Сколковский институт науки и технологий

На правах рукописи

Елена Николаевна Грязина

РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К АНАЛИЗУ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
доктора компьютерных наук

Москва – 2022

Диссертационная работа выполнена в автономной некоммерческой образовательной организации высшего образования «Сколковский институт науки и технологий».

Оглавление

Глава 1

Введение

До недавних пор рандомизированные алгоритмы в оптимизации в основном были ориентированы на дискретные и NP-трудные задачи. Напротив, в задачах управления основные усилия были направлены на получение выпуклой структуры; в частности, поэтому в задачах управления используется квадратичная устойчивость вместо устойчивости, квадратичная робастная устойчивость вместо робастной устойчивости и т. д. Однако в практических задачах даже при работе с выпуклой областью, целевой функционал, как правило, остается невыпуклым. Таким образом, методы случайного блуждания для генерации асимптотически равномерных выборок актуальны как для оптимизации на выпуклых областях, описываемых линейными матричными неравенствами, так и на невыпуклых (в общем случае несвязных) допустимых областях. В некоторых случаях выпуклые релаксации позволяют построить вычислительно эффективные алгоритмы решения таких задач. Одним из таких примеров является область допустимых режимов энергосистемы, описываемая квадратичными уравнениями.

Развитие теории, моделей и методов расчета оптимальных режимов работы энергосистемы не теряет актуальности ввиду широкого распространения распределенных возобновляемых источников энергии, изменения паттернов потребления электрической энергии и цифровой трансформации энергетической отрасли. Во-первых, управление современными энергосистемами требует быстрых и надежных методов оценки запасов устойчивости. Кроме этого важно принимать обоснованные решения по установке и эксплуатации систем накопления энергии с учетом их деградации. Наконец, широкое распространение распределенных возобновляемых источников энергии способствует запуску одноранговго рынка электроэнергии. Все эти задачи требуют принципиально иного взгляда на область допустимых режимов энергосистемы, а также разработки реализуемых оптимизационных моделей.

В данной работе описаны новые подходы к вычислительно трудоемким задачам оптимизации и управления с особым вниманием к приложениям к задачам электроэнергетических систем. Полученные результаты включают в себя рандомизированные методы и их приложения к задачам управления и оптимизации. Существенное внимание уделено методам случайного блуждания, зарекомендовавшим себя как мощный инструмент для решения задач управления и оптимизации, где ограничения формируют области со сложной геометрией [1]-[2], исследованию выпуклых релаксаций для задачи оптимизации установившихся режимов электроэнергетической сети [3], а также исследованию выпуклости квадратичного изображения [4]. Также в работе предлагаются оптимизационный модели для решения недавно возникших проблем в интеллектуальных сетях, таких как: оценка запасов устойчивости по напряжению [5], выбор оптимального размещения, размеров и технологий систем хранения энергии [6], энергоэффективное управление микроклиматом помещений в зданиях [7], централизованные и распределенные методы оценивания состояния и обнаружения аномалий [8, 9], а также алгоритм поиска равновесия на одноранговом рынке электроэнергии с учетом сетевых ограничений, пользовательских предпочтений и сетевых сборов [10].

Полученные результаты формируют задел для разностороннего анализа и моделирования режимов работы электрических сетей, включая стратегии применения накопителей, одноранговую торговлю электроэнергией, идентификацию нагрузок, массовый переход на электромобили и другие сетевые сервисы.

Цели и задачи исследования. Цель диссертации состоит из двух частей. Первая из них — развитие методов случайного блуждания для задач оптимизации и управления. Сюда относится как разработка новых методов, так и расширение класса задач управления и оптимизации, которые могут быть решены посредством генерации асимптотически равномерных выборок в областях со сложной геометрией. Вторая — развитие теории, моделей и методов расчета оптимальных режимов работы энергосистемы, а также другие приложения к анализу электроэнергетических систем.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложен новый метод случайного блуждания Billiard Walk для генерации асимптотически равномерно распределенных выборок в области с доступным граничным оракулом.

2. Разработаны алгоритмы построения граничного оракула для областей в пространстве параметров устойчивых и робастно устойчивых полиномов, устойчивых матриц и областей, описываемых линейными матричными неравенствами.

3. Проведен анализ выпуклых релаксаций для задачи оптимизации установившегося режима энергосистемы и предложен подход к обоснованию их точности (нулевого зазора двойственности) на основе анализа геометрии области допустимости, которая представляет собой образ квадратичного оператора.

4. Предложен рандомизированный алгоритм, позволяющий определить выпуклость/невыпуклость заданного квадратичного отображения, в частности, области допустимых режимов энергосистемы.

5. Разработан быстрый и робастный алгоритм для оценки статической устойчивости энергосистемы при малых изменениях состояния системы в несколько тысяч узлов.

6. Предложено преобразование оптимизационной модели для невыпуклой задачи оптимального размещения и выбора параметров системы накопления энергии с учетом деградации в задачу целочисленного выпуклого программирования.

7. Предложен распределенный алгоритм поиска равновесия на одноранговом рынке электроэнергии с учетом сетевых ограничений, пользовательских предпочтений и сетевых сборов.

Личный вклад автора заключается в постановке задач, разработке теоретических положений, математических моделей и методов, анализе и обобщении результатов.

Новизна предложенного исследования заключается в разработке новых методов и исследовании оптимизационных моделей. В диссертации предложены:

- метод случайного блуждания для генерации асимптотически равномерных выборок;

- рандомизированный алгоритм проверки выпуклости (или сертификации невыпуклости) образа квадратичного отображения;

- оптимизационная модель для задачи нахождения границы устойчивости применительно к энергосистемам;

- новые модели работы одноранговоно рынка электроэнергии.

По теме диссертации опубликовано 30 работ, среди которых стоит отдельно выделить публикации в журналах первого квартиля Q1: [1], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11]; журналах второго квартиля Q2: [2], [3]; а также публикации в трудах конференций, индексированных международной базой Scopus: [4], [12], [13], [14], [15], [16], [17].

Согласно требованиям диссертационного совета по компьютерным наукам НИУ ВШЭ к защите представлены 10 статей. Защита осуществляется по 7 из них, а именно: первым шести из публикаций повышенного уровня и одной публикации стандартного уровня.

Публикации повышенного уровня:

1. E. Gryazina and B. Polyak, “Random sampling: Billiard walk algorithm,” *European Journal of Operational Research*, vol. 238, no. 2, pp. 497–504, 2014. Scopus Q1 (главный автор; автором диссертации (в неразрывном сотрудничестве с Б. Поляком) доказаны утверждения об асимптотической равномерности точек, порождаемых предложенным методом (Theorems 1,2), проведено численное моделирование и проанализированы его результаты)

2. B.T. Polyak and E.N. Gryazina, “Randomized methods based on new monte carlo schemes for control and optimization,” *Annals of Operations Research*, vol. 189, no. 1, pp. 343–356, 2011. Scopus Q2 (главный автор; автором диссертации предложено использовать и сравнивать различные методы генерации асимптотически равномерно распределенных в заданной области, (в неразрывном сотрудничестве с Б. Поляком) разработаны процедуры граничного оракула для различных классов задач оптимизации и управления, проведены численные эксперименты и проанализированы их результаты)

3. A. Zorin and E.N. Gryazina, “An overview of semidefinite relaxations for optimal power flow problem,” *Automation and Remote Control*, vol. 80, no. 5, pp. 813–833, 2019. Scopus Q2 (главный автор; автором диссертации предложен геометрический подход к анализу точности выпуклых релаксаций, выделены релаксации для сравнения, (в неразрывном сотрудничестве с И. Зориным) проведены численные эксперименты по сравнению точности и масштабируемости выбранных релаксаций)

4. M. Ali, E. Gryazina, O. Khamisov, and T. Sayfutdinov, “Online assessment of voltage stability using newton-corrector algorithm,” *IET Generation,*

Transmission Distribution, vol. 14, no. 19, pp. 4207–4216, 2020. Scopus Q1 (автором диссертации предложена постановка задачи мониторинга запасов устойчивости в близком к реальному времени, идея метода, а также сценарии для численных экспериментов)

5. T. Sayfutdinov, C. Patsios, P. Vorobev, E. Gryazina, D. M. Greenwood, J. W. Bialek, and P. C. Taylor, "Degradation and operation-aware framework for the optimal siting, sizing, and technology selection of battery storage," *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 11, no. 4, pp. 2130–2140, 2019. Scopus Q1 (автором диссертации предложен подход к изменению оптимизационной модели, позволяющий понизить вычислительную сложность прикладной задачи)

6. T. Chernova and E. Gryazina, "Peer-to-peer market with network constraints, user preferences and network charges," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 131, p. 106981, 2021. Scopus Q1 (главный автор; автором диссертации предложена постановка оптимизационной задачи для однораногового рынка электроэнергии, где сетевые ограничения присутствуют явно в виде ограничений, а также (в неразрывном сотрудничестве с Т. Черновой) разработан децентрализованный алгоритм для ее решения)

