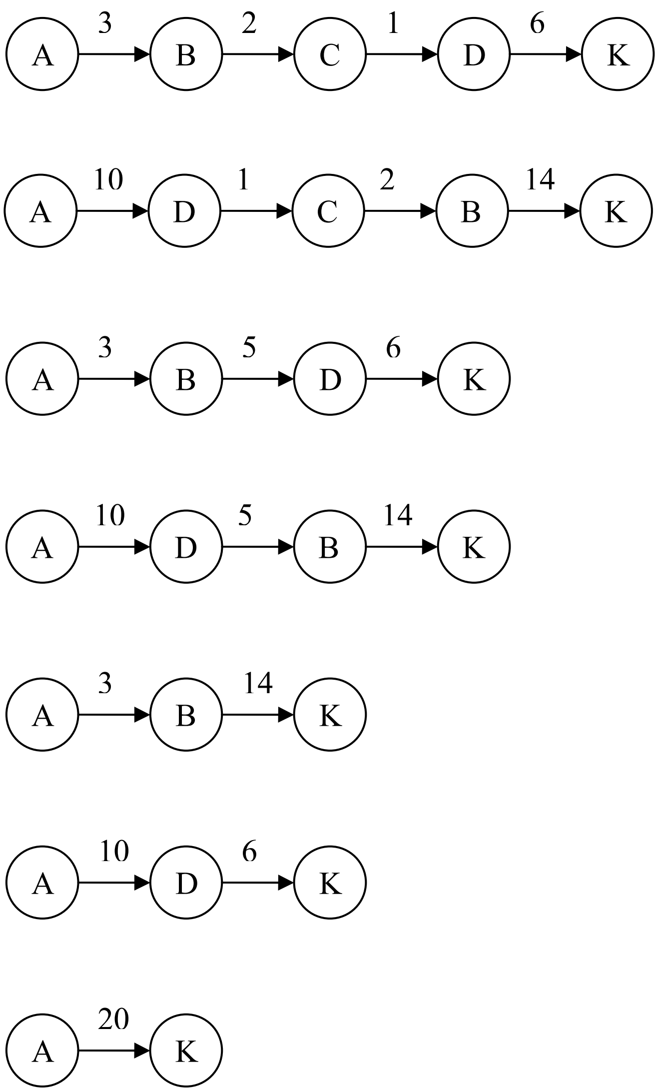
1. Найдите количество маршрутов из пункта А в пункт К, не имеющих циклов (т.е. ни один из маршрутов дважды не проходит через один и тот же город).

2. Найдите длину кратчайшего маршрута из А в К.
3. Приведённой таблице соответствует граф, в котором населённые пункты являются вершинами, а автомагистрали – рёбрами. Эйлерова цепь – маршрут, который содержит все рёбра графа ровно по одному разу. Существует ли такая цепь в приведенном графе? Если – да, то приведите хотя бы одну (в ответе укажите последовательность проходимых вершин и длины автомагистралей, например, A10D5B14K – маршрут из А в К).
4. Эйлеров цикл – это эйлерова цепь, которая начинается и заканчивается в одной и той же вершине. Существует ли такой цикл в приведённом графе? Если – да, то укажите хотя бы один.

Решения и критерии оценки

1.

Все пути



Ответ: 7

Баллы	Критерии оценивания
2	Верный ответ с решением.
1	Возможны два варианта: 1) Верный ответ без решения 2) Верный ответ, но решение приведено не полностью.

2.
Из приведенных в п.1 путей из А в К видно, что кратчайший путь первый, который проходит через все вершины, но при этом длина автомагистралей у него минимальна и равна 12.
Ответ: 12

Баллы	Критерии оценивания
2	Верный ответ с решением.
1	Возможны два варианта: 1) Верный ответ без решения 2) Верный ответ, но решение приведено не полностью.

3.
Эйлерова цепь существует, если степени всех вершин односвязного графа, за исключением возможно исходной или конечной вершины, являются четными. У данного графа все вершины, кроме А и К четные, таким образом, эйлерова цепь существует, причем она должна начинаться в вершине А или К, а заканчиваться в вершине К или А соответственно. Таких путей несколько. В ответе должна быть приведена любая из них.
Замечание: степень вершины – количество ребер, концом которых является данная вершина.
Ответ: Да, например A20K14B3A10D5B2C1D6K**.**

Баллы	Критерии оценивания
2	Приведён пример эйлеровой цепи.
1	Ответ «да», но представленная цепь не является эйлеровой.

