**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»**

Факультет математики

На правах рукописи

Приходько Артем Николаевич

Следовые методы в алгебраической геометрии

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
Брав Кристофер Ира
PhD, доцент

Москва – 2020

Глава 1

В первой части Главы 1 вводится основной категорный инструмент этой работы, и доказываются некоторые его базовые свойства.

Предложение 0.1. *Пусть $\mathcal{E}$ это симметрическая моноидальная $(\infty, 2)$-категория (т.е. коммутативная алгебра в ∞-категории $(\infty, 2)$-категорий) и пусть $X, Y \in \mathcal{E}$ это дуализируемые объекты. Предположим дана (не обязательно коммутативная) диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_X"] \arrow[d, bend right, "\varphi"'] & X \arrow[dl, Rightarrow, "T"'] \arrow[d, bend right, "\varphi"'] \\ Y \arrow[u, bend right, "\psi"'] \arrow[r, "F_Y"] & Y \arrow[u, bend right, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

в $\mathcal{E}$, где φ это левый сопряженный к ψ и

$$\varphi \circ F_X \xrightarrow{T} F_Y \circ \varphi$$

2-морфизм в $\mathcal{E}$. Тогда существует естественный морфизм

$$\operatorname{tr}_{\mathcal{E}}(F_X) \xrightarrow{\operatorname{tr}_{\mathcal{E}}(\varphi, T)} \operatorname{tr}_{\mathcal{E}}(F_Y)$$

*в ∞-категории $\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(I, I)$ называемый **морфизмом следов индуцированным** T. Более того, $\operatorname{tr}_{\mathcal{E}}(-,-)$ функториален по отношению к композициям по вертикали.*

Понятие $(\infty, 2)$-категории подробно обсуждается в [GR17a, Appendix]. В этой работе в основном будет использоваться $\mathcal{E} := 2\mathcal{C}\mathrm{at}_k$, категория k-линейных представимых стабильных категорий и непрерывных k-линейный функторов, где k это некоторое поле. Отметим, что моноидальная единица в $2\mathcal{C}\mathrm{at}_k$ это категория Vect_k (неограниченная производная категория k-векторных пространств) и $\operatorname{End}_{2\mathcal{C}\mathrm{at}_k}(\mathrm{Vect}_k) \simeq \mathrm{Vect}_k$. В частности для любой дуализируемой k-линейной категории $\mathcal{C}$ снабженной эндофунктором G след $\operatorname{tr}_{2\mathcal{C}\mathrm{at}_k}(G)$ это естественным образом комплекс k-векторных пространств, который иногда обозначается как $HH(\mathcal{C}, G)$. В этом сеттинге определяется:

Конструкция 0.2. Если дана дуализируемая k-линейная категория $\mathcal{C}$ снабженная эндофунктором $G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ и лакс G-эквивариантным компактным объектом (E, t), т.е. компактным объектом $E \in \mathcal{C}$ снабженным отображением $t \colon E \to G(E)$, то можно рассмотреть диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_k \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}"] \arrow[d, bend right, "-\otimes E"'] & \mathrm{Vect}_k \arrow[dl, Rightarrow, "T"'] \arrow[d, bend right, "-\otimes E"'] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend right] \arrow[r, "G"] & \mathcal{C} \arrow[u, bend right, "\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(E,-)"'] \end{tikzcd}$$

в $2\mathcal{C}\mathrm{at}_k$ с 2-морфизмом T индуцированным морфизмом t. Соответствующий элемент $\operatorname{ch}(E, t) \in HH(\mathcal{C}, G)$, получаемый через формализм следов, называется **категорный характер Черна** E.

Используя эти обозначения, функториальность следов может быть переформулирована в следующей форме:

Предложение 0.3 (Категорная формула следа)**.** *Пусть $\mathcal{C}, G$ и (E, t) как выше. Если дан функтор $\Gamma \colon \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_k$ допускающий непрерывный правый сопряженный и естественное преобразование $\varepsilon \colon \Gamma \circ G \to \Gamma$, тогда*

$$\operatorname{tr}_{\mathrm{Vect}_k}\left(\Gamma(E) \xrightarrow{\Gamma(t)} \Gamma(G(E)) \xrightarrow{\varepsilon_E} \Gamma(E) \right) = \int_{\varepsilon} \operatorname{ch}(E, t),$$

где $\int_{\varepsilon} \colon HH(\mathcal{C}, G) \to k$ это морфизм следов индуцированный ε.

