Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение
высшего образования
“Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
Факультет математики

На правах рукописи

Рыбников Леонид Григорьевич

Геометрия и комбинаторика алгебр Годена

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ
на соискание ученой степени доктора математических наук

Москва 2021

Введение

Основным предметом исследования настоящей диссертации является анзац Бете в квантовой магнитной цепочке Годена. Основные результаты диссертацие лежат в следующих трех направлениях:

1. (Совместно с Б.Л.Фейгиным и Э.Френкелем) Доказательство полноты алгебраического анзаца Бете для модели Годена, в форме Фейгина-Френкеля.

2. (Совместно с А.Червовым и Г.Фальки) Классификация вырождений модели Годена. Представление компактификации Делиня-Мамфорда пространства модулей стабильных рациональных кривых с отмеченными точками как пространства параметров модели Годена.

3. (Совместно с И.Халачевой, Дж.Камницером и А.Виксом) Нумерация решений анзаца Бете в модели Годена при помощи кристаллов Каширы и комбинаторное описание монодромии этих решений.

Настоящее резюме является кратким обзором проведенных исследований. Введение к диссертации посвящено более детальному описанию результатов диссертации.

Благодарности

Большая часть идей данной диссертации выросла из задач, поставленных моими научными руководителями Эрнестом Борисовичем Винбергом и Борисом Львовичем Фейгиным, когда я был студентом. О модели Годена я впервые узнал от Александра Червова, и, во многом, именно благодаря ему я стал заниматься именно этим. Я очень благодарен ему за его заразительный энтузиазм и очень мотивирующие обсуждения. Первым предположение о связи анзаца Бете в модели Годена с кристаллами Каширы сделал Павел Этингоф, во время нашего десятиминутного разговора в MIT. Мне кажется, важнейшее продвижение в описании монодромии решений анзаца Бете было сделано в эти 10 минут! Я хочу поблагодарить всех соавторов работ, составляющих эту диссертацию, особенно Джоэля Камницера, благодаря которому я знаю все что знаю о кристаллах Каширы.

1 Модель Годена и родственные ей интегрируемые системы

Модель Годена впервые рассмотрена М. Годеном в [G76] как вырождение магнитной цепочки XXX Гейзенберга связанной с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}_2$. Она обобщена на произвольную полупростую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ в [G83], 13.2.2 и алгебраически описывается следующим образом. Пусть V_λ – неприводимое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со старшим весом λ.

Для любого набора доминантных целочисленных весов $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ положим $V_{\underline{\lambda}} = V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n}$. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ рассмотрим оператор $x^{(i)} = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes x \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ (x находится на i-м месте), действующий в пространстве $V_{\underline{\lambda}}$. Пусть $\{x_a\},\ a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}$ – ортонормированный базис в $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга и пусть $z_1, \ldots, z_n$ – попарно различные комплексные числа. Гамильтонианами модели Годена служат следующие коммутирующие операторы в пространстве $V_{\underline{\lambda}}$:

$$H_i = \sum_{k \neq i} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \frac{x_a^{(i)} x_a^{(k)}}{z_i - z_k}. \tag{1}$$

Мы можем рассматривать операторы H_i универсально, как $\mathfrak{g}$-инвариантные элементы алгебры $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$. В классической работе [FFR] Фейгин, Френкель и Решетихин построили максимальную коммутативную подалгебру $\mathcal{A}(\underline{z})$ в алгебре инвариантов в тензорной степени универсальной обертывающей алгебры $[U(\mathfrak{g})^{\otimes n}]^{\mathfrak{g}}$, зависящую от набора точек на прямой $\underline{z} = (z_1, \ldots z_n)$ и содержащую квадратичные элементы H_i.

