Федеральное государственное автономное
образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Ионов Андрей Алексеевич

Эквивариантная теория особенностей и зеркальная симметрия для многочленов Ферма с неабелевой группой симметрий

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
профессор,
доктор физико-математических наук
Максим Эдуардович Казарян

Москва – 2022

Введение

Данный текст является обзором работ [1],[2] и [9] соискателя, представленных к защите диссертации.

Работы посвящены изучению различных гомологических ([1]) и дифференциально геометрических ([9]) инвариантов некоторого класса особенностей с действием конечной неабелевой группы симметрий, а также построению примеров зеркальной симметрии для такого рода особенностей ([2]). Более конкретно, в работах изучаются особенности типа Ферма $f_{n,N} = x_1^n + \ldots + x_N^n$ с действием группы, порожденной перескалированиями и перестановками координат.

0.1. **Обзор области исследований.** Вслед за работами физиков конца 80х ([11], [21], [22]), так называемые, орбифолды Ландау–Гинзбурга широко изучаются как в математике, так и в математической физике. По сути, они представляют из себя пару (f, G), состоящую из многочлена f, имеющего изолированную особенность в 0, и конечной группы симметрий G. После работы [4] орбифолды Ландау–Гинзбурга с многочленом f, являющимся, что называется, обратимым, и G – диагональной группой его симметрий, стали важной частью зеркальной симметрии. Для такого класса пар (f, G) в выше упомянутой работе строится двойственная пара (f^T, G^T), а также сравниваются некоторые инварианты для двойственных пар. Стоит отметить, что большинство известных результатов такого рода рассматривают только абелевы группы симметрий G.

Важным гомологическим инвариантом таких пар являются когомологии Хохшильда $HH^*(MF(f, G))$ dg-категории G-эквивариантных матричных факторизаций многочлена f, или, в физической терминологии, B-фазовое пространство. Они имеют естественную структуру фробениусовой алгебры с умножением заданным $\cup$-произведения. Основной результат [20] явно описывает фробениусову алгебру $HH^*(MF(f, G))$ в случае абелевой G. Это пространство также снабжено биградуировкой с помощью левого и правого заряда, введенной в [11], которая играет роль разложения Ходжа.

В [12] было построено зеркальное отображение для фазовых пространств для обратимых полиномов с диагональными группами симметрий (т.е. в условиях [4]). Зеркальное отображение переставляет левый и правый заряды.

В [6], а также последующих работах этих же авторов, было предложено и изучалось обобщение зеркальной симметрии Берглунда–Хюбша–Хенингсона. В этих работах рассматриваются пары (f, G) следующего вида: f – обратимый, G – полупрямое произведение группы перестановок координат, удовлетворяющей специальному условию чётности, и подгруппы диагональных симметрий. Двойственность для таких пар преобразует f и диагональную часть G так же, как и в [4], и сохраняет перестановочную часть G. Некоторые вариации и примеры зеркальной симметрии для неабелевых орбифолдов Ландау–Гинзбурга также рассматривались в [13] и [17].

Представляет интерес получение информации о классических (неэквивариантных) особенностях при помощи изучения эквивариантных. Зеркальная симметрии служит примером такого рода процедуры. Другим примером является, например, [14].

Важным примером структуры, появляющейся при изучении классических особенностей, является структура фробениусова многообразия на пространстве версальных деформаций особенностей и близкое понятие примитивных форм, введенное в [18]. Ключевая теорема абстрактного существования примитивных форм была доказана в [19]. Однако, существует лишь небольшое количество явных примеров конструкций примитивных форм.