7. A. Ryzhov, H. Ouerdane, E. Gryazina, A. Bischi, and K. Turitsyn, "Model predictive control of indoor microclimate: Existing building stock comfort improvement," *Energy conversion and management*, vol. 179, pp. 219–228, 2019. Scopus Q1 (автором диссертации выполнен обзор подходов к решению задачи управления микроклиматом в помещении, а также предложена формальная постановка задачи синтеза управления на основе предсказательной модели)

8. S. Asefi, Y. Madhwal, Y. Yanovich, and E. Gryazina, "Application of blockchain for secure data transmission in distributed state estimation," *IEEE*

Transactions on Control of Network Systems, 2021. Scopus Q1 (автором диссертации предложена постановка задачи распределенной оценки состояния и также подбор методов для ее решения)

9. Z. Jin, J. Zhao, L. Ding, S. Chakrabarti, E. Gryazina, and V. Terzija, "Power system anomaly detection using innovation reduction properties of iterated extended kalman filter," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 136, p. 107613, 2022. Scopus Q1 (автором диссертации проведен критический анализ постановки задачи, проверка, анализ и интерпертация полученных результатов)

Публикации стандартного уровня:

1. B. Polyak and E. Gryazina, "Convexity/nonconvexity certificates for power flow analysis," in *Trends in Mathematics*, pp. 221–230, Springer, 2017. Scopus Q3 (автором диссертации предложена концепция использования рандомизированных алгоритмов для анализа выпуклости/невыпуклости образа квадратичного отображения, доказаны утверждения (Theorems 1, 2), проведены численные эксперименты для тестирования работы алгоритма и проанализированы его результаты)

Доклады на конференциях и семинарах:

1. EURO Mini-Conference «Continuous Optimization and knowledge-Based Technologies» EurOPT-2008, Neringa, Lithuania, 20-23.05.2008, «Randomized methods based on new Monte Carlo schemes for convex optimization».

2. The 17th World Congress on International Federation of Automatic Control (IFAC 2008), South Korea, Seoul, 6-11.07.2008, «Hit-and-Run: new design technique for stabilization, robustness and optimization of linear systems».

3. IEEE Multi-conference on Systems and Control, St-Petersburg, 8-10.07.2009, «Robust Stabilization via Hit-and-Run Techniques».

4. VII School-seminar for young researches «Upravlenie boljshimi sistemami», Perm, 26-29.05.2010, «Efficient random walk».

5. IEEE American Control Conference, Baltimore, USA, 30.06-01.07.2010, «Mixed LMI/Randomized Methods for Static Output Feedback Control Design».

6. IEEE Multi-Conference on Systems and Control, Yokohama, Japan, 8-10.09.2010, «Markov Chain Monte Carlo method exploiting barrier functions with applications to control and optimization».

7. XIII-th Conference of Young Scientists «Navigation and Motion Control Saint-Petersburg, 15-18.03.2011, «Randomized Hit-and-Run-based methods in control problems».

8. Seminar at Apatity: Kola Branch of Petrozavodsk State University, 25-30.04.2011, «Randomized sampling algorithm for center of gravity method».

9. The 18th World Congress on International Federation of Automatic Control (IFAC 2011), Milan, Italy, 28.08-2.09.2011, «Hit-and-Run: new randomized technique for control problems recasted as concave programming».

10. 20th International Conference MATHEMATICS. COMPUTER. EDUCATION. Pushino, 28.01-2.02.2013, «Billiard walk – new sampling algorithm».

11. IEEE European Control Conference (ECC), Zurich, Switzerland, 17-19.07.2013, «Robust control of magnetic guidance lightweight AGVs path tracking using randomization methods».

12. 19th World Congress on International Federation of Automatic Control (IFAC 2014), Cape Town, South Africa, 24-29.08.2014, «Billiard walk - a new sampling algorithm for control and optimization».

13. XI School-seminar for young researches «Upravlenie boljshimi sistemami», Arzamas, 6-9.09.2014, «On the comparison of random walks».

14. XII School-seminar for young researches «Upravlenie boljshimi sistemami», Volgograd, 7-11.09.2015, «Trusted region for stability analysis of power system's operating regimes».

15. International Symposium on Energy System Optimization (ISESO 2015), Heidelberg, Germany, 9-10.11.2015, «Convexity/nonconvexity certificates for power flow analysis».

16. IEEE International Conference on the Science of Electrical Engineering (ICSEE), 16-18.11.2016, Eilat, Israel, «Fragility of the semidefinite relaxation for the optimal power flow problem».

17. International conference «Relay protection and automation for electric power systems», Saint-Petersburg, 25-28.05.2017, «Analysis of dynamic stability using adaptive quadratic Lyapunov functions».

18. XVII Baikal International School-Seminar «Methods of optimization and their applications», Maksimikha, Buryatia, 31.07-06.08.2017, «Semidefinite relaxations for the optimal power flow: robust or fragile?»

19. All-Moscow regular scientific seminar «Control Theory and Optimization» in Institute for Control Sciences, Moscow, 24.10.2017, «A few optimization problems in energy sector».

20. IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC / ICPS Europe), Palermo, Italy, 12-15.06.2018, «Methodology for Computation of Online Voltage Stability Assessment».

21. 1st IEEE International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE 2019), Moscow, 14-15.03.2019, «Decentralized Optimal Power Flow Under Security Constraints», «Experimental Study of Control Strategies for HVAC Systems».

22. Russian National Committee of CIGRE, Subcommitte C5 Seminar «Energy markets and their regulation», Moscow, 8.04.2019, «Convex relaxations for OPF problem».

23. IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Europe (ISGT-Europe 2019), Bucharest, Romania, 29.09-02.10.2019, «Optimal Energy Management for Off-Grid Hybrid System using Hybrid Optimization Technique».

24. IEEE PowerTech, Milan, Italy, 23-27.06.2019, «Suboptimality of decentralized methods for OPF», «Fast calculation of the transfer capability margins».

25. Cyberverse related 3D algorithms and optimization workshop, Huawei, Moscow, 15-16.09.2020, «Multi-agent distributed cooperation in control and optimization».

26. 3rd IFAC Workshop on Cyber-Physical Human Systems CPHS 2020: Beijing, China, 3-5.12.2020, «ADMM-based Distributed State Estimation for Power Systems: Evaluation of Performance».

27. IEEE PowerTech, Madrid, Spain, 28.06-02.07.2021, «Peer-to-Peer Market with Energy Storage Systems», «Evaluation of power flow models for smart distribution grids».

28. 4th International Conference on Smart Energy Systems and Technologies (SEST), Vaasa, Finland, 6-8.09.2021, «Optimal partitioning in distributed state estimation considering a modified convergence criterion».

29. The 53rd North American Power Symposium (NAPS), 14-16.11.2021, «A Novel Open Source Power Systems Computational Toolbox».

30. All-Moscow regular scientific seminar «Control Theory and Optimization» in Institute for Control Sciences, Moscow, 27.09.2022, «Randomized algorithms and optimization problems in energy sector».

Глава 2

Обзор основных результатов

Изложение результатов работы начинается с описания общей методологии генерации выборки в областях со сложной геометрией [1] и решаемых посредством случайных блужданий задач управления и оптимизации [2]. Далее будет представлен рандомизированный алгоритм для подтверждения выпуклости/невыпуклости заданного квадратичного отображения [4]. Наконец, будут описаны оптимизационные модели для актуальных задач энергетики и методы расчета оптимальных режимов работы энергосистемы.

2.1 Случайные блуждания

Генерация точек, равномерно распределенных в произвольной ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ (sampling), находит применение во многих приложениях [18]. Прямые методы генерации таких выборок обычно основаны на одном из трех подходов: отсеивание, трансформация и композиция. При отсеивании интересующая нас область Q погружается в ограничивающую ее область B (как правило это параллелепипед или шар) с доступным генератором равномерных выборок. На следующем шаге образцы, не принадлежащие Q, отсеиваются. Пусть Q – единичный шар, а ограничивающая область B – куб $[-1, 1]^n$. Тогда для $n = 2k$ соотношение объемов куба и шара составит $q = \dfrac{\mathrm{Vol}(Q)}{\mathrm{Vol}(B)} = \dfrac{\pi^k}{k!2}$, таким образом, $q \sim 10^{-8}$, и для $n = 20$ требуется сгенерировать $\sim 10^8$ точек, чтобы получить несколько, принадлежающих Q. Для многогранников это отношение может быть значительно меньше. Другой способ получения интересуемых выборок – использовать генератор псевдослучайных чисел для простой области B, а затем отобразить B в Q посредством гладкого преобразования с постоянным якобианом. Например, чтобы получить однородные выборки в эллипсоиде $Q = \{x : x^T Ax \leq 1\}$, где A – положительно определенная матрица, достаточно взять y равномерно распределенным в единичном шаре $||y||_2 \leq 1$ и преобразовать их как $x = A^{-1/2}y$. К сожалению, такие преобразования существуют только для ограниченного класса областей. В композиционном подходе мы разбиваем область Q на конечное число подобластей, для которых генератор равномерных выборок доступен. Помимо узкого класса областей с доступным разбиением, в общем случае Q можно разбить на конечное объединение симплексов, при этом количество симплексов делает процедуру вычислительно сложной.