Проблема с предыдущим предложением заключается в том, что $HH(\mathcal{C}, G)$, $\mathrm{ch}(-,-)$, и $\int_{\varepsilon}$ описываются не очень явно в общем случае. Во второй части первой главы эта проблема рассматривается в случае, когда $\mathcal{C}$ и G имеют геометрическое происхождение. Второй половине Главы 1 мы частично решаем эту проблему проделывая некоторые следовые вычисления в подходящих категориях соответствий, который потом можно использовать применяя симметрические моноидальные функторы QCoh или ICoh.

Глава 2

Соглашение 0.4. До конца текста будем зафиксирем базовое поле k нулевой характеристики.

Вторая глава посвящена основанному на следах доказательству неэквивариантной теоремы Гротендика-Римана-Роха со значениями в когомологиях Ходжа. Сначала вспомним формулировку утверждения:

Теорема ([BS58]). *Пусть $f\colon X \to Y$ это морфизм гладких собственных k-схем. Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
K_0(X) \arrow[r, "\mathrm{ch}(-)\cdot \mathrm{td}_X"] \arrow[d, "f_*"'] & \bigoplus_p H^p(X, \Omega^p_X) \arrow[d, "f_*"] \\
K_0(Y) \arrow[r, "\mathrm{ch}(-)\cdot \mathrm{td}_Y"'] & \bigoplus_p H^p(Y, \Omega^p_Y)
\end{tikzcd}$$

коммутативна, где $\mathrm{ch}(-)$ это классический характер Черна и td_{-} это класс Тодда касательного расслоения. Иными словами, для совершенного комплекса квази-когерентных пучков E на X, имеем

$$f_*(\mathrm{ch}(E)\,\mathrm{td}_X) = \mathrm{ch}(f_*(E))\,\mathrm{td}_Y\,. \tag{1}$$

Основная идея заключается в том, что уравнение (1) получается как следствие функториальности морфизма следов. Конкретнее, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Vect}_k \arrow[r, "E\otimes -"] & \mathrm{QCoh}(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\otimes \mathcal{O}_X", "\sim"'] & \mathrm{QCoh}(Y) \arrow[d, "\otimes \mathcal{O}_Y", "\sim"'] \\
 & \mathrm{ICoh}(X) \arrow[r, "f_*"'] & \mathrm{ICoh}(Y),
\end{tikzcd}$$

где E это совершенный комплекс на X, а $\mathrm{QCoh}(X)$ и $\mathrm{ICoh}(X)$ это категории квази-когерентных и инд-когерентных пучков на X соответственно (см. определения в [GR17a, Chapter 3.1] и [GR17a, Chapter 4.1]). Применяя функториальность следов к этой диаграмме, получаем коммутативую диаграмму k-векторных пространств:

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "{\mathrm{ch}(E, \mathrm{Id}_E)}"'] \arrow[rr, bend left, "{\mathrm{ch}(f_*(E), \mathrm{Id}_{f_*(E)})}"] & HH(\mathrm{QCoh}(X)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{tr}_{2\mathcal{C}\mathrm{at}_k}(-\otimes \mathcal{O}_X)", "\sim"'] & HH(\mathrm{QCoh}(Y)) \arrow[d, "\mathrm{tr}_{2\mathcal{C}\mathrm{at}_k}(-\otimes \mathcal{O}_Y)", "\sim"'] \\
 & HH(\mathrm{ICoh}(X)) \arrow[r, "\mathrm{tr}_{2\mathcal{C}\mathrm{at}_k}(f_*)"'] & HH(\mathrm{ICoh}(Y)).
\end{tikzcd}$$

Теперь, чтобы получить (1) достаточно выразить морфизм следов в получившейся диаграмме в классических терминах. Доказательство разбивается на три части:

- Отождествить $HH_0(\mathrm{QCoh}(X))$ с $\bigoplus_p H^p(X, \Omega^p_X)$ и при помощи этого изоморфизма отождествить $\mathrm{ch}(E, \mathrm{Id}_E)$ с классическим характером Черна.

- Отождествить $HH_0(\mathrm{ICoh}(X))$ с $\bigoplus_p H^p(X, \Omega^p_X)$ и аналогично для Y, и отождествить $\mathrm{tr}_{2\mathcal{C}\mathrm{at}_k}(f_*)$ с прямым образом в когомологиях.

- Отождествить $\mathrm{tr}_{2\mathcal{C}\mathrm{at}_k}(- \otimes \mathcal{O}_X)$ с умножением на класс Тодда td_X и аналогично для Y.

Стратегия осуществления этих шагов заключается в том чтобы переговорить следовые вычисления в терминах геометрии производного пространства петель $\mathcal{L}X$. Этот поход тесно связан с работой Маркаряна [Mar08], но более геометричен и дает несколько более общие результаты.

Ремарка 0.5. В частности, замечательно, то что это доказательство избегает использование трюка Гротендика с разложением проективного морфизма в композицию замкнутого вложения и проекции, а вместо этого работает для всех *собственных* морфизмов (в частности не используется лемма Чжоу для сведения общего случая к проективному).

