

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. В ряд выписаны числа от 1 до 2011 в порядке возрастания. Можно ли между ними расставить знаки + и – так, чтобы значение полученного выражения было точным квадратом натурального числа?

2. Докажите, что все положительные корни многочлена

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 2$$

больше $\frac{1}{14}$.

3. Вдоль берега круглого озера периметром 1.1 км плывут два лосося - один с постоянной скоростью 500 м/мин по часовой стрелке, другой с постоянной скоростью 600 м/мин против часовой стрелки. По краю берега мечется медведь, всегда бегущий вдоль берега со скоростью 70 м/мин в направлении ближайшего к нему лосося. Сколько полных оборотов вокруг озера сделает медведь за сутки и одну минуту?

4. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b , такие что $a^2 + 2b^2$ делится на $a + 2b$.

5. Дан остроугольный треугольник на плоскости. В нём проводится высота. В одном из получившихся треугольников снова проводится высота. Такая операция повторяется 2011 раз: каждый раз проводится высота в одном из получившихся треугольников. Рассмотрим все прямые, содержащие проведённые высоты. Доказать, что на плоскости можно расположить угол в 30° , стороны которого не пересекают ни одну из проведённых прямых.

6. Две армии А и Б, состоящие соответственно из 800 и 1000 воинов, встретились на поле битвы и договорились воевать "по рыцарски". Каждому воину даётся одна смертельно ядовитая стрела (задетый стрелой мгновенно умирает), и они выстреливают по договору: сначала некоторая часть армии А, потом некоторая часть армии Б, потом ещё раз часть армии А и ещё раз часть Б, и всё. Какое минимальное число воинов может остаться в живых?

Ответы и указания

1. Ответ: можно.

Указание: расставьте знаки между числами $1, 2, \dots, 7$ так, чтобы в сумме получилось 4. Остальные числа разбейте на четвёрки подряд идущих, и в каждой четвёрке $a, (a + 1), (a + 2), (a + 3)$ расставляйте знаки так, чтобы сумма была равна 0. Например так: $+a - (a + 1) - (a + 2) + (a + 3) = 0$.

2. Указание: пусть $f(x)$ – многочлен в условии задачи. Вначале докажите, что $f(\frac{1}{14}) < 0$, а затем – что $f(x) < f(\frac{1}{14})$ при $0 < x < \frac{1}{14}$.

3. Ответ: 65.

Указание: пусть K, L – точки на берегу озера, равноудалённые от обоих лососей. Докажите, что точки K, L движутся вдоль берега в одном направлении с одинаковой постоянной скоростью, и что медведь никогда не встретится ни с одной из этих точек.

4. Ответ: $(1, 1)$ и $(4, 1)$.

Указание: из условия следует, что $6b^2 = ((a^2 + 2b^2) - (a^2 - 4b^2)):(a + 2b)$. Иначе говоря, $\text{НОД}(6b^2, a + 2b) = a + 2b$. Докажите вначале, что $\text{НОД}(b, a + 2b) = 1$, и выведите отсюда, что $\text{НОД}(6b^2, a + 2b)$ может равняться только одному из чисел $1, 2, 3, 6$.

5. Указание: вначале докажите, что все проведённые прямые пересекают исходный треугольник. Затем докажите, что все проведённые прямые можно разбить на 6 групп так, что все прямые в каждой группе параллельны между собой. Затем используйте принцип Дирихле: если 6 прямых на плоскости проведены через одну точку, то хотя бы один из образовавшихся углов не меньше 30° .

6. Ответ: 400.

Указание: докажите вначале, что при оптимальной стратегии (т.е. при минимальном количестве выживших) количество погибших воинов равно количеству выпущенных стрел (т.е. ни одна стрела не пролетает мимо цели). Далее, количество стрел равно количеству воинов, поэтому количество выживших воинов равно количеству неиспользованных стрел. Обозначим это количество N . Пусть вначале первая армия выпускает a_1 стрел, затем вторая – b_1 стрел, затем первая – a_2 , затем вторая – b_2 . Докажите что $N \geq b_1$, $N = (1000 - a_1 - a_2) + (800 - b_1 - b_2)$ и $a_1 + a_2 + b_2 \leq 1000$. Выведите отсюда, что $N \geq \max(b_1, 800 - b_1) \geq 400$. После этого несложно построить пример, когда $N = 400$.