Альтернативные способы получения асимптотически равномерных выборок основаны на использовании версии метода Монте-Карло, а именно, Монте-Карло на основе Марковских цепей (MCMC) [19]. Например, сравнение случайных блужданий для вычисления объема можно найти в работе [20]. Одним из наиболее известных и эффективных алгоритмов типа MCMC является Hit-and-Run (HR), предложенный и проанализированный в [21]. К сожалению, даже для простых плохо обусловленных областей (например, множеств уровня плохо обусловленных функций), метод HR не работает или, по крайней мере, в вычислительном отношении неэффективен. Разнообразие применений и недостатки существующих методов случайных блужданий открывают широкое поле для улучшения алгоритмов случайного блуждания. В частности, были предприняты попытки использовать барьерные функции, распространенные в анализе методов внутренней точки для выпуклой оптимизации, и совместить их со случайными блужданиями на основе марковских цепей. В результате этих попыток был предложен барьерный метод Монте-Карло [22], чьи свойства перемешивания в некотрых случайх оказались предпочтительнее метода HR. Однако сложность каждой итерации в целом оставалась достаточно высокой (в частности, на каждой итерации требуется вычисление $\left(\nabla^2 F(x)\right)^{-1/2}$, где $F(x)$ — барьерная функция для области Q). Более того, такой подход не может ускорить сходимость распределения получаемых точек к равномерному для областей, подобных симплексам.

Перейдем к описанию нового метода случайного блуждания – Бильярдного блуждания (Billiard Walk) – основанного на физическом явлении диффузии газа в сосуде. Частица газа движется с постоянной скоростью до тех пор, пока не столкнется с границей сосуда, затем она упруго отражается (угол падения равен углу отражения) и так далее. Когда частица сталкивается с другой частицей, ее направление и скорость меняются. В нашей упрощенной модели мы предполагаем, что направление изменяется случайным образом, а скорость остается неизменной. Таким образом, предложенная модель сочетает в себе идеи метода Hit-and-Run с использованием бильярдных траекторий. Существует обширная литература по теории математических бильярдов, много полезных фактов о бильярдных траекториях можно почерпнуть в монографиях [23, 24]. Однако, в отличие от традиционных теорий, рассматривающих поведение одной конкретной бильярдной траектории в разных областях (они называются бильярдными столами), изучающих их эргодические свойства и условия существования периодических орбит, мы рассматриваем бильярдные траектории со случайной сменой направления в случайной точке траектории. Такое введение случайности обогащает их эргодические свойства.

Предположим, что имеется ограниченное замкнутое связное множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ и начальная точка $x^0 \in Q$. Наша цель – генерировать асимптотически равномерные выборки $x^i \in Q$, $i = 1, \dots, N$. Краткое описание алгоритма Hit-and-Run можно дать следующим образом: на каждой итерации метод Hit-and-Run генерирует случайное направление, равномерно распределенное на единичной сфере, и выбирает следующую точку равномерно из пересечения прямой в заданном направлении с областью Q.

Новый алгоритм Billiard Walk генерирует случайное направление равномерно, как и Hit-and-Run. Однако следующая точка выбирается как конец бильярдной траектории длины ℓ. Эта длина выбрана случайным образом: мы предполагаем, что вероятность столкновения с другими частицами пропорциональна δt для малых промежутков времени δt, что обосновывает формулу для ℓ в Алгоритме 1 ниже.

Algorithm 1 Алгоритм бильярдного блуждания – Billiard Walk

Require: $x^0 \in \mathrm{Int}\ Q$, τ
Ensure: Последовательность x^i, $i = 1, \dots, N$
  $i \leftarrow 0$
  $x \leftarrow x^0$
  while $i \leq N$ **do**
    1: $\ell \leftarrow -\tau \log \xi$, $\xi \sim \mathcal{U}[0, 1]$ ▷ Генерируем длину траектории
    2: Выбрать случайное направление $d \in \mathbb{R}^n \sim \mathcal{U}[\|d\| = 1]$
    3: Построить бильярдную траекторию из точки x в начальном направлении d. При столкновении с границей с вектором нормали s, $||s|| = 1$, направление меняется по закону $d \leftarrow d - 2(d, s)s$
    if траектория попала в негладкую точку границы ИЛИ количество отражений превысило $10n$ **then**
      Перейти к шагу 4:
    end if
    4: $i \leftarrow i + 1$
    5: $x^i \leftarrow$ конец траектории длины ℓ
  end while

Доказана асимптотическая равномерность точек, генерируемых методом бильярдного блуждания отдельно для выпуклых и невыпуклых случаев. Предположения об области Q в этих случаях разнятся, однако сам алгоритм остается неизменным. Рассматрим марковскую цепь, порожденную методом бильярдного блуждания $x^0, x^1, \dots$. Для произвольной измеримой области $A \subseteq Q$ обозначим через $\mathbf{P}(A|x)$ вероятность того, что $x^{i+1} \in A$ при $x^i = x$. Тогда $\mathbf{P}_N(A|x)$ – вероятность получить $x^{i+N} \in A$ при $x^i = x$. Также обозначим через $p(y|x)$ плотность вероятности для $\mathbf{P}(A|x)$, т.е. $\mathbf{P}(A|x) = \int\limits_A p(y|x)dy$.

Theorem 1 *Пусть Q – открытая ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей. Тогда распределение точек x^i, порожденных алгоритмом случайного блуждания Billiard Walk, асимптотически равномерно* *в Q, т.е.*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}_N(A|x) = \lambda(A)$$

для всякой измеримой $A \subseteq Q$, $\lambda(A) = Vol(A)/Vol(Q)$ и всякой начальной точки x.

Theorem 2 *Пусть Q – открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей. Пусть также для любых $x, y \in Q$ существует кусочно-линейный путь, соединяющий точки x и y, лежащий целиком в Q и имеющий конечное число B линейных отрезков (B – произвольное целое положительное число). Тогда распределение точек x^i, порожденных алгоритмом случайного блуждания Billiard Walk, асимптотически равномерно в Q в том же смысле, что и в Теореме 1.*

2.2 Приложения к задачам оптимизации и управления

Интерес к применению рандомизированных алгоритмов в управлении и оптимизации отражен в монографии [18]. До последних лет рандомизированные алгоритмы в оптимизации в основном были ориентированы на задачи дискретной оптимизации и NP-трудные задачи [19]. Публикаций, связанных с выпуклым случаем, немного, наиболее известной можно считать работу [25]. Наоборот, в области управления основные усилия были направлены на получение задачи с выпуклой структурой; поэтому в задачах управления используется квадратичная устойчивость вместо устойчивости, квадратичная робастная устойчивость вместо робастной устойчивости и т. д. Задача работы с базовыми свойствами систем (такими как устойчивость) остается сложной, невзирая не невыпуклость допустимых областей. Представляется, что метод Hit-and-Run и его усовершенствованная модификация – алгоритм Billiard Walk – предоставляют полезную возможность для достижения этой цели. Насколько нам известно, статья [2] является первой попыткой использовать эти случайные блуждания применительно к задачам управления. Случайные блуждания представляют собой многообещающий инструмент для поиска параметров стабилизирующих регуляторов и оптимизации линейных систем. Они позволяют генерировать случайные точки внутри области устойчивости или внутри области спецификации производительности в пространстве матриц усиления для обратной связи. Таким образом мы можем, например, сгенерировать стабилизирующие регуляторы фиксированной структуры и оптимизировать какой-либо критерий качества системы управления. Единственное требование к области состоит в том, что для нее должна существовать процедура граничного оракула.

Ниже приводятся детали применения Монте-Карло на основе марковских цепей для генерации выборок, асимптотически равномерно распределенных в ограниченной области $X \in \mathbb{R}^n$, для определенных классов приложений. Основным понятием и вычислительной процедурой на этом пути является *граничный оракул* – алгоритм, который предоставляет $L = \{t \in \mathbb{R} : x^0 + td \in X\}$ для заданной допустимой точки $x^0 \in X$ и вектора d, определяющего направление в $\mathbb{R}^n$. В простейшем случае, когда область X выпукла, граничный оракул сообщает ограниченный интервал $[\underline{t}, \overline{t}]$, где $\underline{t} = \inf\{x^0 + td \in X\}$, $\overline{t} = \sup\{x^0 + td \in X\}$. В более общей ситуации граничный оракул предоставляет информацию о всех пересечениях прямой $x^0 + td, -\infty < t < +\infty$ с областью X. Также будем говорить о *полном граничном оракуле* в том случае, если доступна информация о внутренней нормали к Q в крайних точках L.