Алгебра $\mathcal{A}(\underline{z})$ называется *алгеброй Годена*. Если понимать алгебру $U(\mathfrak{g})$ как алгебру глобальных (скрученных) дифференциальных операторов на пространстве флагов G/B, то $[U(\mathfrak{g})^{\otimes n}]^{\mathfrak{g}}$ – это алгебра дифференциальных операторов на пространстве модулей $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{P}^1)_{\underline{z}}$ главных G-расслоений на проективной прямой с B-структурой в точках $z_1, \ldots, z_n, \infty$. Модель Годена можно рассматривать как соответствующую систему Хитчина. Соответственно, коммутативная подалгебра $\mathcal{A}(\underline{z})$ порождена всеми квантовыми интегралами этой системы.

Классический аналог этой коммутативной подалгебры порожден классическими интегралами системы Хитчина на рациональной кривой с отмеченными точками $z_1, \ldots, z_n, \infty$. Эта подалгебра может быть получена при помощи процедуры Ленарда-Магри из пары согласованных скобок Пуассона. В работе [R08], являющейся частью данной диссертации, показано, что квантование этих классических интегралов (в любом разумном смысле) единственно. В работе [R06] было замечено, что эта пара согласованных скобок Пуассона может быть вырождена так, чтобы соответствующая пуассоново-коммутативная подалгебра становится подалгеброй *сдвига аргумента*, порожденной интегралами волчка Эйлера-Манакова [Ma]. Подалгебры сдвига аргумента были введены Мищенко и Фоменко в [MF] и изучались Винбергом [Vin], Шуваловым [Sh], Тарасовым [Tar], Панюшевым и Якимовой [PY]. Наблюдение, что подалгебры сдвига аргумента являются предельными случаями подалгебр Годена, важно по двум причинам: с одной стороны, это решает задачу квантования подалгебр свига аргумента, поставленную Винбергом [Vin] (это показано в [R06]), а с другой стороны, это упрощает задачу комбинаторной нумерации решений анзаца Бете в модели Годена (это показано в работе [HKRW], являющейся частью данной диссертации). Более того, это дает более общее семейство коммутативных подалгебр $\mathcal{A}_\chi(\underline{z}) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ (так называемых неоднородных алгебр Годена, см. [R06, FFT, FMTV]), описывающих магнитную цепочку Годена с внешним магнитным полем, зависящих от дополнительного параметра $\chi \in \mathfrak{g}^*$, которое содержит как обычные алгебры Годена, так и алгебры сдвига аргумента в качестве частных случаев. Это более общее семейство подалгебр играет ключевую роль в доказательстве полноты анзаца Бете [FFR10] и в установлении связи анзаца Бете с кристаллами Кашивары [HKRW].

2 Анзац Бете

Центральной задачей в модели Годена является проблема одновременной диагонализации квантовых (высших) законов сохранения. Этой проблеме посвящено большое количество исследований (см. [Fr95, Fr05, Fr05', Fr04, FFR, MTV, MTV']). Основным методом решения этой задачи является алгебраический *анзац Бете*, состоящий в том, чтобы искать собственные векторы предписанного вида, зависящего от вспомогательных параметров, и написать алгебраические соотношения на эти параметры, гарантирующие, что вектор будет собственным для гамильтонианов модели Годена. Анзац Бете называется *полным*, если таким способом получаются все собственные векторы. В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, форма анзаца Бете для собственных векторов была описана еще Годеном [G83]. А именно, рассмотрим векторы Бете

$$v(w_1, \ldots, w_m) = f(w_1) \ldots f(w_m) v_\lambda \in \otimes_{i=1}^n V_{\lambda_i},$$

