Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”
Факультет математики

На правах рукописи

Кириченко Валентина Алексеевна

Геометрия сферических многообразий и многогранники Ньютона–Окунькова

–

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ
на соискание ученой степени доктора математических наук НИУ ВШЭ

Москва – 2018

Введение

Торическая геометрия и теория многогранников Ньютона–Окунькова выявили плодотворную связь между алгебраической геометрией и выпуклой геометрией. После доказательства теорем Кушниренко и Бернштейна–Хованского в 1970-х (см. напоминание в разделе 1), Аскольд Георгиевич Хованский поставил вопрос, как перенести эти результаты на случай, когда вместо комплексного тора рассматривается произвольная связная редуктивная группа. В частности, он привлёк внимание к задаче поиска правильных аналогов многогранников Ньютона для сферических многообразий. Последние являются естественными обобщениями торических многообразий и включают такие классические примеры, как грассманианы, многообразия флагов и полные коники (см. напоминание в разделе 2). Понятие многогранника Ньютона было перенесено на сферические многообразия Андреем Окуньковым в 1990-х [O97, O98]. Позднее его конструкция была систематически развита в работах [KaKh, LM], и полученная теория выпуклых тел Ньютона–Окунькова сейчас является активной областью алгебраической геометрии.

Хотя выпуклые тела Ньютона–Окунькова можно определить для линейных расслоений на произвольных многообразиях (без действия группы), с ними проще работать в случае сферических многообразий благодаря связям с теорией представлений. Например, многогранники Гельфанда–Цетлина (ГЦ) и многогранники Винберга–Литтельманна–Фейгина–Фурье (ВЛФФ) возникают естественным образом как многогранники Ньютона–Окунькова многообразий флагов. Мои исследования посвящены явному описанию геометрических и топологических инвариантов сферических многообразий через геометрические и комбинаторные инварианты их многогранников Ньютона-Окунькова. Цель — перенести торическую картину на более общий класс многообразий с действием редуктивной группы. Раздел 3 — обзор моих результатов в этом направлении. Раздел 4 содержит точные формулировки основных результатов.

1. Выпуклые тела Ньютона–Окунькова

В этом разделе мы напомним конструкцию выпуклых тел Ньютона–Окунькова для широкой математической аудитории. Начнём с определения многогранника Ньютона.

Определение 1.1. Пусть $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha x^\alpha$ — многочлен Лорана от n переменных (здесь мультииндексное обозначение x^α для $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ следует понимать как $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$). *Многогранник Ньютона* $\Delta_f \subset \mathbb{R}^n$ — это выпуклая оболочка всех таких $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, что $c_\alpha \neq 0$.

По определению многогранник Ньютона — это целочисленный многогранник, то есть его вершины лежат в $\mathbb{Z}^n$.

Пример 1.2. Для $n = 2$ и $f = 1+2x_1+x_2+3x_1x_2$ многогранник Ньютона Δ_f — это квадрат с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$.

Заметим, что значения многочленов Лорана с комплексными коэффициентами определены во всех таких точках $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, что $x_1, \ldots, x_n \neq 0$. Тем самым многочлены Лорана — регулярные функции на комплексном торе $(\mathbb{C}^*)^n := \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i=1}^n \{x_i = 0\}$.

Теорема 1.3. *[Kou] Для данного целочисленного многогранника $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим общий набор многочленов Лорана $f_1(x_1, \ldots, x_n)$,..., $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ с многогранником Ньютона Δ. Тогда система $f_1 = \ldots = f_n = 0$ имеет $n!\mathrm{Volume}(\Delta)$ решений в комплексном торе.*

Теорему Кушниренко можно воспринимать как обобщение классической теоремы Безу. Многогранники Ньютона служат уточнением понятия степени многочлена. Это позволяет применять теорему Кушниренко к наборам многочленов, которые не являются общими среди всех многочленов данной степени, а только среди всех многочленов с данным многогранником Ньютона. Например, теорема Кушниренко, применённая к паре общих многочленов с многогранником Ньютона из примера 1.2 даст правильный ответ 2, тогда как теорема Безу даст неправильный ответ 4 (из-за двух лишних решений на бесконечности). Более геометрическая точка зрения на теорему Безу и её обобщения проистекает из исчислительной геометрии и будет обсуждаться в следующем разделе. Теорему Кушниренко обобщили на системы многочленов Лорана с различными многогранниками Ньютона Давид Бернштейн и Хованский, используя смешанные объёмы многогранников [B75]. Дальнейшие обобщения включают явные формулы для рода и эйлеровой характеристики полных пересечений $\{f_1 = 0\} \cap \ldots \cap \{f_m = 0\}$ в $(\mathbb{C}^*)^n$ для $m < n$ [Kh78].

Мы теперь рассмотрим немного более общую ситуацию. Зафиксируем конечномерное векторное пространство $V \subset \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ рациональных функций на $\mathbb{C}^n$. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — общий набор функций из V, а $X_0 \subset \mathbb{C}^n$ — открытое всюду плотное подмножество, полученное как дополнение к полюсам этих функций. Сколько решений система $f_1 = \ldots = f_n = 0$ имеет в X_0? Например, если V совпадает с пространством, порождённым всеми многочленами Лорана с данным многогранником Ньютона, а $X_0 = (\mathbb{C}^*)^n$, то ответ даётся теоремой Кушниренко. Ниже простой неторический пример из теории представлений.

Пример 1.4. Пусть $n = 3$. Рассмотрим присоединённое представление группы $GL_3(\mathbb{C})$ на пространстве $\mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ всех линейных операторов на $\mathbb{C}^3$. То есть $g \in GL_3(\mathbb{C})$ действует на операторе $X \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ таким образом:

$$\mathrm{Ad}(g) : X \mapsto gXg^{-1}.$$

Пусть $U^- \subset GL_3(\mathbb{C})$ — подгруппа нижнетреугольных унипотентных матриц:

$$U^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \right\}.$$

Чтобы определить подпространство $V \subset \mathbb{C}(x_1, x_2, x_3)$, мы ограничим функции из двойственного пространства $\mathrm{End}^*(\mathbb{C}^3)$ на U^--орбиту $\mathrm{Ad}(U^-)E_{13}$ оператора $E_{13} := e_1 \otimes e_3^* \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ (здесь e_1, e_2, e_3 стандартный базис в $\mathbb{C}^3$). Более точно, линейная функция $f \in \mathrm{End}^*(\mathbb{C}^3)$ даёт многочлен $\hat{f}(x_1, x_2, x_3)$ таким образом:

$$\hat{f}(x_1, x_2, x_3) := f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right)$$

Легко проверить, что пространство V порождено 8-ю многочленами: 1, x_1, x_2, x_3, $x_1x_2 - x_1^2x_3$, x_1x_3, x_2x_3, $x_2^2 - x_1x_2x_3$. Из следующего раздела будет видно, что теорема Кушниренко неприменима к пространству V, то есть нормализованный объём многогранника Ньютона общего многочлена из V больше, чем число решений общей системы $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ с $f_i \in V$.