Граничный оракул доступен для разнообразных областей X. Опишем явные формулировки для граничного оракула для ряда практически важных приложений. В задачах управления области X являются допустимыми областями параметров, например, параметров синтезируемого регулятора или неопределенности. В этих случаях допустимые точки внутри области обозначаются через k. Будем придерживаться обозначений $k \in X$, когда речь идет о параметрах регулятора, и $P \in X$ в случае генерации точек в пространстве симметричных матриц.

1. Для областей, заданных линейными уравнениями

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : c_i^T x \le a_i,\ i = 1, \dots, m\right\}, \tag{2.1}$$

начальной точки x^0 и направления d граничный оракул представляет собой интервал $[\underline{t}, \overline{t}]$,

$$\underline{t} = \min_{i:\ c_i^T d > 0} \frac{a_i - c_i^T x^0}{c_i^T d}, \quad \overline{t} = \max_{i:\ c_i^T d > 0} \frac{a_i - c_i^T x^0}{c_i^T d}.$$

2. Области устойчивости полиномов.

Рассмотрим аффинное семейство полиномов

$$P(s,k) = P_0(s) + \sum_{i=1}^{n} k_i P_i(s), \tag{2.2}$$

где $P_i(s)$ – полиномы степени m. Полином $P(s)$ является устойчивым (гурвицевым), когда вещественная часть всех его корней отрицательна. Обозначим через X область в пространстве коэффициентов $k = (k_1, \dots, k_n)$, соответствующую устойчивым полиномам:

$$X = \{k : P(s,k) \text{ гурвицев}\}. \tag{2.3}$$

Геометрия таких областей и их граница может быть весьма сложной. В частности, область X может состоять из нескольких несвязных друг с другом частей [26].

Генерация точек в такой области может быть организована следующим образом. Предположим, что начальный устойчивый полином $P(s,k^0)$ известен. Далее сгенерируем случайное направление $d \in \mathbb{R}^n$, равномерно распределенное на единичной сфере, и обозначим $P(s, k^0 + td) = A(s) + tB(s),\ A(s) = P(s,k^0),\ B(s) = \sum_{i=1}^{n} d_i P_i(s)$. Явный алгоритм построения граничного оракула, т. е. поиска

$L = \{t \in \mathbb{R} : A(s) + tB(s)$ гурвицева $\}$ описан в [26] (см. Теорему 2 и Алгорим 1). В общем случае L состоит из не более чем $m/2+1$ интервала.

3. Область устойчивости матриц.

   Для матричного семейства $A + BKC$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ заданы, а $K \in \mathbb{R}^{m\times l}$ – переменная, содержащая неопределенности или параметры регулятора, можно выделить область стабилизирующих параметров:

$$X = \{K : A + BKC \text{ гурвицева}\}, \tag{2.4}$$

   т. е. все собственные значения матрицы $A + BKC$ имеют отрицательную вещественную часть.

   Структура таких областей также анализируется в [26]. Область X может быть невыпукла и несвязна. Для построения граничного оракула следует сгенерировать направление $D = Y/||Y||$, $Y =$ `randn(m,l)`, равномерно распределенное на единичной сфере в пространстве матриц с фробениусовой нормой. Далее обозначим $A + B(K^0 + tD)C = F + tG, F = A + BK^0C$, $G = BDC$ для известной допустимой матрицы $K^0 \in X$. В этом случае $L = \{t \in \mathbb{R} : F + tG \text{ is Hurwitz}\}$. L состоит из конечного числа интервалов, а процедура граничного оракула вычисляет крайние точки этих интервалов. В некоторых случаях можно поступить проще. Обозначим $f(t) = \max \Re\ \mathrm{eig}(F + tG)$, тогда крайние точки интересующих нас интервалов будут корнями уравнения $f(t) = 0$, которые могут быть найдены с помощью алгоритмов одномерного поиска (реализованных, например, в команде `fsolve` в программном пакете Matlab).

4. Область робастной устойчивости.

   Для аффинного семейства полиномов с неопределенными параметрами $q \in$

Q эта область определяется как

$$X = \{k : P_0(s,q) + \sum_{i=1}^{n} k_i P_i(s,q) \text{ гурвицева для всех } q \in Q\} \tag{2.5}$$

Если Q – конечный набор значений $\{q_1, \ldots, q_m\}$, то область X представляет собой пересечение m областей, соответствующих m различным значениям q_i. Таким образом, граничный оракул в свою очередь есть пересечение граничных оракулов: $L = \bigcap L_i$. Также существуют некоторые случаи, когда L можно вычислить явно, например, если $p_i(s,q)$ – интервальные полиномы.

5. Область, задаваемая линейными матричными неравенствами (linear matrix inequalities, LMI)

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i A_i \preceq 0\}, \tag{2.6}$$

   где A_i – симметричные матрицы одинакового размера для всех i, $A \preceq 0$ означает, что матрица A отрицательно полуопределена. Для получения граничного оракула будет использован следующий результат для $A = A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i^0 A_i$, $B = \sum_{i=1}^{n} d_i A_i$.

   Пусть $A \prec 0$ и $B = B^T$. Тогда матрица $A + tB$ отрицательно определена при $t \in (\underline{t}, \overline{t})$:

$$\underline{t} = \begin{cases} \max\limits_{t_i<0} t_i, \\ -\infty, \quad \text{если все } t_i > 0, \end{cases} \qquad \overline{t} = \begin{cases} \min\limits_{t_i>0} t_i, \\ +\infty, \quad \text{если все } t_i < 0. \end{cases}$$

   где t_i – обобщенные собственные значения пары матриц $(A, -B)$, т.е. $Ae_i = -t_i B e_i$. При $t \notin (\underline{t}, \overline{t})$ матрица $A+tB$ теряет отрицательную определенность.

6. Область симметричных матриц, удовлетворяющая линейному матричному

неравенству Ляпунова

$$X = \{P : AP + PA^T + C \preceq 0,\ P \succeq 0\}, \tag{2.7}$$

где A устойчивая матрица, а $C \succ 0$. Эта область всегда выпукла, и граничный оракул может быть описан в явном виде. Действительно, возьмем $P_0 \in X$ и сгенерируем случайную матрицу $D = D^T$, задающую направление. Тогда $A(P_0 + tD) + (P_0 + tD)A^T + C \preceq 0 \Leftrightarrow F + tG \prec 0$, $F = AP_0 + P_0A^T + C$, $G = AD + DA^T$. В этом случае $L = (\underline{t}, \bar{t})$ и $\bar{t} = \min \lambda_i$, $\underline{t} = \min \mu_i$, где λ_i – положительные вещественные собственные значения пары матриц $(F, -G)$, а μ_i – положительные вещественные собственные значения пары матриц (F, G).

7. Области симметричных матриц, удовлетворяющих квадратичному матричному неравенству (QMI)

$$X = \left\{P : AP + PA^T + PBB^TP + C \preceq 0,\ P \succeq 0\right\}. \tag{2.8}$$

Граничный оракул строится аналогично предыдущему случаю после представления первого матричного неравенства в блочном виде посредством применения леммы Шура.

Обладание инструментом генерации асимптотически равномерных выборок в областях, описываемых линейными матричными неравенствами, открывает путь для решения вычислительно сложных задач управления, включая синтез регуляторов со статической обратной связью по выходу, H_2 и H_∞ оптимального управления [12].

2.3 Выпуклые релаксации для задачи оптимизации установившегося режима энергосистемы

Задача оптимизации установившегося режима энергосистемы – одна из базовых оптимизационных задач в энергетике. Для ее решения существуют различные постановки, но самым распространенным и точным является задача Optimal Power Flow, которая формулируется на основе физических законов Кирхгофа и Ома. Наиболее распространенные целевые функции — это достижение минимальной общей стоимости генерации или потерь, при удовлетворении инженерных ограничений. Отдельно можно выделить подход, нацеленный на обеспечение устойчивости в работе электросети, так называемый Anti-Blackout подход. Это более сложная задача, в которой требуются дополнительные ограничения, связанные с физической природой задачи. Как правило, устойчивый режим редко является оптимальным в классической формулировке, поэтому объединение этих двух подходов является актуальной задачей для отрасли.

Отличительной особенностью задачи оптимизации установившегося режима (Optimal Power Flow, OPF) в классической постановке является ее невыпуклость, что не позволяет напрямую применить инструментарий выпуклой оптимизации. В связи с этим системные операторы используют линеаризованную версию задачи — *DC OPF*. Линеаризация позволяет быстрее и легче решать задачу ценой точности полученного решения. Поэтому большой интерес представляют методы решения исходной невыпуклой задачи — *AC OPF*. Достаточно популярным способом справиться с невыпуклостью задачи являются релаксации. С помощью релаксаций можно значительно упростить сложность задачи и решить ее за приемлемое время с достаточной точностью. К сожалению, релаксации не всегда дают точное решение, и на сегодняшний день нет общих формулировок или теорем, которые позволяли бы описать условия существования точного решения для некоторой общей формулировки задачи.