0.2. **Обзор полученных результатов.** В [1] авторы вычисляют, как биградуированную фробениусову алгебру, когомологии Хохшильда орбифолдов Ландау–Гинзбурга $(f_{n,N}, G)$, где G является подгруппой группы, порожденной перескалированиями и перестановками координат (подробности см. в разделе 2.1). Основываясь на этих результатах, в [2] авторы строят зеркальное отображения для некоторых особенностей такого вида (подробности см. в разделе 2.2). Эти результаты развивают предложение [6] об обобщении оригинальной концепции зеркальной симметрии Берглунда–Хюбша–Хенингсона. Ключевой новизной полученных результатов является то, что они являются одними из первых такого рода результатов для неабелевых групп симметрий.

В [9] автор приводит явную конструкцию примитивных форм Саито в случае, так называемых, гепнеровских особенностей. Интерес к этому вопросу проистекает из работ физиков [7],[3], устанавливающих связь теории особенностей и моделей Казамы-Сузуки (подробности см. в разделе 2.3).

0.3. **Методы исследований.** Соискатель мотивировался работами [20], [6] и [3] при постановке задач, а также применяет и заметно расширяет методы и идеи работ [20], [12] и [5].

0.4. **Дальнейшие перспективы и приложения.** Хотя соискателем и были получены ответы на большое количество ключевых вопросов, работа в этой области, пока не завершена. Важным является обобщение результатов [1] и дальнейшее исследование отображения [2] в других примерах, что планируется выполнить в перспективе.

Основываясь на полученных результатах, также планируется подойти к вопросу построения примитивных форм Саито для эквивариантных особенностей.

Существенным является понимание категорных аспектов истории. В частности, должны существовать интересные связи с полуортогональным разложением, рассмотренным в [16], а также с категорным соответствием МакКея. Изучение последнего уже было начато в работе соискателя [10].

Наконец, внутреннее определение и структура A-фазового пространства для орбифолдов Ландау–Гинзбурга с неабелевой группой симметрий G остаётся непонятым и нуждается в дальнейшем изучении. Гипотезы зеркальной симметрии, вычисления, проделанные в [1], и отображение, построенное в [2], могут пролить свет на этот вопрос. В этом контексте особенно интересны связи с [15] и [8].

0.5. **Благодарности.** Соискатель безгранично благодарен своему учителю, безвременно ушедшему Сергею Мироновичу Натанзону.

Соискатель также глубоко признателен А. А. Басалаеву и М. Э. Казаряну.

1. Формулировки полученных результатов

Для фиксированных натуральрых чисел n и N рассмотрим многочлен $f_{n,N} = x_1^n + \ldots + x_N^n$ вместе с полной группой его симметрий, сплетенным произведением, $G_{n,N} = S_N \wr \mu_n := S_N \ltimes (\mu_n)^N$, где N копий группы n-ых корней из единицы μ_n действуют перескалированием соответствующих координат, а группа перестановок S_N действует, переставляя координаты. Данный полином является обратимым и самодвойственным в том смысле, что $f_{n,N}^T = f_{n,N}$.

1.1. **Когомологии Хохшильда для многочленов типа Ферма с неабелевыми симметриями.** В работе [1], выполненной совместно с А. Басалаевым, авторы расширяют методы [20] и вычисляют биградуированную фробениусову алгебру $HH^*(MF(f_{n,N}, G))$ для всех $G \subset G_{n,N}$. Это один из первых такого рода результатов, полученных в случае некоммутативной G.

Следуя [20], мы видим цепочку изоморфизмов колец

$$HH^*(MF(f,G)) \cong HH^*(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \rtimes G, f) \cong HH^*(\mathbb{C}[\mathbf{x}], f; \mathbb{C}[\mathbf{x}] \rtimes G)^G,$$

где второе кольцо – это кольцо когомологий Хохшильда алгебры с кривизной, а третье – G-инварианты в когомологиях Хохшильда алгебры с кривизной с коэффициентами в бимодуле с действием G. Отсюда видно, что достаточно изучить алгебру $HH^*(\mathbb{C}[\mathbf{x}], f_{n,N}; \mathbb{C}[\mathbf{x}] \rtimes G_{n,N})$ вместе с действием $G_{n,N}$, после чего можно будет вычислить $HH^*(MF(f_{n,N}, G))$ для любых $G \subset G_{n,N}$, так как $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \rtimes G$ является прямым слагаемым (как бимодуль) в $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \rtimes G_{n,N}$.

