Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Рябичев Андрей Дмитриевич

h-Принцип и отображения с заданными особенностями

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
PhD, доцент
Горинов Алексей Геннадьевич

Москва – 2020

Введение

В диссертации мы обобщаем теорему Я. М. Элиашберга об особенностях типа складки на произвольные бордмановские особенности. А именно, мы формулируем необходимое и достаточное условие, при котором отображение многообразий одинаковой размерности гомотопно общему отображению с заданными бордмановскими особенностями Σ^I в каждой точке. В размерностях 2 и 3 мы переформулируем это условие в терминах гомологических классов множеств особых точек и характеристических классов многообразий.

Все рассматриваемые многообразия по умолчанию считаются бесконечно гладкими и без края. Отображения между многообразиями предполагаются бесконечно гладкими, если не оговорено противное. Мы фиксируем пару многообразий M, N размерности $n > 1$.

1 Бордмановские особенности и общие отображения

Начнём с того, что напомним бордмановскую классификацию особенностей. Возьмём отображение $f : M \to N$. Для последовательности целых чисел $I = i_1, i_2, \ldots, i_r$, такой что $n \geq i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_r \geq 0$, определено подмножество $\Sigma^I(f) \subset M$. Можно определить $\Sigma^I(f)$ индуктивно:

$$\begin{aligned}
&\Sigma^{i_1}(f) = \{x \in M \mid \dim(\ker df(x)) = i_1\},\\
&\Sigma^{i_1,i_2}(f) = \{x \in M \mid \dim(\ker df|_{\Sigma^{i_1}(f)}(x)) = i_2\},\\
&\ldots\\
&\Sigma^{I}(f) = \{x \in M \mid \dim(\ker df|_{\Sigma^{i_1,\ldots,i_{r-1}}(f)}(x)) = i_r\}.
\end{aligned}$$

Для такого определения существенно, что полученное на k-м шаге множество $\Sigma^{i_1,\ldots,i_k}(f) \subset M$ является подмногообразием, и, тем самым, мы можем сделать следующий шаг.

Можно определить множество $\Sigma^I(f)$ иначе — как прообраз некоторого подмногообразия $\Sigma^I(M,N) \subset J^r(M,N)$ в пространстве r-струй. Если струйное расширение $j^r(f)$ трансверсально $\Sigma^I(M,N)$, то оба определения совпадают (детали изложены в [3], см. также [16, §2]). Из соображений размерности мы можем положить $r = n+1$.

Для различных последовательностей I длины r подмногообразия $\Sigma^I(M,N) \subset J^r(M,N)$ не пересекаются. Обозначим через $\Sigma(M,N)$ множество критических r-струй отображений $M \to N$. Известно, что бордмановское разбиение $\Sigma(M,N) = \bigsqcup_{I\neq 0,0,\ldots} \Sigma^I(M,N)$ не является стратификацией [3, стр. 48]. Однако, поскольку пересечения $\Sigma^I(M,N) \subset J^r(M,N)$ со слоями $J^r(M,N) \to M \times N$ суть квазиаффинные алгебраические подмножества, можно выбрать стратификацию $\Sigma(M,N)$, которая будет подразбиением бордмановского разбиения (см. [4], [12])

Если струйное расширение $j^r(f) : M \to J^r(M,N)$ отображения $f : M \to N$ трансверсально всем $\Sigma^I(M,N)$, то отображение f называется *бордмановским*, а если $j^r(f)$ трансверсально выбранной стратификации $\Sigma(M,N)$, то отображение f называется *общим*. Очевидно, любое общее отображение является бордмановским.

Если M компактно, то по теореме Тома о трансверсальности общие отображения $M \to N$ образуют открытое всюду плотное подмножество в пространстве всех C^∞-отображений $M \to N$ с топологией Уитни. Множество бордмановских отображений также плотно, но оно не будет открытым при $n > 3$ (см., например, [13]).

