Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

на правах рукописи

Факультет математики

Ильина Анна Васильевна

Интегрируемые системы и линейные операторы, связанные с двухточечными функциями Бейкера–Ахиезера

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Кричевер Игорь Моисеевич

Москва— 2020

Современный подход к спектральной теории периодических дифференциальных и разностных операторов был вызван успехами метода обратной задачи рассеяния. В 1967г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура [1] предложили метод спектрального преобразования как метод решения задачи Коши с быстроубывающими начальными данными для уравнения КдФ. В последствии это привело к создание нового метода математической физики — метода обратной задачи рассеяния. В 1968г. Лакс [2] обобщил этот метод и открыл алгебраический механизм, лежащий в основе работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры: уравнение КдФ эквивалентно так называемому представлению Лакса. В 1971г. Захаров и Шабат [3] решили методом обратной задачи нелинейное уравнение Шредингера. В 1973г. метод был применен сразу к нескольким уравнениям в работе Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура [4]. Естественным образом возник вопрос, как решать нелинейные уравнения подобные КдФ для периодических начальных данных.

Схема интегрирования уравнения КдФ с быстроубывающими начальными данными сводилась к решению прямой задачи, простой эволюции спектральных данных и решению обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля на прямой. Подобная схема оказалась нереализуемой для уравнения КдФ с периодическими начальными данными, ввиду того, что недостаточно эффективным были решены как прямая, так и обратная задачи.

В пионерской работе Новикова [5] был выделен класс потенциалов, являющихся аналогами многосолитонных решений в быстроубывающем случае. Задачей нахождения полного и эффективного описания вещественных конечнозонных потенциалов для одномерного оператора Штурма–Лиувилля независимо друг от друга занимались Дубровин [6], Матвеев и Итс [7]. Много позже в работе [8] показано, что множество конечнозонных периодических потенциалов плотно в пространстве функций с данным периодом. Эффективизация спектральной теории оператора Штурма–Лиувилля (см. работы [5], [9],[10],[11], [12], [13], [14]) позволила решить периодическую задачу для уравнения КдФ. Впоследствии, полученные результаты были расширены и на такие фундаментальные уравнения математической физики как уравнение синус–Гордона, нелинейное уравнение Шредингера и пр.

Ключевым шагом в развитии современной спектральной теории периодических операторов стало понимание факта (ныне кажущегося самоочевидным), что блоховские функции — решения периодической задачи Штурма–Лиувилля, собственные для оператора монодромии, — являются значениями одной функции на различных листах некоторой римановой поверхности, которая в общем случае может не быть гладкой и конечного рода. Вышесказанное оказалось верным и для многочисленных примеров одномерных линейных операторов с периодическими коэффициентам. Такая кривая впоследствии стала называться *спектральной кривой.* Роль аналитических свойст блоховских функций на этой кривой прояснилась в работах Кричевера [15], [16], где была предложена общая конструкция алгебро–геометрических решений уравнений математической физики, ключевым элементом которой являлось понятие функции Бейкера–Ахиезера.

Среди элементарных функций комплексного аргумента экспонента e^z является следующей по сложности после рациональных функций. Она аналитична в $\mathbb{C}$ и имеет существенную особенность в точке $z = \infty$. Если $q(z)$ рациональная, тогда $e^{q(z)}$ аналитичная в $\overline{\mathbb{C}}$ за исключением полюсов $q(z)$. Клебш и Гордон придумали обобщить функции экспоненциального типа на римановы поверхности старшего рода. В том случае, когда род строго больше нуля, в отличии от обычных экспонент такие функции обязаны иметь полюса. Бейкер заметил, что для таких обобщений экспонент могут быть получены простые формулы в терминах тэта–функций соответствующих римановых поверхностей. *Функцией Бейкера–Ахиезера* называется функция с заданной экспоненциальной особенностью, единственным образом определяемая своими аналитическими свойствами. Впервые в работе [17] было отмечено, что при некоторых условиях, функции экпоненциального типа на гиперэллиптических поверхностях являются собственными для линейных дифференциальных операторов второго порядка. Важнейшим наблюдением Кричевера было то, что эти аналитические свойства гарантируют, что функции Бейкера–Ахиезера являются собственными для широкого семейства линейных операторов.

Первоначально, схема интегрирования Кричевера нелинейных уравнений с помощью функции Бейкера–Ахиезера представляла собой решение обратной задачи (т.е. по кривой и некоторому алгебро–геометрическому набору условий восстанавливался оператор), при этом без решения прямой задачи (в частности, задачи построения спектральной кривой) оставался неясным класс общности полученных операторов. Кроме того, было совершенно не понятно, что такое спектральная кривая в случае двумерных периодических операторов. Связь конструкции Кричевера со спектральной теорией двумерных периодических операторов была получена в работе [18], связанной с периодических нестационарным оператором Шредингера $\partial_y - \partial_x^2 + u(x,y)$, где впервые было предложено понятие кривой Блоха–Флоке и предпринята попытка построить обобщение спектральной кривой для двумерных операторов. Такая теория оказалась значительно сложнее спектральной теории одномерных периодических операторов, поскольку в одномерии соответствующая спектральная кривая определяется характеристическим уравнением конечномерной матрицы монодромии, а в двумерии соответствующие операторы являются бесконечномерными, и придать смысл характеристическому уравнению — сложная и не всегда решаемая задача.