Чтобы связать с V *выпуклое тело Ньютона–Окунькова*, нам понадобится дополнительный ингредиент. Выберем инвариантный относительно сдвигов полный порядок на решётке $\mathbb{Z}^n$ (например, можно взять лексикографический порядок). Рассмотрим отображение

$$v : \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^n,$$

которое ведёт себя как взятие монома минимальной степени у многочлена, а именно: $v(f + g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$ и $v(fg) = v(f) + v(g)$ для всех ненулевых f, g. Напомним, что отображения с такими свойствами называются *нормированиями*. Простая конструкция нормирования приводится в примере 1.7 ниже.

Определение 1.5. *Выпуклое тело Ньютона–Окунькова* $\Delta_v(V)$ — это замыкание выпуклой оболочки множества

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{v(f)}{k} \mid f \in V^k\right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Через V^k мы обозначаем подпространство, порождённое k-тыми степенями функций из V.

Разные нормирования дают разные выпуклые тела Ньютона–Окунькова. Важное приложение тел Ньютона–Окунькова — это аналог теоремы Кушнирен-

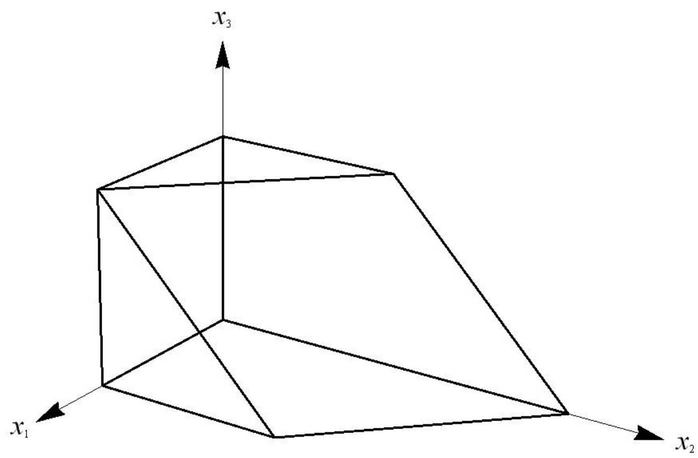

Рис. 1

ко. Напомним, что через $X_0 \subset \mathbb{C}^n$ мы обозначили открытое плотное подмножество, на котором все функции из V регулярны (то есть не имеют полюсов).

Теорема 1.6. *[KaKh, LM] Если V достаточно большое, то общая система $f_1 = \ldots = f_n = 0$ с $f_i \in V$ имеет $n!\mathrm{Volume}(\Delta_v(V))$ решений в X_0.*

В частности, все тела Ньютона–Окунькова для V имеют один и тот же объём. Подробности (в частности, точный смысл понятия “достаточно большое”) можно найти в [KaKh, Theorem 4.9].

Пример 1.7. Пусть V — пространство из примера 1.4. Определим нормирование v, сопоставив каждому многочлену $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ его моном наименьшей степени относительно лексикографического порядка на мономах. Более точно, мы скажем, что $x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3} \succ x_1^{l_1}x_2^{l_2}x_3^{l_3}$ тогда и только тогда, когда существует такое $j \le 3$, что $k_i = l_i$ при $i < j$, и $k_j > l_j$. Легко проверить, что $v(V)$ состоит из 8-ми целых точек $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(0,2,0)$. Их выпуклая оболочка изображена на рисунке 1. Это ВЛФФ многогранник $FFLV(1,1)$ для присоединённого представления группы GL_3 (в этом случае, он оказывается унимодулярно эквивалентным многограннику ГЦ). В частности, $FFLV(1,1) \subset \Delta_v(V)$.

2. Сферические многообразия

В этом разделе содержится краткое введение в геометрию сферических многообразий для широкой математической аудитории. Сферические многообразия естественным образом возникают в исчислительной геометрии. Напомним две классические задачи исчислительной геометрии в XIX веке.

Задача 2.1 (Шуберт). Сколько прямых в трёхмерном пространстве пересекают четыре данные прямые в общем положении?

Можно отождествить прямые в $\mathbb{CP}^3$ с векторными плоскостями в $\mathbb{C}^4$, то есть прямую можно рассматривать как точку на грассманиане $G(2,4)$. Условие, что прямая $l \in G(2,4)$ пересекает фиксированную прямую l_1 определяет гиперповерхность $H_1 \subset G(2,4)$. Следовательно, задача сводится к вычислению числа точек пересечения четырёх гиперповерхностей в $G(2,4)$. Несложно проверить, что гиперповерхность H_1 совпадает с гиперплоским сечением грассманиана при вложении Плюккера $G(2,4) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4) \simeq \mathbb{CP}^5$. Образ грассманиана будет квадрикой в $\mathbb{CP}^5$. Число точек пересечения квадрики в $\mathbb{CP}^5$ с четырьмя гиперплоскостями в общем положении равно 2 по теореме Безу. Следовательно, ответ в задаче Шуберта 2.

Задача 2.2 (Штейнер). Сколько гладких коник касается пяти данных коник?

По аналогии с задачей Шуберта мы можем отождествить коники с точками в $\mathbb{CP}^5$, а именно: коника, заданная уравнением $ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2=0$ соответствует точке $(a:b:c:d:e:f) \in \mathbb{CP}^5$. Гладкие коники образуют подмножество $C \subset \mathbb{CP}^5$ (дополнение $\mathbb{CP}^5 \setminus C$ — это множество нулей дискриминанта). Условие, что коника касается данной коники, задаёт гиперповерхность в $\mathbb{CP}^5$ степени 6. Используя теорему Безу, можно предположить (как сам Якоб Штейнер и сделал), что ответ в задаче Штейнера 6^5. Однако правильный ответ гораздо меньше. Это похоже на разницу между теоремами Безу и Кушниренко: первая даёт лишние решения, которые не имеют исчислительного смысла.