Для общего отображения f множество его критических точек $\Sigma(f) = j^r(f)^{-1}(\Sigma(M,N))$ является стратифицированным подмножеством в M. Любой страт $C \subset \Sigma(f)$ целиком лежит в некотором $\Sigma^I(f)$, причём из соображений размерности последовательность I должна иметь ноль на конце. Поэтому ограничение $f|_C$ является иммерсией $C \to N$.

2 Согласованные ростки

В данной работе мы изучаем следующий вопрос:

Вопрос. *При каких условиях существует общее отображение $M \to N$ с заданными особенностями?*

Сейчас мы уточним, что такое "отображение с заданными особенностями". Напомним, что если n достаточно велико, то бордмановские особенности отображений $M \to N$ могут не быть стабильными, см., например, [16, §3.7]. В частности, для фиксированной последовательности I ростки отображения f в разных точках $x, x' \in \Sigma^I(f)$ могут быть неэквивалентны. Поэтому мы вынуждены задать росток особенности в каждой точке.

А именно, зафиксируем непустое замкнутое подмножество $S \subset M$. Пусть имеется набор открытых множеств $U_i \subset M$, такой что $S \subset \bigcup U_i$, и набор n-мерных многообразий V_i (где $i = 1, 2, \ldots$ пробегает фиксированный, возможно, бесконечный набор индексов). Пусть задан набор общих отображений $\varphi_i : U_i \to V_i$, для которых $\bigcup \Sigma(\varphi_i) = S$.

Набор $\{\varphi_i\}$ называется *локально согласованным*, если для любых i, j ростки φ_i и φ_j в каждой точке $x \in U_i \cap U_j$ являются L-эквивалентными (это означает, что для некоторых окрестностей $x \in U \subset (U_i \cap U_j)$ и $\varphi_i(U) \subset V \subset V_i$ найдётся вложение $\beta : V \to V_j$, для которого $\beta \circ \varphi_i|_U = \varphi_j|_U$).

(Поскольку отображения φ_i общие, $S \subset M$ апостериори является стратифицированным подмножеством).

Зафиксируем локально согласованный набор отображений $\{\varphi_i\}$ как выше. Мы будем говорить, что отображение $f' : M \to N$ имеет *заданные особенности*, если $\Sigma(f') = S$ и для любого i ростки f' и φ_i в любой точке $x \in U_i$ являются L-эквивалентными.

3 Скрученное касательное расслоение

Далее мы строим следующее векторное расслоение $T^{\{\varphi_i\}}M$ ранга n над M, называемое *скрученным касательным расслоением.*

Сперва положим $U_0 = V_0 = M \setminus S$ и $\varphi_0 = \mathrm{Id} : U_0 \to V_0$. Если мы дополним набор $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ отображением φ_0, он останется локально согласованным.

Для каждого $i = 0, 1, \ldots$ возьмём векторное расслоение $E_i \to U_i$, равное $\varphi_i^*(TV_i)$. Поскольку набор $\{\varphi_i\}$ локально согласован, для любых i, j и точки $x \in U_i \cap U_j$ имеется изоморфизм слоёв $d\beta : E_i|_x \to E_j|_x$, где β — отображение, устанавливающее L-эквивалентность ростков φ_i и φ_j в x. Этот изоморфизм слоёв не зависит от выбора β, и, следовательно, задан глобальный изоморфизм $\Psi_{i,j} : E_i|_{U_i \cap U_j} \to E_j|_{U_i \cap U_j}$.

Расслоение $T^{\{\varphi_i\}}M$ получается склейкой расслоений E_i при помощи $\Psi_{i,j}$, $i, j = 0, 1, \ldots$. Мы доказываем, что такая склейка корректно определена.

4 Основная теорема

Следующая теорема обобщает h-принцип Я. М. Элиашберга для отображений со складками [19]. Она является основным результатом нашей работы ([10], [18]).