Настоящая работа состоит из двух глав, объединенных общей идеей — идеей использования современного подхода к спектральной теории периодических операторов и одного из его основных понятий — двухточечной функции Бейкера–Ахиезера (дискретной и непрерывной).

В Главе 1 изучается гамильтонова теория уравнений, полученных конечномерной редукцией двумеризованной цепочки Тода. Эти уравнения определяют динамику на фазовом пространстве строго нижнетреугольных разностных операторов. Идея заключается в том, чтобы, используя спектральную теорию таких операторов, доказать гамильтоновость данных уравнений.

Первоначально иерархия 2d Тоды задавалась в форме системы уравнений Захарова–Шабата

$$\begin{cases} \frac{\partial L_m^+}{\partial t_{m'}^+} - \frac{\partial L_{m'}^+}{\partial t_m^+} + [L_m^+, L_{m'}^+] = 0 \\ \frac{\partial L_m^-}{\partial t_{m'}^-} - \frac{\partial L_{m'}^-}{\partial t_m^-} + [L_m^-, L_{m'}^-] = 0 \\ \frac{\partial L_m^-}{\partial t_{m'}^+} - \frac{\partial L_{m'}^+}{\partial t_m^-} + [L_{m'}^+, L_m^-] = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где
$$L_m^- = T^{-m} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,m}^{j,-} T^{-j},\ L_m^+ = \sum_{j=1}^{m} a_{i,m}^{m,-} T^{j}. \tag{2}$$

Хотя каждое из уравнений (1) это корректно определенная система на конечное число неизвестных функций, в совокупности вся иерархия задана как система бесконечного числа уравнений на бесконечное число неизвестных. Задача построения алгебро–геометрических решений иерархии двумеризованной цепочки Тода была полностью решена в работе [19].

В настоящей работе предлагается использование эквивалентного подхода к построению данной иерархии (см. [20]), а именно как системы уравнений на пространстве коэффициентов $\{\psi_\pm(i)\}$ набора формальных рядов вида

$$\psi_-(i) = z_-^i(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^-(i) z_-^s),\ \psi_+(i) = z_+^{-i} e^{\varphi_i}(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^+(i) z_+^s).$$

Для этого необходимо определить единственным образом операторы вида (2) уравнениями

$$L_m^- \psi_-(i) = z_-^{-m} \psi^-(i) + O(z)\psi^-(i),\ L_m^+ \psi_+(i) = z_+^{-m} \psi^+(i) + O(1)\psi^+(i)$$

и динамику на коэффициенты $\xi_s^\pm(i)$ как

$$\begin{cases} (\partial_{t_m^-} - L_m^-)\psi_- = -z_-^{-m}\psi_-,\ (\partial_{t_m^-} - L_m^-)\psi_+ = 0 \\ (\partial_{t_m^+} - L_m^+)\psi_+ = -z_+^{-m}\psi_+,\ (\partial_{t_m^+} - L_m^+)\psi_- = 0. \end{cases}$$

Коммутативность построенных потоков $\partial_{t_m^\pm} - L_m^\pm$ очевидна.

Основным типом редукций, рассматривавшихся в теории иерархии КП, являются редукции на стационарные точки одного из потоков иерархии (или линейной комбинации таких потоков). Соответствующие инвариантные подмногообразия имеют конечную функциональную размерность и отвечают псевдодифференциальным операторам, т.ч. их n–я степень является дифференциальным оператором. В случае разностных уравнений задача поиска таких редукций становится намного труднее, но в случае иерархии двумеризованной цепочки Тода может быть решена следующим образом. Пусть выполнены условия

$$\begin{cases} L\psi_- = z_-^{-k-1}\psi_- \\ L\psi_+ = z_+\psi_+, \end{cases} \tag{3}$$

где $L = L_{k+1}^-$ периодический оператор. Из второго условия (3) следует, что L становится строго нижнетреугольным, и, кроме того, от уравнений (1) можно перейти к уравнениям Лакса
$$\left[\partial_{t_m^\pm} - L_m^\pm, L\right] = 0. \tag{4}$$

Чтобы понять, что уравнение (4) есть хорошо определенная динамическая система на конечномерном пространстве $\mathscr{L}_{k+1}$ n–периодических строго нижнетреугольных операторов порядка $k+1$, необходимо убедиться, что коэффициенты операторов $L_m^\pm$

есть функции на пространстве $\mathscr{L}_{k+1}$. Как будет объяснено в Главе 1, такое возможно, если выполнено условие взаимной простоты n и $k+1$. Кратко, схема доказательства выглядит следующим образом, которую мы приведем, чтобы было возможно объяснить некоторые результаты.

Ограничим строго нижнетреугольный периодический оператор L порядка $k+1$ на пространство квазипериодических решений, т.е. $L(w) := L|_{\{\psi|w\psi_{i+n}=\psi_i\}}$. Тогда существуют два формальных ряда $\psi_\pm$, т.ч.

