Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"»

Факультет математики

На правах рукописи

Кондырев Григорий Михайлович

Формализм следов в производной алгебраической геометрии

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
Горинов Алексей Геннадьевич
PhD

Москва - 2022

1 Категорные конструкции

Сперва напомним следующее

Определение 1.1. Пусть $(\mathcal{E}, \otimes, 1_{\mathcal{E}})$ это симметрическая моноидальная $(\infty, 1)$-категория, а $X \in \mathcal{E}$ это дуализируемый объект вместе с отображением $X \xrightarrow{f} Y \otimes X$, где $Y \in \mathcal{E}$ это какой-то еще объект. Тогда определим **скрученный след** f как точку в пространстве $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, Y)$ заданную композицией

$$Y \xrightarrow{\mathsf{coev}_X} X \otimes X^\vee \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_{X^\vee}} Y \otimes X \otimes X^\vee \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Id}_Y \otimes \mathsf{Twist}} Y \otimes X^\vee \otimes X \xrightarrow{\mathrm{Id}_Y \otimes \mathsf{ev}_X} Y.$$

В случае когда $Y = 1_{\mathcal{E}}$, мы получаем классическое определение следа $\mathsf{Tr}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1_{\mathcal{E}}, 1_{\mathcal{E}})$ эндоморфизма дуализируемого объекта.

Теперь заметим, что если $\mathcal{E}$ симметрическая моноидальная $(\infty, 2)$-категория, то имеется целая $(\infty, 1)$-категория $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1_{\mathcal{E}}, 1_{\mathcal{E}})$. Естественно спросить, можно ли использовать понятие следа для получения не только объектов, но и морфизмов в этой категории. Возможным ответом является следующее

Предложение 1.2 (Морфизм следов)**.** Пусть $(\mathcal{E}, \otimes, 1_{\mathcal{E}})$ это симметрическая моноидальная $(\infty, 2)$-категория, и пусть задана (не обязательно коммутативная) диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "F_A"] \arrow[d, bend right, "\varphi"'] & A \arrow[d, bend right, "\varphi"'] \arrow[dl, Rightarrow, "T"'] \\
B \arrow[r, "F_B"'] \arrow[u, bend right, "\psi"'] & B \arrow[u, bend right, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

в $\mathcal{E}$, где $A, B \in \mathcal{E}$ это дуализируемые объекты, морфизм φ является левым сопряженным к ψ, а

$$\varphi \circ F_A \xrightarrow{T} F_B \circ \varphi$$

это 2-морфизм в $\mathcal{E}$. Тогда существует естественное отображение

$$\mathsf{Tr}_{\mathcal{E}}(F_A) \xrightarrow{\mathsf{Tr}(\varphi, T)} \mathsf{Tr}_{\mathcal{E}}(F_B)$$

в $(\infty, 1)$-категории $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1_{\mathcal{E}}, 1_{\mathcal{E}})$, которое мы называем **морфизмом следов, индуцированным** T.
Кроме того, имея диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "F_A"] \arrow[d, bend right, "\varphi_1"'] & A \arrow[d, bend right, "\varphi_1"'] \arrow[dl, Rightarrow, "T_1"'] \\
B \arrow[r, "F_B"'] \arrow[u, bend right, "\psi_1"'] \arrow[d, bend right, "\varphi_2"'] & B \arrow[u, bend right, "\psi_1"'] \arrow[d, bend right, "\varphi_2"'] \arrow[dl, Rightarrow, "T_2"'] \\
C \arrow[r, "F_C"'] \arrow[u, bend right, "\psi_2"'] & C \arrow[u, bend right, "\psi_2"']
\end{tikzcd}$$

в $\mathcal{E}$, где φ_1 является левым сопряженным к ψ_1, φ_2 является левым сопряженным к ψ_2, а

$$\varphi_1 \circ F_A \xrightarrow{T_1} F_B \circ \varphi_1$$

$$\varphi_2 \circ F_B \xrightarrow{T_2} F_C \circ \varphi_2$$

это 2-морфизмы, имеется каноническая эквивалентность

$$\mathsf{Tr}(\varphi_2 \circ \varphi_1, T_2 \circ_{\mathsf{vert}} T_1) \simeq \mathsf{Tr}(\varphi_2, T_2) \circ \mathsf{Tr}(\varphi_1, T_1),$$

где за $\circ_{\mathsf{vert}}$ мы обозначаем вертикальную композицию 2-морфизмов.

Пример 1.3 (Категорный характер Черна)**.** Рассмотрим случай, когда $\mathcal{E} = 2\,\mathrm{Cat}_k$ это $(\infty, 2)$-категория k-линейных, стабильных, представимых $(\infty, 1)$-категорий и непрерывных функторов, в которой моноидальная единица это $(\infty, 1)$-категория Vect_k неограниченных комплексов над k, и пусть $\mathcal{C} \in 2\,\mathrm{Cat}_k$ это какой-нибудь дуализируемый объект вместе с эндофунктором $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$. Заметим, что имеется каноническая эквивалентность

$$\mathrm{Fun}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Vect}_k, \mathcal{C})^{\mathsf{ladj}} \xrightarrow[\sim]{\mathsf{ev}_k} \mathcal{C}^{\mathsf{comp}}$$

где $\mathrm{Fun}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Vect}_k, \mathcal{C})^{\mathsf{ladj}} \subseteq \mathrm{Fun}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Vect}_k, \mathcal{C})$ это полная $(\infty, 1)$-подкатегория, поражденная теми морфизмами в $2\,\mathrm{Cat}_k$ у которых есть правый сопряженный, а $\mathcal{C}^{\mathsf{comp}} \subseteq \mathcal{C}$ это полная $(\infty, 1)$-подкатегория компактных объектов.

В частности, имея дуализируемый объект $E \in \mathcal{C}^{\mathsf{comp}}$ вместе с морфизмом $E \xrightarrow{t} F(E)$ в $\mathcal{C}$ мы можем применить $(\infty, 2)$-категорный след 1.2 к диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Vect}_k \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}"] \arrow[d, bend right, "\varphi"'] & \mathrm{Vect}_k \arrow[d, bend right, "\varphi"'] \arrow[dl, Rightarrow, "T"'] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "F"'] \arrow[u, bend right, "\psi"'] & \mathcal{C}, \arrow[u, bend right, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

где φ это функтор полученнный из компактного объекта $E \in \mathcal{C}^{\mathsf{comp}}$, а T это 2-морфизм, полученный из t. Мы будем называть соответствующий элемент

$$k \simeq \mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}) \xrightarrow{\mathsf{Tr}(\varphi, T)} \mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(F) \in \mathrm{Hom}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Vect}_k, \mathrm{Vect}_k) \simeq \mathrm{Vect}_k$$

категорным характером Черна E и обозначать его $\mathrm{ch}(E, t) \in \mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(F)$.