4.
Эйлеров цикл существует, если степень всех вершин односвязного графа четная. Для данного графа это условие не выполнено.
В качестве решения может быть приведен перебор всех эйлеровых путей с указанием, что они не могут образовать цикл.
Ответ: Нет

Баллы	Критерии оценивания
2	Ответ «нет» с обоснованием.
1	Ответ «нет» без обоснования.

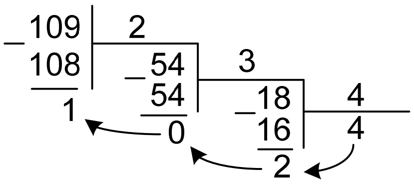
Задача 9.
Мы привыкли к тому, что в позиционных системах счисления «вес» единицы любого разряда, кроме младшего, всегда равен произведению «веса» предыдущего на основание системы счисления. Например, в десятичной системе счисления «веса» единиц разрядов выглядят так: 1; 1×10 = 10; 10×10 = 100; 100×10 = 1000 и т.д.
Рассмотрим пример системы счисления, в которой понятие «основание системы счисления» отлично от традиционного. Если при переходе к следующему разряду мы

будем домножать не на постоянное число, а на номер разряда – в этом случае получается факториальная система счисления. Например:

$3221ф = 3×4! + 2×3! + 2×2! + 1×1! = 89_{10}$

$40301ф = 4×5! + 3×3! + 1×1! = 499_{10}$

Алгоритм перевода целого числа из десятичной системы счисления в факториальную заключается в делении исходного числа последовательно на элементы натурального ряда, начиная с 2. Пример:



109_{10}=4201ф

Задания:

1. Какое десятичное число представимо в факториальной системе счисления как 23020ф?
2. Переведите в факториальную систему счисления 214_{10}.
3. Напишите программу перевода целых десятичных чисел из диапазона от 0 до 100 000 в факториальную систему счисления.

Укажите, какой язык программирования используется и для какого компилятора программа предназначена.

Решения и критерии оценки

1.

$23020ф = 2 * 5! + 3 * 4! + 0 * 3! + 2 * 2! + 0 * 1! = 316_{10}$

Ответ: 316_{10}

Баллы	Критерии оценивания
2	Верный ответ, решение представлено.
1	Возможны два случая: 1) верный ответ, но решение не представлено; 2) в решении имеются арифметические ошибки.

2.

```
_214 |__2
 214  _107  |__3
   0   105   _35 |__4
         2    32   _8  |__5
               3    5   1
                    3
```

Ответ: 13320ф

Баллы	Критерии оценивания
2	Верный ответ, решение представлено
1	Возможны два случая: 1) верный ответ, но решение не представлено; 2) в решении имеются арифметические ошибки.

3.
Далее приводится решение на языке Паскаль. Решение может быть приведено на любом языке программирования или на алгоритмическом языке.

Поскольку 100 000 < 9!, то в факториальной записи чисел будут только десятичные цифры, поэтому их можно собрать в новое число. Иначе цифры можно запоминать в массиве.

```
var
n,f,k,i,p,c:longint;
begin
  readln(n);
  f := 0;
  p := 1;
  k := 2;
  while n>0 do
  begin
    c := n mod k;
    n := n div k;
    f := f + c * p;
    p := p * 10;
    k := k + 1
  end;
  writeln(f)
end.
```

Баллы	Критерии оценивания
6	Алгоритм верен и эффективен, задача решена.
3-5	Возможны следующие случаи: 1) алгоритм неэффективен 2) программа содержит синтаксические и семантические ошибки
1-2	Задача в целом не решена, но написаны алгоритмы для некоторых этапов решения задачи.

Задача 10.
Выпишем все буквы русского алфавита без «Ё» и «Й», но с добавлением пробела «_».

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Каждой букве соответствует десятичный порядковый номер – её код.

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Приведём лишь часть таблицы, где буквам соответствуют двоичные пятизначные коды:

А	Б	В	Г	…	Э	Ю	Я
00001	00010	00011	00100	…	11101	11110	11111

Главная проблема столь простого способа передачи информации заключается в защите передаваемых данных. Один из способов защиты информации – это ввод ключа, или кодового слова, который складывают с кодом сообщения перед его посылкой по каналу связи. Сложение производится в двоичной системе счисления по правилам: $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$ (такая операция называется сложением по модулю два: обратите внимание, что при сложении единиц в старший разряд ничего не добавляется).
Приведём пример. Пусть дана строка: **БУДУ ДОМА**, кодовое слово: **КЛЮЧ**

Б	У	Д	У	_	Д	О	М	А
00010	10011	00101	10011	00000	00101	01110	01100	00001
01010	01011	11110	10111	01010	01011	11110	10111	01010
К	Л	Ю	Ч	К	Л	Ю	Ч	К
01000	11000	11011	00100	01010	01110	10000	11011	01011
З	Ш	Ь	Г	К	О	Р	Ы	Л