где

$$f(w) = \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}}{w - z_i}.$$

Вектор $v = v(w_1, \ldots, w_m)$ является собственным для операторов H_i если и только если выполнены следующие *уравнения анзаца Бете*:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{w_j - z_i} - \sum_{s \neq j} \frac{2}{w_j - w_s} = 0, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ форма анзаца Бете была впервые написана Бабуджяном и Флюмом в [BF] и интерпретирована Фейгиным, Френкелем и Решетихиным [FFR] следующим образом. Согласно Бейлинсону и Дринфельду, [BD], квантовые интегралы системы Хитчина приходят из центра универсальной обертывающей алгебры соответствующей аффинной алгебры Каца-Муди на критическом уровне. Этот центр естественным образом отождествляется с классической W-алгеброй, построенной по двойственной по Ленглендсу алгебре Ли ${}^L\mathfrak{g}$, поэтому спектр этой алгебры естественным образомявляется пространством ${}^L\mathfrak{g}$-оперов (т.е. связностей в главном ${}^LG$-расслоении с некоторым условием трансверсальности) на формальном проколотом диске. Соответственно, спектр квантовых интегралов системы Хитчина дается глобальными ${}^L\mathfrak{g}$-операми на соответствующей кривой с предписанными особенностями в отмеченных точках. Уравнения анзаца Бете интерпретируются как условия существования миуровской структуры на опере, при этом вспомогательные параметры являются координатами точек, где эта миуровская структура вырождается. Иначе говоря, совместные собственные значения гамильтонианов Годена соответствуют безмонодромным операм на проективной прямой с предписанными особенностями в отмеченных точках, а полнота анзаца Бете равносильна тому, что это соответствие взаимно однозначно. Точная формулировка и доказательство этого утверждения для модели Годена даны в работах [FFR10, R20], входящих в данную диссертацию. Это утверждение известно как *гипотеза Анзаца Бете* в форме Фейгина-Френкеля.

Другая геометрическая интерпретация анзаца Бете, развитая Мухиным, Тарасовым и Варченко, работает с исчислением Шуберта на грассманианах, см. [MTV, MTV'], и также приводит к доказательству полноты анзаца Бете для алгебр Ли типа A. Связь этого подхода с подходом [FFR] объясняется в [Fr04].

3 Пространство параметров модели Годена

Интерпретация модели Годена как системы Хитчина подсказывает обобщение этой модели на нодальные кривые с отмеченными точками. В работах [CFR09, CFR10, R18], входящих в данную диссертацию, мы описываем семейство моделей Годена, зависящих от точки компактификации Деліня-Мамфорда $\overline{M_{0,n+1}}$ пространства модулей стабильных рациональных кривых с $n+1$ отмеченными точками (являющимися точками $z_1, \ldots, z_n, \infty$ для обычной модели Годена). Это обобщает результат Агирре, Фельдера и Веселова [AFV], расширяющий пространство параметров семейства квадратичных гамильтонианов Годена до пространства Деліня-Мамфорда. Полнота анзаца Бете, доказанная в [FFR10, R20], гарантирует, что когда параметр $\underline{z} \in \overline{M_{0,n+1}}$ вещественен, алгебра Годена действует с простым спектром на любом просрансстве кратностей в тензорном произведении неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Аналогичным образом, пространство параметров для подалгебр сдвига аргумента компактифицируется как чудесное замыкание Де Кончини – Прочези [DCP] дополнения до набора корневых гиперплоскостей в картановской подалгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Это показано нами в [HKRW].

4 Кристаллы Кашивары и коммуторы

Алгебры Годена зависят от параметра, лежащего в пространстве Деліня-Мамфорда $\overline{M_{0,n+1}}$ модулей стабильных кривых рода 0, а собственные векторы для гамильтонианов Годена даются некоторыми многозначными функциями на пространстве $\overline{M_{0,n+1}}$, неразветвленными над вещественной частью $\overline{M_{0,n+1}}(\mathbb{R})$ этого пространства модулей. Поэтому, естественным вопросом является изучение монодромии этих собственных векторов вдоль этой вещественной части; это дает действие соответствующей фундаментальной группы, называемой *кактусной группой* J_n (см. [D, DJS]), на конечном множестве собственных прямых для гамильтонианов Годена в пространстве состояний $V_{\underline{\lambda}}$.