Лемма 1. *[21] Для любого оператор $L(w)$, т.ч. n и $k+1$ взаимно просты, существует единственный ряд*

$$E(z_-) = z_-^{-k-1}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty} e_s z_-^s\right), \tag{5}$$

т.ч. уравнение $L(w)\psi = E\psi$ имеет единственное решение вида

$$\psi_-(i) = z_-^i\big(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s^-(i) z_-^s\big),\ \xi_s^-(i) = \xi_s^-(i+n),\ \xi_s^-(0) = 0.$$

Лемма 2. *[21] Уравнение $L(w)\psi = E\psi$ имеет единственное формальное решение вида*

$$\psi_+(i) = e^{\varphi_i} z_+^{-i}\big(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s^+(i) z_+^s\big),\ a_i^{(1)} = e^{\varphi_i-\varphi_{i-1}},\ \xi_s^+(0) = 0.$$

Каждой точке спектральной кривой Γ (имеющей две отмеченные точки $p_\pm$), задающейся уравнением

$$\det(E - L(w)) = w^{k+1} - E^n + \sum_{i>0, j\geq 0, ni+(k+1)j<n(k+1)} r_{ij} w^i E^j = 0,$$

можно сопоставить собственный вектор $\psi(p) = \big(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\big)^t$ для $L(w)$. Поведение в точках $p_\pm$ дается в двух предыдущих леммах, и можно доказать, что число полюсов блоховского вектора $\psi(p)$, где $p = (w, E) \in \Gamma$ равно роду кривой Γ, тем самым, отметим, что $\psi(p)$ является в сущности двухточечной функцией Бейкера–Ахиезера. Кроме того, очевидно, что значения $\psi(p)$ в отмеченных точках $p_\pm$ — частный случай $\psi_\pm$ и, следовательно, по ψ можно построить операторы $L_m^\pm$. Таким образом, система (4) есть конечномерная система на пространстве $\mathscr{L}_{k+1}$.

Гамильтоново понимание нелинейных уравнений, имеющих представление Лакса, возникло позже метода обратной задачи рассеяния. В работе [22] Захарова—Фаддеева 1971 года было доказано, что КдФ это гамильтонова система. Многим позже Магри в работе 1978 года [23] показал, что КдФ гамильтоново с другим гамильтонианом и скобкой Пуассона. Так возникло понимание, что нелинейные уравнения могут быть би–гамильтоновыми. Это замечательно тем, что позволяет строить некоторой процедурой интегралы движения, находящиеся в инволюции.

Следуя работам Кричевера и Фонга (см. [24] и [25]) на пространстве периодических операторов, отождествленном с фазовым пространством системы, существует семейство два–форм

$$\omega^{(i)} = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha} \mathrm{res}_{p_\alpha} E^{-i} \langle \psi^+(w)\, \delta L(w) \wedge \delta\psi(w)\rangle\, d\Omega,\ i \in \mathbb{N}.$$

Сумма в последней формуле берется по таким точкам p_α на соответствующей спектральной кривой Γ, где правая часть имеет полюс *a–priori*: 1) в отмеченных точках $p_\pm$, где функция Бейкера–Ахиезера и ей двойственная имеют полюса; 2) в нулях p_ℓ, $\ell = 1, \ldots, k$ функции $E = E(p)$, где $w = w(p)$ не зануляется, т.е. $E(p_\ell) = 0$, при $w(p_\ell) \neq 0$. В силу общих принципов (см. [25]), подстановка векторного поля, заданного уравнением Лакса, в эти формы есть точная форма. В том случае, когда формы невырождены, это означает, что уравнения гамильтоновы. До появления работ Кричевера и Фонга данное утверждение непосредственным образом проверялось для каждого уравнения, кроме того переменные действие–угол вычислялись не эффективным громоздким образом. Вместе с тем реализация этой схемы это сложная техническая задача, решение которой зависит от исходного вида пространства операторов. Используя приведенную выше схему, в Главе 1 докажем, что формы $\omega^{(i)}$, $i = 0, 1$ невырождены на следующих подмногообразиях Λ_i^c :

Лемма 3. *Форма $\omega^{(0)}$ невырождена на подмногообразии*

$$\Lambda_0^c := \{L|\, e_s(L) = c_s, s = 1, \ldots k\}$$

Здесь e_s из Леммы 1, c_s константы.

Лемма 4. *Форма $\omega^{(1)}$ невырождена на подмногообразии*

$$\Lambda_1^c := \{L|\, r_{i,0}(L) = c_i, 1 = 1, \ldots k\},$$

где $c = (c_1, \ldots, c_k)$ константы, $r_{i,0}(L) = r_{i,0}$ коэффициенты $\det L(w) = w^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} r_{i,0} w^i$.

Далее, докажем, что векторные поля $\partial_{t_m^\pm}$, определенные уравнениями Лакса (4) на пространстве $\mathscr{L}_{k+1}$, и ограниченные на подмногообразия Λ_i^c, $i = 0, 1$ являются гамильтоновыми по отношению к формам $\omega^{(i)}$. Явным образом вычислим гамильтонианы.

Теорема 1. *[34] Векторное поле $\partial_{t_m^\pm}$, определенное уравнением Лакса (4) и ограниченное на подмногообразие Λ_i^c является гамильтоновым для $i = 0, 1$ по отношении к формам $\widehat{\omega}^{(i)} = \omega^{(i)}\big|_{\Lambda_i^c}$ с гамильтонианами*

$$H_{t_m^-}^{(0)} = res_{p_-} z_-^{-m} E(z_-)\, d\ln z_- = e_{m+k+1} \tag{6}$$

$$H_{t_m^-}^{(1)} = res_{p_-} z_-^{-m} \ln E(z)\, d\ln z_- \tag{7}$$

где $E(z_-)$ ряд (5) с коэффициентами, определенными в Лемме 1, и

$$H^{(i)}_{t^+_m} = \frac{1}{n} res_{p_+} E^{-m-i} \ln w(E) dE, \quad i = 0, 1 \tag{8}$$

