

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования “Национальный  
исследовательский университет “Высшая Школа Экономики””

Факультет математики

*на правах рукописи*

Михаил Семёнович Тёмкин

## Разложение Брюа в теории Морса

Резюме диссертации  
на соискание ученой степени  
кандидата математических наук

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент  
П.Е. Пушкарь

Москва – 2022

## 1. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА

В этой секции мы вводим некоторый набор данных, называемый Б-набором, который будет служить контейнером, хранящим информацию о функции Морса. Сам процесс извлечения этой информации дан в Подсекции 2.2. Буква Б сокращает одновременно слова Баранников, Брюа и баркод.

**Определение 1.1.** Матрица размера  $n \times t$  называется *ладейной*, если у неё в каждой строке и каждом столбце не более одного ненулевого элемента.

Б-набор состоит из следующих частей:

- i) Неотрицательное целое  $N$  вместе с  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуировкой на множестве  $\{1, \dots, N\}$ , обозначаемой через  $\deg$ ;
- ii) Разложение  $\{1, \dots, N\}$  в объединение трёх дизъюнктивных подмножеств  $U, L, H$  (эти буквы сокращают слова верхний (upper), нижний (lower) и гомологический (homological), причины объяснены ниже);
- iii) Биекция  $b: U \xrightarrow{1-1} L$  степени  $-1$  относительно градуировки. Отображение  $b$  обязано удовлетворять условию  $b(s) < s$ ;
- iv) Функция  $\lambda: U \rightarrow \mathbb{F}^*$ , где  $\mathbb{F}$  — поле.

Мы называем образ  $\lambda$  “числами Брюа”. Говорят, что два числа  $s$  и  $b(s)$  образуют пару Баранникова (или просто пару). Удобно думать, что каждое число Брюа “приписано” своей паре Баранникова. Грубо говоря, Б-набор есть разложение некоторого подмножества  $\{1, \dots, N\}$  в пары Баранникова (остальные элементы гомологические). Каждая пара состоит из верхнего элемента, нижнего элемента и несёт число Брюа. Другими словами, Б-набор — это градуировка на  $\{1, \dots, N\}$  вместе с конечной последовательностью ладейных матриц  $\{R_k\}$  над  $\mathbb{F}$  (см. Определение 1.1), где  $R_k$  имеет размер  $(\#\{s \mid \deg s = k - 1\}) \times (\#\{s \mid \deg s = k\})$  и  $R_{k-1}R_k = 0$ .

На Рисунке 1 мы даём пример Б-набора над  $\mathbb{Q}$ , а также описываем графический формат, используемый в дальнейшем. Элементы множества  $\{1, \dots, N\}$  изображены точками, снизу вверх, пары соответствуют отрезкам. Либо слева, либо справа от середины отрезка мы пишем число Брюа. Степень элемента написана либо сверху, либо снизу от элемента, как представляется более удобным. На примере из рисунка  $N = 8$ , степень 1 равна 0, степень 2, 3, 4 and 6 равна 1, а степень 5, 7, 8 равна 2. Далее,  $U = \{4, 5, 7, 8\}$ ,  $L = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  $H = \emptyset$ . Числа Брюа равны 6, 3, 2, 4 (это значения  $\lambda$  на 4, 5, 7, 8 соответственно). Отображение  $b$  определено с помощью отрезков. Наконец, два ладейные матрицы выглядят как

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Конструкция 1.2.** Пусть  $R$  — ладейная  $n \times t$  матрица. Определим подмножество  $\mathcal{T}(R)$  множества  $\text{Mat}_{n,m}$  всех  $n \times t$  матриц.

▷ Пусть  $M \in \text{Mat}_{n,m}$  — матрица. Будем говорить, что ее элемент  $M_{i,j}$  покрыт если существует пара индексов  $(i', j')$  такая, что выполняются следующие два условия:

- 1)  $R_{i',j'} \neq 0$ ,

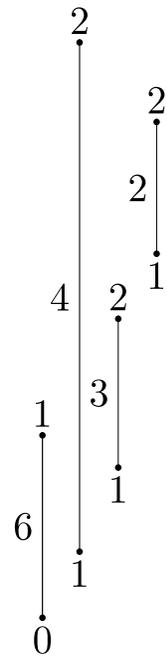


Рис. 1

2)  $(i < i' \text{ И } j \geq j')$  ИЛИ  $(i \leq i' \text{ И } j > j')$ .