Группа J_n является аналогом группы кос для *кограничных* моноидальных категорий, см. [HK1, Sa]. *Кограничной категорией* называется моноидальная категория $\mathcal{C}$, снабженная естественным изоморфизмом, называемым *коммутором*

$$\sigma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$$

удовлетворяющем следующим аксиомам.

1. Для любых $A, B \in \mathcal{C}$ выполнено $\sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = id_{A \otimes B}$
2. Для любых $A, B, C \in \mathcal{C}$ имеем $\sigma_{A,B\otimes C} \circ (id \otimes \sigma_{B,C}) = \sigma_{A\otimes B,C} \circ (\sigma_{A,B} \otimes id)$.

Всевозможные коммуторы на n-кратном тензорном произведении $X_1 \otimes \ldots \otimes X_n$ в кограничной категории $\mathcal{C}$ задают действие группы J_n.

Основным примером кограничной моноидальной категории является категория $\mathfrak{g}$-кристаллов Кашивары (т.е. комбинаторная версия категории конечномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Более точно, каждому неприводимому представлению V_λ можно поставить в соответствие ориентированный граф B_λ, называемый нормальным кристаллом со старшим весом λ, вершины которого соответствуют базисным векторам и размечены весами представления V_λ, а ребра соответствуют действию образующих Шевалле и размечены простыми корнями алгебры Ли $\mathfrak{g}$, с чисто комбинаторным правилом тензорного умножения. В работе [HKRW] мы доказываем гипотезу Павла Этингофа, утверждающую, что существует биекция между множеством собственных векторов гамильтонианов Годена в пространстве $V_{\underline{\lambda}}$ и тензорным произведением $\mathfrak{g}$-кристаллов $B_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes B_{\lambda_n}$, согласованная с действием кактусной группы J_n (для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ это сделано в работе [R18]). Фактически, мы доказываем, что кограничная категория нормальных $\mathfrak{g}$-кристаллов может быть построена при помощи накрытий пространств модулей, дающихся собственными векторами гамильтонианов Годена. Нашим основным инструментом является конструкция структуры кристалла на множестве собственных векторов для алгебры сдвига аргумента, другого семейства коммутативных алгебр, действующих на неприводимом представлении алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Мы также доказываем, что монодромия таких собственных векторов дается действием *внутренней* кактусной группы на $\mathfrak{g}$-кристаллах (в типе A это совпадает с действием кактусной группы на многограннике Гельфанда-Цетлина, описанном Беренштейном и Кирилловым в [BK]). Это дает (насколько возможно, полную) комбинаторную нумерацию решений анзаца Бете в модели Годена. Это также обобщает результаты Уайта [W] (см. также [BGW]) и, также, должно быть связано с конструкцией клеток Калоджеро-Мозера, принадлежащей Боннафе и Рукье [BR]. Возможное обобщение этих результатов на магнитную цепочку XXX Гейзенберга должно дать новое объяснение нумерации Кириллова–Решетихина решений анзаца Бете [KR].

5 Модель Годена и связность Книжника-Замолодчикова

Квадратичные гамильтонианы Годена возникают как коэффициенты плоской связности *Книжника-Замолодчикова* в тривиальном расслоении на пространстве конфигураций $\mathbb{C}^n \setminus \{z_i = z_j\}$ со слоем $V_{\underline{\lambda}}$:

$$\nabla = d + \frac{1}{\varkappa}\sum_{i=1}^{n} H_i dz_i.$$

Более точно, модель Годена можно рассматривать как предел связности Книжника-Замолодчикова при $\varkappa \to 0$. Векторы Бете в этом случае являются лидирующими членами в асимптотических плоских сечениях, изучавшихся Варченко [Var]. Асимптотические зоны для связности Книжника-Замолодчикова являются компонентами открытого страта на $\overline{M_{0,n+1}}(\mathbb{R})$, а действие кактусной группы J_n на векторах Бете происходит из перестроек асимптотик при пересечении границ между асимпе=тотическими зонами.