Правильный ответ нашёл Мишель Шаль, использовав (в современной терминологии) *чудесную компактификацию* пространства C, а именно, пространство полных коник.

Герман Шуберт развил мощный общий метод (исчисление условий) для решения задач исчислительной геометрии, таких как задачи 2.1, 2.2. В каком-то смысле его метод основан на неформальной версии теории пересечений. 15-ая проблема Гильберта состояла в строгом обосновании исчисления Шуберта[1]. В первой половине XX столетия такие обоснования были развиты как в топологической (кольца когомологий), так и в алгебраической (кольца Чжоу) ситуации. Однако версия Шуберта теории пересечений была формализована только в 1980-ые в работах Коррадо Де Кончини и Клаудио Прочези [CP85].

Пусть G — связная редуктивная группа, а H — *сферическая* алгебраическая подгруппа, то есть борелевская подгруппа $B \subset G$ действует на G/H с открытой плотной орбитой. Для сферического однородного пространства G/H (не обязательно компактного), Де Кончини и Прочези построили *кольцо условий*, которое отвечает одновременно за все задачи исчислительной геометрии на G/H. Легко проверить, что комплексный тор $(\mathbb{C}^*)^n$, грассманиан $G(2,4)$ и пространство C гладких коник, рассмотренные выше, все являются сферическими однородными пространствами относительно редуктивных групп $(\mathbb{C}^*)^n$, $GL_4(\mathbb{C})$ и $GL_3(\mathbb{C})$, соответственно. В частности, их кольца условий корректно определены. Элементы кольца условий это классы эквивалентности многообразий в G/H относительно естественной численной эквивалентности. Более точно, два подмногообразия одной размерности эквивалентны, если равны их индексы пересечения с любым подмногообразием дополнительной размерности. Транзитивное действие группы G используется, чтобы преодолеть обычные сложности с пересечением не трансверсальных подмногообразий. Произведение в кольце

[1] Das Problem besteht darin, *diejenigen geometrischen Anzahlen strenge und unter genauer Feststellung der Grenzen ihrer Gültigkeit zu beweisen, die insbesondere Schubert auf Grund des sogenannten Princips der speciellen Lage mittelst des von ihm ausgebildeten Abzählungskalküls bestimmt hat* (Гильберт).

условий соответствует пересечению подмногообразий.

В частности, многие задачи исчислительной геометрии (включая задачи 2.1, 2.2) сводятся к вычислению индекса самопересечения гиперповерхности в G/H. В торическом случае теорема Кушниренко даёт явную формулу для индекса самопересечения гиперповерхности $\{f = 0\}$, где f — общий многочлен Лорана с данным многогранником Ньютона. В сферическом случае, явные формулы были получены Борисом Казарновским (случай $(G \times G)/G^{\mathrm{diag}}$) и Мишелем Брионом (общий случай) [Kaz, Br89]. Хотя формула Бриона–Казарновского изначально была выписана в других терминах, её можно переформулировать через многогранники Ньютона–Окунькова [KaKh2].

Пример 2.3. Сейчас мы поместим пример 1.4 в контекст исчислительной геометрии и сферических однородных пространств. Пусть $X = \{(V^1 \subset V^2 \subset \mathbb{C}^3) \mid \dim V^i = i\}$ — многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^3$. Это однородное пространство относительно действия группы $GL_3(\mathbb{C})$, а именно, $X = GL_3(\mathbb{C})/B$, где борелевская подгруппа B — это подгруппа верхнетреугольных матриц. Легко проверить, что B действует на X с открытой всюду плотной орбитой $U^-B/B \simeq U^-$, в частности, X является сферическим.

Скажем, что два флага $V^1 \subset V^2$ и $W^1 \subset W^2$ в $\mathbb{C}^3$ находятся не в общем положении, если либо $V^1 \subset W^2$, либо $W^1 \subset V^2$. Сколько флагов в $\mathbb{C}^3$ находятся не в общем положении с тремя данными флагами? С одной стороны, легко показать, что ответ 6, используя школьную планиметрию. С другой стороны, тот же ответ можно найти, используя простейшее проективное вложение пространства X:

$$p : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^3) \times \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^3) \overset{\text{Сегре}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{C}^3)); \quad p : (V^1, V^2) \mapsto V^1 \times V^2 \mapsto V^1 \otimes \Lambda^2 V^2$$

и вычислив число точек пересечения образа $p(X)$ с тремя общими гиперплоскостями в $\mathbb{CP}^8$ (то есть, *степень* многообразия $p(X)$). Ограничив отображение p на открытую плотную B-орбиту $U^- \subset X$, мы сведём последнее вычисление к задаче из примера 1.4. В частности, мы можем показать, что включение

$FFLV(1,1) \subset \Delta_v(V)$ на самом деле равенство. Действительно, по теореме 1.6 объём выпуклого тела $\Delta_v(V)$ умножить на 3! равен степени $p(X)$, то есть 6. Следовательно, объём тела $\Delta_v(V)$ равен 1. Поскольку объём многогранника $FFLV(1,1)$ тоже равен 1, включение $FFLV(1,1) \subset \Delta_v(V)$ влечёт точное равенство.

3. Результаты и публикации

Этот раздел содержит краткий обзор результатов докторской диссертации. Основная цель — поместить эти результаты в общий контекст (не слишком вдаваясь в подробности) и дать ссылки на более новые продвижения. Точные формулировки и все необходимые определения можно найти в публикациях [1]–[10] (см. список публикаций в конце этого раздела).

3.1. Эйлерова характеристика полных пересечений в редуктивных группах

В торическом случае почти все инварианты полного пересечения $Y = \{f_1 = 0\} \cap \ldots \cap \{f_m = 0\} \subset (\mathbb{C}^*)^n$ можно вычислить через многогранники Ньютона $\Delta_{f_1}, \ldots, \Delta_{f_m}$. В редуктивном случае (для $(G \times G)/G^{\mathrm{diag}}$), формула Бриона–Казарновского для $m = n$ (то есть для нульмерного Y) довольно долго была единственной явной формулой. Заметим, что её можно интерпретировать как формулу для (топологической) эйлеровой характеристики $\chi(Y)$. Главный результат работ [1,2] — явная формула для $\chi(Y)$ при всех $m \le n$. Формула получена в два этапа. Во первых, определены и изучены (некомпактные версии) классов Черна редуктивных групп как элементы кольца условий [1]. Во-вторых, использован алгоритм Де Кончини–Прочези [CP83], чтобы вычислить индексы пересечения этих классов Черна с полными пересечениями и применить формулу присоединения [2].

