Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Ломоносов Тимофей Александрович

Анализ диссипативности явных линеаризованных разностных методов с регуляризацией для уравнений газовой динамики

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ
на соискание учёной степени кандидата наук
по прикладной математике

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Злотник Александр Анатольевич

Москва — 2020

Общая характеристика работы

Постановка проблемы. Численное моделирование течений газа и жидкости относится к важнейшим задачам математического моделирования. Существует богатая литература по численным методам решения систем уравнений газовой динамики, см. в том числе Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. (1976); Магомедов К.М., Холодов А.С (1988); Toro E.F. (2009); LeVeque R.J. (2004); Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. (2012); Головизнин В.М. и др. (2013); Abgrall R., Shu C.-W. (eds., 2016).

Один из классов таких методов связан с предварительной регуляризацией этих систем уравнений. К таким можно отнести так называемую квазигазодинамическую (КГД) регуляризацию, основанную в том числе на кинетических соображениях, и более простую квазигидродинамическую (КГДД) регуляризацию. В них присутствуют диссипативные слагаемые специального вида с малым параметром регуляризации. Этот подход и основанные на нем явные двухслойные по времени и симметричные трёхточечные по пространству (по каждой из пространственных переменных) разностные схемы и многочисленные приложения представлены в монографиях Четверушкина Б.Н. (2004); Елизаровой Т.Г. (2007); Шеретова Ю.В. (2009); Елизаровой Т.Г., Широкова И.А. (2017) и большом количестве статей. При этом явные разностные схемы представляют особый интерес при эффективном компьютерном моделировании на многопроцессорных вычислительных системах. Тем не менее теория таких разностных схем разработана сравнительно слабо.

Актуальность темы. В работах: Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. (2008), Злотник А.А. (2008) были выведены критерии параболичности по Петровскому соответственно КГД и КГДД систем уравнений, а также изучена задача устойчивости малых возмущений по постоянному фону и установлены равномерные по времени оценки решений линеаризованных (на постоянном решении) вариантов таких систем. В том числе часть полученных оценок можно интерпретировать как L^2-диссипативность решений задачи Коши для линеаризованных систем. Эти оценки можно считать отправным пунктом данной диссертации, посвященной выводу аналогов таких оценок для аппроксимирующих явных разностных схем при надлежащих условиях на шаги сеток.

Кроме того, в тех же работах были построены упрощенные баротропные варианты КГД и КГДД систем уравнений, и для них получены аналогичные результаты. В дальнейшем в работе: Злотник А.А. (2010) были получены энергетические равенства и оценки для таких систем уравнений, а в работе: Злотник А.А. (2012) был представлен простой вывод КГД систем уравнений в общем и баротропном случаях. Отметим, что анализ баротропного случая является общепринятым подходом во многих вопросах теории уравнений газовой динамики, способствующим постепенному развитию техники исследований. Вместе с тем баротропные системы уравнений имеют и самостоятельное значение и достаточно широко используются в ряде приложений, включая одномерные (1D) и двумерные (2D) уравнения мелкой воды (отвечающие изэнтропическому случаю с показателем адиабаты $\gamma = 2$), уравнения движения двухфазных двухкомпонентных сред, обычно рассматриваемых в изотермическом случае (показатель адиабаты $\gamma = 1$) и др. Разностные методы для таких и других баротропных задач, основанные на КГД и КГДД регуляризациях, были построены и применялись в том числе в работах: Булатов О.В., Елизарова Т.Г. (2011); Елизарова Т.Г., Иванов А.В. (2016); Balashov V., Zlotnik A., Savenkov E. (2017); Zlotnik A., Gavrilin V. (2016); Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Истомина М.А. (2018).

В работах: Елизарова Т.Г., Шильникова Е.В. (2009); Елизаровой Т.Г., Широкова И.А. (2017); Kraposhin M., Smirnova E., Elizarova T. и др. (2018) была выполнена верификация разностных схем, основанных на КГД подходе, на серии известных 1D тестовых задач, отражающих характерные особенности нестационарных течений невязкого газа.

Новые пространственные дискретизации, основанные на КГД и КГДД подходах и обладающие дополнительными свойствами энергетической или энтропийной консервативности (диссипативности), были построены в одномерном случае в работах: Злотник А.А. (2012), Гаврилин В.А., Злотник А.А. (2015) и многомерном случае в работах: Злотник А.А. (2016, 2017) для случая сначала баротропных, а затем и полных систем уравнений газовой динамики.