Соответствие Дринфельда-Коно дает естественный изоморфизм между пространством плоских сечений относительно связности Книжника-Замолодчикова и тензорным произведением соответствующих представлений $V_{\underline{\lambda}}^q = V_{\lambda_1}^q \otimes \dots \otimes V_{\lambda_n}^q$ $U_q(\mathfrak{g})$, где $q = \exp(\frac{\pi i}{\varkappa})$, согласованный с действием группы кос (монодромией на стороне связности Книжника-Замолодчикова, и с помощью R-матриц на стороне U_q).

Тензорное произведение кристаллов $B_{\underline{\lambda}}$ возникает как предел кристальных базисов в пространстве $V_{\underline{\lambda}}^q$ при $q \to \infty$, а действие унитаризованных R-матриц на кристальных базисах дает действие группы J_n на тензорном произведении кристаллов, происходящее из структуры когранической категории. Более того, согласно [Var], в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ асимптотические плоские сечения переходят в некоторый кристальный базис поредством соответствия Дринфельда-Коно. Таким образом, гипотезу Этингофа, доказанную в [HKRW], можно рассматривать какпредел соответствия Дринфельда-Коно при $\varkappa \to 0$ и $q \to \infty$. В работе [R18] мы подробно объясняем этот подход и доказываем гипотезу Этингофа для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ посредством взятия предела $\varkappa \to 0$, $q \to \infty$ и применения результатов Варченко [Var].

6 Основные результаты диссертации

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. В статье [R08] доказано, что существует единственная коммутативная подалгебра $\mathcal{A} \subset U(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$, образ которой при гомоморфизме специализации в точках $z_1, \dots, z_n$ является подалгеброй Годена $\mathcal{A}(\underline{z})$. В

частности, это означает, что явные формулы для высших гамильтонианов Годена, известные для классических алгебр Ли (см. [Tal, CM]) дают те же коммутативные подалгебры, что и общий рецепт Фейгина-Френкеля-Решетихина [FFR].

2. В статьях [FFR10, R20] показано, что совместные собственные значения (высших) гамильтонианов модели Годена в пространстве $V_{\underline{\lambda}}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с ${}^L\mathfrak{g}$-операми на проективной прямой с предписанными особенностями в точках $z_1, \ldots, z_n, \infty$. Более точно, в [FFR10] это сделано для неоднородной версии модели Годена (т.е. модели Годена с внешним магнитным полем), что оказывается проще, а в [R20] из этого выводится утверждение для обычной модели Годена. Более того, для вещественных значений параметров z_i (а следовательно, для общих значений параметров z_i) эти собственные значения не имеют кратностей. Это и есть гипотеза анзаца Бете в форме Фейгина-Френкеля.

3. В статьях [CFR09, CFR10, R18] показано, что семейство алгебр Годена продолжается на замыкание Делиня-Мамфорда $\overline{M_{0,n+1}}$ и что результаты [FFR10, R20] о простоте спектра сохраняются и для алгебр Годена, соответствующих граничным точкам простарнства $\overline{M_{0,n+1}}$. Это позволяет рассматривать векторы Бете в модели Годена как накрытие над пространством $\overline{M_{0,n+1}}$, неразветвленное над его вещественной частью.

4. В статье [HKRW] решена аналогичная задача компактификации пространства параметров для подалгебр сдвига аргумента, причем в качестве ответа получается чудесная компактификация Де Кончини-Прочези.

5. В статьях [R18, HKRW] доказана гипотеза Этингофа о монодромии векторов Бете. А именно, построена естественная структура тензорного произведения кристаллов Кашивары на множестве собственных векторов (неоднородной) алгебры Годена в пространстве $V_{\underline{\lambda}}$. Отсюда следует, что монодромия векторов Бете вдоль пространства $\overline{M_{0,n+1}(\mathbb{R})}$ дается кристаллическими коммуторами.