Характер Черна

Нотация 0.6. Будем обозначать категорию производных k-схем почти конечного типа как $\mathcal{S}\mathrm{ch}_{\mathrm{aft}}$, см. [GR17a, Chapter I.2, 3.5].

Для того чтобы понять категорный характер Черна, сначала напомним некоторые стандартные факты о квази-когерентных пучках:

Теорема 0.7 ([GR17a, Chapter I.3, Proposition 3.4.2 and Proposition 2.2.2.]). *Функтор*

$$\mathrm{QCoh}^*\colon \mathcal{S}\mathrm{ch}_{\mathrm{aft}}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_k$$

симметрический моноидальный и удовлетворяет условию замены базы.

Из вычислений в категории соответствий можно вывести:

Следствие 0.8. *Пусть X будет гладкой k-схемой. Тогда*

1. *Существует естественная эквивалентность*

$$HH(\mathrm{QCoh}(X)) \simeq \Gamma(X^{\mathrm{d\,Id}_X}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{d\,Id}_X}}),$$

где $X^{\mathrm{d\,Id}_X}$ — это производное неподвижное множество тождественного эндоморфизма X.

2. *Пусть E будет совершенным комплексом квази-когерентных пучков на X, снабженным эндоморфизмом t. Тогда, при эквивалентности выше, категорный характер Черна эквивалентен следу*

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{QCoh}(X^{\mathrm{d\,Id}_X})}\left(i^*E \xrightarrow[\sim]{\alpha_E} i^*E \xrightarrow{i^*(t)} i^*E \right),$$

где $i\colon X^{\mathrm{d\,Id}_X} \to X$ каноническое вложение, и α_E индуцировано 2-клеткой делающей диаграмму ниже коммутативной

$$\begin{tikzcd} X^{\mathrm{d\,Id}_X} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "\Delta"] \\ X \arrow[r, "\Delta"] & X \times X. \end{tikzcd}$$

Ключевое наблюдение этой работы заключается в том, что производное неподвижное множество $X^{\mathrm{d\,Id}_X}$ имеет богатую геометрию, которая тесно связана со следовыми конструкциями, и то что, ингридиенты выходящие в теорему Гротендика-Римана-Роха могут быть естественным образом описаны в этих терминах. Чтобы это увидеть, сначала замечается, что $X^{\mathrm{d\,Id}_X}$, т.е. пулбэк следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "\Delta"] \\ X \arrow[r, "\Delta"'] & X \times X, \end{tikzcd}$$

эквивалентен производному пространству петель $\mathcal{L}X := \mathrm{Map}(S^1, X) \simeq X \times_{X\times X} X$.

Производное пространство петель имеет естественную структуру групповой схемы над X. Более того, поскольку $i\colon \mathcal{L}X \to X$ это нильпотентное утолщение, $\mathcal{L}X$ это *формальная* групповая схема. Формальная теория деформаций над произвольной базой в характеристике ноль подробно изучалась в [GR17b]. Напомним основные результаты, необходимые в данной работе:

Теорема 0.9 ([GR17b, Chapter 7, Theorem 3.6.2 and Proposition 5.1.2])**.** *Пусть X это гладкая k-схема и пусть $\widehat{\mathrm{Moduli}}$ это категория формальных задач модулей над X (см. [GR17b, Chapter 5, Definition 1.1.1]) и пусть $\mathrm{Grp}(\widehat{\mathrm{Moduli}}_{/X})$ обозначает категорию формальных групп над X. Тогда:*

1. *Существует естественная эквивалентность ∞-категорий*

$$\mathrm{Grp}(\widehat{\mathrm{Moduli}}_{/X}) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Lie}_X} \mathrm{LAlg}(\mathrm{QCoh}(X)),$$

где $\mathrm{LAlg}(\mathrm{QCoh}(X))$ это $(\infty,1)$-категория алгебр в $\mathrm{QCoh}(X)$ над операдой Ли. Более того, для формальной группы $\widehat{G} \in \mathrm{Grp}(\widehat{\mathrm{Moduli}}_{/X})$ подлежащий квази-когерентный пучок $\mathrm{Lie}_X(\widehat{G}) \in \mathrm{LAlg}(\mathrm{QCoh}(X))$ эквивалентен $\mathbb{T}_{\widehat{G}/X,e} := e^*\mathbb{T}_{\widehat{G}/X}$, где $X \xrightarrow{e} \widehat{G}$ это единичное сечение и $\mathbb{T}$ обозначает касательный пучок.