Степень разработанности темы. Проблематика устойчивости является одной из центральных в теории разностных методов, и для ряда разностных методов газовой динамики, в основном для модельных задач, довольно хорошо представлена в литературе: см. в том числе Рихтмайер Р., Мортон К. (1972); Годунов С.К., Рябенький В.С. (1977); Gustaffson B., Kreis H.-O., Oliger J. (1995); Ganzha V.G., Vorozhtsov E.V. (1996); LeVeque R.-J. (2004); Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. (2008); Coulombel J.-F. (2009); Марцинкевич Г.Л., Матус П.П., Чуйко М.М. (2010); Abgrall R., Shu C.-W. (eds., 2016). В том числе спектральный подход, изложенный в монографиях: Годунов С.К., Рябенький В.С. (1977); Рихтмайер Р., Мортон К. (1972), позволяет получать критерии устойчивости разностных схем сведением исходной задачи к соответствующей алгебраической. Обычно этот подход применяется либо к задаче Коши, либо к задаче с условиями периодичности по пространственным переменным.

Что касается разностных методов, основанных именно на КГД регуляризациях, то L^2-диссипативность линеаризованной явной разностной схемы для 1D уравнений газовой динамики изучалась Шеретовым Ю.В. (2004, 2009), а для уравнений мелкой воды — Сухомозгим А.А., Шеретовым Ю.В. (2013). Однако был рассмотрен только случай нулевой фоновой скорости, иначе говоря, нулевого фонового числа Маха $M = 0$. Это существенно упрощает исследование, но является совершенно недостаточным для приложений. Кроме того, в первых двух работах был охвачен только случай числа Шмидта, равного 1, а в третьей не рассмотрен общий баротропный случай.

В этих работах применялся метод энергетических неравенств, который позволил получить только достаточные условия L^2-диссипативности. Вопрос о соответствующих необходимых условиях и связанный с ним вопрос о точности полученных достаточных условий оставался открытым. Кроме того, представленный подход затруднительно перенести на 2D и 3D случаи, которые намного более важны на практике.

Цель и задачи диссертационной работы. Основной целью данного диссертационного исследования является анализ диссипативности линеаризованных явных разностных методов с КГД и КГДД регуляризациями для уравнений газовой динамики.

Для решения поставленной цели ставятся следующие задачи.

1. Разработка варианта спектрального подхода для анализа диссипативности явных разностных схем как с конвективными, так и с регуляризующими (вязкими) слагаемыми.

2. Вывод критериев, необходимых условий, достаточных условий L^2-диссипативности линеаризованных явных разностных схем, основанных на КГД и КГДД регуляризациях 1D баротропной системы уравнений газовой динамики, и доказательство соответствующих теорем, при любом фоновом числе Маха M.

3. Вывод критериев, необходимых условий, достаточных условий L^2-диссипативности линеаризованной явной разностной схемы, основанной на КГД регуляризации 1D полной системы уравнений газовой динамики, при любом M и общих предположениях о параметрах схемы. Проведение верификации энтропийно диссипативных схем и анализ применимости выведенных условий диссипативности в нелинейной постановке. Кроме того, вывод критериев L^2-диссипативности для схем, основанных на некоторых других регуляризациях.

4. Вывод критериев, необходимых условий, достаточных условий L^2-диссипативности линеаризованных явных разностных схем, основанных на КГД регуляризациях 2D и 3D баротропной и полной систем уравнений газовой динамики, при любом M и общих предположениях о параметрах схем.

Научная новизна. В работе разработан новый вариант спектральной техники анализа L^2-диссипативности решений задачи Коши для явных двухслойных разностных схем как с конвективными, так и с регуляризующими слагаемыми.

На его основе впервые установлены критерии и более простые необходимые условия L^2-диссипативности линеаризованных явных разностных схем, основанных на КГД регуляризациях баротропной и полной систем уравнений газовой динамики. Впервые установлены также соответствующие достаточные условия при любом фоновом числе Маха M; при $M = 0$ они существенно улучшают известные ранее в 1D случае.