Задача OPF может быть переформулирована как квадратичная задача с квадратичными ограничениями (QCQP-формулировка), в такой формулировке и целевая функция, и все ограничения являются квадратичными функциями. К сожалению, при этом задача все еще остается невыпуклой, но в такой постановке можно использовать различные выпуклые релаксации. Данный подход активно развивается в последние годы. Но главным недостатком остается отсутствие гарантий, что метод сработает и даст точное решение. Для некоторых методов можно подобрать класс задач, внутри которого метод будет работать для одних задач и не будет для других. Далее рассмотрим стандартную математическую постановку задачи OPF.

Электроэнергетическая сеть представляет собой граф G, в котором вершины N соответствуют генераторам и потребителям, а ребра E – линиям электропередачи. Ребра проводятся только между теми вершинами, между которыми в действительности существуют линии. В одной вершине может находиться либо только генератор, либо потребитель, либо оба одновременно.

Для определения оптимального режима работы энергетической сети используются различные подходы, но самым точным режимом является решение задачи AC OPF. Это происходит за счет включения в формулировку различных инженерных ограничений, которые позволяют очень точно учесть все особенности конкретной электроэнергетической сети. По этой причине задача очень важна для индустрии. Главной сложностью AC-формулировки является невыпуклость задачи, что создает трудности для быстрого и точного решения. Справиться с этой проблемой позволяют выпуклые релаксации – исходное множество допустимых решений заменяется на выпуклое множество, содержащее исходное, на котором и решается задача. При этом сохраняется исходная физическая структура задачи. К сожалению, релаксации не всегда оказываются точными. На данный момент сформулированы условия точной релаксации только для древовидных сетей, а в реальных сетях не всегда отсутствуют циклы.

В статье [3] были описаны пять различных релаксаций: полуопределенная (SDP), хордальная, коническая (SOCP), релаксация моментов и QC-релаксация. Использование первых трех релаксаций было по шагам разобрано на простом примере. Каждая из них обладает своими преимуществами и недостатками. Например, полуопределенная релаксация очень проста для понимания и использования. Хордальная требует дополнительного построения хордального расширения графа сети и нахождения максимальных клик, что также является нетривиальной задачей, но это необходимо сделать один раз для конкретной сети. За счет перехода от полной матрицы сети к подматрицам клик удается воспользоваться разреженностью сети, не сильно проигрывая полуопределенной релаксации по точности. Коническая релаксация также использует разреженность сети и не требует дополнительных преобразований графа, но является менее точной по сравнению с полуопределенной и хордальной. Релаксация моментов является тем точнее, чем выше ее порядок, но релаксация высокого порядка вводит огромное количество новых переменных, которые при реальных размерах сети могут стать причиной увеличения времени получения решения или вовсе сделать задачу неразрешимой. QC-релаксация достигает точности полуопределенной релаксации, но не требует рангового условия, т.е. всегда можно восстановить напряжения. Кроме того, QC обладает схожей с SDP точностью.

В работе была рассмотрена простая постановка задачи Optimal Power Flow, с классическими генераторами и заданным спросом. Вообще говоря, реальная задача является куда более сложной в силу наличия дополнительных инженерных ограничений. Во-первых, за последние годы существенно увеличилась доля альтернативных генераторов, которые предоставляют очень дешевую энергию, но обладают высокой нестабильностью. Поэтому добавление возобновляемых источников энергии в задачу ведет к появлению разного рода неопределенностей. Помимо возобновляемой генерации, другим существенным источником неопределенностей является спрос, который также является случайной величиной. Добавление неопределенностей в классическую формулировку ведет к задаче Stochastic Optimal Power Flow, решая которую, не хотелось бы оставаться слишком консервативным (что часто бывает при решении стохастических оптимизационных задач), так как незначительные улучшения в решении ведут к значительной экономии денег. Во-вторых, на практике необходимо учитывать большое число различных критериев безопасности или наличие резервов генерации, например $(N-1)$-критерий.

Тем не менее, главным вопросом остается набор условий, при которых релаксации остаются точными для смешанных сетей. Пока не удается ответить на этот вопрос даже в случае простой AC-формулировки без стохастики и дополнительных инженерных ограничений. Случается так, что небольшие изменения данных приводят к тому, что конкретная задача становится неразрешимой или полученное решение имеет ранг больше 1, что не позволяет восстановить оптимальный режим. Помимо сложностей из-за невыпуклости и неточности релаксаций, задача может быть неразрешимой из-за слишком большой размерности, например, российская сеть включает примерно 9000 узлов, следовательно, в SDP-релаксации будет фигурировать эрмитова (9000×9000)-матрица. SDP такой размерности практически не решаемы или время нахождения решения превысит допустимый лимит времени. Хордальная и коническая релаксации позволяют снизить размерность используемых матриц, упрощения расчетов можно добиться, воспользовавшись операциями с разреженными матрицами, но этого может оказаться недостаточно или они могут оказаться неточными. Также необходима разработка численных методов, которые позволят распараллелить задачу.

2.4 Геометрия образа квадратичного отображения

Задача оптимизации установившегося режима энергосистемы рассматривается как минимизация квадратичной целевой функции при ограничениях в виде линейных и квадратичных равенств/неравенств, уравнения установившегося режима описывают допустимую область. Подобные квадратичные задачи возникают в дискретной оптимизации, анализе неопределенностей, физических приложениях. В общем случае такие задачи являются невыпуклыми, тем не менее они демонстрируют скрытую выпуклую структуру. В данном разделе исследуется свойство выпуклости образа квадратичного отображения. То есть мы рассматриваем образ пространства переменных при квадратичном отображении, определяемом уравнениями установившегося режима. Если изображение выпуклое, то исходная задача оптимизации обладает хорошими свойствами, например, существует нулевой зазор двойственности, и можно применять инструменты выпуклой оптимизации.

Рандомизированные методы позволяют разработать инструмент для подтверждения выпуклости/невыпуклости образа при квадратичном отображении [4]. В частности, предлагается проанализировать геометрию образа и получить сертификаты выпуклости или невыпуклости для отдельного квадратичного преобразования. Далее представим численные алгоритмы, использующие выпуклую релаксацию квадратичных отображений для проверки выпуклости.

Theorem 3 *Выпуклая релаксация области, содержащей допустимую область E, описывается как*

$$G = conv(E) = \{\mathcal{H}(X) : X \succeq 0, X_{n+1,n+1} = 1\},$$

где $X = X^T \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$,

$\mathcal{H}(X) = (\langle H_1, X\rangle, \langle H_2, X\rangle, \ldots, \langle H_m, X\rangle)^T$
$H_i = \begin{pmatrix} A_i & b_i \\ b_i^T & 0 \end{pmatrix}.$

На основе этого можно предложить простые достаточные условия для *оракула принадлежности*, т.е. проверки принадлежности заданной точки $y \in \mathbb{R}^m$ области E. Действительно, необходимо проверить принадлежность $y \in G$, т.е. проверить разрешимость соответствующего линейного матричного неравенства. Напротив, введем переменную $c \in \mathbb{R}^m$ и составим матрицу $A = \sum c_i A_i$, вектор $b = \sum c_i b_i$ и блочную матрицу $H(c) = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & -(c, y) \end{pmatrix}$, тогда достаточное условие того, что $y \notin G$, имеет вид:

Theorem 4 *Если существует вектор c такой, что для заданной точки y выполнено*

$$H(c) \succ 0,$$

тогда y не принадлежит E.

Действительно, если линейное матричное неравенство выше разрешимо, существует гиперплоскость с вектором нормали c, строго отделяющая y от $G = conv(E)$, значит y не принадлежит E. Теперь перейдем к описанию процедуры поиска невыпуклостей.

Theorem 5 *Пусть $m \geq 3$, $n \geq 3$, $b_i \neq 0$, и для некоторого $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$, матрица $A = \sum c_i A_i \succeq 0$ имеет простое нулевое собственное значение $Ae = 0$. Пусть также для $b = \sum c_i b_i$ выполнено условие $(b, e) = 0$. Обозначим $d = -A^+ b$, $x_\alpha = \alpha e + d$, $f^\alpha = f(x^\alpha) = f^0 + f^1\alpha + f^2\alpha^2$. Если $|(f^1, f^2)| < \|f^1\| \cdot \|f^2\|$, то область E невыпукла.*

Геометрически условие в теореме выше подразумевает, что линейная функция (c, f) достигает минимума на E только в точках f^α. Но парабола f^α невыпукла, значит, касание опорной гиперплоскости области E происходит по невыпуклому множеству.