По определению, матрица  $M$  принадлежит  $\mathcal{T}(R)$ , если выполнены следующие два условия:

- 1) если элемент  $M_{i,j}$  не покрыт и  $R_{i,j} = 0$ , тогда этот элемент равен нулю,
- 2) если элемент  $M_{i,j}$  не покрыт  $R_{i,j} \neq 0$ , тогда  $M_{i,j} = R_{i,j}$ .  $\triangleleft$

Приведем пример, для  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ , матрицы  $R$  и общего вида матрицы  $M$  из set  $\mathcal{T}(R)$ :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 2 & * \end{pmatrix}.$$

## 2. ТЕОРИЯ МОРСА

2.1. *Предварительные сведения.* В этой подсекции мы напомним базовые понятия теории Морса и фиксируем некоторые обозначения, подготавливая почву для результатов.

Пусть  $M$  — гладкое замкнутое многообразие, зафиксированное раз и навсегда. Гладкая функция называется строгой, если все критические точки имеют различные критические значения. Зафиксируем строгую функцию Морса  $f$  на  $M$  раз и навсегда. Для числа  $a \in \mathbb{R}$  подпространство  $M^a := \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$  называется множеством меньших значений.

Множество критических точек  $f$  обозначается  $\text{Cr}(f) \subset M$ . Т.к.  $f$  строгая, это множество находится в биекции с критическими значениями  $f$  (это множество конечно ввиду компактности  $M$ ). Учитывая эту биекцию, мы будем считать, что точки и значения взаимозаменяемы. Через  $\text{Cr}_k(f)$  мы обозначаем множество критических точек индекса  $k$ . Под  $\varepsilon$  мы будем подразумевать достаточно маленькое положительное вещественное число.

Из основополагающих результатов теории Морса следует, что для  $c \in \text{Cr}(f)$  мы имеем  $\mathbf{H}_{\deg c}(M^{f(c)+\varepsilon}, M^{f(c)-\varepsilon}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ . Будем говорить, что критическая точка ориентированна, если выбрана образующая этой свободной абелевой группы ранга один. Строгая функция Морса называется ориентированной, если все ее критические точки ориентированны.

Зафиксируем поле  $\mathbb{F}$  раз и навсегда. Все гомологии берутся над  $\mathbb{F}$ , если не оговорено противное. Если группа коэффициентов дана явно, она идёт после точки с запятой, например  $\mathbf{H}_2(M; \mathbb{Z})$ .

2.2. *Б-набор, ассоциированный со строгой функцией Морса.* В этой подсекции мы описываем способ, как сопоставить Б-набор ориентированной строгой функции Морса (и полю).

Пусть  $x$  и  $y$  — две критические точки такие, что  $f(x) > f(y)$  и  $\text{ind } x - 1 = \text{ind } y = k$ . Рассмотрим фундаментальный класс приклеивающей сферы для  $x$ , он живёт в  $\mathbf{H}_k(M^{f(x)-\varepsilon})$ . Пусть  $X$  — его образ под действием естественного отображения  $\mathbf{H}_k(M^{f(x)-\varepsilon}) \rightarrow \mathbf{H}_k(M^{f(x)-\varepsilon}, M^{f(y)-\varepsilon})$ . Рассмотрим теперь приклеивающий диск для  $y$ . У него имеется относительный фундаментальный класс, который живёт в  $\mathbf{H}_k(M^{f(y)+\varepsilon}, M^{f(y)-\varepsilon})$ . Пусть  $Y$  — его образ под действием естественного отображения  $\mathbf{H}_k(M^{f(y)+\varepsilon}, M^{f(y)-\varepsilon}) \rightarrow \mathbf{H}_k(M^{f(x)-\varepsilon}, M^{f(y)-\varepsilon})$ , индуцированного вложением. Говорят, что критические точки  $x$  и  $y$  образуют пару Баранникова с числом Брюа  $\lambda$  если и только если  $X = \lambda Y \neq 0$ . Иллюстрация для  $k = 1$  приведена на Рисунке 2.

В контексте теории Морса пары Баранникова были введены (в иной, эквивалентной формулировке) в [Ваг94]. Сейчас это популярный инструмент в прикладной и симплектической топологии, называемый баркодом, см. недавний обзор [ЕН08]. Близкие идеи о числах Брюа над  $\mathbb{Q}$  возникли независимо в [LNV20].