В [2] доказано, что алгоритм Де Кончини–Прочези работает для классов

Черна, которые как правило не лежат в подкольце условий, порождённом полными пересечениями. Также показано, как конвертировать этот алгоритм в явную формулу, используя весовой многогранник представления, связанного с Y. В частности, это даёт альтернативное доказательство формулы Бриона–Казарновского. Хотя формулы из [1,2] прямо не используют многогранники Ньютона–Окунькова, они имеют похожую выпукло геометрическую природу (см. точную формулу в случае $m = 1$ в разделе 4.1). Недавно больше инвариантов (в частности, арифметический род) полных пересечений в сферических однородных пространствах были найдены через многогранники Ньютона–Окунькова (см. [KaKh3], гда также приводится история вопроса).

3.2. Выпукло-геометрические модели для исчисления Шуберта

Кольцо условий комплексного тора порождено классами гиперповерхностей. Это же верно для полных многообразий флагов G/B, но необязательно верно для более общих сферических однородных пространств. Таким образом, полные многообразия флагов — первые кандидаты для применения выпукло геометрических методов к вычислению произведений в кольце условий. Заметим, что поскольку G/B компактно, его кольцо условий совпадает с кольцом Чжоу, а последнее обладает естественным базисом из циклов Шуберта, которые соответствуют замыканиям B-орбит. В [3,5,8] мы строим выпукло геометрические модели для исчисления Шуберта и находим выпукло геометрические реализации циклов Шуберта.

В [3] формула Пьери–Шевалле для G/B в типе A проинтерпретирована через многогранники ГЦ. В [5] (совместная работа с Евгением Смирновым и Владленом Тимориным), мы развиваем необходимую теорию для реализации циклов Шуберта линейными комбинациями граней многогранника так, чтобы пересечение граней соответствовало произведению (в кольце Чжоу) циклов Шуберта. В типе A мы получили явные реализации для каждого цикла Шуберта, что позволило нам представить произведение любых двух циклов Шуберта неотрицательной линейной комбинацией граней многогранника ГЦ. Этот результат был мотивирован кандидатской диссертацией Михаила Когана, который первым связал грани многогранников ГЦ с многообразиями Шуберта [Ko]. Мы также получили формулы для характеров Демазюра многообразий Шуберта через экспоненциальные суммы по целым точкам в гранях Когана многогранника ГЦ.

В [8] разработан геометрический алгоритм для реализации циклов Шуберта гранями многогранников в произвольном типе. В типе A этот алгоритм сводится к митозу Кнутсона–Миллера на пайп дримах. В типах B и C, он сводится к новому комбинаторному алгоритму, который может дать явные реализации циклов Шуберта в симплектических и ортогональных многообразиях флагов гранями симплектических многогранников ГЦ (см. подробности в разделе 4.2).

В [7] (совместная работа с Павлом Гусевым и Владленом Тимориным), мы изучаем комбинаторику многогранников ГЦ, соответствующих разным частичным многообразиям флагов (или в комбинаторной терминологии разбиениям $1^{i_1}2^{i_2}\dots k^{i_k}$). Заметим, что все многогранники ГЦ для данного разбиения имеют один и тот же комбинаторный тип. Мы определяем рекуррентное соотношение на число вершин $V(1^{i_1}2^{i_2}\dots k^{i_k})$ и уравнений в частных производных на экспоненциальную производящую функцию для чисел $V(1^{i_1}2^{i_2}\dots k^{i_k})$. Недавно рекуррентное соотношение обобщили на f-векторы многогранников ГЦ в работе [ACK].

3.3. Реинкарнации операторов разделённых разностей (ОРР)

ОРР и операторы Демазюра — важные инструменты в исчислении Шуберта и теории представлений. Они использовались в [BGG] и [D], чтобы выразить по индукции циклы Шуберта на полных многообразиях флагов как многочлены от первых классов Черна линейных расслоений (как в когомологиях, так и в K-теории). Ещё одно приложение — это формула Демазюра для характеров Демазюра многообразий Шуберта [D]. В [4,6] мы определяем аналоги ОРР в (эквивариантном) исчислении Шуберта для алгебраических кобордизмов. В [9] определяется выпукло геометрическая версия операторов Демазюра и используется, чтобы строить многогранники, кодирующие характеры Демазюра. В [10] многогранники Ньютона–Окунькова многообразий флагов для одного из геометрических нормирований явно вычислены с помощью простой выпукло геометрической конструкции, которая также мотивирована ОРР.

Заметим, что классические ОРР и операторы Демазюра можно определить единообразно, используя аддитивный (кольца Чжоу) и мультипликативный (K-теория) формальные групповые законы, соответственно. В [4] (совместная работа с Йенсом Хорнбостелем) мы определяем ОРР для универсального группового закона и применяем их к изучению исчисления Шуберта в кольце алгебраических кобордизмов (определённом в работах Левина–Мореля и Левина–Пандхарипанде) полных многообразий флагов. Эта работа мотивирована результатами Бресслера–Ивенса по исчислению Шуберта в комплексных кобордизмах [BE], и частично была направлена на перенос их результатов в алгебро-геометрический контекст. Мы также вывели версию формулы Пьери–Шевалле для кобордизмов.

Есть серьёзные различия между кольцом Чжоу/когомологиями и K-теорией многообразий флагов с одной стороны, и алгебраическими/комплексными кобордизмами с другой стороны. Например, классы многообразий Шуберта дают естественный базис в первых теориях, но не в последних, поскольку многообразия Шуберта не всегда гладкие. Зато многообразия Ботта–Самельсона образуют естественное порождающий набор (но не базис) в кольце алгебраических/комплексных кобордизмов.