Теперь основной задачей остается найти такие c (если они существуют), которые бы удовлетворяли условиям Теоремы 5, а значит характеризовали невыпуклость допустимой области E. Для этих целей будем использовать *граничный оракул* к области G. Для заданной точки $y^0 \in E$ и произвольного направления $d \in \mathbb{R}^m$ следующая задача полуопределенного программирования с переменными $t \in \mathbb{R}$, $X = X^T \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ описывает граничную точку $y^0 + td$ выпуклой области G:

$$\begin{aligned} &\max t \\ &\mathcal{H}(X) = y^0 + td \\ &X \succeq 0 \\ &X_{n+1,n+1} = 1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Если в результате решения задачи (2.9) мы находим X: $\operatorname{rank}(X) = 1$, значит, полученная точка также является граничной точкой E. В противном случае, граничная точка выпуклой релаксации G не принадлежит E.

С другой стороны, двойственная к (2.9) задача позволяет восстановить нормаль c в граничной точке:

$$\begin{aligned} &\min \gamma + (c, y^0) \\ &(c, d) = -1 \\ &H = \begin{pmatrix} \sum c_i A_i & \sum c_i b_i \\ \sum c_i b_i^T & \gamma \end{pmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Это, в свою очередь, задача полуопределенного программирования относительно переменных c, γ.

Имея в распоряжении граничный оракул, который предоставляет граничную точку G и вектор нормали в ней c, мы можем приступить к поиску векторов c, которые идентифицируют невыпуклость согласно Теореме 5. Таким образом, получаем

Algorithm 2 Сертификат выпуклости/невыпуклости

Require: $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 = f(x^0)$, N.
  $i \leftarrow 1$
  while $i \le N$ **do**
    Сгенерировать случайное направление $d^i \sim \mathcal{U}[\|d\| = 1]$, $d^i \in \mathbb{R}^m$
    Решить задачу полуопределенного программирования (2.10) с $d = d^i$
    if полученный вектор c удовлетворяет Теореме 5 **then**
      Обнаружена невыпуклость. ▷ Сохранить c
    end if
  end while

На первый взгляд, можно использовать более простой подход. Выбрать случайным образом $c \in \mathbb{R}^m$ и минимизировать (c, y) на G. Если $A = \sum c_i A_i \succ 0$, минимум достигается в единственной точке, $x = A^{-1}b$, $b = \sum c_i b_i$, и x является граничной точкой области E. Однако, чтобы идентифицировать невыпуклость, нам необходимо найти такой c, что матрица A вырождается. Вероятность такого события нулевая, если мы выбираем вектора c случайно. В рамках предложенного подхода мы генерируем случайные направления d, и вероятность обнаружить «плоский» кусок границы G, соответствующий невыпуклости E, положительна. Результаты численных экспериментов подтверждают данное утверждение.

В заключение отметим, что если предложенный алгоритм не находит соответствующих c после большого числа итераций N и для различных внутренних точек $y^0 \in E$, то это может расцениваться как подтверждение гипотезы о выпуклости образа соответствующего квадратичного отображения.

2.5 Оценивание запасов устойчивости

Знания о геометрии и границе области допустимых режимов энергосистемы позволяет разработать метод быстрой оценки запасов устойчивости. Сложность задачи обеспечения надежной и безопасной работы энергосистем в режиме реального времени постоянно нарастает, поскольку текущий режим быстро меняется из-за неопределенностей, связанных с увеличением доли возобновляемой генерации, менее предсказуемыми нагрузками и различными непредвиденными обстоятельствами. Следовательно, во избежание любого нежелательного поведения системы или крупномасштабного отключения электроэнергии требуется оценка запасов устойчивости по напряжению в режиме реального времени. Такая оценка не только сложна, но и требует значительных вычислительных ресурсов, в основном из-за постоянно меняющегося состояния сети. В данном разделе предложен численно надежный, быстрый и простой в программной реализации алгоритм онлайн-оценки запасов устойчивости по напряжению. Предлагаемый подход обновляет расстояние до границы устойчивости в режиме реального времени, используя информацию о запасе устойчивости для текущего состояния энергосистемы и поступающие данные от измерительных устройств [5].

Современные энергосистемы более уязвимы с точки зрения устойчивости, поскольку функционируют вблизи границы допустимой области. Такие факторы как неопределенность, связанная с возобновляемой генерацией, динамика восстановления нагрузки и различные типы непредвиденных обстоятельств, таких как отключение линий или генератора, делают безопасную работу сети сложной задачей. Как на этапе планирования режимов работы, так и на этапе эксплуатации сети ее безопасная работа требует устойчивости по напряжению, которая заключается в способности энергосистемы поддерживать приемлемые уровни напряжения на всех шинах после воздействия помех [27]. В электрических сетях возникает неустойчивость по напряжению, когда режим работы приближается к точке коллапса или к точке седло-узловой бифуркации, после чего исчезает вещественное решение уравнений установившегося режима. Следовательно, для лучшей оценки безопасности необходима информация о запасах устойчивости.

Исследования, проводимые для проверки допустимости режима эксплуатации сети в любой момент времени, можно разделить на две категории. В первой используется так называемый индекс устойчивости по напряжению, скалярный параметр, который можно отслеживать по мере изменения состояния сети с течением времени [28]. Методы на основе индексов просты, удобны в вычислительном отношении и дают представление о неустойчивости; однако эти методы не подходят для обеспечения надежности. В отличие от методов, основанных на индексах, методы отслеживания границы допустимой области [29] и прямые методы обеспечивают количественную оценку расстояния до границы устойчивости в пространстве параметров (например, уставки напряжения или подачи мощности). Алгоритмическая процедура, описанная в этом разделе, относится ко второй категории.

Алгоритмы работы в близком к реальному времени полагаются на синхронизированные векторные измерения (PMU) или измерения, полученные от устройств диспетчерского управления и сбора данных (SCADA), и обновляют запасы устойчивости по напряжению при малейшем изменении состояния сети. Кроме того, к ним предъявляются существенные ограничения по времени работы, чтобы обработать все входящие измерения в реальном времени. Предлагаемый подход называется алгоритмом Ньютоновской коррекции. В отличие от методов последовательного утяжеления режима, он не требует явного отслеживания многообразия решений. Математическая структура алгоритма Ньютоновской коррекции расширяет систему уравнений установившегося режима, используя дополнительное уравнение для характеризации режимов на границе допустимой области. Это вспомогательное условие является параметрическим уравнением и в некоторых работах называется условием трансверсальности. Сформулированы три различных варианта параметрического уравнения, которые обеспечивают достаточную свободу изменения напряжения на чувствительных шинах:

1. Условие на основе собственного вектора $p_{\text{eig}} = z_0^T J^N y^0 = 0$.
2. Условие на основе сингулярного вектора $p_{\text{svd}} = u_n^T J^N v_n^0 = 0$.
3. Условие на основе чувствительности $p_{\text{s}} = \sum_{k=1}^{n} (|V_k| - |V_k^{\text{pre}}|) \times \text{Im}(v_n^0)$.

Чтобы обновить значение запасов устойчивости при изменении текущего режима ΔS_i^N, сформулируем алгоритм Ньютоновской коррекции с тремя различными параметрическими уравнениями (т.е. p_{eig}, p_{svd} и p_{s}). Если x^0 и λ^0 представляют граничную точку и расстояние до нее для базового режима, то выполнение следующих шагов позволяет найти граничную точку для нового состояния и расстояние до нее.

1. Сначала обновляется информация о новом состоянии ΔS_i^N на основе данных с измерительных устройств.

2. Затем запускается метод Ньютоновской коррекции для вычисления запаса для коллапса для ΔS_i^N с x^0 и λ^0 в качестве начального предположения.

3. Когда алгоритм достигает решения, т. е. x^N и λ^N получены, условие вырождения якобиана J^N проверяется через $g(x) = 0$.

4. Если условие выполнено, то x^N и λ^N – искомое решение.

5. В противном случае x^N и λ^N устанавливаются как новое начальное приближение и процесс запускается вновь с заменой уравнения $p(x, \lambda)$ на условие трансверсальности $g(x)$.

Численные эксперименты работы предложенного алгоритма приведены в [5].

2.6 Оптимизационная модель для задачи размещения и выбора параметров систем накопления энергии с учетом деградации

Широкое внедрение систем накопления энергии (СНЭ) порождает задачи оптимизации в энергетике, требующие значительных вычислительных ресурсов. В работе рассматривается задача оптимального размещения, выбора параметров и технологии систем накопления энергии (для этой задачи используется аббревиатура SST) с учетом деградации [6], что делает задачу оптимизации невыпуклой. Предлагается метод решения, основанный на преобразовании исходной задачи в задачу смешанного целочисленного выпуклого программирования (MICP) путем намеренной дискретизации некоторых переменных. Полученная задача MICP может быть решена с использованием алгоритма ветвей и границ совместо с методами выпуклого программирования, которое выполняет эффективный поиск и гарантирует глобально оптимальное решение.