2. *Для $\widehat{G} \in \mathrm{Grp}(\widehat{\mathrm{Moduli}}_{/X})$ существует естественная эквивалентность ∞-категорий*

$$\mathrm{Rep}_{\widehat{G}}(\mathrm{QCoh}(X)) \xrightarrow[\sim]{} \mathrm{Mod}_{\mathrm{Lie}_X(\widehat{G})}(\mathrm{QCoh}(X)).$$

3. *Пусть $\widehat{G}$ это формальная группа над X такая, что подлежащий комплекс соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}_X(\widehat{G})$ лежит в $\mathrm{Coh}^{<0}(X)$. Тогда существует каноническая эквивалентность, как формальных задач модулей над X*

$$\exp_{\widehat{G}} \colon \mathbb{V}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \widehat{G},$$

где $\mathbb{V}(\mathfrak{g})$ это так называемая ***векторная схема*** *определяемая как $\mathbb{V}(\mathfrak{g}) := \mathrm{Spec}_{/X}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^\vee))$.*

Поскольку $\mathrm{Lie}_X(\mathcal{L}X) \simeq \mathbb{T}_X[-1]$, как первое следствие получается описание $HH(\mathrm{QCoh}(X))$:

Следствие 0.10 (Хохшильд-Констант-Розенберг)**.** *Пусть X это гладкая схема над полем k характеристики 0. Тогда ограничение вдоль $\exp_{\mathcal{L}X}$ индуцирует эквивалентность*

$$\mathrm{HKR} \colon \Gamma(\mathcal{L}X, \mathcal{O}_{\mathcal{L}X}) \simeq \bigoplus_{p=0}^{\dim X} \Gamma(X, \Omega^p_X[p]).$$

Для того чтобы понять $\mathrm{ch}(E,t)$ конкретнее, замечается что классифицирующее пространство $\widehat{B}_{/X}$ для $\mathcal{L}X$ эквивалентно $(X \times X)_{\widehat{\Delta}}$. Поскольку любой квази-когерентный пучок $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$ есть пулбэк $q_2^*E \in \mathrm{QCoh}((X\times X)_{\widehat{\Delta}})$ вдоль диагонального морфизма $\Delta \colon X \to (X\times X)_{\widehat{\Delta}}$, получается что $\mathcal{F}$ снабжено каноническим действием $\mathcal{L}X$.

Предложение 0.11. *Пусть X будет как выше, и пусть E — это совершенный комплекс квази-когерентных пучков на X. Тогда морфизм α_E из 0.8 задается каноническим $\mathcal{L}X$-действием на E.*

Для того чтобы понять $\mathcal{L}X$-действие конкретнее, используется вторая часть 0.9. Введем следующее определение:

Определение 0.12. Класс когомологий $\mathrm{At}(E) \in H^1(X, \Omega^1_X \otimes \mathcal{E}\mathrm{nd}(E))$ двойственный каноническому отображению действия $\mathbb{T}_X[-1] \to \mathcal{E}\mathrm{nd}(E)$ называется **Класс Атьи** E.

Ремарка 0.13. Если k — это поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, и E — это векторное расслоение, тогда это определение совпадает с оригинальным определением введенным Атьей в [Ati57]. А именно, пусть ∇ — это любая гладкая связность на E, и $F_\nabla \in \mathcal{E}\mathrm{nd}(E) \otimes \Omega^2_X$ — соответствующая форма кривизны. Тогда кривизна F_∇ раскладывается в сумму $F^{2,0}_\nabla + F^{1,1}_\nabla$. Можно проверить, что $F^{1,1}_\nabla$ — это представитель $\mathrm{At}(E)$.

Это определение позволяет получить описание $\mathrm{ch}(E,t)$ в стиле теории Черна-Вейля:

Предложение 0.14. *Пусть X — это гладкая k-схема. Тогда при HKR-эквивалентности (0.10) имеем*

$$\mathrm{ch}(E,t) = \mathrm{tr}_{\mathrm{QCoh}(X)}(e^{\mathrm{At}(E)} \circ t).$$

Наконец, если X собственная схема, используя принцип расщепления, устанавливается связь с классическим характером Черна:

Предложение 0.15. *Пусть X — это гладкая собственная k-схема, и пусть E — это совершенный комплекс квази-когерентных пучков на X снабженный эндоморфизмом t. Тогда $\mathrm{ch}(E,t) \in \bigoplus_p H^p(X, \Omega^p_X)$ однозначно определяется следующими свойствами:*

- $\mathrm{ch}(E,t)$ *аддитивен в корасслоенных последовательностях и коммутирует с обратными образами.*
- $\mathrm{ch}(E,\lambda t) = \lambda\,\mathrm{ch}(E,t)$ *для любого* $\lambda \in k$.
- $\mathrm{ch}(E,\mathrm{Id}_E)$ *совпадает с классическим характером Черна* $\mathrm{ch}(E)$ *для* E, *определенным через принцип расщепления.*