Вышесказанные результаты относятся к случаю, когда L строго нижнетреугольный оператор произвольного порядка. В случае нижнетреугольной динамики

$$\partial_{t^-_m} L = [L, L^-_m], \tag{9}$$

если ввести обозначения $(L^-_1\psi)_i = v_i\psi_i + \psi_{i-1}$, $(L\psi)_i = a^1_i\psi_{i-1} + \ldots + a^k_i\psi_{i-k} + \psi_{i-k-1}$ и $v_i = \partial_{t^-_1}\varphi_i$, уравнение (9) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \partial_{t^-_1} a^1_i = a^1_i(v_i - v_{i-j}) \\ \partial_{t^-_1} a^j_i = a^j_i(v_i - v_{i-j}) + a^{j-1}_{i-1} - a^{j-1}_i, \ j = \overline{2,k} \\ a^k_{i-1} - a^k_i = v_{i-k-1} - v_i \end{cases} \tag{10}$$

на функции a^j_i. В частности, если L имеет порядок 2, то уравнения (10) принимают простую форму

$$\partial_{t^-_1}\varphi_{i-1} - \partial_{t^-_1}\varphi_{i+1} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}} - e^{\varphi_{i+1} - \varphi_i}, \tag{11}$$

и верна следующая Теорема

Теорема 2. *[34] Пусть $\mathscr{L}_2 = \{a_iT^{-1} + T^{-2} \mid a_{i+n} = a_i\}$ пространство периодических разностных строго нижнетреугольных операторов порядка 2.*

1. *Уравнение $\partial_{t^-_1} L = [L, L^-_1]$ (или (11)) на пространстве $\mathscr{L}_2$, ограниченном на Λ^c_0, является гамильтоновым по отношению к симплектической форме $\widehat{\omega}^{(0)} = \langle dx_i \wedge dx_{i-1}\rangle$, где $a_i = x_i - x_{i-2} + e_1$, с соответствующим гамильтонианом*

$$H^{(0)}_{\partial_{t^-_1}} = \frac{1}{n}\langle x^2_i(x_{i-1} - x_{i+1})\rangle + \frac{e_1}{n}\langle x_i(x_{i+1} - x_i)\rangle.$$

2. *Уравнение $\partial_{t^-_1} L = [L, L^-_1]$ на пространстве $\mathscr{L}_2$, ограниченном на Λ^c_1, является гамильтоновым по отношению к симплектической форме $\widehat{\omega}^{(1)} = \langle d\varphi_i \wedge d\varphi_{i+1}\rangle$, где $a_i = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}$, с соответствующим гамильтонианом*

$$H^1_{\partial_{t^-_1}} = \langle e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}\rangle.$$

Для случая оператора порядка 3 имеет место следующий результат

Теорема 3. *[34] Уравнение $\partial_{t^-_1} L = [L, L^-_1]$ в случае $k = 2$ на пространстве $\mathscr{L}_3$, ограниченном на Λ^c_0, является гамильтоновым по отношению к симплектической форме*

$$\widehat{\omega}^{(0)} = \langle\, dy_i \wedge (dx_{i-1} - dx_{i+2}) + d(x_{i-1}x_{i-2}) \wedge dx_i + e_1 dx_i \wedge dx_{i-1}\rangle,$$

с соответствующим гамильтонианом

$$H^{(0)}_{\partial_{t_1^-}} = \frac{1}{n}\langle\, y_{i-1}(y_i - y_{i-3})\rangle + \frac{1}{n}\langle x_i x_{i-1} x_{i-2}(x_{i-1} - x_i)\rangle + \frac{e_1}{n}\langle (x_i^2(x_{i-1} - x_{i+1})\rangle$$

$$+\frac{e_2}{n}\langle x_{i-1}(x_i - x_{i-1})\rangle + \frac{1}{n}\langle y_i(x_{i+2}^2 - x_{i-1}^2 - x_{i+2}x_{i+1} + x_{i-2}x_{i-1})\rangle.$$

Кроме того, в случае, когда L произвольного порядка

Теорема 4. *[34] Уравнение (9), ограниченное на листы с зафиксированным w_ℓ, являются гамильтоновыми по отношению к форме*

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{2}\langle d\varphi_{i-1} \wedge d\varphi_i\rangle - \langle (-1)^{(i-1)k} e^{\varphi_{i-1}} \sum_{j=1}^{k} da_i^{(j)} \wedge |\phi_{i-2}, \ldots, \phi_{i-k}, d\phi_{i-j}|\rangle, \qquad (12)$$

где $\phi_i^\ell = \psi_i(p_\ell)$ значения функции Бейкера–Ахиезера в прообразах $E = 0$ там, где $w \neq 0$, $p_\ell = (w_\ell, 0)$, $a_i^{(j)} = (-1)^{ik+1}e^{\varphi_i}|\phi_{i-1}, \ldots, \phi_{i-j+1}, \phi_{i-k-1}, \phi_{i-j-1}, \ldots, \phi_{i-k}|$, и $e^{-\varphi_i} := (-1)^{ik}|\phi_{i-1}, \ldots, \ldots, \phi_{i-k}|$. Соответствующий гамильтониан равен

$$H^1_{\partial_{t_1^-}} = \langle a_i^{(k)}\rangle$$

Для случая верхнетреугольной динамики доказано, что

Теорема 5. *[34] Уравнение*

$$\partial_{t_1^+} L = [L, L_1^+], \qquad (13)$$

ограниченное на листы с зафиксированным w_ℓ, являются гамильтоновыми по отношению к форме (12). Соответствующие гамильтониан

$$H_{\partial_{t_1^+}} = \frac{1}{n} res_{E=0} \ln w(E) E^{-2} dE = w_1 = -\langle a_i^{(2)} e^{\varphi_{i-2} - \varphi_i}\rangle,$$

где w_1 первый коэффициент разложения функции w в окрестности точки p_+.