Широко используемый подход к проблеме SST состоит в том, чтобы сформулировать ее как задачу оптимизации, которую необходимо эффективно решать для систем с большим числом узлов. Попытки оставаться в рамках задач выпуклой оптимизации требуют тщательного выбора математических моделей для представления различных характеристик накопителей; при таком подходе сложно включить в общую постановку задачи такие процессы, как деградация систем накопления энергии. Предлагаемый подход повышает качество решения посредством выбора модели, которая учитывает влияние глубины разрядки (DoD) и состояния заряда (SoC) на деградацию батареи.

Нелинейность, связанная с определением размеров СНЭ с учетом деградации, может быть учтена различными способами. В [30] для поиска оптимального сочетания местоположения, размера и технологии, обеспечивающего наименьшие эксплуатационные расходы сети, применяется полный перебор. В [31] применяется гибридный эвристический поиск, в котором линейное программирование с целочисленными переменными используется для задачи выбора генерирующего оборудования, а генетический алгоритм применяется для размещения и определения размера СНЭ. Стационарная характеристика деградации используется для определения размеров с учетом деградации в [32]. Кроме того, рассмотрение эффектов деградации как от SoC, так и от DoD приводит к задаче невыпуклой оптимизации, для которой стандартные решатели не могут гарантировать глобально оптимальное решение.

Задача оптимизации предназначена для нахождения оптимального сочетания места, размера и технологии СНЭ применительно к задаче оптимизации установившихся режимов, оптимальному планированию всех энергоблоков производства и потребления, оптимальному графику работы аккумуляторной батареи с учетом точной модели деградации в зависимости от режима эксплуатации СНЭ, определяемого переменными DoD и SoC. Стохастическая постановка используется для поиска компромисса между инвестиционными затратами на СНЭ и выгодами, связанными с их эксплуатацией. Целевая функция позволяет СНЭ выполнять функцию сдвига в потреблении энергии, снижая средние ежедневные эксплуатационные расходы сети по набору сценариев, которые представляют весь горизонт жизненного цикла СНЭ.

Мы не приводим здесь детальную постановку задачи оптимизации, так как она содержит 18 строк технических ограничений с расширенным списком переменных и параметров. Тем не менее, приведем уравнения для характеристик скорости снижения мощности, которые были взяты из экспериментальных работ и аппроксимированны квадратичными функциями:

$$\begin{aligned}\gamma^{\mathrm{Idle}}(SoC) &= A_1 SoC^2 + B_1 SoC + C_1\\ \gamma^{\mathrm{Cycle}}(DoD) &= A_2 DoD^2 + B_2 DoD,\end{aligned}$$

где SoC средний дневной уровень заряда, DoD глубина разрядки, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 множители, подобранные для аппроксимации соответствующих характеристик снижения мощности в холостом γ^{Idle} и рабочем γ^{Cycle} режимах. При одновременном учитывании как емкости накопителя, так и деградации результирующая задача оптимизации не является ни линейной, ни выпуклой. В частности, переменная номинальной энергоемкости умножается на характеристики скорости затухания мощности γ^{Idle} и γ^{Cycle}. Стандартные численные подходы не гарантируют глобального оптимального решения для такого рода задач. Чтобы преодолеть это, мы предлагаем заменить непрерывные переменные SoC и DoD, которые являются причиной невыпуклости, на целочисленные переменные. Таким образом, невыпуклая непрерывная задача становится задачей смешанного целочисленного выпуклого программирования (MICP), которая обладает свойством выпуклости при фиксированных SoC и DoD.

Таким образом, унаследованная невыпуклость задачи SST с учетом деградации была решена с помощью преобразования задачи в задачу смешанного целочисленного выпуклого программирования (MICP). Наконец, чтобы оценить эффективность этого подхода, полученные результаты сравнивались с четырьмя другими подходами, а также с оценкой эффективности в автономном режиме.

В результате численных экспериментов было обнаружено, что оптимальное использование батареи не обязательно соответствует достижению состояния утилизации в конце срока службы, что является результатом работы механизмов нелинейной деградации как в режиме холостого хода, так и в циклическом режиме. Наконец, предлагаемый подход позволяет сформулировать вычислительно разрешимую задачу стохастической оптимизации для учета будущих сетевых сценариев.

2.7 Оптимизационная модель для одноранговового рынка электроэнергии с учетом сетевых ограничений

В современных энергосистемах наблюдается четкая тенденция к децентрализации, меняется топология сетей, все большее распространение получают микроэнергосистемы, способные работать как в режиме подключения к основной питающей сети, так и в изолированном режиме. Это побуждает пересмотреть подходы к диспетчеризации, оценке состояния и организации энергетических рынков. Для раскрытия потенциала распределенной генерации помимо льготных тарифов могут быть предложены новые рыночные структуры. Существуют три возможные рыночные модели для интеграции просьюмеров (потребителей, одновременно являющихся и производителями электроэнергии) и распределенных генераторов: одноранговый рынок (peer-to-peer, P2P), работа просьюмера в интересах сети и использование организованных групп просьюмеров. Работа [10] посвящена оптмизационной задаче, лежащей в основе одорангового рынка электроэнергии, предлагающего большую независимость и свободу действий участникам рынка. Торговая схема P2P позволяет предоставлять новые виды услуг и предлагает дополнительную ценность в виде дифференцированных контрактов, учета потребительских предпочтений и более широкого использования распределенной генерации.

Следуя тенденции децентрализации, мы исследуем архитектуру полностью децентрализованного (однорангового) рынка торговли электроэнергией [10], учитывающего сетевые ограничения. С ростом распределенной генерации все большее внимание уделяется возможностям ее использования в сети. В значительной степени управляемые технологиями распределенного реестра, одноранговые рыночные архитектуры долгое время игнорировали сетевые ограничения, уделяя больше внимания организации финансовых транзакций. В этом разделе кратко описывается работа однорангового рынка на основе оптимизации, включая сетевые ограничения, пользовательские предпочтения и сетевые сборы, не зависящие от объема торгов. Таким образом, обеспечивается выполнение трех требований, критически важных для практической реализации однорангового рынка, таких как безопасная работа, ориентированный на потребителя характер рынка и предоставление преимуществ для сети.

Данное исследование во многом вдохновлено работой [33], где предлагается учитывать сетевые ограничения, вводя в целевую функцию пенализирующий член, который можно использовать для исключения перегрузки линий в сети. Однако это не гарантирует полного отсутствия перегрузок, а лишь минимизирует их возникновение. Чтобы обеспечить физическую реализуемость рыночного решения и строгое соблюдение ограничений на поток электроэнергии по каждой линии, мы применяем матрицу векторов нагрузки

(PTDF) во встроенной форме и используем экзогенный подход для учета предпочтений пользователей и сетевых сборы. Также впервые предложен распределенный алгоритм для поиска равновесия на одноранговом рынке со встроенным управлением перегрузками.

Каждый агент, торгующий на одноранговом рынке, сначала решает свою локальную оптимизационную задачу. Обновленные значения p_{nm}^{k+1} передаются как торговые предложения агентам из набора торговых партнерств агента n. Следуя установленным ограничениям мощности, участник рынка вычисляет значения ${\lambda_{nm}}^{k+1}$ на основе своего торгового предложения и встречного предложения, вычисляет невязки, а затем сообщает торговому сообществу. Наблюдающий агент собирает все торговые предложения $\mathbf{p}^{k+1}$ и обновляет вспомогательные переменные ${\mathbf{y}_1}^{k+1}$ и ${\mathbf{y}_2}^{k+1}$ и множители Лагранжа ${\boldsymbol{\mu}_1}^{k+1}$ и ${\boldsymbol{\mu}_2}^{k+1}$. Он же проверяет критерий остановки

$$x_l^{k+1} = \left(\mu_{1l}^{k+1} - \mu_{1l}^{k}\right)^2 + \left(\mu_{2l}^{k+1} - \mu_{2l}^{k}\right)^2, \sum_{l \in L} x_l^{k+1} \leq {\varepsilon_x}^2.$$

Выполнение этого критерия вместе с критерием остановки, связанным с требованием взаимности встречных рыночных сделок ($p_{ij} = -p_{ji}$), указывает на то, что алгоритм сошелся к рыночному равновесию, не противоречащему сетевым ограничениям.

Глава 3

Заключение

По результатам исследований, вошедших в данную диссертацию, были опубликованы статьи [1], [2], [3], [4], [5], [6], [10], [7], [8], [9], [11]. Защита проводится по первым семи из вышеперечисленных работ.

В статьях [1], [2], [4] описывается развитие методов случайного блуждания для задач оптимизации и управления.

Статьи [3], [5], [6], [10] описывают различные приложения анализа электроэнергетических систем. Полученные результаты формируют задел для разностороннего анализа и моделирования режимов работы электрических сетей, включая стратегии применения накопителей, одноранговую торговлю электроэнергией, идентификацию нагрузок, массовый переход на электромобили и другие сетевые сервисы.

