

7.1. В выражение

$$(**+*)(**+*) = ****$$

вставьте цифры вместо звёздочек так, чтобы получилось верное равенство и было использовано не более 4-х различных цифр. (Число не может начинаться с нуля).

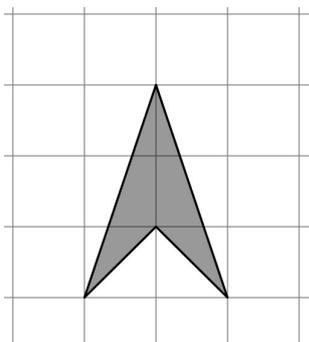
Решение. Например, $(90 + 9)(10 + 1) = 1089$. Или: $(99 + 1)(10 + 9) = 1900$.

Критерии.

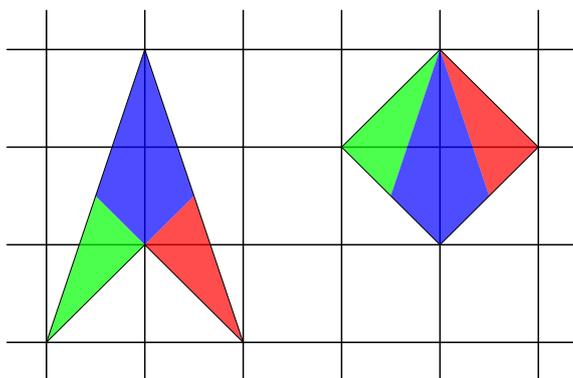
(+.) Правильная левая часть.

(+) Правильный ответ.

7.2. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке ниже, на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат. Покажите, как именно сложить из них квадрат. Разрезы могут идти не по линиям сетки.



Решение. Возможное разрезание представлено на рисунке:



Критерии.

- (-/+) Показана только правильная линия разреза.
- (+) Приведено отчётливое описание способа разрезания и складывания квадрата.

7.3. Имеются 4 арбуза, любые два из которых имеют разный вес. Покажите, как за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь найти два самых тяжёлых арбуза.

Решение. Вначале покажем, как за 2 взвешивания найти самый лёгкий арбуз из 3-х. Пусть веса 3-х арбузов равны a, b, c . Взвесим арбузы a и b . Если $a > b$, то взвесим затем b и c . Если $b > c$, то c – самый лёгкий, если же $b < c$, то b – самый лёгкий. Если на первом взвешивании было $a < b$, то взвешиваем затем a и c и рассуждаем аналогично.

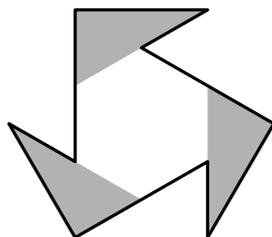
Пусть теперь имеются 4 арбуза. Вначале выберем 3 из них, и за два взвешивания найдём самый лёгкий из этих 3-х. Затем выкинем его, и ещё за два взвешивания найдём самый лёгкий из оставшихся 3-х. Выкинем его тоже. Оставшиеся 2 арбуза будут самыми тяжёлыми.

Критерии.

- (+/2) Показано, как найти один из двух самых тяжёлых арбузов, или как исключить один из двух не самых тяжёлых.
- (+) Приведён правильный алгоритм взвешиваний.

7.4. Картинная галерея имеет форму 9-угольника (не обязательно выпуклого). Оказалось, что при любом расположении двух точечных источников света внутри галереи какая-то точка галереи окажется неосвещённой. Нарисуйте, как могла бы выглядеть такая галерея. Обоснуйте, почему двух источников света не хватит для её освещения. (Стены галереи непрозрачны и не отражают свет.)

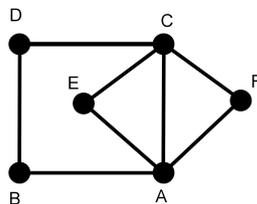
Решение. Возможная галерея представлена на рисунке. Действительно, заметим, что для освещения каждого из трёх углов в каждой из закрашенных зон должно стоять по источнику света. Однако, так как зоны не пересекаются, для каждой из трёх зон должен быть свой источник. Значит, их должно быть хотя бы три.



Критерии.

- (-) Рисунок достаточно похож на правильный, но двух источников всё-таки хватает.
- (+/-) Верный рисунок, но ошибка в обосновании.
- (+) Правильный рисунок + полное обоснование.