2 2-следы в производной алгебраической геометрии

Соглашение. Отныне мы предполагаем, что k это алгебраически замкнутое поле характеристики 0.

Понятие следа очень полезно в производной алгебраической геометрии. Для предстека X мы будем обозначать за $\mathrm{QCoh}(X)$ соответствующую $(\infty, 1)$-категорию неограниченных комплексов квази-когерентных пучков на X. Согласно [BZFN10, Theorem 1.2] для любых совершенных стеков X, Y ([BZFN10, Definition 3.2]) имеется каноническая эквивалентность $\mathrm{QCoh}(X) \otimes \mathrm{QCoh}(Y) \simeq \mathrm{QCoh}(X \times Y)$, полученная с помощью билинейного функтора

$$\mathrm{QCoh}(X) \times \mathrm{QCoh}(Y) \xrightarrow[\sim]{} \mathrm{QCoh}(X \times Y)$$

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longmapsto (q_1^* \mathcal{F}) \otimes (q_2^* \mathcal{G})$$

где

$$X \xleftarrow{q_1} X \times Y \xrightarrow{q_2} Y$$

это отображения проекции. В частности, объект $\mathrm{QCoh}(X) \in \mathrm{Cat}_k$ является самодвойственным, с соответствующими отображениями (ко)единицы

$$\mathrm{Vect}_k \xrightarrow{\Delta_* \mathcal{O}_X} \mathrm{QCoh}(X \times X) \simeq \mathrm{QCoh}(X) \otimes \mathrm{QCoh}(X)$$

$$\mathrm{QCoh}(X) \otimes \mathrm{QCoh}(X) \simeq \mathrm{QCoh}(X \times X) \xrightarrow{\Gamma(\Delta^* -)} \mathrm{Vect}_k$$

где за $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$ мы обозначаем диагональное отображение, а $\mathrm{QCoh}(X) \xrightarrow{\Gamma(-)} \mathrm{Vect}_k$ это (производный) функтор глобальных сечений.

Удобным методом вычисления следов различных эндоморфизмов $\mathrm{QCoh}(X) \in \mathrm{Cat}_k$ является формализм ядер. Согласно [BZFN10, Theorem 1.2] имеется эквивалентность $(\infty, 1)$-категорий

$$\mathrm{QCoh}(X \times X) \xrightarrow[\sim]{} \mathrm{Fun}_{\mathrm{Cat}_k}\big(\mathrm{QCoh}(X), \mathrm{QCoh}(Y)\big)$$

$$\mathcal{K} \longmapsto q_{2*}(\mathcal{K} \otimes (q_1^* -)).$$

Пучок $\mathcal{K}$ обычно называют **ядром** соответствующего функтора. Раскручивая определения, мы получаем

Лемма 2.1 (След с помощью ядра)**.** Пусть X это совершенный стек, а F это эндоморфизм категории $\mathrm{QCoh}(X)$. Тогда имеется эквивалентность

$$\mathsf{Tr}_{\mathrm{Cat}_k}(F) \simeq \Gamma(X, \Delta^*\mathcal{K}) \in \mathrm{Vect}_k,$$

где $\mathcal{K} \in \mathrm{QCoh}(X \times X)$ это ядро функтора F.

Используя лемму выше, легко доказать, что формализм следов напрямую связан с производными неподвижными точками:

Предложение 2.2 (Неподвижные точки с помощью следов)**.** Пусть $X \xleftarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ это соответствие совершенныъ стеков. Тогда для пучка $\mathcal{G} \in \mathrm{QCoh}(Y)$ имеется каноническая эквивалентность

$$\mathsf{Tr}_{\mathrm{Cat}_k}\big(f_*(\mathcal{G} \otimes g^* -)\big) \simeq \Gamma(Y^{g=f}, j^*\mathcal{G})$$

в Vect_k, где $Y^{g=f}$ это **производный стек неподвижных точек** соответствия (g, f), определенный как расслоенное произведения

$$\begin{tikzcd} Y^{g=f} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "{(g,f)}"] \\ X \arrow[r, "\Delta"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

производных стеков.

Комбинируя предложение выше и Лемму 2.1, мы получаем удобное представление категорного характера Черна (1.3) в контексте производной алгебраической геометрии:

Пример 2.3 (Категорный характер Черна пучка)**.** Пусть $X \xleftarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ это соответствие совершенных производных стеков, а $E \in \mathrm{Perf}(X)$ это совершенный пучок (или, эквивалентно, компактный/дуализируемый объект $\mathrm{QCoh}(X)$) вместе с отображением $t\colon E \to f_*(\mathcal{G} \otimes g^*E)$ для какого-то пучка $\mathcal{G} \in \mathrm{QCoh}(Y)$. Тогда категорный характер Черна $\mathrm{ch}(E, t)$ (1.3) of E полученный из диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_k \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}"] \arrow[d, bend right, "\varphi"'] & \mathrm{Vect}_k \arrow[d, bend right, "\varphi"'] \arrow[dl, Rightarrow, "T"'] \\ \mathrm{QCoh}(X) \arrow[r, "f_*(\mathcal{G}\otimes g^*-)"'] \arrow[u, bend right, "\psi"'] & \mathrm{QCoh}(X) \arrow[u, bend right, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

эквивалентен скрученному следу (see 1.1) индуцированного оторажения

$$i^*E \simeq j^*f^*E \xrightarrow{j^*(b)} j^*(\mathcal{G} \otimes g^*E) \simeq j^*\mathcal{G} \otimes j^*g^*E \simeq j^*\mathcal{G} \otimes i^*E$$

в $\mathrm{QCoh}(Y^{g=f})$, где $b\colon f^*E \to \mathcal{G} \otimes g^*E$- это морфизм, соответствующий $t \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{QCoh}(X)}\big(E, f_*(\mathcal{G} \otimes g^*E)\big)$ с помощью сопряжения $f^* \dashv f_*$.