Раскладывая в сумму $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \rtimes G = \bigoplus_{g\in G} \mathbb{C}[\mathbf{x}]_g$ относительно второго слагаемого, получаем G-градуировку

$$HH^*(\mathbb{C}[\mathbf{x}], f; \mathbb{C}[\mathbf{x}] \rtimes G) = \bigoplus_{g\in G} HH^*(\mathbb{C}[\mathbf{x}], f; \mathbb{C}[\mathbf{x}]_g),$$

согласованную с умножением и действием. Слагаемые в этой сумме называются секторами. Для каждого сектора, рассмотренного как $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$-модуль, имеем изоморфизм

$$HH^*(\mathbb{C}[\mathbf{x}], f; \mathbb{C}[\mathbf{x}]_g) \cong Jac(f^g)\xi_g,$$

гда $Jac(f^g)$ – это кольцо Якоби f^g, ограничения f на неподвижные точки g, а ξ_g – это образующая, представляющая старшую внешнюю степень конормального расслоения к неподвижным точкам g. Следовательно, достаточно вычислить $\cup$-произведения образующих ξ_g и действие на них G.

Для ясности, мы сначала представляем ответ в случае $G = S_N$.

Теорема 1.1. 1) (Следствие 21) Над $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ алгебра $HH^*(\mathbb{C}[\mathbf{x}], f_{n,N}; \mathbb{C}[\mathbf{x}] \rtimes S_N)$ порождена образующими $\xi_{(ij)}$, соответствующими транспозициям.

2) (Предложение 12, 17) Для перестановки $\sigma \in S_N$ мы имеем

$$\xi_\sigma \cup \xi_{(ij)} = \pm\xi_{\sigma(ij)},$$

если i и j лежат в разных циклах σ и

$$\xi_\sigma \cup \xi_{(ij)} = \pm n \sum_{k+l=n-2} x_i^k x_j^l \xi_{\sigma(ij)},$$

если i и j лежат в одном и том же цикле σ.

3) (Предложение 38) Мы имеем $(ij)^*(\xi_{(kl)}) = \pm\xi_{(ij)(kl)(ij)}$.

Теперь опишем ответ в общем случае $G = G_{n,N}$. Он имеет похожую структуру, но более техничен. Обозначим через t_i –групповой элемент, соответствующий умножению i-ой координаты на фиксированный n-ый примитивный корень из единицы ζ_n. Теперь порождающими элементами будут образующие, соответствующие произведениям (ij) и $t_i^d t_j^{-d}$, и элементы t_i^d (Предложение 22). Соотношения с образующими первого типа аналогичны соотношениям с транспозициями (Предложение 23). Дополнительные соотношения для образующих второго типа имеют вид

$$\xi_{t_i^d} \cup \xi_{t_i^{-d}} = \frac{n}{\zeta_n^d - 1} x_i^{n-2}\xi_e$$

и

$$\xi_{t_i^{d_1}} \cup \xi_{t_i^{-d_2}} = 0$$

для ненулевых $d_1 \neq d_2$ (Предложение 28). Действие группы описывается в Предложения 33, 37, 38.

Мы также проверяем согласованность произведения и действия G с биградуировкой (Предложение 30) и с вычетным симметричным билинейным спариванием (Теорема 32, Предложение 45).