7.5. Двое играют в такую игру: на рисунке, изображённом ниже, в точке A стоит фишка. Они ходят фишкой по очереди, с каждым ходом передвигая фишку из точки, в которой она стоит, в одну из названных на рисунке точек, соединённую с ней отрезком. Два раза по одному отрезку ходить нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре обеих сторон? Обоснуйте свой ответ.



Ответ. Выиграет второй игрок.

Решение. Заметим, что игра должна закончиться в вершине A . Действительно, степень вершины A в начале была 4, в конце стала 0, поэтому изменилась на чётное число, из чего немедленно вытекает, что мы должны закончить именно в ней. Докажем, что к концу игры все рёбра были пройдены. Действительно, из A никаких рёбер остаться не должно. Степени всех вершин были чётны, закончили мы там же, где и закончили, поэтому степени всех вершин остались чётны. Рёбра AB нет, поэтому степень вершины B 0, поэтому рёбра BD нет, поэтому степень вершины D 0. Аналогично степени вершин E и F 0. Значит, рёбра из C никуда вести не могут, и её степень также 0. Так как всего рёбер чётно, закончит игру второй игрок и выигрывает.

Критерии.

- (-) "Плохой" перебор и ничего не сказано про чётность числа рёбер.
- (-/+) Перебор с небольшим количеством пропущенных случаев, или сказано о том, что число рёбер чётно.
- (+/2) Сказано о чётности числа рёбер в графе и сказано (но не доказано), что у второго есть ход.
- (+/-) Сказано о чётности вершин и объяснено, почему у второго всегда есть ход.
- (+) Полное решение, (включая полный перебор).

7.6. Вдоль берега круглого озера растут яблони. Петя и Вася начинают идти из точки A на берегу в противоположных направлениях вдоль берега и считают все яблони, встретившиеся им на пути, а также все яблоки, растущие на яблонях. Встретившись в некоторой точке B , они сверили результаты. Оказалось, что Петя насчитал вдвое больше яблонь чем Вася, и в семь раз больше яблок, чем Вася. Их удивил этот результат, и они решили повторить эксперимент. Они отправились из точки B в тех же направлениях, что изначально, и встретились снова в точке C . Оказалось, что на пути от B до C Петя опять насчитал вдвое больше яблонь чем Вася, и в семь раз больше яблок, чем Вася. Их удивление стало ещё больше, и они опять решили повторить эксперимент. Отправившись из C в тех же направлениях, они встретились в точке D . Оказалось, что Петя опять насчитал вдвое больше яблонь, чем Вася. Кто из них на пути от C до D насчитал больше яблок и во сколько раз?

Ответ. На пути от C до D Вася насчитал в 3 раза больше яблок, чем Петя.

Решение. Пусть всего вдоль берега росло n яблонь. На пути от A до B Вася насчитал вдвое меньше яблонь, чем Петя, а вместе они сосчитали все яблони, растущие на берегу. Значит Вася насчитал $\frac{n}{3}$, а Петя — $\frac{2n}{3}$ яблонь. Аналогично на пути от B до C Вася также насчитал $\frac{n}{3}$, и от C до D — тоже $\frac{n}{3}$ яблонь. Значит всего он насчитал ровно $\frac{n}{3} + \frac{n}{3} + \frac{n}{3} = n$ яблонь. Таким образом пройдя путь от A до D , Вася встретил по одному разу все яблони, растущие на берегу.

Далее, пусть всего на яблонях росло m яблок. На пути от A до B Вася насчитал в семь раз меньше яблок, чем Петя, а вместе они насчитали m яблок. Значит Вася насчитал $\frac{m}{8}$, а Петя — $\frac{7m}{8}$ яблок. Аналогично на пути от B до C Вася также насчитал $\frac{m}{8}$ яблок. Но всего на пути от A до D Вася насчитал m яблок (поскольку встретил по одному разу все яблони). Значит на пути от C до D он насчитал $m - \frac{m}{8} - \frac{m}{8} = \frac{3m}{4}$ яблок. Тогда Петя на пути от C до D насчитал $m - \frac{3m}{4} = \frac{m}{4}$ яблок, т.е. в 3 раза меньше, чем Вася.

Критерии.

- (-) Доказано, что на отрезках AB , BC , CD Вася насчитал одинаковое количество яблок.
- (-/+) Правильный ответ, обоснование отсутствует или очень неполное.
- (+/-) Решено в предположении, что скорости мальчиков постоянны, или что деревья растут на равных расстояниях.
- (+) Мелкие недочёты в верном решении (например сказано, что точки A и D обязательно совпадают, или указано расположение точек A, B, C, D без обоснования).