3 Голоморфная формула Атьи-Ботта для соответствий

Как первое применение техники 2-следов, мы докажем версию голоморфной формулы Атьи-Ботта для соответствий. Пусть X, Y это гладкие, собственный k-схемы, а $(g, f)\colon Y \to X \times X$ это соответствие, такое что:

- Подлежащая классическая схема от производных неподвижных точек $Y^{g=f,\mathsf{cl}}$ дискретна.
- Морфизм g этален в неподвижных точках (т.е. g этален в каждой точке $y \in Y^{g=f,\mathsf{cl}}$ подлежащей классической схемы от производных неподвижных точек 2.2).
- Индуцированное отображение $1-d_y f\circ(d_y g)^{-1}$ на касательных пространствах обратимо для любой точки $y \in Y^{g=f,\mathsf{cl}}$.

Тогда для любого (g, f)-эквивариантного совершенного пучка $(E \in \mathrm{Perf}(X), b\colon f^*E \to g^!E)$ мы имеем соответствующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Vect}_k \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}"] \arrow[d, "E"'] & \mathrm{Vect}_k \arrow[d, "E"] \arrow[dl, Rightarrow, "T_1"'] \\
\mathrm{QCoh}(X) \arrow[r, "f_*g^!"'] \arrow[d, "\Gamma"'] & \mathrm{QCoh}(X) \arrow[d, "\Gamma"] \arrow[dl, Rightarrow, "T_2"] \\
\mathrm{Vect}_k \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}"'] & \mathrm{Vect}_k
\end{tikzcd}$$

в $2\,\mathrm{Cat}_k$, а, значит, применяя формализм 2-следов 1.2, коммутативный треугольник

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "\mathrm{ch}(E,t)"] \arrow[dr, "\mathsf{Tr}(\Gamma(X,E), T_2\circ_{\mathsf{vert}} T_1)"'] & \mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(f_*g^!) \arrow[d, "\mathsf{Tr}(\Gamma, T_2)"] \\
& k
\end{tikzcd}$$

в Vect_k, то есть равенство

$$\mathsf{Tr}(\Gamma, T_2) \circ \mathrm{ch}(E,t) \simeq \mathsf{Tr}(\Gamma(X,E), T_2 \circ_{\mathsf{vert}} T_1) \tag{1}$$

двух чисел.

Поскольку в наших предположениях из 2.2 мы получаем

$$\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(f_*g^!) \simeq \Gamma(Y^{g=f}, j^*\omega_g) \simeq \Gamma(Y^{g=f}, \mathcal{O}_{Y^{g=f}}) \simeq \bigoplus_{f(y)=g(y)} ke_y$$

где $e_y := \Gamma(\{y\}, \mathcal{O}_y)$, а из 2.3 мы получаем

$$\mathrm{ch}(E,t) = \textstyle\sum_{f(y)=g(y)} \mathrm{ch}(E,t)_y e_y, \qquad \mathrm{ch}(E,t)_y \simeq \mathsf{Tr}_{\mathrm{Vect}_k}(E_{f(y)} \xrightarrow{b_y} E_{g(y)}),$$

для полного понимания равенства 1 достаточно вычислить значение

$$\int_{Y^{g=f}} \colon \bigoplus_{f(y)=g(y)} ke_y \simeq \mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(f_*g^!) \xrightarrow{\mathsf{Tr}(\Gamma, T_2)} k$$

на e_y. Из функториальности конструкции достаточно разобраться с частным случаем когда $E := x_*k$ это пучок небоскреб в неподвижной точке $x = f(y) = g(y)$. Подставляя x_*k в равенство 1, мы таким образом получаем

Теорема 3.1 (Голоморфная формула Атьи-Ботта для соответствий)**.** Равенство 1 имеет вид

$$\mathsf{L}(E,b) = \sum_{f(y)=g(y)} \frac{\mathsf{Tr}_{\mathrm{Vect}_k}(E_{f(y)} \xrightarrow{b_y} E_{g(y)})}{\det(1 - d_y f \circ (d_y g)^{-1})}. \tag{2}$$

где $\mathsf{L}(E,b) \in k$ это **число Лефшеца** пары (E,b), определенное как след в Vect_k соответствующего эндоморфизма

$$\Gamma(X,E) \longrightarrow \Gamma(X, f_*f^*E) \simeq \Gamma(Y, f^*E) \xrightarrow{\Gamma(Y,b)} \Gamma(Y, g^!E) \simeq \Gamma(X, g_*g^!E) \longrightarrow \Gamma(X,E)$$

на глобальных сечениях пучка E.

4 Инд-когерентные пучки

Чтобы продвинуться дальше, мы коротко напомним некоторые базовые факты об инд-когерентных пучках, записанные в [GR17a, Part II] и [Gai13]. Для $X \in \mathrm{Sch}_{\mathsf{aft}}$ ([GR17a, Chapter 4, 1.1.1]) мы определяем $(\infty,1)$-категорию **инд-когерентных пучков на** X обозначаемую $\mathrm{ICoh}(X)$ как инд-пополнение

$$\mathrm{ICoh}(X) := \mathrm{Ind}(\mathrm{Coh}(X)),$$

где $\mathrm{Coh}(X)$- это $(\infty,1)$-категория когерентных пучков на X.

Нам будут интересны следующие базовые свойства этой конструкции

Предложение 4.1.
1) ([GR17a, Chapter 4, Proposition 2.1.2, Proposition 2.2.3]) Инд-когерентные пучки поднимаются до функтора

$$\mathrm{Sch}_{\mathsf{aft}} \xrightarrow{\mathrm{ICoh}_*} \mathrm{Cat}_k\ .$$

Более того, для любого морфизма $X \xrightarrow{f} Y$ в $\mathrm{Sch}_{\mathsf{aft}}$ индуцированная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{ICoh}(X) \arrow[r, "\Psi_X"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{QCoh}(X) \arrow[d, "f_*"] \\ \mathrm{ICoh}(Y) \arrow[r, "\Psi_Y"'] & \mathrm{QCoh}(Y) \end{tikzcd}$$

коммутирует, где функтор $\mathrm{ICoh}(X) \xrightarrow{\Psi_X} \mathrm{QCoh}(X)$ получен инд-расширением канонического вложения $\mathrm{Coh}(X) \subseteq \mathrm{QCoh}(X)$ (и аналогично для Y).