Перечисленные результаты получены не только в 1D случае, но и впервые в 2D и 3D случаях, а также при общих предположениях о параметрах схем. При этом проанализирован наилучший выбор параметра регуляризации и показано, что при адекватном его выборе условия на шаг по времени равномерны по M – это важное новое свойство КГД-регуляризации.

Дополнительно установлены критерии, необходимые условия, достаточные условия L^2-диссипативности линеаризованных явных разностных схем, основанных на КГДД регуляризации в 1D баротропном случае, а также некоторых других регуляризациях для 1D баротропных и полных уравнений, при любом M.

Выполнены компьютерные исследования по анализу практической применимости полученных условий в нелинейной 1D постановке баротропных и полных уравнений для различных разностных схем — как стандартного типа, так и с энергетически или энтропийно диссипативными дискретизациями по пространству и указано на существенные преимущества последних в ряде тестов, включая лучшее соответствие установленным условиям.

Теоретическая и практическая значимость состоит в следующем.

1. Разработан вариант спектрального подхода для анализа L^2-диссипативности явных двухслойных разностных схем как с конвективными, так и с вязкими слагаемыми с учётом коммутаторов их матриц.

2. Выведены критерии и более простые как необходимые, так и достаточные условия L^2-диссипативности линеаризованных явных разностных схем, основанных на КГД регуляризации 1D полной системы уравнений газовой динамики, при любом фоновом числе Маха M и общих предположениях о параметрах схем.

3. Выведены также критерии, необходимые условия, достаточные условия L^2-диссипативности для явных схем, основанных на КГДД регуляризации в 1D баротропном случае и некоторых других регуляризациях в 1D баротропном и общем случаях, при любом M.

4. Выведены критерии и более простые как необходимые, так и достаточные условия L^2-диссипативности линеаризованных явных разностных схем, основанных на КГД регуляризациях 2D и 3D баротропной и полной систем, при любом M.

5. Выведенные необходимые условия и достаточные условия L^2-диссипативности в форме условий типа Куранта могут использоваться для адекватного выбора параметров КГД и КГДД регуляризаций уравнений газовой динамики в практических расчетах. Это потенциально позволит заметно сократить затраты времени как на правильный подбор этих параметров, так и на проведение самих расчетов, в том числе на многопроцессорных вычислительных системах.

Методология и методы исследования. В диссертации использованы некоторые методы математического и функционального анализа (теории гильбертовых пространств). Использован матричный анализ, включая ряд теорем о собственных значениях симметричной матрицы и анализ неравенств с эрмитовыми матрицами. Применены методы дискретизации систем уравнений с частными производными. Для анализа L^2-диссипативности схем развит вариант спектрального подхода. Предложена классификация фактической устойчивости 1D численных решений в нелинейной постановке на основе анализа их вариации по пространству.

Для анализа, проверки и визуализации различных результатов работы задействовались средства компьютерной алгебры и программный пакет Wolfram Mathematica. Программная реализация разностных схем осуществлена на основе методов объектно-ориентированного программирования на языке C#, что позволило легко добавлять в анализ различные разностные схемы.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Даны критерии L^2-диссипативности линеаризованных явных разностных схем, основанных на КГД и КГДД регуляризациях 1D баротропной системы уравнений газовой динамики в случае нулевого числа Маха $M = 0$, а также получены критерий и как необходимые, так и достаточные условия L^2-диссипативности в случае любого M.

2. Получены критерий и как необходимые, так и достаточные условия L^2-диссипативности линеаризованной явной разностной схемы, основанной на КГД регуляризациях 1D полной системы уравнений газовой динамики в случае любого M.

Выполнена программная реализация различных разностных схем в нелинейной постановке, сделана их верификация и проведен анализ применимости найденных условий L^2-диссипативности в нелинейной постановке.

3. Получены также критерии L^2-диссипативности для линеаризованных явных схем, основанных на некоторых других регуляризациях 1D баротропной и полной систем уравнений газовой динамики, при любом M.

4. Получены критерии и как необходимые, так и достаточные условия L^2-диссипативности линеаризованных явных разностных схем, основанных на КГД регуляризации 2D и 3D баротропной и полной систем уравнений газовой динамики, при любом M.