Так если L имеет порядок 2 и $(L_1^+\psi)_i = c_i\psi_{i+1}$, $c_i = e^{\varphi_i - \varphi_{i+1}}$ и $(L\psi)_i = a_i^1\psi_{i-1} + \ldots + a_i^k\psi_{i-k} + \psi_{i-k-1}$, уравнение (13) записывается как

$$\partial_{t_1^+} a_i^{j-1} = c_i a_{i+1}^j - c_{i-j} a_i^j,\ j = \overline{2,k}.$$

В частности, для $k = 1$

$$\partial_{t_1^+}\varphi_i - \partial_{t_1^+}\varphi_{i-1} = e^{\varphi_{i-1} - \varphi_{i+1}} - e^{\varphi_{i-2} - \varphi_i},$$

и соответствующий гамильтониан равен

$$H^{(1)}_{t_1^+} = -\langle e^{\varphi_{i-2} - \varphi_i}\rangle.$$

Дополнительно изучается вопрос поиска координат, в которых формы $\omega^{(i)}$, $i = 1, 2$ принимают *локальный вид*, поскольку естественные координаты (коэффициенты оператора) на пространстве $\mathscr{L}_{k+1}$ таковыми не являются. Доказано, что $\omega^{(0)}$ имеет локальные плотности в координатах $\{\xi_s^-(i), e_s\}$, $s = \overline{1, k}$, а форма $\omega^{(1)}$ в координатах $\phi_i^\ell = \psi_i(p_\ell)$, $p_\ell = (w_\ell, 0)$. Кроме того, рассматривается вопрос написания симплектической структуры на пространстве суперпериодических строго нижнетреугольных операторов $\mathcal{E}_{k+1,n}$ порядка $k+1$. Здесь $\mathcal{E}_{k+1,n}$ пространство n–периодических операторов порядка $k+1$, действующих на функцию дискретного аргумента по правилу

$$L'\psi'_i = \psi'_{i-k-1} + a_i^k \psi'_{i-k} + \dots a_i^1 \psi'_{i-1},\ a_{i+n}^j = a_i^j$$

и таких, что все решения задачи $L\psi'_i \equiv -\psi'_i$ являются n–(анти)периодическими функциями, т.е. $\psi'_{i+n} = (-1)^{n+k}\psi'_i$. Пространство $\mathcal{E}_{k+1,n}$ естественным образом возникает в теории кластерных алгебр (см. [26]), теории представлений (см. [27]) и теории пентаграммных отображений (см. [28], [29]).

В Главе 2 основные результаты относятся к непосредственному построению спектральной теории двумерного периодического оператора Шредингера и обобщению хорошо известной конструкции Веселова–Новикова.

Исторически, для двумерного оператора Шредингера сначала решалась обратная задача, а потом уже строилась спектральная теория. В работе [30] Дубровин, Кричевер и Новиков предложили конструкцию, позволяющую строить двумерный оператор Шредингера с магнитным полем

$$(i\partial_x + A_1(x,y))^2 + (i\partial_y + A_2(x,y))^2 + u(x,y). \tag{14}$$

Так по неособой алгебраической кривой $\mathscr{T}$ рода g, двум точкам $P_\pm$, локальным параметрам $k_\pm^{-1}$ в окрестностях $P_\pm$, дивизору D степени g общего положения, строилась функция Бейкера–Ахиезера с заданными экспоненциальными особенностями в $P_\pm$, являющаяся собственной на нулевом уровне энергии для оператора (14). Стоит отметить, полученное магнитное поле имело нулевой поток.

В двух работах Веселова и Новикова 1984 года (см. [31], [32]) указаны условия на алгебро–геометрические данные предыдущей конструкции, выделяющие потенциальные операторы Шредингера

$$\mathcal{H} = -\Delta + u(x,y),\ \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2. \tag{15}$$

Было доказано, что если кроме условий работы [30] имеет место: 1) наличие на $\mathscr{T}$ инволюции σ со свойством $\sigma(P_\pm) = P_\pm$; 2) условие преобразования локальных координат по правилу $k_\pm^{-1}(\sigma(p)) = -k_\pm^{-1}(p)$; 3) существование дифференциала $d\Omega$ с нулями в дивизоре $D + \sigma(D)$ и простыми полюсами в точках $P_\pm$, тогда оператор вида (15) однозначно восстанавливается по этому алгебро–геометрическому набору данных и соответствующий потенциал имеет вид второй логарифмической производной тэта–функции многообразия Прима накрытия $\mathscr{T} \to \mathscr{T}_0 = \mathscr{T}/\sigma$. Достаточное условие того, что $u(x,y)$ вещественный потенциал, — наличие антиинволюции τ, коммутирующей с σ, и т.ч. $\tau(P_\pm) = P_\mp$, $\tau^*(k_\pm^{-1}) = \bar{k}_\mp^{-1}$, $\tau(D) = D$. Кроме того, имеют место два типа условий на спектральные данные, отвечающие за неособость $u(x,y)$:

1) $\mathscr{T}$ должна быть M–кривой, причем для $g+1$ неподвижных овалов выполнялось бы свойство $\sigma(a_{j+g_0}) = \tilde{a}_j, j = \overline{1, g_0}$, $g_0 =$ род $\mathscr{T}/\sigma$; 2) антиинволюция $\sigma\tau$ разделяющего типа, и дифференциал $d\Omega$ положителен на неподвижных овалах относительно некоторой зафиксированной ориентации.