2) ([GR17a, Chapter 4, Corollary 5.1.12]) Инд-когерентные пучки поднимаются до функтора

$$\mathrm{Sch}^{\mathsf{op}}_{\mathsf{aft,proper}} \xrightarrow{\mathrm{ICoh}^!} \mathrm{Cat}_k,$$

такого что для любого собственного морфизма $X \xrightarrow{f} Y$ в $\mathrm{Sch}_{\mathsf{aft}}$ индуцированный функтор $f^! := \mathrm{ICoh}^!(f)$ является правым сопряженным к f_*.

3) ([GR17a, Chapter 4, Proposition 6.3.7; Chapter 5, Theorem 4.2.5]) Для любого $X \in \mathrm{Sch}_{\mathsf{aft}}$ категория $\mathrm{ICoh}(X)$ является симметрически моноидальной, и для любого собственного морфизма $X \xrightarrow{f} Y$ индуцированный функтор $f^!$ является симметрически моноидальным. Моноидальная единица задана дуализирующим пучком $\omega_X^{\mathrm{ICoh}} \simeq p^!k$, где $X \xrightarrow{p} *$ это естественная проекция, а $k \in \mathrm{ICoh}(*) \simeq \mathrm{Vect}_k$. Более того, объект $\mathrm{ICoh}(X) \in \mathrm{Cat}_k$ является самодвойственным.

Пример 4.2. Пусть X- это гладкая, классическая схема. Согласно [GR17a, Lemma 1.1.3] в этом случае функтор $\mathrm{ICoh}(X) \xrightarrow{\Psi_X} \mathrm{QCoh}(X)$ это эквивалентность $(\infty,1)$-категорий. В частности, мы можем отождествить $\mathrm{ICoh}(X)$ с $\mathrm{QCoh}(X)$ с подкрученной симметрической моноидальной структурой

$$\mathcal{F} \overset{!}{\otimes} G \simeq \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \otimes \omega_X^{-1},$$

где $\omega_X \in \mathrm{QCoh}(X)$ это QCoh-дуализирующий пучок.

Мы так же можем применить формализм 2-следов для функтора между $(\infty,1)$-категориями инд-когерентных пучков. Согласно [GR17a, Chapter 5, Theorem 4.1.2] части $2,3$ предложения выше могут быть усилены: инд-когерентные пучки поднимаются до симметрического моноидального функтора

$$\mathsf{Corr}(\mathrm{Sch}_{\mathsf{aft}})^{\mathsf{proper}} \longrightarrow 2\,\mathrm{Cat}_k,$$

где $\mathsf{Corr}(\mathrm{Sch}_{\mathsf{aft}})$ это симметрическая моноидальная $(\infty,2)$-категория соответствий ([GR17a, Chapter 7, Chapter 5]).

Таким образом, считая морфизм следов 1.2 в $(\infty,1)$-категории соответствий (что состоит из простого диаграммного поиска), мы получаем следующее

Предложение 4.3. Пусть $(X,g_X) \xrightarrow{f} (Y,g_Y)$ это собственный, эквивариантный морфизм в $\mathrm{Sch}_{\mathsf{aft}}$. Тогда индуцированный морфизм следов

$$\Gamma(X^{g_X},\omega_{X^{g_X}}) \simeq \mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(g_{X*}) \xrightarrow{\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(f_*)} \mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(g_{Y*}) \simeq \Gamma(Y^{g_Y},\omega_{Y^{g_Y}})$$

может быть получен путем применения функтора глобальных сечений $\Gamma(Y^{g_Y},-)$ к морфизму

$$(f^g)_*\omega_{X^{g_X}} \simeq (f^g)_*(f^g)^!\omega_{Y^{g_Y}} \longrightarrow \omega_{Y^{g_Y}}$$

в $\mathrm{ICoh}(X)$ индуцированному коединицей сопряжения $(f^g)_* \dashv (f^g)^!$, где $X^{g_X} \xrightarrow{f^g} Y^{g_Y}$ это индуцированное морфизмом f отображение на производных неподвижных точках.

5 Категорный характер Черна в терминах классического

В этой секции мы обсуждаем, как категорный характер Черна 1.3 связан с классическим.

Пусть X это квази-компактная схема, а (E,t)- это пара, состоящая из совершенного пучка $E \in \mathrm{QCoh}(X)$ и эндоморфизма $t: E \longrightarrow E$. Применяя формализм 2-следов к индуцированной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Vect}_k \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_k}"] \arrow[d, bend right, "\varphi"'] & & \mathrm{Vect}_k \arrow[d, bend right, "\varphi"'] \arrow[dll, Rightarrow, "T"'] \\
\mathrm{QCoh}(X) \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{\mathrm{QCoh}(X)}"'] \arrow[u, bend right, "\psi"'] & & \mathrm{QCoh}(X) \arrow[u, bend right, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

мы получаем категорный характер Черна

$$\mathrm{ch}(E,t) \in \Gamma(X^{\mathrm{Id}_X=\mathrm{Id}_X},\mathcal{O}_{X^{\mathrm{Id}_X=\mathrm{Id}_X}}),$$

где

$$X^{\mathrm{Id}_X=\mathrm{Id}_X} := X \times_{X\times X} X$$

это производное самопересечение диагонали. Мы обозначаем это самопересечение как $\mathcal{L}X$ и называем **производным пространством петель** X, т.к. имеется естественная эквивалентность $\mathcal{L}X \simeq \mathrm{Map}(S^1,X)$ производных стеков.

Используя 2.3 мы сразу же получаем следующее

Предложение 5.1. Имеется эквивалентность

$$\mathrm{ch}(E,t) \simeq \mathsf{Tr}_{\mathrm{QCoh}(\mathcal{L}X)}\left(i^*E \overset{\beta}{\simeq} i^*E \xrightarrow{i^*(t)} i^*(E)\right),$$

где эквивалентность β получена из канонической эквивалентности $\mathrm{Id}_X \circ i \simeq i$ на производных неподвижных точках тождественного морфизма.