7 Организация текста диссертации

Диссертация состоит из введения, списка литературы и следующих статей:

1. L. Rybnikov, *Uniqueness of higher Gaudin hamiltonians (Единственность высших гамильтонианов Годена)*, Reports on Mathematical Physics **61** (2008) No 2, pp. 247-252. [R08]

2. A. Chervov, G. Falqui, L. Rybnikov, *Limits of Gaudin Systems: Classical and Quantum Cases (Пределы систем Годена: классический и кванто-*

вый случаи), SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **5** (2009), 029 [CFR09]

3. B. Feigin, E. Frenkel, L. Rybnikov, *Opers with irregular singularity and spectra of the shift of argument subalgebra (Оперы с иррегулярной особенностью и спектры подалгебр сдвига аргумента)*, Duke Mathematical Journal **155** (2010), No 2, pp. 337-363. [FFR10]

4. A. Chervov, G. Falqui, L. Rybnikov, *Limits of Gaudin algebras, quantization of bending flows, Jucys–Murphy elements and Gelfand–Tsetlin bases (Пределы алгебр Годена, квантование изгибающих потоков, элементы Юциса-Мерфи и базисы Гельфанда-Цетлина)*, Letters in mathematical physics **91** (2010), No 2, pp. 129-150. [CFR10]

5. L. Rybnikov, *Cactus group and monodromy of Bethe vectors (Кактусная группа и монодромия векторов Бете)*, International Mathematics Research Notices **2018** No 1, pp. 202-235. [R18]

6. L. Rybnikov, *A proof of the Gaudin Bethe Ansatz conjecture (Доказательство гипотезы Анзаца Бете в модели Годена)*, International Mathematics Research Notices **2020** No 22, pp. 8766-8785. [R20]

7. I Halacheva, J Kamnitzer, L Rybnikov, A Weekes, *Crystals and monodromy of Bethe vectors (Кристаллы и монодромия векторов Бете)*, Duke Mathematical Journal **169** (2020) No 12, pp. 2337-2419. [HKRW]

Введение устроено следующим образом. В разделе 1 вводятся алгебры Годена и объясняется, как они помогают строить интегралы квантовых гамильтоновых систем. В разделе 2 формулируется гипотеза об анзаце Бете в модели Годена в форме Фейгина–Френкеля и объясняются идеи ее доказательства, следуя статьям [FFR10, R20]. В разделе 3 мы обсуждаем процедуру компактификации пространства параметров для алгебр Годена и распространяем гипотезу анзаца Бете на эту компактификацию, следуя [CFR09, CFR10, R18]. В разделе 4 мы описываем монодромию решений анзаца Бете вдоль компактифицированного пространства параметров, следуя [HKRW]. В разделе 5 мы намечаем некоторые направления дальнейшего развития результатов [HKRW].

Список литературы

[AFV] Aguirre, Leonardo; Felder, Giovanni; Veselov, Alexander P. *Gaudin subalgebras and stable rational curves.* Compos. Math. 147 (2011), no. 5, 1463–1478.

[BD] A. Beilinson and V. Drinfeld, *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigen-sheaves*, Preprint, available at

http://www.math.uchicago.edu/∼drinfeld/langlands/QuantizationHitchin.pdf
.

[BF] H.M. Babujian, R. Flume, *Off-Shell Bethe Ansatz Equation for Gaudin Magnets and Solutions of Knizhnik-Zamolodchikov Equations*, Modern Physics Letters A, Vol. 09, No. 22, pp. 2029-2039 (1994)

[BGW] Adrien Brochier, Iain Gordon, Noah White, *Gaudin Algebras, RSK and Calogero-Moser Cells in Type A*. arXiv:2012.10177 [math.RT]

[BK] Kirillov, A. N.; Berenstein, A. D. *Groups generated by involutions, Gelfand-Tsetlin patterns, and combinatorics of Young tableaux.* Algebra i Analiz 7 (1995), no. 1, 92–152; translation in St. Petersburg Math. J. 7 (1996), no. 1, 77–127

[BR] C. Bonnafé, and R. Rouquier, Cellules de Calogero-Moser, Preprint arXiv:1302.2720.