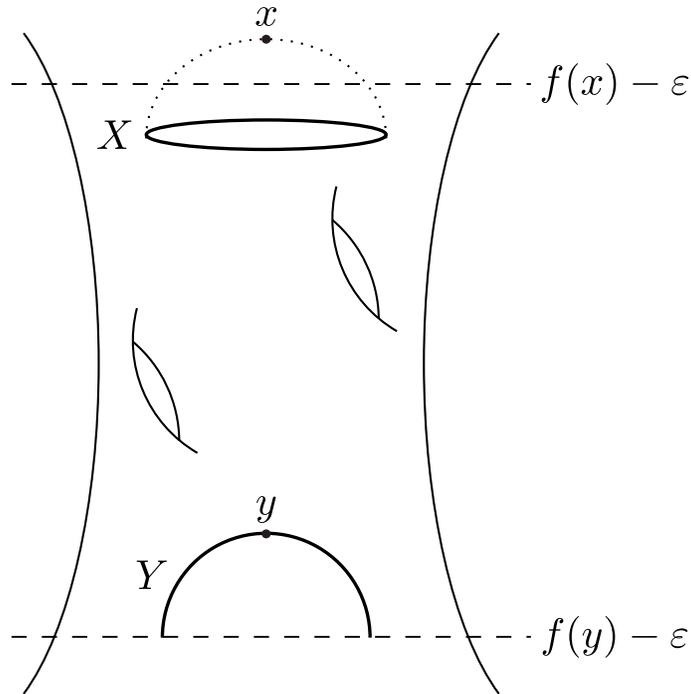


Рис. 2. К Подсекции 2.2. Классы  $X$  и  $Y$  изображены жирным. Пунктирный купол изображает приклеивающий 2-диск для  $x$ .

2.3. *Morse complex.* Пусть  $g$  — общая риманова метрика на  $M$  и  $f$  — ориентированная строгая функция Морса. Тогда возникает комплекс Морса  $\mathcal{M}(f, g)$ , целочисленные гомологии которого естественно изоморфны гомологиям  $M$ . Его матрица дифференциала, вообще говоря, зависит от  $g$ .

Для Б-набора, ассоциированного с  $f$ , пусть  $R_k$  — соответствующая ладейная матрица размера  $\text{Ст}_{k-1}(f) \times \text{Ст}_k(f)$ . Другими словами, ненулевые элементы  $R_k$  равны числам Брюа на парах Баранникова, соединяющих точки индексов  $k$  и  $k - 1$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $f$  — ориентированная строгая функция Морса на многообразии  $M$ . Пусть также  $R_k$  — ладейная матрица, ассоциированная с  $f$  над  $\mathbb{Q}$  (где  $k \in \{1, \dots, \dim M\}$ ). Тогда матрица дифференциала Морса  $\partial_k$  относительно любой общей римановой метрики  $g$  принадлежит множеству  $\mathcal{T}(R_k)$ .

Для примера предположим, что  $f$  имеет Б-набор, изображённый на Рисунке 1 и  $k = 2$ . Тогда соответствующая ладейная матрица и общий вид матрицы второго дифференциала в комплексе Морса  $P$  выглядят как

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 2 & * \end{pmatrix}.$$

2.4. *Примеры и свойства.* В этой подсекции мы бегло даём некоторые вводные примеры и свойства чисел Брюа.

Пусть  $f$  — функция на  $\mathbb{R}P^n$ , которая приходит из функции  $x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + (n+1)x_{n+1}^2$ , определенной на единичной сфере  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . У неё есть  $(n+1)$  критическая точка всевозможных индексов от 0 до  $n$  (упорядоченные по возрастанию индекса). Если  $\text{char } \mathbb{F} = 2$ , то все они гомологические. Иначе,  $(2k)^{\text{ая}}$  и  $(2k-1)^{\text{ая}}$  критические точки образуют пару Баранникова с числом Брюа  $\pm 2$  (для каждого  $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$ , где скобки обозначают целую часть). См. Рисунок 3, где изображен пример для  $n = 6$ .

**Предложение 2.2.** Пусть  $\mathbb{F}$  есть  $\mathbb{Q}$  или  $\mathbb{F}_p$  и  $\lambda \in \mathbb{F}^*$  есть любое ненулевое число. Пусть также  $M$  — произвольное замкнутое многообразие такое, что  $\dim M \geq 4$ .