Теперь мы хотим дать более конкретное описание эквивалентности β. Главная идея состоит в том, что пространство петель

$$\mathcal{L}X \xrightarrow{i} X$$

схемы X является формальной группой над X (где групповая структура задана композицией петель). Это позволяет нам использовать следующую теорему:

Теорема 5.2 ([GR17b, Chapter 7, Theorem 3.6.2, Proposition 5.1.2, and Corollary 3.2.2])**.**

1. Имеется эквивалентность

$$\mathrm{Grp}(\widehat{\mathrm{Moduli}}_{/X}) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Lie}_X} \mathrm{LAlg}(\mathrm{ICoh}(X)),$$

   между $(\infty,1)$-категориями формальных групп над X и алгебр Ли в $\mathrm{ICoh}(X)$. Более того, для формальной группы $\widehat{G} \in \mathrm{Grp}(\widehat{\mathrm{Moduli}}_{/X})$ подлежащий инд-когерентный пучок алгебры Ли $\mathrm{Lie}_X(\widehat{G}) \in \mathrm{LAlg}(\mathrm{ICoh}(X))$ эквивалентен $\mathbb{T}_{\widehat{G}/X,e} := e^!\mathbb{T}_{\widehat{G}/X}$, где $X \xrightarrow{e} \widehat{G}$ это единица, а за $\mathbb{T}$ мы обозначаем касательный пучок.

2. Для $\widehat{G} \in \mathrm{Grp}(\widehat{\mathrm{Moduli}}_{/X})$ имеется эквивалентность $(\infty,1)$-категорий

$$\mathrm{Rep}_{\widehat{G}}(\mathrm{ICoh}(X)) \xrightarrow[\sim]{} \mathrm{Mod}_{\mathrm{Lie}_X(\widehat{G})}(\mathrm{ICoh}(X)).$$

3. Пусть $\widehat{G} \in \mathrm{Grp}(\widehat{\mathrm{Moduli}}_{/X})$ это формальная группа над X. Тогда имеется функториальная эквивалентность

$$\mathbb{V}(\mathrm{Lie}_X(\widehat{G})) \xrightarrow[\sim]{\exp_{\widehat{G}}} \widehat{G}$$

   формальных задач модулей над X, где $\mathbb{V}(\mathrm{Lie}_X(\widehat{G}))$ это векторный предстек от $\mathrm{Lie}_X(\widehat{G})$.

Следствие 5.3. [Хохшильд-Костант-Розенберг] Комбинируя 4.2 с 3 частью теоремы выше, мы видим что для гладкой схемы X имеется эквивалентность

$$\mathrm{Spec}_{/X}\,\mathrm{Sym}(\mathbb{L}_X[1]) \xrightarrow[\sim]{} \mathcal{L}X$$

формальных задач модулей над X. В частности, мы получаем эквивалентность

$$\pi_0\Gamma(\mathcal{L}X, \mathcal{O}_{\mathcal{L}X}) \simeq \bigoplus_{p=0}^{\dim X} H^p(X, \Omega_X^p).$$

Теперь заметим, что любой пучок $E \in \mathrm{QCoh}(X)$ имеет каноническую $\mathcal{L}X$-эквивариантную структуру, заданную

$$\mathrm{QCoh}(X) \xrightarrow{q_2^*} \mathrm{QCoh}(X \times X) \xrightarrow{c^*} \mathrm{QCoh}(B_{/X}\mathcal{L}X) = \mathrm{Rep}_{\mathcal{L}X}(\mathrm{QCoh}(X)),$$

где $B_{/X}\mathcal{L}X \simeq (\widehat{X \times X})_\Delta \in \mathrm{PreStack}_{/X}$ это распетливание $\mathcal{L}X$ над X (как формальной задачи модулей), а за $B_{/X}\mathcal{L}X \xrightarrow{c} X \times X$ обозначен канонический морфизм. Более того, с помощью несложной манипуляции диаграммами, мы получаем следующее

Предложение 5.4. Эндоморфизм $i^*E \overset{\beta}{\simeq} i^*E$ эквивалентен морфизму $i^*\alpha_E$, где α_E это морфизм действия $\mathcal{L}X$ на E.

Таким образом, комбинируя вторую часть Теоремы 5.2 с примером 4.2, мы видим что в случае гладкого X морфизм действия α_E может быть описан в терминах действия соответствующей алгебры Ли $\mathrm{Lie}_X(\mathcal{L}X) \simeq \mathbb{T}_X[-1]$ в категории $\mathrm{QCoh}(X)$. Это действие можно описать конкретно: легко увидеть, что при $X = B\mathbb{G}_m$ это действие задается первым классом Черна, а потому, используя принцип расщепления, мы получаем

Предложение 5.5 (Явное описание категорного характера Черна)**.** Пусть X это гладкая, собственная схема, а $E \in \mathrm{QCoh}(X)$ это совершенный пучок с эндоморфизмом $E \xrightarrow{t} E$. Тогда в терминах эквивалентности Хохшильда-Костанта-Розенберга 5.3 имеется равенство

$$\mathrm{ch}(E,t) = \mathsf{Tr}_{\mathrm{QCoh}(\mathcal{L}X)}\left(i^*E \xrightarrow[\sim]{\exp(\mathrm{At}(E))} i^*E \xrightarrow{i^*(t)} i^*E \right)$$

элементов $\bigoplus\limits_p H^p(X, \Omega_X^p)$, где $\mathrm{At}(E)$- это класс Атьи E.

Следствие 5.6. Пусть $E \in \mathrm{QCoh}(X)$ это совершенный пучок. Тогда в терминах эквивалентности Хохшильда-Костанта-Розенберга категорный характер Черна $\mathrm{ch}(E, \mathrm{Id}_E)$ совпадает с классическим характером Черна $\mathrm{ch}(E)$.

6 Класс Тодда как морфизм следов

Пусть X это гладкая, собственная схема. В этой секции мы хотим дать явное описание морфизму следов

$$\Gamma(\mathcal{L}X, \mathcal{O}_{\mathcal{L}X}) \xrightarrow[\sim]{\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(-\otimes\mathcal{O}_X)} \Gamma(\mathcal{L}X, \omega_{\mathcal{L}X})$$

индуцированному диаграммой

$$\begin{tikzcd} \mathrm{QCoh}(X) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{QCoh}(X)}"] \arrow[d, "-\otimes\mathcal{O}_X"'] & \mathrm{QCoh}(X) \arrow[d, "-\otimes\mathcal{O}_X"] \\ \mathrm{ICoh}(X) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{ICoh}(X)}"'] & \mathrm{ICoh}(X). \end{tikzcd}$$

Нам понадобится следующее

Определение 6.1. Ориентация схемы почти конечного Z это выбор эквивалентности $\mathcal{O}_Z \simeq \omega_Z$ в $\mathrm{QCoh}(Z)$.