Прямой образ

Перейдем к обсуждению морфизма следов

$$\bigoplus_{p=0} H^p(X,\Omega^p_X) \simeq HH_0(\mathrm{QCoh}(X)) \xrightarrow{\mathrm{tr}_{2\mathfrak{Cat}_k}(f_*,\mathrm{Id}_{f_*})} HH_0(\mathrm{QCoh}(Y)) \simeq \bigoplus_{p=0} H^p(Y,\Omega^Y_X)$$

полученный применением 0.1 к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{QCoh}(X) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{QCoh}(X)}"] \arrow[d, bend right, "f_*"'] & \mathrm{QCoh}(X) \arrow[d, bend right, "f_*"'] \\
\mathrm{QCoh}(Y) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{QCoh}(Y)}"'] \arrow[u, bend right, "f^!"'] & \mathrm{QCoh}(Y) \arrow[u, bend right, "f^!"']
\end{tikzcd}$$

в более привычных терминах. Знание о том, что ответ должен содержать в итоге класс Тодда, подсказывает, что вряд ли возможно получить это описание чисто формально.

Чтобы справиться с этой сложностью, рассматривается другая важная ∞-категория связанная с X, а именно ∞-категория $\mathrm{ICoh}(X) \in 2\mathfrak{Cat}_k$ инд-когерентных пучков на X (см. [GR17a, Part II], и [Gai13]). Для гладкой классической схемы X как подлежащая категория, категория инд-когерентных пучков $\mathrm{ICoh}(X)$ эквивалентна категории квази-когерентных пучков $\mathrm{QCoh}(X)$, но обладает другой симметрической моноидальной структурой. Так же как и квази-когерентные пучки, инд-когерентные пучки обладают многими замечательными свойствами:

Теорема 0.16 ([GR17a, Chapter II.1, Proposition 6.3.4 and Chapter II.2, Theorem 4.2.5])**.** *Функтор*

$$\mathrm{ICoh}^! \colon \mathcal{S}\mathrm{ch}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{aft}} \longrightarrow 2\mathfrak{Cat}_k$$

симметрический моноидальный и удовлетворяет условию замены базы по отношению к собственным морфизмам.

Отсюда следует:

Следствие 0.17. *Пусть X это собственная k-схема. Существует естественная эквивалентность*

$$HH(\mathrm{ICoh}(X)) \simeq \Gamma(\mathcal{L}X, \omega_{\mathcal{L}X}).$$

Более того, если X также гладкая схема, тогда

$$\Gamma(\mathcal{L}X,\omega_{\mathcal{L}X}) \overset{\mathrm{HKR}^\vee}{\simeq} \left(\bigoplus_p H^p(X,\Omega^p_X[p])\right)^\vee .$$

Формальные манипуляции в категории соответствий позволяют показать:

Предложение 0.18. *Пусть $f\colon X\to Y$ морфизм между собственными k-схемами. Тогда соответствующий морфизм следов*

$$\Gamma(\mathcal{L}X,\omega_{\mathcal{L}X})\simeq\ HH(\mathrm{ICoh}(X))\xrightarrow{\mathrm{tr}(f_*,\mathrm{Id}_{f_*})}HH(\mathrm{ICoh}(X))\ \simeq\Gamma(\mathcal{L}Y,\omega_{\mathcal{L}Y})$$

индуцированный диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{ICoh}(X) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{ICoh}(X)}"] \arrow[d, bend right, "f_*"'] & \mathrm{ICoh}(X) \arrow[d, bend right, "f_*"'] \\
\mathrm{ICoh}(Y) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{ICoh}(Y)}"'] \arrow[u, bend right, "f^!"'] & \mathrm{ICoh}(Y) \arrow[u, bend right, "f^!"']
\end{tikzcd}$$

в $2\mathcal{C}\mathrm{at}_k$ совпадает с морфизмом, полученным применением функтора глобальных сечений $\Gamma(\mathcal{L}Y,-)\colon\ \mathrm{ICoh}(\mathcal{L}Y)\to\mathrm{Vect}_k$ к коединице $\mathcal{L}f_*\omega_{\mathcal{L}X}\to\omega_{\mathcal{L}Y}$ сопряжения $\mathcal{L}f_*\dashv\mathcal{L}f^!$.

В частности, если X и Y гладкие, тогда индуцированный HRK-эквивалентностью морфизм

$$\left(\bigoplus_{p=0}^{\dim X}H^p(X,\Omega_X^p)\right)^\vee\longrightarrow\left(\bigoplus_{p=0}^{\dim X}H^p(Y,\Omega_Y^p)\right)^\vee$$

совпадает под двойственностью Пуанкаре, с прямым образом в гомологиях.