В [6] (совместная работа с Амаленду Кришной) мы описываем кольцо эквивариантных алгебраических кобордизмов многообразий флагов и чудесных компактификаций симметрических пространств минимального ранга. В частности, пространства $(G\times G)/G^{\mathrm{diag}}$ — симметрические минимального ранга. В случае многообразий флагов мы использовали комплексные кобордизмы и топологические аргументы. Недавно чисто алгебро-геометрический подход был предложен в [CZZ]. В случае чудесных компактификаций мы использовали подход Бриона–Джошуа, описавших эквивариантые кольца Чжоу [BJ].

В [9] определены аналоги операторов Демазюра на выпуклых многогранниках. В общем случае эти операторы переводят многогранник P в многогранник или выпуклую цепь P' на единицу большей размерности, так что экспоненциальные суммы по целым точкам в P и P' связаны с помощью классического оператора Демазюра. В частности, выпукло геометрические операторы Демазюра можно использовать для индуктивного построения многогранников ГЦ в типе A и кубов Гроссберга–Каршон в любом типе, начиная с единственной точки. В типе C_2 они использовались, чтобы построить симплектические ОРР многогранники, которые комбинаторно не эквивалентны симплектическим многогранникам ГЦ и ВЛФФ. Оказывается, эти многогранники совпадают с многогранниками Ньютона–Окунькова симплектического многообразия флагов для естественного геометрического нормирования [8]. Недавно Наоки Фуджита высказал гипотезу, что несколько классов ОРР многогранников совпадают с полиэдральными реализациями Зелевинского–Накаджимы (для C_2 это следует из [FN, Example 5.10]).

В [10] многогранники Ньютона–Окунькова полных многообразий флагов в типе A вычислены для геометрического нормирования, заданного флагом сдвинутых подмногообразий Шуберта, которые соответствуют финальным подсловам в разложении самого длинного элемента $(s_1)(s_2s_1)(s_3s_2s_1)(\ldots)(s_{n-1}\ldots s_1)$ (примеры 1.4, 1.7, 2.3 иллюстрируют это вычисление при $n=3$, см. также раздел 4.2). Удивительно, что полученные многогранники совпадают с многогранниками ВЛФФ, хотя последние были изначально построены из других соображений. Это совпадение мотивировало дальнейшие исследования (см. подробности в [FaFL]).

Список публикаций

[1] V. Kiritchenko, *Chern classes of reductive groups and an adjunction formula*, Ann. Inst. Fourier **56**

(2006), no. 4, 1225–1256

[2] —, *On intersection indices of subvarieties in reductive groups*, Moscow Math. J., **7** (2007), no. 3 (выпуск, посвящённый А.Г.Хованскому), 489–505

[3] —, *Gelfand-Zetlin polytopes and flag varieties*, IMRN (2010), no. 13, 2512–2531

[4] J. Hornbostel, —, *Schubert calculus for algebraic cobordism*, J. reine angew. Math. (Crelles), 2011, no. 656, 59–85

[5] Кириченко В. А., Смирнов Е. Ю., Тиморин В. А., *Исчисление Шуберта и многогранники Гельфанда-Цетлина*, Успехи математических наук **67** (2012), no. 4, 89–128

[6] —, A. Krishna, *Equivariant Cobordism of Flag Varieties and of Symmetric Varieties*, Transform. Groups, **18** (2013), no. 2, 391–413

[7] P. Gusev, —, V. Timorin, *Counting vertices in the Gelfand-Zetlin polytopes*, J. of Comb. Theory, Series A, **120** (2013), 960–969

[8] —, *Geometric mitosis*, Math. Res. Lett., **23** (2016), no. 4, 1069–1096

[9] —, *Divided difference operators on polytopes*, Adv. Studies in Pure Math. **71** (2016), 161–184

[10] —, *Newton–Okounkov polytopes of flag varieties*, Transform. Groups **22** (2017), no. 2, 387–402

4. Основные результаты

В этом разделе собраны более подробные формулировки основных результатов докторской диссертации. Мы постарались сделать изложение как можно более самодостаточным. Однако мы предполагаем, что читатель знаком с теорией представлений и исчислением Шуберта.

4.1. Эйлерова характеристика полных пересечений в редуктивных группах

Пусть G — связная комплексная редуктивная группа размерности n и ранга k, и пусть $\pi : G \to GL(V)$ — точное представление группы G. Назовём общим *гиперплоским сечением* H_π, соответствующим π, прообраз $\pi^{-1}(H)$ пересечения $\pi(G)$ с общей аффинной гиперплоскостью $H \subset \mathrm{End}(V)$. Несложно показать, что все общие гиперплоские сечения имеют одну и ту же (топологическую) эйлерову характеристику. Ниже приводится явная формула для эйлеровой характеристики $\chi(H_\pi)$. Она следует из [1, Theorem 1.1], [2, Theorem 1.3], из которых также следует аналогичная явная формула для эйлеровой характеристики полного пересечения гиперплоских сечений.

Выберем максимальный тор $T \subset G$, и обозначим через L_T его решётку характеров. Выберем камеру Вейля $\mathcal{D} \subset L_T \otimes \mathbb{R}$. Обозначим через R^+ множество всех положительных корней группы G, а через ρ обозначим полусумму положительных корней группы G. Скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на $L_T \otimes \mathbb{R}$ задано с помощью такой невырожденной симметрической билинейной формы на алгебре Ли группы G, которая инварианта относительно присоединённого действия группы (такая форма существует, поскольку G редуктивна). Через $P_\pi \subset L_T \otimes \mathbb{R}$ обозначим весовой многогранник представления π, то есть, выпуклую оболочку весов тора T, которые встречаются в π.

Определим полиномиальную функцию $F(x, y)$ на $(L_T \oplus L_T) \otimes \mathbb{R}$ по формуле:

$$F(x, y) = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{(x, \alpha)(y, \alpha)}{(\rho, \alpha)^2}.$$

С геометрической точки зрения этот многочлен считает индекс самопересечения дивизоров на произведении $G/B \times G/B$ двух многообразий флагов (дивизоры соответствуют весам $(\lambda_1, \lambda_2) \in L_T \oplus L_T$).