1.2. **Зеркальное отображение для многочленов Ферма с неабелевой группой симметрий.** В работе [2], выполненной совместно с А. Басалаевым, авторы применяют результаты предыдущей работы для того чтобы обобщить зеркальное отображение из [12] на случай $f_{n,N}$ с $n = N$ (необходимое для зеркальной симметрии условие Калаби–Яу), являющееся простым числом (техническое условие, выполненное, например, в важном случае $n = N = 5$, рассмотренном в [13]), и группой симметрий, предложенной в [6]. Заметим, что условие чётности из [6] можно проинтерпретировать гомологически, а именно, оно эквивалентно тому, что каноническое расслоение локально тривиально, как S-эквивариантный пучок для группы перестановочных симметрий $S \subset S_N$. Это приводит к определению подпространства стабильных секторов $HH^*(MF(f_{n,N}, G))^{\mathrm{st}} \subseteq HH^*(MF(f_{n,N}, G))$, как секторов, генераторы ξ_g которых сохраняются действием централизатора $g \in G$.

Зафиксируем $S \subset S_N$, и пусть T_0 – это группа диагональных симметрий $f_{n,N}$ с детерминантом 1 (обозначалось SL_f в [2]), а $\langle J \rangle \simeq \mu_n$ – группа скалярных симметрий $f_{n,N}$, так что мы имеем двойственность пар $(f_{n,N}, \langle J \rangle)^T = (f_{n,N}, T_0)$. Мы строим зеркальное отображение

$$\tau\colon HH^*(MF(f_{n,N}, S \ltimes T_0))^{\mathrm{st}} \to HH^*(MF(f_{n,N}, S \times \langle J \rangle))^{\mathrm{st}}$$

и доказываем

Теорема 1.2. 1) (Теорема 1) Зеркальное отображение τ – изоморфизм, и переставляет градуировки зарядами.

2) (Теорема 1) Если S удовлетворяет условию чётности, мы имеем $HH^*(MF(f_{n,N}, G))^{\mathrm{st}} = HH^*(MF(f_{n,N}, G))$.

3) (Теорема 2) Если $n = N = 5$, то зеркальное отображение τ можно продолжить до отображения

$$\widehat{\tau}\colon HH^*(MF(f_{5,5}, S \ltimes T_0)) \xrightarrow{\sim} HH^*(MF(f_{5,5}, S \times \langle J \rangle)).$$

Последнее зеркальное отображение покрывает несколько случаев, приведенных в [6] (см. также [13]), и даёт новый взгляд на их гипотезы.

1.3. **Примитивные формы для гепнеровских особенностей.** В работе [9] пары $(f_{n,N}, S_N)$ исследовались с целью получения информации о фактор-особенности $\{f_{n,N} = 0\}/S_N$, называемой гепнеровской особенностью $g_{n,N}$ ($f_{n,N}$ обозначен как $F_{k,n}$ в [9], переименовано здесь для согласованности обозначений; $g_{n,N}$ обозначен

$G_{n,N}$ в [9], переименовано здесь с целью избежать путаницы с группой $G_{n,N}$ выше). А именно, автор приводит конструкцию примитивных форм Саито (Теорема 7.1) и фробениусовых многообразий (Теорема 6.5) для $g_{n,N}$, изучая связь примитивных форм для гепнеровской особенности и примитивных форм для $f_{n,N}$, инвариантных относительно действия S_N. Конкретнее, конструкция фробениусовых многообразий, исходя из данных фробениусова многообразия с действием конечной группы, описанная в [5], используется для того, чтобы построить примитивную форму для $g_{n,N}$ по примитивной форме для $f_{n,N}$, инвариантной под действием S_N.

Этот результат может быть рассмотрен как естественный аналог в теории особенностей абелева-неабелева соответствия из работы [5], связывающего, в частности, квантовые когомологии грассманиана $\mathrm{Gr}(N,n)$ и произведения проективных пространств $(\mathbb{P}^{n-1})^{\times N}$.

Интерес к гепнеровским особенностям возник после построения в [7] изоморфизма между хиральным кольцом $SU(N+1)_{n-N-1}/(SU(N)_{n-N} \times U(1))$ модели Казамы-Сузуки, кольцом Милнора для гепнеровской $g_{n,N}$ и кольцом когомологий грассманиана $\mathrm{Gr}(N,n)$. Примитивные формы для таких особенностей возникли в [3]. Примечательно, что установленная связь свидетельствует о связи между $SU(N+1)_{n-N-1}/(SU(N)_{n-N}\times U(1))$-моделью Казамы-Сузуки и N-ой тензорной степени минимальной модели $SU(2)_n/U(1)$. Это замечание заслуживает дальнейшего исследования.