Класс Тодда

Остается понять морфизм следов

$$\Gamma(\mathcal{L}X,\mathcal{O}_{\mathcal{L}X})\xrightarrow[\sim]{\mathrm{tr}_{2\mathcal{C}\mathrm{at}_k}(-\otimes\mathcal{O}_X,\mathrm{Id}_{-\otimes\mathcal{O}_X})}\Gamma(\mathcal{L}X,\omega_{\mathcal{L}X})\tag{2}$$

индуцированный диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{QCoh}(X) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{QCoh}(X)}"] \arrow[d, bend right, "-\otimes\mathcal{O}_X"'] & \mathrm{QCoh}(X) \arrow[d, bend right, "-\otimes\mathcal{O}_X"'] \\
\mathrm{ICoh}(X) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{ICoh}(X)}"'] \arrow[u, bend right, "-\otimes\omega_X"'] & \mathrm{ICoh}(X) \arrow[u, bend right, "-\otimes\omega_X"']
\end{tikzcd}$$

в $2\mathcal{C}\mathrm{at}_k$. Для этого вводится следующие понятие:

Определение 0.19. Пусть Z — это производная схема почти конечного типа. **Ориентация** на Z это выбор эквивалентности $u\colon\mathcal{O}_Z\simeq\omega_Z$.

К примеру, используя двойственность Серра, можно получить **Серровскую ориентацию** $\mathcal{O}_{\mathcal{L}X}\overset{S}{\simeq}\omega_{\mathcal{L}X}$ на $\mathcal{L}X$, характеризующуюся тем свойством, что индуцированное отображение на пространстве глобальных сечений

$$\bigoplus_{p=0}^{\dim X}H^p(X,\Omega_X^p)\xrightarrow[\sim]{\mathrm{HKR}}\Gamma(\mathcal{L}X,\mathcal{O}_{\mathcal{L}X})\xrightarrow[\sim]{S}\Gamma(\mathcal{L}X,\omega_{\mathcal{L}X})\xrightarrow[\sim]{\mathrm{HKR}^\vee}\left(\bigoplus_{p=0}^{\dim X}H^p(X,\Omega_X^p)\right)^\vee$$

отправляет форму η в функционал $\int_X-\wedge\eta$, т.е. совпадает с обычной двойственностью Пуанкаре. При помощи $\mathcal{O}_{\mathcal{L}X}\overset{S}{\simeq}\omega_{\mathcal{L}X}$ любая другая ориентация соответствует единственному классу в $\bigoplus_p H^p(X,\Omega_X^p)$.

Менее известная ориентация на $\mathcal{L}X$ может быть построена следующем образом: для любого эндоморфизма $X\xrightarrow{g}X$ серия эквивалентностей

$$\mathcal{O}_{X^g}\simeq i^*\omega_X\otimes i^*\omega_X^{-1}\simeq i^*\omega_X\otimes i^*\omega_{X/X\times X}\simeq i^*\omega_X\otimes\omega_{X^g/X}\simeq i^!\omega_X\simeq\omega_{X^g}$$

индуцирует ориентацию на X^g которая дальше будет называться **канонической**. Формальными, но утомительными манипуляциям в категории соответствий можно показать:

Лемма 0.20. *Морфизм следов* (2) *может быть получен применением функтора глобальных сечений к канонической ориентации на* $\mathcal{L}X = X^{\mathrm{Id}_X}$.

Конечной целью является доказательство того, что относительно ориентации Серра каноническая ориентация соответствует классическому классу Тодда td_X. Чтоб доказать это, сначала мы даем интерпретиритацию любого мультипликативного характеристического класса в терминах канонического действия $\mathbb{T}_X[-1] \in \mathrm{LAlg}(\mathrm{QCoh}(X))$. А именно, для алгебры Ли $\mathfrak{g} \in \mathrm{LAlg}(\mathrm{QCoh}(X))$ такой, что $\mathfrak{g} \in \mathrm{QCoh}(X)^{<0}$ пусть $\mathbb{V}(\mathfrak{g}) := \mathrm{Spec}_{/X} \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^\vee)$ будет соответствующей векторной схемой с каноническим отображением $i\colon \mathbb{V}(\mathfrak{g}) \to X$. Тогда для представления $\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} \mathcal{E}\mathrm{nd}_{\mathrm{QCoh}(X)}(E)$ и формального ряда $f \in k[[t]]$ может быть построена **формальная** $\mathcal{E}\mathrm{nd}(E)$**-значная функция** $f(\rho) \in \mathcal{E}\mathrm{nd}_{\mathrm{QCoh}(\mathbb{V}(\mathfrak{g}))}(i^*E)$ неформально заданная как $x \in \mathfrak{g}$ отправляется в $f(\rho(x))$. Мы доказываем:

Предложение 0.21. *Мультипликативный характеристический класс* $c^f(E)$ *построенный по* f *по принципу расщепления, равен* $\det(f(\mathrm{ad}_{\mathbb{T}_X[-1]}))$.