Достоверность. Достоверность теоретических результатов работы подтверждается строгими математическими доказательствами соответствующих теорем. Достоверность численной верификации схем подтверждается сравнением результатов с известными аналитическими и другими численными решениями.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих конференциях:

— Ежегодная межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов им. Е.В. Арменского (Москва, МИЭМ НИУ ВШЭ, 2017, 2018, 2019 гг.)

— XVII и XVIII Всероссийские конференции-школы “Современные проблемы математического моделирования” (пос. Дюрсо, Россия, 2017 и 2019 гг.)

— 23rd International Conference Mathematical Modelling and Analysis (Друскининкай, Литва, 2017 г.)

— 24th International Conference Mathematical Modelling and Analysis (Сигулда, Латвия, 2018 г.)

— Осенняя школа Hyperbolic Conservation Laws and Mathematical Fluid Dynamics (Julius-Maximilians-Universität, Вюрцбург, Германия, 2018 г.)

— 25th International Conference Mathematical Modelling and Analysis (Таллинн, Эстония, 2019 г.)

— Международная научная конференция “Современные проблемы вычислительной математики и математической физики”, посвящённая 100-летию со дня рождения акад. А.А. Самарского (Москва, 2019 г.)

Ссылки на опубликованные тезисы докладов даны в тексте диссертации.

Личный вклад автора. Теоретические результаты диссертации по выводу условий L^2-диссипативности для разностных схем, основанных на КГД и КГДД регуляризациях систем уравнений газовой динамики, получены соискателем совместно с А.А. Злотником. Соответствующие результаты для других регуляризаций, а также программная реализация представленных в диссертации разностных схем и проведение численных экспериментов, построение разнообразных графиков и таблиц выполнены соискателем самостоятельно.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и приложения. Полный объём диссертации составляет 118 стр. Работа включает 26 рисунков и 6 таблиц. Список литературы содержит 67 наименований.

Основные выводы исследования В главе 1 проводится анализ L^2-диссипативности дискретизаций одномерных баротропных КГД и КГДД систем уравнений. В разделе 1.1 изучается простейший случай таких дискретизаций при нулевой фоновой скорости. В теореме 1 выводится необходимое спектральное условие типа фон Неймана, а в теореме 2 — спектральный критерий диссипативности для дискретизации КГД системы уравнений. В теореме 3 выводятся как необходимое условие типа фон Неймана, так и спектральный критерий для дискретизации КГДД системы уравнений. Выясняется, что даже в простейшем случае необходимое условие фон Неймана отличается от критерия и не является достаточным. Отметим, что дискретизация КГД-системы остаётся устойчивой и при нулевом числе Шмидта $\alpha_s = 0$ (т.е. нулевой искусственной вязкости Навье-Стокса), а дискретизация КГДД системы — нет. Кроме того, проведена практическая апробация полученного критерия для двух разностных схем — схемы стандартного типа и “энтальпийной” схемы, в которой дискретизация по пространству обладает свойством диссипативности по энергии. Экспериментальные результаты для второй схемы хорошо соответствуют полученному критерию. Результаты для схемы стандартного типа уступают им, несмотря на то, что в линеаризованном варианте схемы совпадают.

Вывод о том, что необходимое условие фон Неймана не является достаточным, приводит к необходимости разработки нового варианта спектрального подхода. Такой подход для абстрактных явных двухслойных разностных схем как с конвективными, так и с регуляризующими (вязкими) слагаемыми описывается в разделе 1.2. Доказана теорема 4, в которой выводятся критерий (необходимое и достаточное условие), а также более простые необходимое условие и достаточное условие L^2-диссипативности указанных абстрактных схем. К теореме также приведены замечания, которые позволяют упрощать проверку выведенных условий.