Тогда можно найти ориентированную строгую функцию Морса  $f$  на  $M$ , которая имеет  $\lambda$  в качестве одного из своих чисел Брюа.

В частности, число Брюа над  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$  вполне может быть нецелым. Следующее предложение — инкарнация двойственности Пуанкаре.

**Предложение 2.3.** Пусть  $M$  замкнутое и ориентированное, а  $f$  — ориентированная строгая функция Морса на нем. Пусть также  $\mathbb{F}$  — поле. Тогда Б-набор для  $-f$  есть Б-набор для  $f$  перевернутый вверх тормашками. Числа Брюа на парах остаются такими же.

**Предложение 2.4.** Число гомологических критических точек  $f$  индекса  $k$  равно  $\dim H_k(M; \mathbb{F})$ .

### 3. ЧИСЛА БРЮА И ТЕОРИЯ КРУЧЕНИЙ

Как мы видели в Предложении 2.2, любое число может возникнуть в качестве числа Брюа некоторой функции; в каком-то роде, отсутствует контроль за индивидуальным числом Брюа. Тем не менее, иногда альтернированное произведение всех чисел Брюа не зависит от  $f$ . Т.о. это произведение зависит только от многообразия  $M$ . В этой секции мы даём строгое изложение этого утверждения (в Подсекции 3.1), а также вводим контекст, в котором упомянутое произведение чисел Брюа равно кручению Райдемайстера  $M$  (в Подсекции 3.2).

#### 3.1. Кручение функции Морса.

**Определение 3.1.** Пусть  $f$  — ориентированная строгая функция Морса на  $M$  и  $\mathbb{F}$  — поле. Число

$$\tau(f, \mathbb{F}) = \prod_{s \in U} \lambda(s)^{(-1)^{\deg s}} \in \mathbb{F}^* / \pm 1$$

называется *кручением  $f$  над  $\mathbb{F}$* .

Мы называем правую часть равенства “альтернированным произведением” всех чисел Брюа, по аналогии с альтернированной суммой, которая используется для определения Эйлеровой характеристики.

**Теорема 3.2.** Пусть  $f$  — строгая функция Морса на  $M$  и  $\mathbb{F}$  — поле. Предположим, что  $H_k(M) = 0$  для всех  $0 < k < \dim M$ . Тогда альтернированное произведение всех чисел Брюа (как элемент  $\mathbb{F}^* / \pm 1$ ) не зависит от  $f$ .

Беря  $\mathbb{R}P^n$  в качестве  $M$  мы видим, что  $\tau(f, \mathbb{Q}) = \pm 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$  для любой  $f$ , где скобки обозначают целую часть. В самом деле, необходимо посчитать  $\tau$  лишь для какой-то конкретной функции Морса на  $\mathbb{R}P^n$ . Это делается для стандартной функции из Подсекции 2.4.

**3.2. Кручение Райдемайстера и числа Брюа.** Предположим теперь, что дана не только ориентированная функция  $f$ , но также и одномерное представление  $\rho : \pi \rightarrow GL_1(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^*$ , где  $\pi = \pi_1(M)$ . Другими словами, дана одномерная локальная система на  $M$ . Тогда рассуждая так же, как в Подсекции 2.2, можно построить пары Баранникова и числа Брюа, которые на этот раз будут элементами  $\mathbb{F}^* / \rho(\pi)$  (в отсутствие выборы ориентации  $f$  эти числа живут в  $\mathbb{F}^* / \pm \rho(\pi)$ ). Чтобы обозначить наличие  $\rho$ , мы говорим “скрученные пары Баранникова” и “скрученные числа Брюа”. Теперь можно определить кручение  $\tau(f, \rho)$  функции  $f$  ровно так же, как в Определении 3.1. Вообще говоря,  $\tau(f, \rho)$  может зависеть от  $f$ .

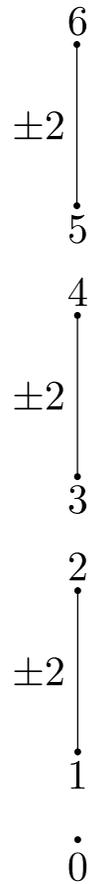


Рис. 3

Предположим, что скрученные гомологии  $H_\bullet(M; \rho)$  зануляются. Тогда можно определить кручение Райдемайстера  $M$ , которое есть элемент факторгруппы  $\mathbb{F}^*/\pm\rho(\pi)$ . Это топологический инвариант, который, однако, не стабилен относительно гомотопических эквивалентностей. Он может быть использован для классификации линзовых пространств.