С развитием спектральной теории двумерного периодического нестационарного оператора Шредингера естественным образом возник вопрос, насколько полны алгебро–геометрические условия Веселова–Новикова (например, можно ли построить несингулярный (15) по сингулярной кривой). Решение прямой задачи спектральной теории оператора (15) должно было дать ответ на этот вопрос. Особую важность имеет конструктивый подход работы [33], позволяющий установить некоторые конкретные свойства спектральной кривой. Доказано, что в общем случае существует голоморфная инволюция σ

$$\sigma: \ (w_1, w_2) \to (w_1^{-1}, w_2^{-1})$$

и, если потенциал вещественный, антиголоморфная инволюция τ

$$\tau: \ (w_1, w_2) \to (\bar{w}_1, \bar{w}_2),$$

коммутирующая с σ, т.е. $\sigma\tau = \tau\sigma$, оставляющая инвариантным дивизор полюсов Блоховского решения. Кроме того, если потенциал конечнозонный, то существуют две отмеченные точки $P_\pm$, неподвижные относительно σ, в окрестности которых формально блоховское решение имеет разложение двухточечной функции Бейкера–Ахиезера. Таким образом, полученные в работе [33] результаты дают необходимость условий Веселова–Новикова.

Спектральная теория двумерного периодического оператора Шредингера до настоящего дня не построена в полной мере. В отличии от нестационарного оператора Шредингера $\partial_y - \partial_x^2 + u(x,y)$ с гладким вещественным периодическим потенциалом спектральная кривая двумерного оператора Шредингера $\mathcal{H}$ с гладким и вещественным периодическим потенциалом может иметь особые точки. Вопрос о типах особенностей остается открытым.

Цель Главы 2 настоящей диссертаци — прояснить некоторые вопросы спектральной теории двумерного оператора Шредингера. Кривая Ферми для оператора $\mathcal{H}$, рассматривается как возмущение кривой Ферми оператора $-\Delta - \lambda$, здесь $u(x,y) = -\lambda + v(x,y)$, λ некоторая выбранная константа, а $v(x,y)$ достаточно малая периодическая величина и выполняется условие $\lambda \neq \frac{m^2\ell_1^2 + n^2\ell_2^2}{4\ell_1\ell_2}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. В случае, когда $\lambda < 0$ (случай *положительных потенциалов*), приведена конструкция, позволяющая упростить описание Ферми кривой в терминах некоторого набора данных $\mathcal{P}$, состоящего из положительного числа и конечного (или бесконеного) множества пар чисел, удовлетворяющих определенным соотношениям. Показано, что спектральная кривая двумерного оператора Шредингера, соответствующая положительным потенциалам, является M–кривой относительно антиинволюции τ. Кроме того установлено, что полюса блоховской функции расположены по одному на каждом из неподвижных овалов τ. Отметим, что таким образом спектральная кривая двумерного периодического оператора Шредингера с положительным потенциалом необходимо и достаточно является M–кривой. Показано, что приведенная конструкция остается топологически устойчивой при деформации потенциала $u(x, y)$, оставляющей потенциал положительным, до момента когда нулевой уровень становится собственным в пространстве (анти)периодических функций.

Теорема 6. *[35] Для любого вещественного положительного периодического потенциала $u(x, y) > 0$, аналитически продолжимого в окрестнсть вещественных x, y, блоховские решения уравнения $(-\Delta - \lambda + v)\tilde{\phi} = 0$ параметризуются точками римановой поверхности $\Gamma(\mathcal{P})$ для некоторого допустимого набора $\mathcal{P}$. Соответствующая функция $\tilde{\phi}$ мероморфна и имеет по одному простому полюсу на каждом из циклов a_s.*

Одним из важнейших результатов данной работы является обобщенная конструкция Веселова–Новикова, позволяющая строить такие операторы, для которых нулевой уровень есть собственный уровень периодической задачи. Обратная задача никогда не решалась при помощи сингулярной кривой (кривая Ферми может быть сингулярной), вместо этого функция Бейкера–Ахиезера определяется на ее нормализации. В отличии от обычной конструкции Веселова–Новикова, в предложенной в Главе 2 обобщенной конструкции Веселова–Новикова используется кривая с инволюцией, имеющей $n+1$–пару неподвижных точек $(P_{\pm}, p^1_{\pm}, \dots p^n_{\pm})$ для произвольного $n > 0$. В этом случае функция Бейкера–Ахиезера определяется дивизором полюсов степени $g + n$, аналитическим поведением в окрестности „бесконечностей“, но дополнительно n условиями „склейки “в точках $p^i_{\pm}$. В работе найдены формулы для функции Бейкера–Ахиезера и соответсвующего двумерного потенциального оператора Шредингера в терминах подходящей тэта–функции Прима θ.