Теорема 1. *Непрерывное отображение $f : M \to N$ гомотопно общему отображению f', имеющему заданные особенности, определённые локально согласованным набором отображений $\{\varphi_i\}$, если и только если расслоения $T^{\{\varphi_i\}}M$ и $f^*(TN)$ изоморфны.*

Для доказательства Теоремы 1 существенно, что S — стратифицированное подмножество в M и для любого страта $C \subset S$ и любого i ограничение $\varphi_i|_{C\cap U_i}$ является иммерсией. Также мы используем относительную версию h-принципа Я. М. Элиашберга [19, Th. 2.2], поэтому существенно, что подмножество S, в котором φ_i имеют складки, непусто.

Имеются известные результаты Й. Андо об отображениях с заданными особенностями. В работе [2] доказывается некоторый критерий того, гомотопно ли произвольное отображение между многообразиями гладкому отображению, имеющему бордмановские особенности *не хуже* (в лексикографическом порядке), чем заранее заданные. Этот критерий формулируется в терминах струй.

Отличие Теоремы 1 от этих результатов в том, что на вход мы требуем более подробные данные (заданные согласованные ростки в каждой точке, вместо сечения пространства струй), но и на выходе мы получаем отображение с заданными особенностями *в каждой точке*; у Андо не контролируются ни конкретные бордмановские классы особенностей, ни то, какие подмногообразия эти особенности образуют.

5 Следствия в размерности 2

Пусть M, N — связные компактные многообразия размерности 2 без края. Ниже мы сформулируем обобщение теоремы, доказанной Я. М. Элиашбергом в случае ориентируемого N, см. [19, §4]. Это обобщение выводится из Теоремы 1 вычислением характеристических классов расслоения $T^{\{\varphi_i\}}M$.

Особенности общих отображений $M \to N$ суть складки $\Sigma^{1,0}$ и сборки $\Sigma^{1,1,0}$. Такие особенности называются *мореновскими.* Все они стабильны [8], [11]. Также, напомним, что для любого I множество $\Sigma^I \subset J^r(M,N)$ является гладким подмноообразием ([3, §6]). Поэтому для общего отображения $f : M \to N$ подмножество $\Sigma^1(f) \subset M$ — гладкое 1-подмногообразие, а подмножество $\Sigma^{1,1}(f) = \Sigma^{1,1,0}(f) \subset \Sigma^1(f)$ — дискретно.

Возьмём непустое замкнутое 1-подмногообразие $C \subset M$ и дискретное подмножество $P \subset C$. Для каждой точки $p \in P$ выберем вектор единичной нормали к C, называемый *характеристическим вектором.* Выбор характеристического вектора определяет общий p-росток, имеющий сборку в p и складки в C рядом с p, с точностью до эквивалентности. А именно, образ характеристического вектора будет направлен "наружу" относительно сборки, см. Рис. 1.

Если $[C] = 0$, то C ограничивает два двумерных подмногообразия с краем $M_+, M_- \subset M$. Обозначим через n_+, соответственно n_-, число точек P, характеристический вектор которых направлен наружу относительно M_+, соответственно относительно M_-.

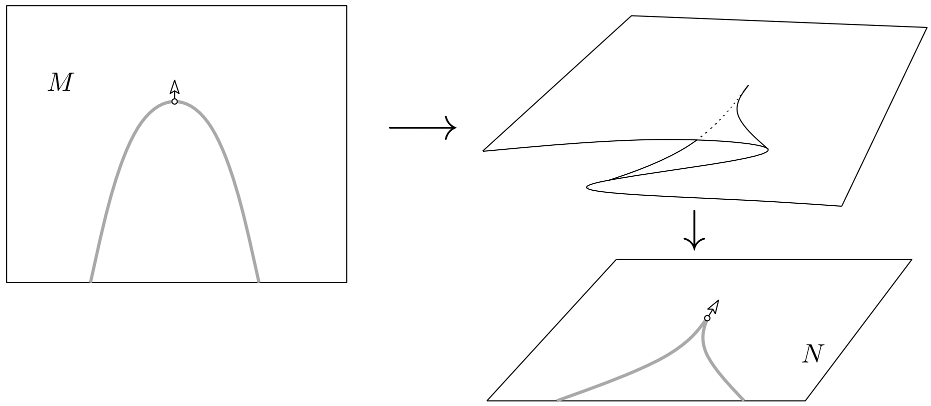

Рис. 1: Характеристический вектор сборки.