**Теорема 3.3.** Пусть  $f$  — строгая функция Морса на многообразии  $M$ ,  $\mathbb{F}$  — поле и  $\rho: \pi \rightarrow \mathbb{F}^*$  — одномерное представление. Предположим, что скрученные гомологии  $M$  зануляются. Тогда альтернированное произведение скрученных чисел Брюа  $f$  равно кручению Райдемайстера  $M$ . В частности, оно не зависит от  $f$ .

#### 4. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МОРСА

4.1. *Предварительные сведения об однопараметрической теории Морса.* В этой подсекции мы напоминаем основы однопараметрической теории Морса, развитой Серфом [Ser70].

Зафиксируем общий путь  $\{f_t\}$  в пространстве функций на  $M$  раз и навсегда (здесь  $t \in [-1, 1]$ ). Его концы  $f_{-1}$  и  $f_1$  это строгие функции Морса на  $M$ . Более того, то же верно для всех точек  $\{f_t\}$ , кроме конечного числа. Это подсекция посвящена описанию того, какие изменения могут происходить с функцией в этих точках.

Мы будем изображать путь в пространстве функций следующим образом. Диаграмма Серфа пути  $\{f_t\}$  — это подмножество  $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ , состоящее из точек  $(t, x)$  таких, что  $x$  есть критическое значение функции  $f_t$ . Топологически это множество (быть может, самопересекающихся и незамкнутых) кривых на плоскости.

Как доказано в [Ser70], в общем однопараметрическом пути может происходить два типа изменений класса изотопии строгой функции Морса, которые мы называем событиями. (Т.к. всего изменений конечное число, мы для удобства предполагаем, что  $f_t$  строгая и морсовская для всех  $t$  за исключением  $t = 0$ .)

- 1) В момент  $t = 0$  происходит рождение/смерть двух критических точек соседнего индекса. На диаграмме Серфа это соответствует (левому или правому) каспу. Это событие называется рождение/смерть.
- 2) Функция  $f_0$  морсовская, но не строгая. Это происходит когда два критических значения сталкиваются. На диаграмме Серфа это соответствует простому трансверсальному самопересечению; в некотором роде, пара критических значений меняется местами. Мы называем это событие событием Максвелла.

Теперь мы можем описать диаграмму Серфа более точно: это множество плоских дуг (гладких в своих внутренних точках), чьи концы либо являются каспами, либо имеют  $t$ -координату равную  $\pm 1$ . Эти дуги не имеют вертикальных касательных и могут самопересекаться.

4.2. *Б-набор в пути функций.* В этой подсекции мы начинаем описывать, как Б-набор ведёт себя в общем пути функций. В Подсекции 4.3 заканчиваем это описание.

Перво-наперво мы ориентируем все функции в пути следующим образом. Выберем общую точку на какой-нибудь дуге диаграммы Серфа. Ей соответствует некая критическая точка функции  $f_t$ ; ориентируем её. Продолжим эту ориентацию по непрерывности на все критические точки принадлежащие той же дуге (за исключением каспов). Применим эту процедуру ко всем дугам. Этот рецепт позволяет нам ориентировать все функции в пути  $\{f_t\}$  сделав лишь конечное число бинарных выборов, а именно  $2^l$  где  $l$  это число дуг. Мы используем термин “ориентация дуг” для краткости.

Напомним, что нам нужно зафиксировать поле  $\mathbb{F}$  чтобы определить Б-набор. Далее, если  $\{f_t\}$  состоит лишь из строгих функций Морса, Б-набор не меняется вдоль пути.

Мы используем термин “бифуркации” для описания того, как Б-набор меняется после двух событий из Подсекции 4.1. Не принимая числа Брюа во внимание, это описание было дано уже в [Ваг94] (см. [Лав15], где изложено другое доказательство). См. также статью [СЕМ06] и картинки в обзоре [ЕН08]. Таким образом наша задача состоит в том, чтобы понять, как числа Брюа меняются вдоль пути. В случае рождения/смерти мы, для краткости, ограничимся рождением (смерть получается из рождения обращением времени).