В разделе 1.3 проводится анализ дискретизаций для 1D баротропных КГД и КГДД систем уравнений с произвольной фоновой скоростью и выводятся как критерии, так и более простые необходимые и достаточные условия диссипативности: в теореме 5 — для дискретизации КГД системы уравнений, а в теореме 6 — для дискретизации КГДД системы уравнений. Необходимые условия отличаются от соответствующих достаточных не более чем в два раза. Показано, что при адекватном выборе параметра регуляризации в КГД системе уравнений условия на шаг по времени равномерны по M — это важное новое свойство КГД регуляризации. Отметим, что в отличие от КГД регуляризации, КГДД регуляризация уравнений таким свойством не обладает. Также проведена практическая апробация полученных условий и исследован анализ их применимости в нелинейной 1D постановке для различных разностных схем — как стандартного типа, так и двух схем с энергетически диссипативными дискретизациями по пространству. Классификация фактической устойчивости 1D численных решений в нелинейной постановке проводилась на основе анализа их вариации по пространству. Для схемы стандартного типа устойчивые результаты намного хуже отвечающих необходимому условию, причём соответствие резко ухудшается с ростом числа Маха. Для двух других схем результаты существенно лучше. Эти результаты свидетельствуют о преимуществе использования на практике именно энергетически диссипативных схем, особенно с ростом числа Маха.

В главе 2 проводится анализ L^2-диссипативности дискретизаций 1D полной КГД системы уравнений. В разделе 2.1 выписывается дискретизация 1D КГД системы уравнений. В теореме 7 выводятся как необходимое, так и достаточное условия L^2-диссипативности дискретизации в случае нулевой фоновой скорости (эти условия отличаются не более чем в два раза), а в теореме 8 — соответствующие условия в случае произвольной фоновой скорости. Как и для случая баротропной системы, для полной системы уравнений при правильном выборе параметра регуляризации условия также можно сделать равномерными по числу Маха.

В разделе 2.2 проводится верификация энтропийно диссипативных схем и их сравнение со схемой стандартного типа (все они являются дискретизациями полных КГД уравнений) на задаче Римана. Задачу Римана, начальные данные в которой являются кусочно-постоянными разрывными функциями, традиционно используют для анализа свойств численных методов решения уравнений газовой динамики. Рассматривается пять тестов, отражающих различные ситуации в возникающих течениях. Для версии теста Сода дополнительно анализируются практические порядки сходимости в сеточной норме L^1 и показывается, что они близки к 0.5. Выясняется, что для обеих энтропийно диссипативных схем результаты в основном схожи, и они хорошо показывают себя на данных тестах. В том числе в тесте Эйнфельдта при вычислении по энтропийно диссипативным схемам энтропийный след (нефизичный локальный максимум внутренней энергии) является очень малым, в то время как расчёты по другим КГД (и не только) схемам далеки от такого результата. В других тестах энтропийно диссипативные схемы демонстрируют получение численных решений лучшего качества (на той же сетке) и/или возможность использования большего (иногда до двух порядков) шага по времени, чем для КГД схем стандартного типа.

Исследуется также применимость найденных условий L^2-диссипативности в нелинейной постановке, в том числе с ростом числа Маха. Выполняются численные эксперименты для модельной задачи Римана, причем для анализа качества численных решений используется отклонение их относительных вариаций от 1 в финальный момент времени. Делается вывод о том, что условия в известной степени можно применять и в нелинейной постановке с ростом числа Маха, по крайней мере, в некоторых вычислениях. Как правило, условия более адекватны для энтропийно диссипативных КГД дискретизаций, а для КГД схем стандартного типа они переоценивают допустимый шаг по времени (при одинаковой линеаризации). Проведённый анализ L^2-диссипативности сохраняет силу и при обращении в нуль так называемых чисел Шмидта и обратного числа Прандтля. Напомним, что случай нулевого числа Шмидта соответствует отсутствию искусственной вязкости Навье-Стокса, и в заключение раздела 2.2 показано, что для него численные решения по энтропийно диссипативным схемам не разрушаются (хотя результаты отнюдь не являются наилучшими) в отличие от схем стандартного типа, когда это, как правило, происходит.

В разделе 2.3 спектральный подход применяется для некоторых других регуляризаций уравнений газовой динамики. Совсем недавно в работе Svärd M. (2018) была предложена некоторая новая модель уравнений движения вязкого теплопроводного газа. В теореме 9 выводятся критерий L^2-диссипативности линеаризованной явной двухслойной дискретизации данной модели в 1D баротропном случае, а в теореме 10 — в случае 1D полной системы уравнений газовой динамики с искусственной вязкостью. Оказывается, что в обоих случаях критерий имеет одинаковый вид, причем обеспечить его равномерность по числу Маха нельзя. В замечаниях к теореме указывается, как применить полученные результаты при наличии физической вязкости, а также для комбинации физической и искусственной вязкостей. Обсуждается также их применимость к некоторым другим регуляризациям систем уравнений газовой динамики.