Результат кодирования: **ЗЩЬГКОРЫЛ**
Без кодового слова восстановить исходное сообщение невозможно. С другой стороны, алгоритм расшифровки очень прост – достаточно снова прибавить к сообщению ключ по тем же правилам:

З	Ш	Ь	Г	К	О	Р	Ь	Л
01000	11000	11011	00100	01010	01110	10000	11011	01011
К	Л	Ю	Ч	К	Л	Ю	Ч	К
01010	01011	11110	10111	01010	01011	11110	10111	01010
00010	10011	00101	10011	00000	00101	01110	01100	00001
Б	У	Д	У	_	Д	О	М	А

Задания:

Предположим, что у нас есть исходное сообщение

НА_МОСТУ_В_ТРИ

и результат кодирования (длина ключа не известна)

МВРНГРЧТБУАУТЩ

1. Определите ключ, которым было зашифровано сообщение.
2. Декодируйте сообщение, зашифрованное тем же ключом:

БУБСМЦГААРЛ_ЦЦ

3. Напишите программу, которая на вход получает две строки, каждая длиной не более 250 символов: строку-сообщение и ключ, а на выходе выдаёт зашифрованное сообщение.

Укажите, какой язык программирования используется и для какого компилятора программа предназначена.

Решения и критерии оценки

1.

Переводим фразу и ее зашифрованный вариант в телеграфный двоичный код и складываем по модулю два:

Н	А		М	О	С	Т	У		В		Т	Р	И
01101	00001	00000	01100	01110	10001	10010	10011	00000	00011	00000	10010	10000	01001
01100	00011	10000	01101	00100	10000	10111	10010	00010	10011	00001	10011	10010	11001
М	В	Р	Н	Г	Р	Ч	Т	Б	У	А	У	Т	Щ
00001	00010	10000	00001	01010	00001	00101	00001	00010	10000	00001	00001	00010	10000
А	**Б**	**Р**	**А**	**К**	**А**	**Д**	**А**	**Б**	**Р**	**А**	А	Б	Р

Ответ: АБРАКАДАБРА

Может быть принят также ответ:
АБРАКАДАБРААБР

Баллы	**Критерии оценивания**
3	Ключ найден верно, решение представлено
2	Возможны два случая: 1) ключ найден, но решение не представлено; 2) решение представлено и в ответе допущено не более трёх ошибок.
1	Идея решения верна, но ключ найден неправильно

2.
Переводим фразу и ключ в телеграфный двоичный код и складываем по модулю два:

Б	У	Б	С	М	Ц	Г	А	А	Р	Л		Ц	Ц
00010	10011	00010	10001	01100	10110	00100	00001	00001	10000	01011	00000	10110	10110
00001	00010	10000	00001	01010	00001	00101	00001	00010	10000	00001	00001	00010	10000
А	Б	Р	А	К	А	Д	А	Б	Р	А	А	Б	Р
00011	10001	10010	10000	00110	10111	00001	00000	00011	00000	01010	00001	10100	00110
В	**С**	**Т**	**Р**	**Е**	**Ч**	**А**		**В**		**К**	**А**	**Ф**	**Е**

Ответ: ВСТРЕЧА В КАФЕ

Баллы	**Критерии оценивания**
3	Фраза найдена верно, решение представлено.
2	Возможны два случая: 1) фраза найдена верно, но решение не представлено; 2) решение представлено и в ответе имеется не более трёх ошибок.
1	Идея решения верна, но ответ неверен.

3.
Далее приводится решение на языке Паскаль. Решение может быть приведено на любом языке программирования или на алгоритмическом языке.

```
var
s,key,news,str:string;
i,j,k1,k,k2:integer;
begin
  str := ' АБВГДЕЖЗИКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ';
  readln(s);
  readln(key);
```

```
  j := 0;
  news := '';

  for i := 1 to length(s) do
  begin
    j := j + 1;
    k := pos(copy(s,i,1),str)-1;
    k1 := pos(copy(key,j,1),str)-1;
    k2 := (k xor k1) + 1;
    news := news + copy(str,k2,1);
    j := j mod length(key)
  end;
  writeln(news)
end.
```

Баллы	**Критерии оценивания**
6	Алгоритм верен и эффективен, задача решена.
3-5	Возможны следующие случаи: 1) алгоритм неэффективен; 2) алгоритм не реализован до конца; 3) программа содержит семантические и синтаксические ошибки.
1-2	Задача в целом не решена, но написаны алгоритмы для некоторых этапов решения задачи.