Теорема 4.1. *[1,Theorem 1.1], [2,Theorem 1.2] Зададим дифференциальный оператор $\mathbb{D}$ на функциях на $(L_T \oplus L_T) \otimes \mathbb{R}$ формулой:*

$$\mathbb{D} = \prod_{\alpha \in R^+} (1 + \partial_\alpha)(1 + \widetilde{\partial}_\alpha),$$

где ∂_α and $\widetilde{\partial}_\alpha$ — производные вдоль векторов $(\alpha, 0)$ and $(0, \alpha)$, соответственно. Обозначим через $[\mathbb{D}]_i$ однородную компоненту i-той степени в $\mathbb{D}$, если рассматривать $\mathbb{D}$ как многочлен от переменных ∂_α и $\widetilde{\partial}_\alpha$. Тогда

$$\chi(H_\pi) = (-1)^{n-1} \int\limits_{P_\pi \cap \mathcal{D}} (n! - (n-1)![\mathbb{D}]_1 + (n-2)![\mathbb{D}]_2 - \ldots + k![\mathbb{D}]_{n-k})\, F(x, x) dx.$$

Форма объёма dx нормируется так, чтобы кообъём решётки L_T в $L_T \otimes \mathbb{R}$ был равен 1.

Например, для $G = SL_3(\mathbb{C})$ и неприводимого представления π со старшим весом $m\omega_1 + n\omega_2$ (через ω_1 и ω_2 обозначены фундаментальные веса) получается такой ответ:

$$\chi(H_\pi) = -3(m^8+16m^7n+112m^6n^2+448m^5n^3+700m^4n^4+448m^3n^5+112m^2n^6+$$

$$16mn^7 + n^8 + 18(m^6 + 12m^5n + 50m^4n^2 + 80m^3n^3 + 50m^2n^4 + 12mn^5 + n^6)+$$

$$+6(5m^4 + 40m^3n + 72m^2n^2 + 40mn^3 + 5n^4) + 6(m^2 + 4mn + n^2)-$$

$$-6(m + n)(m^6 + 13m^5n + 71m^4n^2 + 139m^3n^3 + 71m^2n^4 + 13mn^5 + n^6+$$

$$+5(m^4 + 9m^3n + 19m^2n^2 + 9mn^3 + n^4) + 3(m^2 + 5mn + n^2))).$$

4.2. Выпукло-геометрические модели для исчисления Шуберта

В работах [3,5] многогранник Гельфанда–Цетлина используется, чтобы моделировать исчисление Шуберта на многообразии полных флагов в $\mathbb{C}^n$. При этом пересечение циклов на многообразии флагов соответствует пересечению граней многогранника. В случае произвольной редуктивной группы G можно также моделировать исчисление Шуберта на многообразии флагов G/B с помощью многогранников. Напомним, что кольцо Чжоу $CH^*(G/B)$ (как группа по сложению) является свободной абелевой группой с базисом из циклов Шуберта $[X_w]$, которые нумеруются элементами $w \in W$ группы Вейля группы G. Поэтому для построения полезной модели важно понять, какие линейные комбинации граней многогранника соответствуют циклам Шуберта. В случае $G = GL_n(\mathbb{C})$ для этой цели мы использовали комбинаторный митоз Кнутсона–Миллера, однако для других групп никаких подходящих алгоритмов не было. В работах [8,9] мною разработаны такие алгоритмы для произвольной G (в частности, для $G = GL_n(\mathbb{C})$ получается митоз Кнутсона–Миллера).

Зафиксируем приведённое разложение самого длинного элемента $w_0 \in W$ на простые отражения: $\overline{w_0} = s_{i_1} \dots s_{i_d}$ (то есть, $d = \dim G/B$). *Выпукло геометрические операторы Демазюра* D_i, построенные в [9] элементарными методами, сопоставляют каждому простому отражению s_i операцию на многогранниках в $\mathbb{R}^d$, повышающую размерность на один. В частности, по разложению $\overline{w_0}$ и доминантному весу λ можно индуктивно получить многогранник (возможно, виртуальный), который кодирует характер Вейля. Для этого вначале определяется линейный оператор $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, сопоставляющий целым точкам в $\mathbb{R}^d$ веса группы G (напомним, что через k обозначается ранг группы G).

Теорема 4.2. *[9,Theorem 3.6] Для каждого доминантного веса λ в решётке корней группы G, и каждой точки $a_\lambda \in \mathbb{Z}^d$ такой, что $p(a_\lambda) = w_0\lambda$, выпуклая цепь*

$$P_\lambda := D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_d}(a_\lambda)$$

даёт характер Вейля $\chi(V_\lambda)$ неприводимого G-модуля V_λ, то есть,

$$\chi(V_\lambda) = \sum_{x \in P_\lambda \cap \mathbb{Z}^d} e^{p(x)}.$$

Несложно проверить, что для произвольного элемента $w \in W$ найдётся приведённое разложение $\overline{w} = s_{i_1} \dots s_{i_\ell}$, которое является подсловом в разложении $\overline{w_0}$. В [9] по каждому простому отражению строится операция M_i (геометрический митоз) на гранях многогранника P_λ. В частности, при дополнительных предположениях можно индукцией по ℓ получить набор граней, кодирующий характер Демазюра $\chi^w(\lambda)$ многообразия Шуберта X_w, соответствующий весу λ:

Теорема 4.3. *[8, Corollary 3.6] Пусть $P_\lambda \subset \mathbb{R}^d$ — допустимый λ-сбалансированный парамногогранник, и $\mathfrak{S}_w \subset P_\lambda$ множество всех граней, которые получаются из $0 \in P_\lambda$ последовательным применением операций $M_{j_\ell}, \dots, M_{j_1}$. Предположим, что для всех $1 < k \leq \ell$, набор граней $M_{j_k} \dots M_{j_\ell}(0)$ удовлетворяет условиям (3) и (4) [8, Theorem 3.4]. Тогда*

$$\chi^{w_0 w}(\lambda) = e^{w_0\lambda} \sum_{x \in \mathfrak{S}_w \cap \mathbb{Z}^d} e^{p(x)}.$$