Теорема 7. *Функция Бейкера–Ахиезера оператора (15) имеет вид*

$$\phi(x, y, p) = \frac{\theta(A(p) + zU_+ + \bar{z}U_- + Z|\Pi)\theta(Z|\Pi)}{\theta(zU_+ + \bar{z}U_- + Z|\Pi)\theta(A(p) + Z|\Pi)} e^{z\Omega_+(p)+\bar{z}\Omega_-(p)}, \tag{16}$$

где координаты векторов $U_+, U_- \in \mathbb{C}^{g_0+n}$ даются формулой $U^j_{\pm} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{b_j} d\Omega_{\pm}$. При этом $Z = -\sum_{s=1}^{g+n} A(\gamma_s) + \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ постоянный вектор.

Теорема 8. *Функция Бейкера-Ахиезера ϕ, заданная формулой (16), где Z произвольный вектор общего положения, удовлетворяет двумерному уравнению Шредингера $\mathcal{H}\phi = 0$ с потенциалом*

$$u(x, y) = -2\Delta \ln \theta(zU_+ + \bar{z}U_- + Z|\Pi) + E, \quad E := 4\frac{d\Omega_-}{d(k_+^{-1})}(P_+).$$

Если для некоторых целочисленных векторов N_1, N_2 и M_1, M_2 имеют место равенства

$$2\pi\ell_1(U_+ + U_-) = N^a + \Pi N^b, \quad 2\pi i\ell_2(U_+ - U_-) = M^a + \Pi M^b,$$

то потенциал является $(2\pi\ell_1, 2\pi\ell_2)$-периодической, а значения функции Бейкера–Ахиезера в точках $p^i_{\pm}$ $\phi_i := \phi(x, y, p^{\pm}_i)$ являются собственными для оператора $-\Delta + u(x, y)$ в пространстве (анти)периодических функций.

Ответы на вопрос о несингулярности потенциала, полученного с помощью обобщенной конструкции Веселова–Новикова, даются следующими теоремами

Теорема 9. *[35] Предположим, что $\mathscr{T}$ является M-кривой, антиголоморфная инволюция которой имеет неподвижные овалы $a_0, a_1, \ldots, a_{g_0+n}, \tilde{a}_1, \ldots a_{g_0}$, на которые голоморфная инволюция действует как*

$$\sigma(a_i) = \tilde{a}_i, \quad \sigma(b_i) = \tilde{b}_i, \; i = 1, \ldots, g_0$$

и

$$\sigma(a_{i'}) = -a_{i'}, \quad \sigma(b_{i'}) = -b_{i'}, \; i' = \overline{g_0+1, g_0+n}.$$

Предположим также, что $p^i_\pm \in a_{g_0+i}$. Тогда, если точки γ_s допустимого дивизора D степени $g+n$ лежат по одной на каждом из овалов $a_1 \ldots, a_{g_0}, \tilde{a}_1 \ldots \tilde{a}_{g_0}$ и по одной в каждом из сегментов a_{g_0+i}, на которые этот овал разбивается парой точек $p^i_\pm$, то соответствующий потенциал является вещественным и неособым.

Теорема 10. *[35] Предположим, что антиинволюция $\sigma\tau$ имеет разделяющий тип, т.е. что дополнение к ее неподвижным овалам состоит из двух несвязных областей $\mathscr{T}^\pm$,*

$$\sigma\tau(\mathscr{T}^+) = \mathscr{T}^-.$$

Если при этом $p^i_\pm \in \mathscr{T}^\pm$, а дифференциал $d\Omega$, определяющий допустимый дивизор D положителен на данных неподвижных овалах относительно ориентации, индуцированной областью $\mathscr{T}^+$, и, кроме того, если

$$res_{p_i^+} d\Omega < 0,$$

то соответствующий потенциал оператора Шредингера является вещественным и неособым.

Приведен пример обобщенной конструкции Веселова–Новикова для случая гиперэллиптических кривых. Выбрав специальным образом разбиение точек ветвления на пары, можно добиться того, что матрица Прима П это удвоенная матрица b–периодов П = 2B. В этом случае формулы для значений функции Бейкера–Ахиезера в точках склейки будут иметь крайне простой вид. Отметим, что построенные таким образом операторы Шредингера имеют n собственных функций. А ввиду того, что кривая гиперэллиптическая, получен определенный тип *условий самосогласования.* Поясним, что суть условий самосогласования в некоторой, не обязательно квадратичной зависимости потенциала от решения уравнения. Кроме того, доказано, что система уравнений Шредингера с данным условием самосогласования является Лагранжевой, т.е. приведен явный вид для Лагранжиана, для которого уравнения Эйлера–Лагранжа будут совпадать с исходными уравнениями.

По результатам исследований опубликовано две статьи

- А. В. Ильина, И. М. Кричевер, “Треугольные редукции двумеризованной цепочки Тода”, Функц. анализ и его прил., **51:1** (2017), 60–81

- А. В. Ильина, И. М. Кричевер, Н. А. Некрасов, *Двумерные периодические операторы Шредингера, интегрируемые на “собственном” уровне энергии*, Функц. анализ и его прил., **53:1** (2019), 31–48

Список литературы

[1] Gardner, C. S., Green, J. M., Kruskal, M. D., Miura, R. M., *Method for solving KdV equation,* Phys. Rev. Lett. 15 (1967), 1095–1097.

[2] Lax, P. D. *Integrals of nonlinear equation of evolution and solitary waves*, Commun. Pure Appl. Math. 21(1968), 467–490.