В главе 3 проводится анализ L^2-диссипативности явной двухслойной трехточечной по каждому пространственному направлению дискретизации линеаризованных многомерных (2D и 3D) квазигазодинамических (КГД) систем уравнений на равномерной прямоугольной сетке. Переход к многомерному случаю резко усложняет задачу, поскольку возникает n матриц конвективных слагаемых и $\frac{n(n+1)}{2}$ матриц вязких слагаемых, $n = 2, 3$. В разделе 3.1 дается анализ дискретизации баротропной КГД-системы уравнений. В теореме 11 выводится многомерный спектральный критерий L^2-диссипативности. В теореме 12 выводятся критерий (необходимое и достаточное), а также более простые необходимое условие и достаточное условие L^2-диссипативности явных двухслойных абстрактных схем. В теореме 13 выводится необходимое условие диссипативности для дискретизации баротропной КГД системы. Анализируется влияние на него, а также на выбор оптимального значения параметра регуляризации, двух способов выбора "среднего" шага прямоугольной сетки в параметре регуляризации. Достаточное условие зависит от оценки сверху максимального собственного значения матрицы – символа вязких слагаемых. В теореме 14 такая оценка выводится, что и завершает анализ.

Кроме того, проведены 2D численные эксперименты по практическому анализу устойчивости линеаризованной схемы и сопоставлению результатов с необходимым условием L^2-диссипативности на сетке с большим разбросом размеров ячеек. Такие нередко возникают при автоматической генерации сеток в областях сложной формы, и они могут оказывать существенное негативное влияние на выбор шага по времени.

В разделе 3.2 исследуется L^2-диссипативность явной двухслойной дискретизации линеаризованной полной 2D и 3D КГД-системы уравнений. Отметим, что здесь все матрицы конвективных и регуляризующих слагаемых имеют 4-й и 5-й порядок в 2D и 3D случаях соответственно. В теореме 15 приводятся критерий (необходимое и достаточное условие), а также более простые необходимое условие и достаточное условие L^2-диссипативности явных двухслойных абстрактных схем. В теореме 16 выводится необходимое условие L^2-диссипативности. Достаточное условие выглядит аналогично баротропному случаю и также зависит от максимального собственного значения матрицы – символа вязких слагаемых. В теореме 17 выводится оценка сверху этого собственного значения. Важным свойством является возможность обеспечения равномерности полученных условий по M как в случае баротропных, так и полных уравнений.

Список опубликованных статей по теме диссертации. Основные результаты по теме диссертации представлены в [1–6]. Все статьи проиндексированы в Scopus и/или WoS, при этом журнал [6] имеет рейтинг Q1, журналы [2–4] — рейтинг Q2 в Scopus и/или WoS, журнал [5] — рейтинг Q3 в Scopus.

1. *Zlotnik A., Lomonosov T.* On conditions for weak conservativeness of regularized explicit finite-difference schemes for 1D barotropic gas dynamics equations // Differential and difference equations with applications. ICDDEA 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Vol. 230. Cham: Springer International Publishing AG, 2018. P. 635—647.

2. *Злотник А. А., Ломоносов Т. А.* Об условиях L^2-диссипативности линеаризованных явных КГД-разностных схем для уравнений одномерной газовой динамики // Докл. АН. 2018. Т. 482, № 4. С. 375—380.

3. *Злотник А. А., Ломоносов Т. А.* Условия L^2-диссипативности линеаризованных явных разностных схем с регуляризацией для уравнений 1D баротропной газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 3. С. 481—493.

4. *Zlotnik A., Lomonosov T.* Verification of entropic QGD-schemes for 1D gas dynamics equations // Math. Model. Anal. 2019. Vol. 24, no. 2. P. 179—194.

5. *Lomonosov T.* L^2-dissipativity criteria for linearized explicit finite difference schemes for regularization of one-dimensional gas dynamics equations // J. Math. Sci. 2020. Vol. 244, no. 4. P. 97—102.

6. *Zlotnik A., Lomonosov T.* L^2-dissipativity of the linearized explicit finite-difference scheme with a kinetic regularization for 2D and 3D gas dynamics system of equations // Appl. Math. Lett. 2020. Vol. 103.