**Теорема 4.1.** После рождения появляется пара Баранникова, соединяющая две новорожденные критические точки; её число Брюа равно  $\pm 1$ . Все остальные пары и числа Брюа не меняются. См. Рисунок 4.

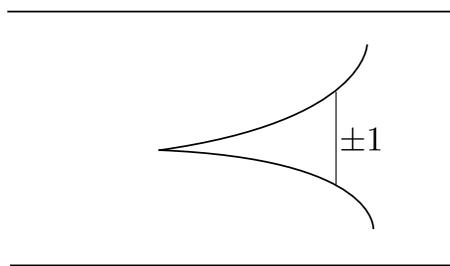


Рис. 4. Рождение двух критических точек.

4.3. *Событие Максвелла.* В этой подсекции мы рассматриваем второй тип события, а именно самопересечение диаграммы Серфа (другими словами, событие Максвелла). Это завершает описание бифуркаций Б-набора в пути функций, начатое в Подсекции 4.2.

Зафиксируем обозначения. Пусть  $c_{s+1}$  и  $c_s$  — две критические точки функции  $f_{-1}$ , участвующие в бифуркации. Напомним из Подсекции 4.1, что  $\text{Cr}(f_1)$  совпадает, как упорядоченное подмножество  $M$ , с  $\text{Cr}(f_{-1})$ , в котором порядок  $c_{s+1}$  и  $c_s$  обращен. Как мы увидим в Теореме 4.2 некоторые бифуркации могут происходить только при некоторых ограничениях на линейный порядок критических точек, участвующих в бифуркации. Это ограничения зависят от типов критических точек (верхний, нижний или гомологический); см. также Замечание 4.3.

**Теорема 4.2.** После события Максвелла возможны два типа бифуркаций.

- 1) Тривиальная бифуркация. После неё точки  $c_{s+1}$  и  $c_s$  сохраняют свои изначальные пары (если те были) и числа Брюа на них. Ограничения на линейный порядок точек отсутствуют. Значения  $\deg c_{s+1}$  и  $\deg c_s$  могут быть любыми.
- 2) Нетривиальная бифуркация. Необходимое условие:  $\deg c_{s+1} = \deg c_s$ . Список из пяти возможных вариантов представлен на Рисунке 5. Ограничения на линейный порядок могут быть выужены из картинок, см. Замечание 4.3.

Все точки, не участвующие в бифуркации сохраняют свои изначальные пары (если те были) и числа Брюа на них.

**Замечание 4.3.** Как видно на Рисунке 5, пары и числа Брюа могут поменяться после нетривиальной бифуркации. Что касается ограничений на линейный порядок, предположим, например, что обе точки  $c_s$  и  $c_{s+1}$  верхнего типа (третья картинка). Тогда ограничение состоит в том, что  $b(s+1) < b(s)$  (где  $b$  это биекция