Перечислим основные результаты, полученные в данной диссертации, которые выносятся на защиту:

1. Предложен новый метод случайного блуждания Billiard Walk для генерации асимптотически равномерно распределенных выборок в области с доступным граничным оракулом.

2. Разработаны алгоритмы построения граничного оракула для областей в пространстве параметров устойчивых и робастно устойчивых полиномов, устойчивых матриц и областей, описываемых линейными матричными

неравенствами.

3. Проведен анализ выпуклых релаксаций для задачи оптимизации установившегося режима энергосистемы и предложен подход к обоснованию их точности (нулевого зазора двойственности) на основе анализа геометрии области допустимости, которая представляет собой образ квадратичного оператора.

4. Предложен рандомизированный алгоритм, позволяющий определить выпуклость/невыпуклость заданного квадратичного отображения, в частности, области допустимых режимов энергосистемы.

5. Разработан быстрый и робастный алгоритм для оценки статической устойчивости энергосистемы при малых изменениях состояния системы в несколько тысяч узлов.

6. Предложено преобразование оптимизационной модели для невыпуклой задачи оптимального размещения и выбора параметров системы накопления энергии с учетом деградации в задачу целочисленного выпуклого программирования.

7. Предложен распределенный алгоритм поиска равновесия на одноранговом рынке электроэнергии с учетом сетевых ограничений, пользовательских предпочтений и сетевых сборов.

Финансирование

Исследования, вошедшие в диссертацию, были поддержаны грантом Российского научного фонда (проект № 16-11-10015). Кроме того, часть исследований и непосредственно написание диссертации подготовлены в рамках

реализации Постановления Правительства Российской Федерации № 220 от 9 апреля 2010 г. и Соглашения № 075-10-2021-067 от 17 июня 2021 г. о предоставлении из федерального бюджета грантов в форме субсидий в соответствии с пунктом 4 статьи 78.1 Бюджетного кодекса Российской Федерации, заключенного между Министерством науки и высшего образования Российской Федерации и Автономной некоммерческой образовательной организацией высшего образования «Сколковский институт науки и технологий» (идентификатор государственного контракта 000000S707521QJX0002).

Литература

[1] E. Gryazina and B. Polyak, “Random sampling: Billiard walk algorithm,” *European Journal of Operational Research*, vol. 238, no. 2, pp. 497–504, 2014.

[2] B. T. Polyak and E. N. Gryazina, “Randomized methods based on new monte carlo schemes for control and optimization,” *Annals of Operations Research*, vol. 189, no. 1, pp. 343–356, 2011.

[3] I. A. Zorin and E. N. Gryazina, “An overview of semidefinite relaxations for optimal power flow problem,” *Automation and Remote Control*, vol. 80, no. 5, pp. 813–833, 2019.

[4] B. Polyak and E. Gryazina, “Convexity/nonconvexity certificates for power flow analysis,” in *Trends in Mathematics*, pp. 221–230, Springer, 2017.

[5] M. Ali, E. Gryazina, O. Khamisov, and T. Sayfutdinov, “Online assessment of voltage stability using newton-corrector algorithm,” *IET Generation, Transmission & Distribution*, vol. 14, no. 19, pp. 4207–4216, 2020.

[6] T. Sayfutdinov, C. Patsios, P. Vorobev, E. Gryazina, D. M. Greenwood, J. W. Bialek, and P. C. Taylor, “Degradation and operation-aware framework for the optimal siting, sizing, and technology selection of battery storage,” *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 11, no. 4, pp. 2130–2140, 2019.

[7] A. Ryzhov, H. Ouerdane, E. Gryazina, A. Bischi, and K. Turitsyn, “Model predictive control of indoor microclimate: Existing building stock comfort improvement,” *Energy conversion and management*, vol. 179, pp. 219–228, 2019.

[8] S. Asefi, Y. Madhwal, Y. Yanovich, and E. Gryazina, “Application of blockchain for secure data transmission in distributed state estimation,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2021.

[9] Z. Jin, J. Zhao, L. Ding, S. Chakrabarti, E. Gryazina, and V. Terzija, “Power system anomaly detection using innovation reduction properties of iterated extended kalman filter,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 136, p. 107613, 2022.

[10] T. Chernova and E. Gryazina, “Peer-to-peer market with network constraints, user preferences and network charges,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 131, p. 106981, 2021.

[11] Y. Liu, D. Ćetenović, H. Li, E. Gryazina, and V. Terzija, "An optimized multi-objective reactive power dispatch strategy based on improved genetic algorithm for wind power integrated systems," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 136, p. 107764, 2022.

[12] D. Arzelier, E. Gryazina, D. Peaucelle, and B. Polyak, "Mixed lmi/randomized methods for static output feedback control design," in *Proceedings of the 2010 American control conference*, pp. 4683–4688, IEEE, 2010.

[13] B. T. Polyak and E. Gryazina, "Billiard walk-a new sampling algorithm for control and optimization," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 47, no. 3, pp. 6123–6128, 2014.

[14] I. Zorin, S. Vasilyev, and E. Gryazina, "Fragility of the semidefinite relaxation for the optimal power flow problem," in *2016 IEEE International Conference on the Science of Electrical Engineering (ICSEE)*, pp. 1–5, IEEE, 2016.

[15] M. Ali, E. Gryazina, and K. S. Turitsyn, "Methodology for computation of online voltage stability assessment," in *2018 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2018 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/I&CPS Europe)*, pp. 1–5, IEEE, 2018.

[16] M. Ali, E. Gryazina, and K. S. Turitsyn, "Fast calculation of the transfer capability margins," in *2019 IEEE Milan PowerTech*, pp. 1–6, IEEE, 2019.

[17] M. Ali, D. Baluev, M. H. Ali, and E. Gryazina, "A novel open source power systems computational toolbox," in *2021 North American Power Symposium (NAPS)*, pp. 1–6, IEEE, 2021.

[18] R. Tempo, G. Calafiore, and F. Dabbene, *Randomized algorithms for analysis and control of uncertain systems: with applications*. Springer, 2013.

[19] P. Diaconis, "The markov chain monte carlo revolution," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 46, no. 2, pp. 179–205, 2009.

[20] A. Chalkis, I. Z. Emiris, V. Fisikopoulos, P. Repouskos, and E. Tsigaridas, "Efficient sampling in spectrahedra and volume approximation," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 648, pp. 205–232, 2022.

[21] R. L. Smith, "Efficient monte carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions," *Operations Research*, vol. 32, no. 6, pp. 1296–1308, 1984.

[22] B. T. Polyak and E. N. Gryazina, "Markov chain monte carlo method exploiting barrier functions with applications to control and optimization," in *2010 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, pp. 1553–1557, IEEE, 2010.

[23] Y. G. Sinai, “Billiard trajectories in a polyhedral angle,” *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, vol. 33, no. 1, pp. 229–230, 1978.

[24] V. Kozlov, *Billiards: A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts: A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts*.

[25] D. Bertsimas and S. Vempala, “Solving convex programs by random walks,” *Journal of the ACM (JACM)*, vol. 51, no. 4, pp. 540–556, 2004.

[26] E. N. Gryazina and B. T. Polyak, “Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited,” *Automatica*, vol. 42, no. 1, pp. 13–26, 2006.

[27] P. Sauer and M. Pai, “Power system steady-state stability and the load-flow jacobian,” *IEEE Transactions on power systems*, vol. 5, no. 4, pp. 1374–1383, 1990.

[28] P.-A. Lof, T. Smed, G. Andersson, and D. Hill, “Fast calculation of a voltage stability index,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 7, no. 1, pp. 54–64, 1992.

[29] R. J. Avalos, C. A. Cañizares, F. Milano, and A. J. Conejo, “Equivalency of continuation and optimization methods to determine saddle-node and limit-induced bifurcations in power systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 56, no. 1, pp. 210–223, 2009.

[30] I. Miranda, N. Silva, and H. Leite, “A holistic approach to the integration of battery energy storage systems in island electric grids with high wind penetration,” *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 7, no. 2, pp. 775–785, 2015.

[31] B. Li, R. Roche, D. Paire, and A. Miraoui, “Sizing of a stand-alone microgrid considering electric power, cooling/heating, hydrogen loads and hydrogen storage degradation,” *Applied Energy*, vol. 205, pp. 1244–1259, 2017.

[32] P. Fortenbacher, A. Ulbig, and G. Andersson, “Optimal placement and sizing of distributed battery storage in low voltage grids using receding horizon control strategies,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 33, no. 3, pp. 2383–2394, 2017.

[33] T. Baroche, P. Pinson, H. B. Ahmed, *et al.*, “Exogenous approach to grid cost allocation in peer-to-peer electricity markets,” *arXiv:1803.02159*, 2018.