Теорема 2А. *Отображение $f : M \to N$ гомотопно общему отображению с множеством складок $C \setminus P$ и множеством сборок P (с заданными характеристическими векторами), если и только если выполнены следующие условия:*

A-1. $[C] = w_1(M) + f^*w_1(N)$;

A-2. $[P] = w_2(M) + f^*w_2(N)$;

A-3. если $[C] = 0$, *то* $\bigl|\chi(M_+) - \chi(M_-) - n_+ + n_-\bigr| = |\deg f \cdot \chi(N)|$.

Здесь $\deg f$ — степень отображения (возможно, неориентируемых) многообразий. Она определяется как степень индуцированного гомоморфизма в старших когомологиях с коэффициентами в ориентирующем пучке. Последний гомоморфизм определён, коль скоро $f^*w_1(N) = w_1(M)$. Поэтому если $[C] = 0$, то, ввиду условия А-1, степень $\deg f$ корректно определена.

Теорема 2А имеет следствие, являющееся ответом на вопрос §2 для $n = 2$.

Теорема 2В. *Общее отображение $M \to N$ с множеством складок $C \setminus P$ и множеством сборок P (с заданными характеристическими векторами) существует, если и только если выполнены следующие условия:*

B-1. $[P] = [C]^2$;

B-2. если $w_1(N) = 0$, *то* $[C] = w_1(M)$;

B-3. если $[C] = 0$, *то найдётся* $d \in \mathbb{Z}$, *такое что* $\bigl|\chi(M_+) - \chi(M_-) - n_+ + n_-\bigr| = |d \cdot \chi(N)|$ *и либо* $\chi(M) \le |d| \cdot \chi(N)$, *либо* $d = 0$; *при этом, если M ориентируемо и N неориентируемо, то d должно быть чётным;*

B-4. если $[C] \neq 0$, $w_1(M) \neq 0$ *и* $[C]^2 \neq w_2(M)$, *то* $w_2(N) \neq 0$ *и* $\chi(N) > \chi(M)$.

Эта теорема обобщает некоторые результаты работ [5], [6], [7] и [14], посвящённых комбинаторному описанию множества критических точек общего отображения между поверхностями. Доказательства Теорем 2В и 2А опубликованы автором в [9].

6 Следствия в размерности 3

Пусть теперь M, N — компактные трёхмерные многообразия без края. Тогда аналог Теоремы 2A будет выглядеть даже проще, поскольку векторные расслоения ранга 3 над M классифицируются своими классами Штифеля-Уитни.

Все особенности общих отображений $M \to N$ также мореновские. Это складки $\Sigma^{1,0}$, сборки $\Sigma^{1,1,0}$ и ласточкины хвосты $\Sigma^{1,1,1,0}$. Они стабильны, являются гладкими подмногообразиями и имеют размерности 2, 1 и 0, соответственно.

Возьмём произвольное непустое замкнутое 2-подмногообразие $S \subset M$, замкнутое 1-подмногообразие $C \subset S$ и дискретное подмножество $P \subset C$.