Например, для $G = Sp_4(\mathbb{C})$ и разложения $\overline{w_0} = s_2s_1s_2s_1$ получается многогранник $P_\lambda \subset \mathbb{R}^4$, который оказывается многогранником Ньютона–Окунькова многообразия флагов $X = Sp_4/B$ и линейного расслоения L_λ для нормирования, связанного с флагом $s_2s_1s_2s_1X_{\mathrm{id}} \subset s_2s_1s_2X_{s_1} \subset s_2s_1X_{s_2s_1} \subset s_2X_{s_1s_2s_1} \subset X$ сдвинутых многообразий Шуберта [8, Proposition 4.1]. Здесь s_1 и s_2 обозначают простые отражения, связанные с коротким и длинным простыми корнями, соответственно. Этот многогранник определяется 8-ю неравенствами, причём можно выбрать координаты (y_1, y_2, y_3, y_4) в $\mathbb{R}^4$ так, что ровно 4 неравенства оказываются однородными: $0 \le y_1$, $0 \le 2y_4 \le y_3 \le 2y_2$ [9, Example 3.4], [8, Example 2.9]. Однако, P_λ комбинаторно не эквивалентен ни струнным многогранникам, ни ВЛФФ-многограннику [10, Section 3.4]. Грани многогранника P_λ, содержащие 0, можно закодировать следующими диаграммами:

$$\begin{array}{cc} & \boxed{+ \iff 0 = y_4} \\ \boxed{+ \iff 0 = y_1} & \boxed{+ \iff y_4 = \frac{y_3}{2}} \\ & \boxed{+ \iff y_3 = 2y_2} \end{array}, \text{ например } \{y_1 = 0,\ y_3 = 2y_2\} \text{ кодируется } \begin{array}{cc} & \boxed{} \\ \boxed{+} & \boxed{} \\ & \boxed{+} \end{array}.$$

Геометрический митоз переводится в простое комбинаторное правило, по которому циклы Шуберта на Sp_4/B можно представить следующими наборами граней многогранника P_λ.

$$\mathfrak{S}_{\mathrm{id}} = \{0\} = \begin{array}{cc} & \boxed{+} \\ \boxed{+} & \boxed{+} \\ & \boxed{+} \end{array},\ \mathfrak{S}_{s_1} = \begin{array}{cc} & \boxed{+} \\ \boxed{} & \boxed{+} \\ & \boxed{+} \end{array},\ \mathfrak{S}_{s_2} = \begin{array}{cc} & \boxed{+} \\ \boxed{+} & \boxed{+} \\ & \boxed{} \end{array},$$

$$\mathfrak{S}_{s_1s_2} = \begin{array}{cc} & \boxed{+} \\ \boxed{} & \boxed{} \\ & \boxed{+} \end{array} \cup \begin{array}{cc} & \boxed{+} \\ \boxed{+} & \boxed{} \\ & \boxed{} \end{array},\ \mathfrak{S}_{s_2s_1} = \begin{array}{cc} & \boxed{+} \\ \boxed{} & \boxed{+} \\ & \boxed{} \end{array},\ \mathfrak{S}_{s_1s_2s_1} = \begin{array}{cc} & \boxed{+} \\ \boxed{} & \boxed{} \\ & \boxed{} \end{array},$$

$$\mathfrak{S}_{s_2s_1s_2} = \begin{array}{cc} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{+} \\ & \boxed{} \end{array} \cup \begin{array}{cc} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \\ & \boxed{+} \end{array} \cup \begin{array}{cc} & \boxed{} \\ \boxed{+} & \boxed{} \\ & \boxed{} \end{array},\ \mathfrak{S}_{s_2s_1s_2s_1} = P_\lambda = \begin{array}{cc} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \\ & \boxed{} \end{array}.$$

4.3. Многогранники Ньютона–Окунькова многообразий флагов

Зафиксируем разложение $\overline{w_0} = (s_1)(s_2s_1)(s_3s_2s_1)\dots(s_{n-1}\dots s_1)$ самого длинного элемента $w_0 \in S_n$. Здесь $s_i := (i\ i+1)$ обозначает i-тую элементарную транспозицию (простое отражение в случае группы Вейля S_n). Обозначим через $d := \binom{n}{2}$ длину элемента w_0.

Зафиксируем полный флаг подпространств $F^\bullet := (F^1 \subset F^2 \subset \dots \subset F^{n-1} \subset \mathbb{C}^n)$ (иными словами, зафиксируем борелевскую подгруппу $B \subset GL_n$), а также базис $e_1,\dots,\ e_n$ в $\mathbb{C}^n$, совместимый с $F^\bullet$ (или максимальный тор в B), то есть, $F^i = \langle e_1, \dots, e_i\rangle$. Ниже $\overline{w_\ell}$ для $\ell = 1,\dots,\ d$ обозначает подслово $\overline{w_0}$, которое получается вычёркиванием ℓ простых отражений в $\overline{w_0}$, а w_ℓ обозначает соответствующий элемент в S_n. Рассмотрим флаг сдвинутых многообразий Шуберта:

$$w_0X_{\mathrm{id}} \subset w_0w_{d-1}^{-1}X_{w_{d-1}} \subset w_0w_{d-2}^{-1}X_{w_{d-2}} \subset \dots \subset w_0w_1^{-1}X_{w_1} \subset GL_n/B, \qquad (*)$$

где многообразия Шуберта определяются по флагу $F^\bullet$, то есть, $X_w = \overline{BwB/B}$. Напомним, что открытая клетка Шуберта C (относительно $F^\bullet$) определяется как множество всех флагов $M^\bullet$, которые находятся в общем положении со стандартным флагом $F^\bullet$, то есть, все пересечения $M^i \cap F^j$ трансверсальны. Пусть $y_1, \dots, y_d$ — координаты на C совместимые с $(*)$, то есть, $w_0w_\ell^{-1}X_{w_\ell} \cap C = \{y_1 = \dots = y_\ell = 0\}$.

Например, можно отождествить открытую клетку Шуберта C с аффинным пространством $\mathbb{C}^d$, выбрав для каждого флага $M^\bullet$ базис $v_1,\dots,\ v_n$ в $\mathbb{C}^n$ вида:

$$v_1 = e_n + x_1^{n-1}e_{n-1} + \dots + x_1^1e_1,$$

$$v_2 = e_{n-1} + x_2^{n-2}e_{n-2} + \dots + x_2^1e_1, \quad \dots \quad , v_{n-1} = e_2 + x_{n-1}^1e_1, \quad v_n = e_n,$$

так чтобы $M^i = \langle v_1, \dots, v_i\rangle$. Такой базис единственен, поэтому коэффициенты $(x_j^i)_{i+j<n}$ являются координатами на открытой клетке. Несложно проверить, что координаты $(y_1, \dots, y_d) := (x_{n-1}^1; x_{n-2}^1, x_{n-2}^2; \dots; x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^{n-1})$ совмести-

мы с $(*)$. Иными словами, каждый флаг $M^\bullet \in C$ отождествляется с треугольной матрицей:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{n-1}^1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ x_1^{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а мы упорядочиваем коэффициенты $(x_j^i)_{i+j<n}$ этой матрицы, начиная с $(n-1)$-го столбца, двигаясь сверху вниз в каждом столбце и справо налево по столбцам.