Как следствие, получается

$$\mathrm{td}_X = \mathrm{td}_X(\mathbb{T}_X) = \mathrm{td}_X(\mathbb{T}_X[-1])^{-1} = \frac{1 - e^{-\mathrm{ad}_{\mathbb{T}_X[-1]}}}{\mathrm{ad}_{\mathbb{T}_X[-1]}}.$$

Оставшаяся часть доказательства мотивированна следующим наблюдением:

Пример 0.22. Пусть G — вещественная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда в достатоно малой окрестности 0 есть две тривиализации $\mathbb{T}_G$ индуцированные групповой структурой на G и абелевой групповой структурой на $\mathfrak{g}$ (через экспоненциальное отображение $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$). Тогда для $x \in \mathfrak{g}$ (достаточно близкого к 0) изоморфизм замены тривиализации

$$\mathfrak{g} \xrightarrow[\sim]{+x} \mathbb{T}_{\mathfrak{g},x} \xrightarrow[\sim]{(d\exp_G)_x} \mathbb{T}_{G,\exp(x)} \xrightarrow[\sim]{L_{\exp_G(x)^{-1}*}} \mathfrak{g}\ ,$$

(где $L_g\colon G \to G$ обозначает левый сдвиг на g) задается $(1 - e^{-\mathrm{ad}(x)})/\,\mathrm{ad}(x)$.

Мотивируясь этим примером, мы доказываем, что формальная функция $f(\mathrm{ad}_{\mathbb{T}_X[-1]})$ for $f(t) = (1 - e^{-t})/t$ совпадает с морфизмом замены тривиализации $d\exp_{\mathcal{L}X}\colon i^*\mathbb{T}_X \simeq i^*\mathbb{T}_X$. Этот вопрос имеет смысл для произвольной алгебры Ли в любой представимой симметрической моноидальной k-линейной категории. Использую функториальность рассматриваемого морфизма, мы сводим общее утверждение к категории k-векторных пространств и свободным дискретным алгебрам Ли, где это уже несложно доказать вручную.

Наконец, чтобы связать эту историю с морфизмом следов, доказывается, что детерминант тривиализации $\mathbb{T}_{\mathcal{L}X} \simeq i^*\mathbb{T}_X$ определенный его групповой структурой равен канонической ориентации, и то что детерминант аналогичной тривиализации использующей абелеву групповую структуру совпадает с ориентацией Серра.

Глава 3

В последней главе выводится эквивариантная теорема Гротендика-Римана-Роха. Стратегия доказательства заключается в том, чтобы свести эквивариантное утверждение к неэквивариантному. Для этого доказывается следующий критерий формальности, интересный сам по себе:

Теорема 0.23. *Пусть* X *— гладкая собственная схема над* k *снабженная эндоморфизмом* g *таким, что классическое неподвижное множество* X^g *гладко. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

- *Индуцированное отображение* $1 - dg_{|\mathcal{N}^\vee_{X^g/X}}$ *обратимо, где* $\mathcal{N}^\vee_{X^g/X}$ *есть конормальное расслоение к* X^g *к* X.
- *Естественное отображение* $\mathcal{L}X^g \to X^{\mathrm{d}g}$, *индуцированное* g*-эквивариантным вложением* $X^g \hookrightarrow X$ *— эквивалентность.*

Ремарка 0.24. Похожий результат формальности для автоморфизма g конечного порядка (в этом случае $1 - dg_{|\mathcal{N}^\vee_{X^g/X}}$ автоматически обратим) был доказан в [ACH19, Corollary 1.12] другими методами.

Ремарка 0.25. Эта теорема частично мотивированна схожим результатом в теории эквивариантных когомологиях в [AB84].

В частности, обратный образ вдоль $j\colon \mathcal{L}X \xrightarrow{\sim} X^{\mathrm{d}g}$ отождествляет

$$HH(\mathrm{QCoh}(X), g^*) \simeq \Gamma(X^{\mathrm{d}g}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{d}g}}) \simeq \Gamma(\mathcal{L}X^g, \mathcal{O}_{\mathcal{L}X^g}) \simeq \bigoplus_p \Gamma(X^g, \Omega^p_{X^g}[p]).$$

Комбинируя это с 0.14 получаем явное описание характера Черна $\mathrm{ch}(E, t)$.