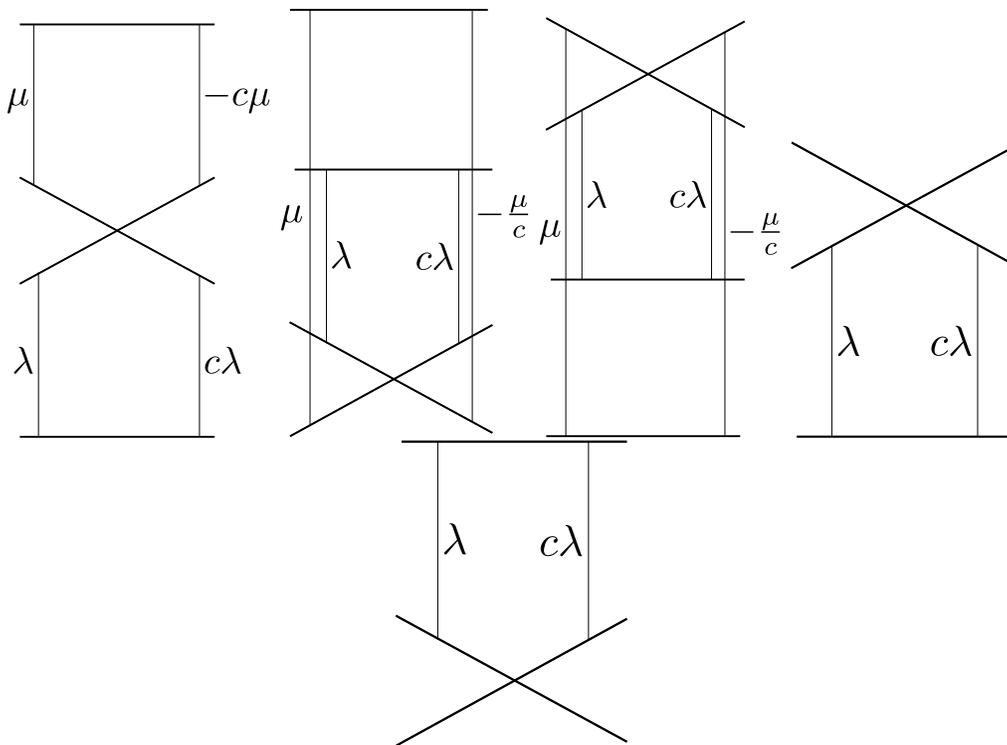


Рис. 5. Нетривиальные бифуркации на самопересечении диаграммы Серфа

из определения Б-набора). Отметим, что те же самые ограничения участвуют в определении рулинга лежандрова узла [Fuc03; CP05]. См. подробности в [CP05].

**Замечание 4.4.** Предположим, что (скрученные) гомологии  $M$  зануляются в градуировке  $k$ . Тогда гомологические критические точки индекса  $k$  отсутствуют (см. Предложение 2.4). Следовательно, нетривиальная бифуркация таких критических точек может быть только одного из первых трёх типов на Рисунке 5. Это, в свою очередь, означает, что альтернированное произведение (скрученных) чисел Брюа не меняется после бифуркации. Это доставляет альтернативное доказательство того, что альтернированное произведение скрученных чисел Брюа не зависит от функции (при условии зануления гомологий).

4.4. *Теорема Аметьева-Реповша-Ценцеля.* В этой подсекции мы формулируем теорему Ахметьева-Реповша-Ценцеля [ACR05] в большей общности. Грубо говоря, она утверждает, что два численных инварианта общего пути функций обязаны удовлетворять некоторому уравнению по модулю 2. Эта теорема доказывается с помощью чисел Брюа и анализа их поведения в путях функций (но в формулировке эти понятия не участвуют).

Сначала мы должны перейти в несколько более общий контекст. Кобордизм это многообразие  $M$  с краем  $\partial_0 M \sqcup \partial_1 M$ . Под функцией  $f$  на кобордизме  $(M, \partial_0 M, \partial_1 M)$  мы будем понимать функцию  $f: M \rightarrow [0, 1]$  такую, что  $f^{-1}(0) = \partial_0 M$  и  $f^{-1}(1) = \partial_1 M$ . Функция  $f$  на кобордизме называется морсовской, если все ее критические точки невырождены и лежат во внутренности  $M$ . Свойство строгости определяется так же, как в замкнутом случае. Тривиальный кобордизм — это цилиндр  $(N \times [0, 1], N \times \{0\}, N \times \{1\})$ , где  $N$  есть замкнутое многообразие.

Введём два инварианта общего пути функций  $\{f_t\}$ . Первый — это количество самопересечений диаграммы Серфа (или, в нашей терминологии, событий Максвелла), назовем его  $X$ . Чтобы получить второй инвариант, напомним, что в Подсекции 4.2 мы описали процедуру ориентирования дуг диаграммы Серфа, которая даёт ориентацию каждой строгой функции Морса в пути. После выбора какой-либо ориентации дуг, мы можем сопоставить знак каждому каспу

диаграммы Серфа следующим образом. Пусть  $t_0$  — точка рождения (соотв. смерти). Выберем любое  $t_1 > t_0$  (соотв.  $t_1 < t_0$ ) такое, что все функции между  $t_1$  и  $t_0$  (исключая  $t_0$ ) строгие и морсовские. Обозначим через  $c_{s+1}$  и  $c_s$  две новорожденные (соотв. умирающие) критические точки of  $f_{t_1}$ . Из классических результатов следует, что дифференциал  $c_{s+1}$  содержит  $c_s$  с коэффициентом 1 или  $-1$  вне зависимости от сделанного выбора (например, римановой метрики). Знак каспа теперь определяется как знак этого числа. Пусть  $C$  — количество отрицательных каспов. Смена ориентации дуги меняет знак каждого каспа, который является концом этой дуги (очевидно, таких каспов максимум два). Следовательно, если обе функции  $f_{-1}$  и  $f_1$  не имеют критических точек, то четность  $C$  есть корректно определенный инвариант пути  $\{f_t\}$ . Следующее следствие устанавливает взаимосвязь между двумя введенными инвариантами пути (числом  $X$  и четностью  $C$ ).