В [10, Section 2.2] приводится другой пример координат, совместимых с $(*)$, более естественный с точки зрения геометрии многообразий Ботта–Самельсона, связанных с разложением $\overline{w_0}$.

Зафиксируем лексикографический порядок на мономах в координатах y_1, $\dots$, y_d относительно упорядочивания $y_1 \succ y_2 \succ \dots \succ y_d$. Пусть v обозначает нормирование младшим мономом на $\mathbb{C}(X_{\overline{w_0}}) = \mathbb{C}(GL_n/B)$, связанное с этими координатами и порядком. Пусть L_λ — линейное расслоение на GL_n/B, соответствующее доминантному весу $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ группы GL_n. Обозначим через $\Delta_v(GL_n/B, L_\lambda) \subset \mathbb{R}^d$ многогранник Ньютона-Окунькова, соответствующий GL_n/B, L_λ и v.

Теорема 4.4. *[10, Theorem 2.1] Многогранник Ньютона–Окунькова $\Delta_v(GL_n/B, L_\lambda)$ совпадает с ВЛФФ-многогранником $FFLV(\lambda)$.*

Напомним определение $FFLV(\lambda)$. Обозначим координаты в $\mathbb{R}^d$, соответствующие $(y_1, \dots, y_d)$ через $(u_{n-1}^1; u_{n-2}^2, u_{n-2}^1; \dots; u_1^{n-1}, u_1^{n-2}, \dots, u_1^1)$. Организуем координаты в таблицу:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & & \dots & & & & \lambda_n \\
& u_1^1 & & u_2^1 & & \dots & & & & u_{n-1}^1 & \\
& & u_1^2 & & \dots & & & & u_{n-2}^2 & & \\
& & & \ddots & & \ddots & & & & & \\
& & & & u_1^{n-2} & & u_2^{n-2} & & & & \\
& & & & & u_1^{n-1} & & & & &
\end{array} \qquad (FFLV)$$

Многогранник $FFLV(\lambda)$ определяется неравенствами $u_m^l \geq 0$ и

$$\sum_{(l,m)\in D} u_m^l \leq \lambda_i - \lambda_j$$

для всех путей Дика из λ_i в λ_j в таблице $(FFLV)$, где $1 \leq i < j \leq n$.

Например, вычисление многогранника $\Delta_v(GL_n/B, L_\lambda)$ при $n = 3$ и $\lambda = (1, 0, -1)$ проиллюстрировано в примерах 1.4, 1.7, 2.3.

Список литературы

ACK. B. H. An, Yu. Cho, J. S. Kim, *On the f-vectors of Gelfand–Cetlin polytopes*, European J. of Comb., **67** (2018), 61–77

B75. Д. Н. Бернштейн, *Число корней системы уравнений*, Функц. анализ и его прил., **9** (1975), №3, 1–4

BGG. И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, *Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P*, Успехи математических наук, **28** (1973), №3(171), 3–26.

BE. P. Bressler, S. Evens, *Schubert calculus in complex cobordism*, Trans. Amer. Math. Soc., **331** (1992), no. 2, 799–813

Br89. M. Brion, *Groupe de Picard et nombres caracteristiques des varietes spheriques*, Duke Math J. **58** (1989), no.2, 397–424

BJ. M. Brion, R. Joshua, *Equivariant Chow ring and Chern classes of wonderful symmetric varieties of minimal rank*, Transform. Groups **13** (2008), no. 3-4, 471–493

CP83. C. De Concini and C. Procesi, *Complete symmetric varieties I,* Lect. Notes in Math. **996**, Springer, 1983

CP85. C. De Concini and C. Procesi, *Complete symmetric varieties II Intersection theory,* Advanced Studies in Pure Mathematics **6** (1985), Algebraic groups and related topics, 481–513

CZZ. B. Calmès, K. Zainoulline, C. Zhong, *Equivariant oriented cohomology of flag varieties*, Documenta Math. Extra Volume: Alexander S. Merkurjev's Sixtieth Birthday (2015), 113–144

D. M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Collection of articles dedicated to Henri Cartan on the occasion of his 70th birthday, I. Ann. Sci. École Norm. Sup. 4 **7** (1974), 53–88

FaFL. X. Fang, Gh. Fourier, P. Littelmann, *Essential bases and toric degenerations arising from generating sequences*, Adv. in Math. **312** (2017), 107–149

FN. N. Fujita and S. Naito, *Newton-Okounkov convex bodies of Schubert varieties and polyhedral realizations of crystal bases*, Math. Z. **285** (2017), 325–352

KaKh. K. Kaveh, A.G. Khovanskii, *Newton convex bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory*, Ann. of Math.(2) **176** (2012), no.2, 925–978

KaKh2. K. Kaveh, A.G. Khovanskii, *Convex bodies associated to actions of reductive groups*, Moscow Math. J. **12** (2012), no. 2, 369–396

KaKh3. K. Kaveh, A.G. Khovanskii, *Complete intersections in spherical varieties*, Selecta Math. **22** (2016), no. 4, 2099–2141

Kaz. Б. Я. Казарновский, *Многогранники Ньютона и формула Безу для матричных функций конечномерных представлений,* Функц. анализ и его прил., **21** (1987), №4, 73–74

Kh78. А. Г. Хованский, *Многогранники Ньютона и род полных пересечений,* Функц. анализ и его прил., **12** (1978), №1, 51–61

Ko. M. Kogan, *Schubert geometry of flag varieties and Gelfand–Cetlin theory*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Boston 2000

Kou. A.G. Kouchnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Invent. Math. **32** (1976), no.1, 1–31

LM. R. Lazarsfeld, M. Mustata, *Convex Bodies Associated to Linear Series*, Annales Scientifiques de l'ENS **42** (2009), no. 5, 783–835

O97. А. Ю. Окуньков, *Замечание о полиноме Гильберта сферического многообразия*, Функц. анализ и его прил., **31** (1997), №2, 82–85

O98. A. Okounkov, *Multiplicities and Newton polytopes*, Kirillov's seminar on representation theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **181** (1998), 231–244