Теорема 3. *Непрерывное отображение $f : M \to N$ гомотопно общему отображению f', такому что $\Sigma^1(f') = S$, $\Sigma^{1,1}(f') = C$ и $\Sigma^{1,1,1}(f') = P$, если и только если выполнены следующие условия:*

- $[S] = w_1(M) + f^* w_1(N)$;
- $[C] = w_2(M) + w_1(M) \cdot f^* w_1(N)$;
- *для каждой компоненты $C' \subset C$ мы имеем $[C'] \cdot [S] \equiv |P \cap C'| \mod 2$.*

Последнее условие нужно, чтобы на $C \setminus P$ существовало поле характеристических векторов (образы которых будут направлены "наружу" относительно сборок). Более точно, если это условие выполнено, то таких полей существует ровно два. Общее отображение f' строится для каждого из них.

Заметим, что если указанное отображение f' существует, то из Теоремы 3 следует, что $[P] = [S] \cdot [C]$. Это, а также первые два условия Теоремы 3, согласуется с подсчётом полиномов Тома для мореновских особенностей (см., например, [17, стр. 204])

Доказать аналог Теоремы 2B для трёхмерных многообразий пока не удалось. Тем не менее, из Теоремы 3 можно легко вывести ряд фактов об общих отображениях с заданными особенностями для некоторых 3-многообразий. Например:

Следствие 1. *Пусть M, N — трёхмерные гомологические сферы. Тогда в гомотопическом классе любого отображения $M \to N$ существует общее отображение с любым наперёд заданным непустым подмногообразием складок и без других особенностей.*

Следствие 2. *Пусть M, N — произвольные замкнутые ориентируемые 3-многообразия, а $S \subset M$ — непустое подмногообразие коразмерности 1, гомологичное нулю. Тогда в гомотопическом классе любого отображения $M \to N$ найдётся общее отображение с множеством складок S и без других особенностей.*

Заключение

В работе мы исследовали вопрос существования отображения с заданными общими особенностями между многообразиями одинаковой размерности. В качестве ответа на него был доказан так называемый h-принцип (Теорема 1). Он позволяет гомотопировать произвольное отображение в отображение с заданными особенностями при условии изоморфности некоторых расслоений. Для размерностей 2 и 3 это условие было переформулировано в терминах когомологических классов множеств особых точек и характеристических классов многообразий (Теоремы 2А и 3).

Укажем некоторые направления обобщения полученных результатов.

Вопрос. *Можно ли доказать аналог Теоремы 1 для многообразий несовпадающей размерности, обобщающий соответствующую теорему из [20]?*

Вопрос. *Верна ли Теорема 1, если заменить в определении локально согласованного набора отображений локальную L-эквивалентность на локальную эквивалентность?*

Вопрос. *Существует ли комбинаторное описание скрученного касательного расслоения, аналогичное рассмотренному в доказательствах Теорем 2А и 3, в случае произвольной размерности?*

Вопрос. *Что можно сказать об общих отображениях с заданными критическими значениями? В каких терминах можно описывать инварианты множеств критических значений (хотя бы в размерности* 2*, см. [1], [15, §6])?*

Апробация работы

1. Доклад “Отображения поверхностей с заданным множеством критических точек” (г. Москва, НИУ ВШЭ, факультет математики, семинар «Комбинаторика инвариантов Васильева», май 2018)

2. Доклад “Eliashberg’s h-principle for maps with Thom-Boardman singularities” “h-принцип Элиашберга для отображений с особенностями Тома-Бордмана” (г. Москва, НИУ ВШЭ, факультет математики, МИАН, семинар по геометрической топологии, февраль 2019)

3. Доклад “Eliashberg’s h-principle for maps with Thom-Boardman singularities II” “h-принцип Элиашберга для отображений с особенностями Тома-Бордмана II” (г. Москва, НИУ ВШЭ, факультет математики, МИАН, семинар по геометрической топологии, февраль 2019)

4. Доклад “Отображения трёхмерных многообразий, имеющие заданные особенности Тома-Бордмана” (г. Москва, НИУ ВШЭ, факультет математики, МИАН, семинар по геометрической топологии, апрель 2019)