[3] Zakharov, V. E. , Shabat, A. B. , *Exact theory of the 2D self focusing and 1D auto modulation in nonlinear media*, Soviet Physics JETP 34 (1972), 62–69.

[4] Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A. C., Segur, H. *Method for solving the sine-Gordon equation*, Phys. Rev. Lett. 30 (1973), 1262–1264.

[5] С.П. Новиков, *Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. I,* Функц. анализ и его прил., 8:3 (1974), 54–66; Funct. Anal. Appl., 8:3 (1974), 236–246.

[6] Б.А. Дубровин, *Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов*, Функц. анализ и его прил., 9:1 (1975), 65–66.

[7] А.Р. Итс, В.Б. Матвеев, *Об операторах Хилла с конечным числом лакун*, Функц. анализ и его прил., 9:1 (1975), 69–70.

[8] В.А. Марченко, *Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения*,Киев, Наук. думка, 1977.

[9] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, *Периодическая задача для уравнений Кортевега–де Фриза и Штурма–Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией,* Докл. АН СССР, 219:3 (1974), 531–534.

[10] Б.А. Дубровин, *Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов*, Функц. анализ и его прил., 1975, 9:3, 41—-51.

[11] P.D. Lax, *Periodic solutions of KdV equation*, Lect. in Appl. Math. 1974, 15, 85–96.

[12] H.P. McKean, P. van Moerbeke, *The spectrum of Hill's equation*, Invent. Math., 1975, 30: 3, 217–274.

[13] А.Р. Итс, В.Б. Матвеев В. Б.,*Операторы Шрёдингера с конечиозонпым спектром и N-солитоиные решения уравнения Кортевега-де Фриза*, Теор. и мат. физ., 1975, 23: 1, 51–68.

[14] P.D. Lax, *Periodic solutions of Korteweg-de Vries equation*, Comm, Pure and Appl. Math., 1975, 28, 141–188.

[15] И.М. Кричевер, *Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова–Шабата и их периодических решений*, Докл. АН СССР, 1976, 227:2, 291–294.

[16] И.М. Кричевер, *Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений*, Успехи мат. наук, 1977, 32:6, 183–208.

[17] Н.И. Ахиезер, *Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов,* Докл. АН СССР, 141:2 (1961), 263–266.

[18] И.М. Кричевер, *Спектральная теория «конечнозонных» нестационарных операторов Шредингера. Нестационарная модель Пайерлса,* Функц. анализ и его прил., 20:3 (1986), 42–54.

[19] I. Krichever, *The periodic nonabelian Toda lattice and two-dimensional generalization* Uspekhi Mat. Nauk **36** (1981), n 2, 72-77.

[20] I. Krichever, A. Varchenko, *Incarnations of XXX* $\widehat{\mathfrak{sl}_N}$ *Bethe ansatz equations and integrable hierarchies,* arXiv:1907.12198.

[21] I. Krichever, *Commuting difference operators and the combinatorial Gale transform,* Functional analysis and its applications, 49:3 (2015), 175–188.

[22] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, *Уравнение Кортевега–де Фриса — вполне интегрируемая гамильтонова система,* Функц. анализ и его прил., 5:4 (1971), 18–27.

[23] F. Magri, *A simple model of the integrable Hamiltonian Equation,* J. Math. Phys. (1978) 19, 1156–1162.

[24] I. Krichever, D.H. Phong, *On the integrable geometry of* $N = 2$ *supersymmetric gauge theories and soliton equations*, J. Differential Geometry, 45 (1997) 445–485.

[25] I. Krichever, D. Phong, *Symplectic forms in the theory of solitons,* Surv. Differ. Geometry (1998), 239–313.

[26] M. Gekhtman, M. Shapiro, S. Tabachnikov, A. Vainshtein, *Higher pentagram maps, weighted directed networks, and cluster dynamics,* Electron. Res. Announc. Math. Sci. 19 (2012), 1–17.

[27] V. Ovsienko, S. Tabachnikov, *Coxeter's frieze patterns and discretization of the virasoro orbit*, Journal of Geometry and Physics, 87, 373–381.

[28] V. Ovsienko, R. Schwartz, S. Tabachnikov, *The Pentagram Map: A Discrete Integrable System*, Communications in Mathematical Physics, 2010, Volume 299, Issue 2, 409–446.

[29] V. Ovsienko, R. Schwartz, S. Tabachnikov, *Quasiperiodic motion for the pentagram map,* Electronic Research Announcements, 2009, 16: 1–8.

[30] Б.А. Дубровин, И.М. Кричевер, С.П. Новиков, *Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности*, Докл. АН СССР, 229:1 (1976), 15–18.

[31] А.П. Веселов, С.П. Новиков, *Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения,* ДАН СССР, 279:1 (1984), 20–24.

[32] А.П. Веселов, С.П. Новиков, *Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы,* ДАН СССР, 279:4 (1984), 784–788.

[33] И.М. Кричевер, *Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения,* УМН, 44:2(266) (1989), 121–184.

[34] А.В. Ильина, И.М. Кричевер, *Треугольные редукции двумеризованной цепочки Тода*, Функц. анализ и его прил., 51:1 (2017), 60–81.

[35] А.В. Ильина, И.М. Кричевер, Н. А. Некрасов, *Двумерные периодические операторы Шредингера, интегрируемые на "собственном" уровне энергии*, Функц. анализ и его прил., 53:1 (2019), 31–48.