Замечание 6.2. Каждая ориентация $u : \mathcal{O}_Z \simeq \omega_Z$ дает эквивалентность

$$\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \xrightarrow[\sim]{u} \Gamma(Z, \omega_Z) \simeq \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)^\vee.$$

Пример 6.3 (Ориентация Серра)**.** Обозначим за $\mathcal{L}X \xrightarrow{i} X$ каноническое отображение. Проекция на старшую компоненту

$$i_*\mathcal{O}_{\mathcal{L}X} \simeq \mathrm{Sym}_{\mathrm{QCoh}(X)}(\Omega_X[1]) \longrightarrow \omega_X$$

дает эквивалентность

$$u_S : \mathcal{O}_{\mathcal{L}X} \xrightarrow[\sim]{} i^!\omega_X \simeq \omega_{\mathcal{L}X}$$

которую мы называем **ориентацией Серра**.

Индуцированная эквивалентность

$$\bigoplus_p \Gamma(X, \Omega_X^p[p]) \simeq \Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathcal{L}X}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathcal{L}X})^\vee \simeq \left(\bigoplus_p \Gamma(X, \Omega_X^p[p])\right)^\vee$$

задана классической двойственностью Пуанкаре.

Пример 6.4 (Каноническая ориентация)**.** Производный стек неподвижных точек X^g (2.2) эндоморфизма $X \xrightarrow{g} X$ обладает **канонической ориентацией**, заданной цепочкой эквивалентностей

$$u_C : \mathcal{O}_{X^g} \simeq i^*\omega_X \otimes i^*\omega_X^{-1} \simeq i^*\omega_X \otimes i^*\omega_{X/X\times X} \simeq i^*\omega_X \otimes \omega_{X^g/X} \simeq i^!\omega_X \simeq \omega_{X^g}.$$

Следствие 6.5. Производное пространство петель $\mathcal{L}X = X^{\mathrm{Id}_X}$ схемы X так же обладает канонической ориентацией.

Используя вариацию $(\infty,2)$-категории соответствий, можно получить следующую теорему:

Теорема 6.6. Морфизм следов

$$\bigoplus_p \Gamma(X,\Omega^p_X[p]) \simeq \mathsf{Tr}(\mathrm{Id}_{\mathrm{QCoh}(X)}) \xrightarrow{\mathsf{Tr}(\mathrm{Id}_{(-\otimes\mathcal{O}_X)})} \mathsf{Tr}(\mathrm{Id}_{\mathrm{QCoh}(X)}) \simeq \left(\bigoplus_p \Gamma(X,\Omega^p_X[p])\right)^\vee$$

индуцированный $\mathrm{QCoh}(X) \xrightarrow{-\otimes\mathcal{O}_X} \mathrm{ICoh}(X)$ может быть получен из канонической ориентации u_C на $\mathcal{L}X$.

Следствие 6.7. Морфизм следов

$$\bigoplus_p \Gamma(X,\Omega^p_X[p]) \xrightarrow{\mathsf{Tr}(\mathrm{Id}_{(-\otimes\mathcal{O}_X)})} \left(\bigoplus_p \Gamma(X,\Omega^p_X[p])\right)^\vee \overset{\text{Poincaré}}{\simeq} \bigoplus_p \Gamma(X,\Omega^p_X[p]).$$

может быть получен из композиции $u_S^{-1}\circ u_C$. Иначе говоря, он измеряет разницу между канонической ориентацией и ориентацией Серра на $\mathcal{L}X$.

Наконец, мы хотим дать конкретное описание $u_S^{-1}\circ u_C$. Для этого вспомним, что $\mathcal{L}X \xrightarrow{i} X$ является формальной группой над X, с соответствующей алгеброй Ли $\mathbb{T}_X[-1]$. Более того:

1. Каждая тривиализация $\mathbb{T}_{\mathcal{L}X/X} \simeq i^*\mathbb{T}_X[-1]$ of $\mathbb{T}_{\mathcal{L}X/X}$ дает ориентацию $\mathcal{L}X$.
2. В терминах этой конструкции, каноническая ориентация и ориентация Серра $\mathcal{L}X$ может быть получена из канонической и абелевой структуры алгебры Ли на $\mathbb{T}_X[-1]$.

Используя это, несложно увидеть, что композиция $u_S^{-1}\circ u_C$ измеряет разницу между канонической и абелевой структурой алгебры Ли на $\mathbb{T}_X[-1]$:

Следствие 6.8. Эквивалентность $u_S^{-1}\circ u_C$ может быть получена как детерминант эквивалентности

$$d\exp_{\mathcal{L}X} : i^*\mathbb{T}_X[-1] \overset{can}{\simeq} \mathbb{T}_{\mathcal{L}X/X} \overset{ab}{\simeq} i^*\mathbb{T}_X[-1].$$

Аналогично схожему утверждению в мире вещественных групп Ли, в мире формальных групп Ли имеется следующая

Теорема 6.9. Let $\widehat{G}$ be a formal group over X such that $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}_X(\widehat{G}) \in \mathrm{Coh}^{<0}$. Then

$$d\exp_{\widehat{G}} = \frac{1-e^{-\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}}}{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}}.$$

Таким образом, комбинируя следствие 6.7, следствие 6.8 и теорему 6.9, мы получаем

Теорема 6.10. Пусть X это гладкая, собственная схема. Тогда в терминах ориентации Серра и изоморфизма Хохшильда-Костанта-Розенберга морфизм следов

$$\bigoplus_p \Gamma(X,\Omega^p_X[p]) \simeq \pi_*\,\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{QCoh}(X)}) \xrightarrow{\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(-\otimes\mathcal{O}_X)} \pi_*\,\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{ICoh}(X)}) \simeq \bigoplus_p \Gamma(X,\Omega^p_X[p])$$

задан умножением на класс Тодда td_X.

7 Теорема Римана-Роха-Гротендика

В этой секции мы обсуждаем, как можно получить классическую и эквивариантную версии теоремы Римана-Роха-Гротендика с помощью формализма следов.

Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ это морфизм гладких, собственный k-схем, а E это совершенный пучок X. Используя функториальность морфизма следов, мы видим, что коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Vect}_k \arrow[r, "E\otimes-"] & \mathrm{QCoh}(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\otimes\mathcal{O}_X", "\sim"'] & \mathrm{QCoh}(Y) \arrow[d, "\otimes\mathcal{O}_Y", "\sim"'] \\
& \mathrm{ICoh}(X) \arrow[r, "f_*"'] & \mathrm{ICoh}(Y)
\end{tikzcd}$$

в $2\,\mathrm{Cat}_k$ после применения формализма 2-следов дает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(E\otimes-)"'] \arrow[rr, bend left, "\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(f_*(E)\otimes-)"] & \mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{QCoh}(X)}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(-\otimes\mathcal{O}_X)"] & \mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{QCoh}(Y)}) \arrow[d, "\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(-\otimes\mathcal{O}_Y)"] \\
& \mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{ICoh}(X)}) \arrow[r, "\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(f_*)"'] & \mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{ICoh}(X)})
\end{tikzcd} \tag{3}$$

в Vect_k. Более того:

- Из следствия 5.6 мы видим, что в терминах эквивалентностей

$$\pi_0\,\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{QCoh}(X)}) \simeq \bigoplus_p H^p(X,\Omega_X^p) \qquad \pi_0\,\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{QCoh}(Y)}) \simeq \bigoplus_p H^p(Y,\Omega_Y^p).$$

  морфизмы следов $\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(E\otimes-)$ и $\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(f_*(E)\otimes-)$ совпадают с классическими характерами Черна пучков E и f_*E.

- Используя предложение 4.3 мы видим, что в терминах эквивалентностей

$$\pi_0\,\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{ICoh}(X)}) \simeq \bigoplus_p H^p(X,\Omega_X^p)^\vee \qquad \pi_0\,\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(\mathrm{Id}_{\mathrm{ICoh}(Y)}) \simeq \bigoplus_p H^p(Y,\Omega_Y^p)^\vee$$

  морфизм следов, индуцированный функтором $\mathrm{ICoh}(X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{ICoh}(Y)$, совпадает с классическим прямым образом на гомологиях.

- Из теоремы 6.10 мы видим, что в терминах двойственности Пуанкаре

$$\bigoplus_p H^p(X,\Omega_X^p) \simeq \bigoplus_p H^p(X,\Omega_X^p)^\vee$$

  морфизм следов $\mathsf{Tr}_{2\,\mathrm{Cat}_k}(-\otimes\mathcal{O}_X)$ задан умножением на класс Тодда td_X.

Суммируя пункты выше, мы получаем:

Теорема 7.1 (Риман-Рох-Гротендик)**.** Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ это морфизм гладких, собственных схем, а $E \in \mathrm{Perf}(X)$ это совершенный пучок на X. Тогда диаграмма 3 дает равенство

$$f_*(\mathrm{ch}(E)\,\mathrm{td}_X) = \mathrm{ch}(f_*(E))\,\mathrm{td}_Y \quad \in \quad \bigoplus_p H^p(Y,\Omega_Y^p).$$

Следовые техники так же позволяют доказать эквивариантную версию формулы Римана-Роха-Гротендика. А именно, пусть

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[loop left, "g_X"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[loop right, "g_Y"]
\end{tikzcd}$$

это эквивариантный морфизм гладких, собственных схем.

Тогда для лакс g_X-эквивариантного, совершенного пучка E на X мы можем построить диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Vect}_k \arrow[r, "E"] & \mathrm{QCoh}(X) \arrow[loop above, "g_{X*}"] \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\sim"', "\otimes\mathcal{O}_X"] & \mathrm{QCoh}(Y) \arrow[loop above, "g_{Y*}"] \arrow[d, "\sim"', "\otimes\mathcal{O}_Y"] \\
& \mathrm{ICoh}(X) \arrow[loop below, "g_{X*}"] \arrow[r, "f_*"'] & \mathrm{ICoh}(Y) \arrow[loop below, "g_{Y*}"]
\end{tikzcd} \tag{4}$$

в Cat_k, после чего применить к ней формализм 2-следов.

Чтобы получить явное описание результата, нам необходимо более конкретное описание соответствующих стеков производных неподвижных точек. Пусть (W,g) гладкая схема вместе с эндоморфизмом $W \xrightarrow{g} W$ таким что приведенная класическская схема $\overline{W^g} := \mathcal{H}^0(W^g)^{\mathsf{red}}$ является гладкой. Обозначим за $\overline{W^g} \xrightarrow{j} W$ каноническое вложение, а за $\mathcal{N}_g^\vee$ его конормальное расслоение. В частности, действие g на Ω^1_W дает эндоморфизм $\mathcal{N}_g^\vee \xrightarrow{g^*_{|\mathcal{N}_g}} \mathcal{N}_g^\vee$.

Комбинируя [GR17b, Chapter 1, Proposition 8.3.2] и некоторые прямолинейные выисления, мы получаем следующую теорему:

Теорема 7.2 (Теорема локализации)**.** Следующие условия эквивалентны:

1. Канонический морфизм $j^g\colon \mathcal{L}\overline{W^g} \longrightarrow W^g$ является эквивалентностью.
2. Детерминант $\det(1-g^*_{|\mathcal{N}_g^\vee}) \in \Gamma(\overline{W^g}, \mathcal{O}_{\overline{W^g}})$ обратим.

Следствие 7.3. В предположениях теоремы выше, мы получаем эквивалентность

$$\Gamma(W^g, \mathcal{O}_{W^g}) \xrightarrow[\sim]{(j^g)^*} \Gamma(\mathcal{L}\overline{W^g}, \mathcal{O}_{\mathcal{L}\overline{W^g}}) \simeq \bigoplus_p \Gamma(\overline{W^g}, \Omega^p_{\overline{W^g}}[p])$$

Рассуждая аналогично неэквивариантному случаю, с помощью теоремы локализации 7.2 мы получаем:

Теорема 7.4 (Эквивариантная теорема Римана-Роха-Гротендика)**.** Пусть $(X, g_X) \xrightarrow{f} (Y, g_Y)$ это эквивариантный морфизм гладких, собственных схем, такой что:

- Приведенные неподвижные локусы $\overline{X^{g_X}}$ and $\overline{Y^{g_Y}}$ являются гладкими,
- Индуцированные морфизмы $1-(g_X^*)_{|\mathcal{N}^\vee_{g_X}}$ и $1-(g_Y^*)_{|\mathcal{N}^\vee_{g_Y}}$ на конормальных расслоениях являются обратимыми.