[CFR09] Chervov, Alexander; Falqui, Gregorio; Rybnikov, Leonid. *Limits of Gaudin systems: classical and quantum cases*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA). 2009. Vol. 5. No. 29. P. 17.

[CFR10] Chervov, Alexander; Falqui, Gregorio; Rybnikov, Leonid. *Limits of Gaudin algebras, quantization of bending flows, Jucys-Murphy elements and Gelfand-Tsetlin bases.* Lett. Math. Phys. 91 (2010), no. 2, 129–150.

[CM] A. V. Chervov, A. I. Molev, *On Higher-Order Sugawara Operators*, International Mathematics Research Notices, Volume 2009, Issue 9, 2009, Pages 1612–1635

[DCP] Corrado De Concini, Claudio Procesi, *Wonderful models of subspace arrangements*, Selecta Math. (N.S.) 1 (1995), no. 3, 459–494.

[D] Devadoss, Satyan L. *Tessellations of moduli spaces and the mosaic operad.* Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998), 91–114, Contemp. Math., 239, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[DJS] Davis, M.; Januszkiewicz, T.; Scott, R. *Fundamental groups of blow-ups.* Adv. Math. 177 (2003), no. 1, 115–179.

[Fr95] E. Frenkel, *Affine Algebras, Langlands Duality and Bethe Ansatz*, in XIth International Congress of Mathematical Physics (Paris, 1994), pp. 606–642, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995. q-alg/9506003

[Fr04] E. Frenkel, *Opers on the projective line, flag manifolds and Bethe ansatz*, MOSCOW MATHEMATICAL JOURNAL Volume 4, Number 3, July–September 2004, Pages 655–705

[Fr05] E. Frenkel, *Lectures on Wakimoto modules, opers and the center at the critical level*, Adv. Math. **195** (2005) 297–404 (math.QA/0210029).

[Fr05'] E. Frenkel, *Gaudin model and opers*, in Infinite dimensional algebras and quantum integrable systems, Progress in Math. **237**, pp. 1–58, Birkhäuser, Basel, 2005 (math.QA/0407524).

[Fr07] E. Frenkel, *Langlands Correspondence for Loop Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **103**, Cambridge University Press, 2007.

[FFR] B. Feigin, E. Frenkel, N. Reshetikhin, *Gaudin model, Bethe Ansatz and critical level.* Comm. Math. Phys., 166 (1994), pp. 27-62.

[FFR10] B. Feigin, E. Frenkel, and L. Rybnikov, *Opers with irregular singularity and spectra of the shift of argument subalgebra*, Duke Math. J. **155** (2010), no. 2, 337–363. ArXiv math.QA/0712.1183.

[FFT] B. Feigin, E. Frenkel and V. Toledano Laredo, *Gaudin model with irregular singularities*, Preprint math.QA/0612798.

[FMTV] G. Felder, Y. Markov, V. Tarasov, and A. Varchenko, *Differential equations compatible with KZ equations*, Math. Phys. Analysis and Geom. **3** (2000), no. 2, 139–177.

[G76] M. Gaudin, *Diagonalisation d'une classe d'hamiltoniens de spin*, J. de Physique, t.37, N 10, p. 1087–1098, 1976.

[G83] M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe.* (French) [The Bethe wave function] Collection du Commissariat a' l'E'nergie Atomique: Se'rie Scientifique. [Collection of the Atomic Energy Commission: Science Series] Masson, Paris, 1983. xvi+331 pp.

[HK1] Henriques, André; Kamnitzer, Joel. *Crystals and coboundary categories.* Duke Math. J. 132 (2006), no. 2, 191–216.