**Следствие 4.5.** Пусть  $\{f_t\}$  — общий путь функций на цилиндре  $N \times [0, 1]$  такой, что обе функции  $f_{-1}$  и  $f_1$  не имеют критических точек. Пусть  $X$  — число самопересечений его диаграммы Серфа и  $C$  — число отрицательных каспов. Тогда

$$X + C = 0 \pmod{2}.$$

**Замечание 4.6.** В [ACR05] Следствие 4.5 доказано двумя различными методами, оба из которых требуют дополнительных условий на  $N$ .

См. полный текст диссертации, где мы доказываем общую теорему, из которой следует вышеприведенное следствие. Эта теорема имеет дело с общим кобордизмом  $(M, \partial_0 M, \partial_1 M)$  таким, что  $H_*(M, \partial_0 M; \mathbb{F}) = 0$  (вместо цилиндра  $N \times [0, 1]$ ).

## 5. АПРОБАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты этой диссертации были представлены на следующих семинарах:

- Семинар по геометрической топологии, Институт Стеклова, декабрь 2020
- Семинар по топологии, University of Georgia (Университет Джорджии), апрель 2021
- Семинар лаборатории алгебраической топологии и ее приложений, НИУ ВШЭ, апрель 2021
- Семинар по топологии, Dartmouth College (Дартмутский колледж), сентябрь 2021
- Семинар по симплектической геометрии, Stanford University (Стэнфорд), март 2022
- Семинар по топологии, University of Notre Dame (Университет Нотр Дамы), апрель 2022

Результаты были также представлены на следующих конференциях:

- LUTSINOfest, Луцино, Московская область, июль 2021
- South Central Topology Conference, College Station, TX (Колледж-Стейшн, Техас) (rodeo talk), сентябрь 2021
- Bridging applied and quantitative topology, онлайн (постер), май 2022
- Richmond geometry festival, онлайн (постер), май 2022

## 6. ПУБЛИКАЦИИ

Результаты данной диссертации содержатся в двух работах, принятых к печати:

- Петр Пушкарь и Михаил Тёмкин. *О матрице дифференциала в комплексе Морса*, принята в Успехи Математических Наук (серия “Краткие сообщения ММО”)
- Petya Pushkar and Misha Tyomkin. *Enhanced Bruhat decomposition and Morse theory (Обогащенное разложение Брюа и теория Морса)*, принята в International Mathematics Research Notices

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Cer70] Jean Cerf. “La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie”. В: *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 39 (1970), с. 5–173.
- [Bar94] Serguei Barannikov. “The Framed Morse complex and its invariants”. В: *Advances in Soviet Mathematics* 22 (1994), с. 93–115.
- [Fuc03] Dmitry Fuchs. “Chekanov-Eliashberg invariant of Legendrian knots: existence of augmentations”. В: *Journal of Geometry and Physics* 47.1 (2003), с. 43–65.
- [ACR05] P. M. Akhmetev, M. Cencelj и D. Repovš. “Some Algebraic Properties of Cerf Diagrams of One-Parameter Function Families”. В: *Functional Analysis and Its Applications* 39 (2005).
- [CP05] Yu. V. Chekanov и P. E. Pushkar’. “Combinatorics of fronts of Legendrian links and the Arnol’d 4-conjectures”. В: *Russian Mathematical Surveys* 60.1 (2005), с. 95–149.
- [CEM06] David Cohen-Steiner, Herbert Edelsbrunner и Dmitriy Morozov. “Vines and vineyards by updating persistence in linear time”. В: *Symposium on Computational Geometry*. ACM, 2006, с. 119–126.
- [EH08] Herbert Edelsbrunner и John Harer. “Persistent homology - A survey”. В: *Surveys on Discrete and Computational Geometry* 453 (2008).
- [Lau15] Francois Laudenbach. *On an article by S. A. Barannikov*. 2015. arXiv: 1509.03490 [math.GT].
- [LNV20] Dorian Le Peutrec, Francis Nier и Claude Viterbo. *Bar codes of persistent cohomology and Arrhenius law for p-forms*. 2020. arXiv: 2002.06949 [math.AP].