Тогда для совершенного лакс g_X-эквивариантного пучка (E,t) на X морфизм следов, полученный из диаграммы 4, дает равенство

$$(\overline{f^g})_*\left(\mathrm{ch}(E,t)\frac{\mathrm{td}_{\overline{X^{g_X}}}}{e_{g_X}}\right) = \mathrm{ch}\left(f_*(E,t)\right)\frac{\mathrm{td}_{\overline{Y^{g_Y}}}}{e_{g_Y}}$$

в $\bigoplus_p H^p(\overline{Y^{g_Y}}, \Omega^p_{\overline{Y^{g_Y}}})$, где e_{g_X} это **эквивариантный класс Эйлера**, определяемый как

$$\mathrm{ch}\left(\mathrm{Sym}(\mathcal{N}^\vee_{g_X}[1]), \mathrm{Sym}({g_X}^*_{|\mathcal{N}^\vee_{g_X}[1]})\right) \in \pi_0\Gamma\big(\mathcal{L}\overline{X^{g_X}}, \mathcal{O}_{\mathcal{L}\overline{X^{g_X}}}\big),$$

и аналогично для Y.

8 Апробация

Результаты статей были представлены на докладе “Формализм следов в производной алгебраической геометрии” на семинаре “Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений”, 6 мая 2022.

9 Публикации

Основные результаты опубликованы в [KP18], [KP21] и [KP22].

Список литературы

[Ati57] M. F. Atiyah, *Complex Analytic Connections in Fibre Bundles*, Transactions of the American Mathematical Society **85** (1957), no. 1, 181–207, available at http://www.ams.org/tran/1957-085-01/S0002-9947-1957-0086359-5/S0002-9947-1957-0086359-5.pdf.

[AB84] M. F. Atiyah and R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, Topology **23** (1984), no. 1, 1-28, available at https://doi.org/10.1016/0040-9383(84)90021-1.

[ACH14] D. Arinkin, A. Caldararu, and M. Hablicsek, *Formality of derived intersections and the orbifold HKR isomorphism* (2014), available at https://arxiv.org/abs/1412.5233.

[BZFN10] D. Ben-Zvi, J. Francis, and D. Nadler, *Integral transforms and Drinfeld centers in derived algebraic geometry*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 4, 909-966, available at http://arxiv.org/abs/0805.0157.

[BZN19] D. Ben-Zvi and D. Nadler, *Nonlinear Traces* (2019), available at https://arxiv.org/abs/1305.7175.

[BZN13] ———, *Secondary Traces* (2013), available at https://arxiv.org/abs/1305.7177.

[CT14] D.-C. Cisinski and G. Tabuada, *Lefschetz and Hirzebruch-Riemann-Roch formulas via noncommutative motives*, Journal of Noncommutative Geometry **8** (2014), no. 4, 1171-1190, available at https://arxiv.org/abs/1111.0257.

[Don69] P. Donovan, *The Lefschetz-Riemann-Roch formula*, Bulletin de la Société Mathématique de France **97** (1969), 257-273, DOI 10.24033/bsmf.1680, available at http://www.numdam.org/item/BSMF_1969__97__257_0.

[Gai13] D. Gaitsgory, *Ind-coherent sheaves*, Mosc. Math. J. **13** (2013), 399–528, available at https://arxiv.org/abs/1105.4857.

[GR17a] D. Gaitsgory and N. Rozenblyum, *A Study in Derived Algebraic Geometry, Volume I: Correspondences and Duality*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, 2017.

[GR17b] ———, *A Study in Derived Algebraic Geometry, Volume II: Deformations, Lie Theory and Formal Geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, 2017.

[Gla16] S. Glasman, *Day convolution for ∞-categories*, Mathematical Research Letters **23** (2016), 1369-1385, available at https://arxiv.org/pdf/1308.4940.pdf.

[HSS17] M. Hoyois, S. Scherotzke, and N. Sibilla, *Higher traces, noncommutative motives, and the categorified Chern character*, Advances in Mathematics **309** (2017), available at https://arxiv.org/abs/1511.03589.

[HSS18] ———, *The categorified Grothendieck-Riemann-Roch theorem* (2018), available at https://arxiv.org/abs/1804.00879.

[KP18] G. Kondyrev and A. Prikhodko, *Categorical proof of Holomorphic Atiyah-Bott formula*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu (2018), available at https://arxiv.org/abs/1607.06345.

[KP21] ———, *Equivariant Grothendieck-Riemann-Roch theorem via formal deformation theory*, Cambridge Journal of Mathematics (2021), available at https://arxiv.org/abs/1906.00172.

[KP22] ———, *Holomorphic Atiyah–Bott formula for correspondences*, Arnold Mathematical Journal (2022).

[Lun11] V. Lunts, *Lefschetz fixed point theorems for Fourier-Mukai functors and DG algebras*, Journal of Algebra **356** (2011), available at https://arxiv.org/abs/1102.2884.

[Lur09] J. Lurie, *Higher Topos Theory*, Princeton University Press, 2009.

[Lur17] ———, *Higher Algebra* (2017), available at http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf.

[Mar08] N. Markarian, *The Atiyah class, Hochschild cohomology and the Riemann-Roch theorem*, Journal of the London Mathematical Society **79** (2008), no. 1, 129-143, available at https://arxiv.org/abs/math/0610553.

[Pol11] A. Polishchuk, *Lefschetz type formulas for dg-categories*, Selecta Mathematica **20** (2011), available at https://arxiv.org/abs/1111.0728.

[Shk13] D. Shklyarov, *Hirzebruch-Riemann-Roch-type formula for DG algebras*, Proceedings of the London Mathematical Society **106** (2013), no. 1, 1-32, available at https://arxiv.org/abs/0710.1937.

[STV15] T. Schürg, B. Toën, and G. Vezzosi, *Derived algebraic geometry, determinants of perfect complexes, and applications to obstruction theories for maps and complexes*, Reine Angew. Math. **702** (2015), 1-40.

[TV09] B. Toën and G. Vezzosi, *Chern Character, Loop Spaces and Derived Algebraic Geometry*, Algebraic Topology: The Abel Symposium 2007 (N. Baas, E. M. Friedlander, B. Jahren, and P. A. Østvær, eds.) **4** (2009), 331-354.

[TV15] ———, *Caractères de Chern, traces équivariantes et géométrie algébrique dérivée*, Selecta Mathematica **21** (2015), 449-554.