5. Доклад “Отображения трёхмерных многообразий, имеющие заданные особенности Тома-Бордмана” (г. Москва, НИУ ВШЭ, факультет математики, МИАН, семинар по геометрической топологии, май 2019)

6. Доклад “Отображения трёхмерных многообразий с заданными бордмановскими особенностями” (г. Москва, НИУ ВШЭ, факультат математики, МИАН, семинар по геометрической топологии, март 2020)

7. Доклад “h-Принцип и отображения с заданными особенностями” (г. Москва, НИУ ВШЭ, факультет математики, семинар «Комбинаторика инвариантов Васильева», июнь 2020)

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в двух статьях.

1. A. Ryabichev. *Eliashberg's h-principle and generic maps of surfaces with prescribed singular locus* // Topology and its Applications. 2020. № 276. 16 С.

2. Рябичев А. Д. *Отображения с заданными бордмановскими особенностями* // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 492. № 1. С. 62-64

Список литературы

[1] F. Aicardi, T. Ohmoto, First order local invariants of apparent contours. Topology 45 (2006), 27–45.

[2] Y. Ando, A homotopy principle for maps with prescribed Thom-Boardman singularities. Trans. Amer. Math. Soc., 359 (2007), 480–515.

[3] J. M. Boardman, Singularities of differentiable maps. IHES Publ. Math., 33 (1967), 21–57.

[4] M. Goresky, R. MacPherson, Stratified Morse theory. Springer-Verlag, 1988.

[5] D. Hacon, C. Mendes de Jesus, M. C. Romero Fuster, Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere. J. Singul. 2 (2010), 67–80.

[6] C. Mendes de Jesus, Graphs of stable maps between closed orientable surfaces. Comput. Appl. Math. 36 (2017), no. 3, 1185–1194

[7] C. Mendes de Jesus, M. C. Romero-Fuster, Graphs of stable maps from closed surfaces to the projective plane. Topology Appl. 234 (2018), 298–310.

[8] B. Morin, Formes canoniques des singularités d'une application différentiable. C. R. Acad. Sci. Paris, 260 (1965), 5662–5665.

[9] A. Ryabichev, Eliashberg's h-principle and generic maps of surfaces with prescribed singular locus. Topology and its Applications, vol. 276 (2020). DOI: 10.1016/j.topol.2020.107168

[10] A. Ryabichev, Maps of manifolds of the same dimension with prescribed Thom-Boardman singularities. arXiv:1810.10990

[11] H. Whitney, On singularities of mapping of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. Annals of Mathematics, vol. 62, no. 3, (1955), 374—410.

[12] H. Whitney, Tangents to an Analytic Variety. Ann. Math., 81, no. 3 (1965), 496–549.

[13] L. Wilson, Nonopenness of the set of Thom-Boardman maps. Pacific J. Math., 84, no. 1 (1979), 225–232.

[14] M. Yamamoto, The number of singular set components of fold maps between oriented surfaces. Houston J. Math. 35 (2009), no. 4, 1051–1069.

[15] T. Yamamoto, Apparent contours of stable maps between closed surfaces. Kodai Math J., vol. 40 (2017), 358–378.

[16] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, Особенности дифференцируемых отображений, Том 1, Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.

[17] В. И. Арнольд, В. А. Васильев, В. В. Горюнов, О. В. Ляшко, Особенности. I. Локальная и глобальная теория, Динамические системы – 6, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 6, ВИНИТИ, М., 1988, 5–250.

[18] А. Д. Рябичев, Отображения с заданными бордмановскими особенностями. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, Т. 492, № 1 (2020), 62-64. DOI: 10.31857/S2686954320030170

[19] Я. М. Элиашберг, Об особенностях типа складки. Изв. АН СССР. Сер. матем., 34:5 (1970), 1110–1126.

[20] Я. М. Элиашберг, Хирургия особенностей гладких отображений. Изв. АН СССР. Сер. матем., 36:6 (1972), 1321–1347.