Список литературы

[1] A. Basalaev, A. Ionov, “Hochschild cohomology of Fermat type polynomials with non-abelian symmetries”, J. Geom. Phys. 174, (2022)

[2] A. Basalaev, A. Ionov, “Mirror map for Fermat polynomial with non-abelian group of symmetries”, Theor. and Math. Phys. 209(2): 1491– 1506, (2021)

[3] A. Belavin, D. Gepner, Y. Kononov, “Flat coordinates for Saito-Frobenius manifolds and String theory”, Pis’ma v Zh. Eksper. Teoret. Fiz., 103:3, 168–172 (2016)

[4] P. Berglund, T. Hübsch, “A generalized construction of mirror manifolds”, Nuclear Phys. B 393, pp. 377–91 (1993)

[5] I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, C. Sabbah, “The abelian/nonabelian correspondence and Frobenius manifolds”, Invent. math. 171: 301 (2008).

[6] W. Ebeling, S. Gusein-Zade, “A version of the Berglund-Hübsch-Henningson duality with nonabelian groups”, Int. Math. Res. Not. (2018)

[7] D. Gepner, “Fusion rings and geometry”, Commun. Math. Phys., 141:381–411 (1991)

[8] M. Gross, T. Kelly, R. Tessler, “Open FJRW Theory and Mirror Symmetry”, preprint arXiv:2203.02435.

[9] A. Ionov, “Primitive forms for Gepner singularities”, J. Geom. Phys, 140, 125–130 (2016)

[10] A. Ionov, “McKay correspondence and orbifold equivalence”, preprint arXiv:2202.12135.

[11] K. A. Intriligator, C. Vafa, “Landau-Ginzburg Orbifolds”, Nucl. Phys., B 339:95–120 (1990)

[12] M. Krawitz, “FJRW rings and Landau-Ginzburg Mirror Symmetry”, PhD thesis, (2009) https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/77910/mkrawitz_1.pdf

[13] D. Mukai, “Nonabelian Landau-Ginzburg orbifolds and Calabi-Yau/Landau-Ginzburg correspondence”, arXiv preprint:1704.04889 (2017)

[14] P. Orlik, “Singularities and group actions”, Bulletin of the American Mathematical Society, 1(5), 703–721, (1979)

[15] A. Polishchuk, A. Vaintrob, “Matrix factorizations and cohomological field theories”, J. Reine Angew. Math., 714, 1–122, (2016)

[16] A. Polishchuk, M. Van den Bergh, “Semiorthogonal decompositions of the categories of equivariant coherent sheaves for some reflection groups”, J. EMS, 21, no. 9, 2653–2749 (2019)

[17] N. Priddis, J. Ward, M. Williams, “Mirror Symmetry for Nonabelian Landau-Ginzburg Models”, SIGMA 16, 059 (2020)

[18] K. Saito, “Period mapping associated to a primitive form”, Publ. R.I.M.S. 19, 1231–1261 (1983)

[19] M. Saito, “On the structure of Brieskorn lattice”, Ann. Inst, Fourier (Grenoble) 39, no.1, 27–72 (1989)

[20] D. Shklyarov, “On Hochschild invariants of Landau-Ginzburg orbifolds”, Adv. Theor. Math. Phys., 24(1), 189–258 (2020)

[21] C. Vafa, “String vacua and orbifoldized LG models”, Modern Physics Letters A 4.12 pp. 1169– 1185 (1989)

[22] E. Witten, “Phases of N= 2 theories in two dimensions”, Nuclear Physics B. Aug 16;403 (1-2):159–222 (1993)