[HKRW] Halacheva I., Kamnitzer J., Rybnikov L., Weekes A. *Crystals and monodromy of Bethe vectors*, Duke Mathematical Journal. 2020. Vol. 169. No. 12. P. 2337-2419.

[KR] A. N. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin, *Bethe ansatz and combinatorics of Young tableaux*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1986, Volume 155, Pages 65–115

[KT] Kamnitzer, Joel; Tingley, Peter. *The crystal commutor and Drinfeld's unitarized R-matrix.* J. Algebraic Combin. 29 (2009), no. 3, 315–335.

[Ma] S.V. Manakov, *Note on the integration of Euler's equations of the dynamics of an n-dimensional rigid body*, Funct. Anal. Appl. **10** (1976) 328–329.

[MF] A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko, *Euler equations on finite-dimensional Lie groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 42:2 (1978), 396–415; Math. USSR-Izv., 12:2 (1978), 371–389

[MTV] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *The B. and M. Shapiro conjecture in real algebraic geometry and the Bethe ansatz*, Ann. Math. Volume 170 (2009), Issue 2, pp. 863-881, arXiv:math/0512299

[MTV'] E. Mukhin, V. Tarasov, and A. Varchenko, *Schubert calculus and representations of the general linear group.* J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 4, 909–940. arXiv:0711.4079

[PY] Dmitri I. Panyushev, Oksana S. Yakimova, *The argument shift method and maximal commutative subalgebras of Poisson algebras*, Mathematical Research Letters **15** (2008), No 2, pp. 239 - 249.

[R06] L. Rybnikov, *Argument shift method and Gaudin model*, Func. Anal. Appl. **40** (2006), No. 3, translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya **40** (2006), No. 3, pp. 30–43 (math.RT/0606380).

[R08] Leonid Rybnikov, *Uniqueness of higher Gaudin hamiltonians.* Reports on Mathematical Physics. 2008. Vol. 61. No. 2. P. 247-252. arXiv:math/0608588.

[R18] Leonid Rybnikov, *Cactus group and monodromy of Bethe vectors.* International Mathematics Research Notices. 2018. No. 1. P. 202-235. arXiv:1409.0131.

[R20] L. Rybnikov, *A proof of the Gaudin Bethe ansatz conjecture*, International Mathematics Research Notices, online at 25 October 2018, https://doi.org/10.1093/imrn/rny245

[Sa] Savage, Alistair. *Braided and coboundary monoidal categories.* Algebras, representations and applications, 229–251, Contemp. Math., 483, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[Sh] V.V. Shuvalov, *On limits of Mishchenko-Fomenko subalgebras in Poisson algebras of semisimple Lie algebras* (Russian), Funk. Anal. i Pril. **36** (2002), no. 4, 55–64; translation in Funct. Anal. Appl. **36** (2002), no. 4, 298–305.

[Sp] D. Speyer, *Schubert problems with respect to oscillating flags of stable rational curves*, Alg. Geom. **1** (2014), no. 1, 14–45.

[Tal] Talalaev, D. *Quantization of the Gaudin system*, Preprint hep-th/0404153.

[Tar] A.A. Tarasov, *The maximality of some commutative subalgebras in Poisson algebras of semisimple Lie algebras* (Russian), Uspekhi Mat. Nauk **57** (2002), no. 5 (347), 165–166; translation in Russian Math. Surveys **57** (2002), no. 5, 1013–1014.

[Var] Varchenko, A. N. *Asymptotic solutions to the Knizhnik-Zamolodchikov equation and crystal base.* Comm. Math. Phys. 171 (1995), no. 1, 99–137.

[Vin] E. B. Vinberg, *On some commutative subalgebras in universal enveloping algebra*, Izv. AN USSR, Ser. Mat., 1990, vol. 54 N 1 pp 3-25.

[W] N. White, *The monodromy of real Bethe vectors for the Gaudin model*, Preprint arXiv:1511.04740.