Чтобы сформулировать главное приложение этой работы, введем следующее определение:

Определение 0.26. Пусть X, g как выше. **Эквивариантный класс Эйлера** $e_g \in \Gamma(\mathcal{L}X^g, \mathcal{O}_{\mathcal{L}X^g})$ определяется как $j^* j_*(1)$. Раскручивая определение, видим, что

$$e_g = \mathrm{ch}\left(\mathrm{Sym}(\mathcal{N}^\vee_{X^g/X}[1]), \mathrm{Sym}(dg_{|\mathcal{N}^\vee_{X^g/X}}[1])\right).$$

В частности $e_0 = \det(1 - dg_{|\mathcal{N}^\vee_{X^g/X}})$, и значит e_g обратим при наших предположениях на X, g.

По функториальности следов, используя неэквивариантный случай, несложно вывести:

Теорема 0.27 (Эквивариантный Гротендик-Риман-Рох). *Пусть*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "g_X"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[loop right, "g_Y"] \end{tikzcd}$$

это эквивариантный морфизм между гладкими собственными k-схемами такой что

- *Приведенные неподвижные множества X^{g_X} и Y^{g_Y} гладкие.*
- *Индуцированные морфизмы на конормальных расслоениях $1 - (dg_X)_{|\mathcal{N}^\vee_{g_X}}$ и $1 - (dg_Y)_{|\mathcal{N}^\vee_{g_Y}}$ обратимы.*

Тогда для лакс g_X-эквивариантного совершенного пучка E на X существует эквивалентность

$$(f^g)_*\left(\mathrm{ch}(E, t)\frac{\mathrm{td}_{X^{g_X}}}{e_{g_X}}\right) = \mathrm{ch}(f_*(E, t))\frac{\mathrm{td}_{Y^{g_Y}}}{e_{g_Y}} \quad \in \quad \bigoplus_p H^{p,p}(Y^{g_Y}),$$

где $X^{g_X} \xrightarrow{f^g} Y^{g_Y}$ — индуцированное отображение на приведенных неподвижных множествах.

Если эндоморфизмы g_X и g_Y тождественные, тогда $e_{g_X} = 1$ и $e_{g_Y} = 1$ и получается обычная теорема Гротендика-Римана-Роха. В другом крайнем случае, когда Y точка и граф g_X пересекается с диагональю в $X \times X$ трансверсально, получается голоморфная формула Атьи-Ботта.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Доклад «Высшие следы и формулы неподвижных точек», на семинаре «Введение в автоморфные формы» (Сколтех, Москва), 13 ноября 2019.
2. A talk «Derived loop space and Riemann-Roch like theorems», on the seminar «Algebro-geometric methods in integrable systems and quantum physics» (MIPT), December, 19, 2019.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в двух статьях [KP18] и [Pri19].

Список литературы

[AB84] Michael F. Atiyah и Raoul Bott. «The moment map and equivariant cohomology». в: *Topology* 23.1 (1984), с. 1—28. ISSN: 0040-9383.

[ACH19] Dima Arinkin, Andrei Căldăraru и Márton Hablicsek. «Formality of derived intersections and the orbifold HKR isomorphism». в: *Journal of Algebra* 540 (2019), с. 100—120.

[Ati57] Michael F. Atiyah. «Complex Analytic Connections in Fibre Bundles». в: *Transactions of the American Mathematical Society* 85.1 (1957), с. 181—207.

[BS58] Armand Borel и Jean-Pierre Serre. «Le théorème de Riemann–Roch (d'après Grothendieck)». в: *Bull. Soc. Math. France* 86 (1958), с. 97—136.

[Gai13] Dennis Gaitsgory. «Ind-coherent sheaves». в: *Mosc. Math. J.* 13 (3 2013), с. 399—528.

[GR17a] Dennis Gaitsgory и Nick Rozenblyum. *A study in derived algebraic geometry, Volume I: Correspondences and Duality*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Soc., 2017.

[GR17b] Dennis Gaitsgory и Nick Rozenblyum. *A study in derived algebraic geometry, Volume II: Deformations, Lie Theory and Formal Geometry*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Soc., 2017.

[KP18] Grigory Kondyrev и Artem Prikhodko. «Categorical proof of Holomorphic Atiyah-Bott formula». в: *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* (2018). doi:10.1017/S1474748018000543.

[Mar08] Nikita Markarian. «The Atiyah class, Hochschild cohomology and the Riemann-Roch theorem». в: *Journal of the London Mathematical Society* 79.1 (2008), с. 129—143. ISSN: 0024-6107.

[Pri19] Artem Prikhodko. «Equivariant Hirzebruch-Riemann-Roch theorem and geometry of derived loop spaces». в: *Mathematical Notes* (2019).