

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Белоусов Юрий Станиславович

**Меандрические диаграммы узлов,
зацеплений и пространственных графов**

Резюме диссертация
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель
Доктор физико-математических наук,
профессор Малютин Андрей Валерьевич

Москва – 2023

Содержание

Введение	3
Публикации, содержащие основные результаты диссертации	4
1 Определения	6
2 Гипотезы Яблана–Радович и их обобщения	8
3 k -Дуговое число перекрестков	9
4 Ленточные перестройки	12
Список литературы	12

Введение

Настоящая работа относится к теории узлов и зацеплений — разделу маломерной топологии, изучающему вложения одномерных многообразий в трехмерные. Узлом мы будем называть пару (S^3, S^1) , где S^3 — трехмерная сфера, а S^1 — образ окружности, гладко вложенной в S^3 ; узел рассматривается с точностью до гомеоморфизма пары. Узлы являются первой интересной парой многообразий. Действительно, предыдущая нетривиальная пара — (S^2, S^1) — классифицирована теоремой Шёнфлиса (все такие пары эквивалентны).

Теория узлов — это богатая область исследований, изобилующая красивыми и глубокими результатами, а многие фундаментальные вопросы этой теории до сих пор открыты (например, задача эффективного распознавания узлов). При этом теория узлов имеет обширные связи с другими областями математики. Например, любое связное замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие можно однозначно задать, используя зацепление (теорема Ликориша–Уоллеса). Исчисление Кирби является примером применения теории узлов в топологии трехмерных и четырехмерных многообразий.

Классический способ задавать узлы — использовать плоские диаграммы (подробные определения см. в разделе 1). Теорема Рейдемейстера утверждает, что две диаграммы представляют один и тот же узел тогда и только тогда, когда они связаны последовательностью локальных движений (движений Рейдемейстера)¹. При этом во многих задачах (например, при построении инвариантов узлов) удобно рассматривать не все диаграммы, а лишь диаграммы определенного типа (например, диаграммы, являющиеся замыканиями диаграмм кос, или так называемые прямоугольные диаграммы). Интересным вопросом является исследование универсальных классов диаграмм (класс диаграмм узлов называется *универсальным*, если он содержит диаграммы всех узлов). Отметим, что два уже упоминавшихся класса диаграмм — диаграммы, являющиеся замыканиями диаграмм кос, и прямоугольные диаграммы — универсальны.

¹И, возможно, зеркальным отражением.

Отправной точкой настоящего исследования послужила работа [1], где были выдвинуты три гипотезы о меандрических и полумеандрических диаграммах (определения см. в разделе 2). Первые две гипотезы утверждали универсальность классов полумеандрических и меандрических диаграмм соответственно. Третья гипотеза утверждала, что у каждого двухмостового узла среди его минимальных (по числу перекрестков) диаграмм найдется полумеандрическая.

В настоящей работе приведены доказательства обобщенных версий первых двух гипотез (в необобщенном виде первые две гипотезы выводятся из не широко известных результатов нескольких работ), а также доказана третья гипотеза, остававшаяся до недавнего времени открытой. Кроме того, используя свойство универсальности полумеандрических диаграмм, автор определяет семейство новых инвариантов узлов (k -дуговые числа перекрестков) и исследует их связь с классическим числом перекрестков узла.

Основные результаты работы составляют теоремы 1–6, опубликованные в работах [BM17, B18, BM20, BK+21].

Публикации, содержащие основные результаты диссертации

- [BM17] Юрий Белоусов, Андрей Малютин. Простые дуги в плоских кривых и в диаграммах узлов // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 4. — С. 63–76.
- [B18] Белоусов Юрий. Полумеандрическое число перекрестков узла и родственные инварианты // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2018. — Т. 476. — С. 20–33.
- [BM20] Юрий Белоусов, Андрей Малютин. Меандрические диаграммы узлов и пространственных графов: доказательства обобщенных гипотез Яблана–Радович // *Topology and its Applications*. — 2020. — Т. 274. — С. 107–122.
Belousov Yury, Malyutin Andrei. Meander diagrams of knots and

spatial graphs: Proofs of generalized Jablan–Radović conjectures
// *Topology and its Applications*. — 2020. — Vol. 274. — P. 107–
122.

- [BK+21] Лернейские узлы и вложенные перестройки / Белоусов Юрий,
Карев Максим, Малютин Андрей, Миллер Алексей и Фоми-
ных Евгений // *Алгебра и анализ*. — 2021. — Т. 33, № 1. — С.
30–66.

1 Определения

Сперва введем необходимые определения.

Определения (плоские кривые). В настоящей работе под *замкнутой плоской кривой* понимается гладкое погружение окружности S^1 в плоскость \mathbb{R}^2 (или в сферу S^2) и его образ. Под *незамкнутой плоской кривой* понимается гладкое погружение отрезка в плоскость \mathbb{R}^2 (или в сферу S^2) и его образ. Все рассматриваемые кривые находятся в *общем положении*, т. е. не имеют точек самопересечения кратности большей двух, число двойных точек у каждой кривой конечно, во всех этих точках ветви кривой пересекаются трансверсально (нет точек самокасания), а концевые точки (в случае незамкнутой кривой) не являются точками самопересечения. Если дана плоская кривая, то *дугой* на ней мы называем сужение погружения (и образ этого сужения) на некоторое подмножество, гомеоморфное отрезку. Кривая (в частности — дуга) называется *простой*, если она является вложением.

Напомним теперь ряд определений из теории узлов и зацеплений. Более полную систему определений можно найти в работах [6, 7, 8].

Определения (узлы, зацепления и тэнглы). В настоящей работе *узлом* называется гладкое вложение окружности S^1 в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 (или в трехмерную сферу S^3) и его образ, рассматриваемый с точностью до (не обязательно сохраняющего ориентацию) автодиффеоморфизма объемлющего пространства. Узел $K \subset S^3$ называется *тривиальным*, если он лежит на некоторой сфере $S^2 \subset S^3$. Узел $K \subset S^3$ называется *составным*, если найдется сфера $S^2 \subset S^3$, пересекающая K трансверсально в двух точках, причем ни одна из пар $(B_1, B_1 \cap K)$ и $(B_2, B_2 \cap K)$, где B_1 и B_2 — шары, на которые S^2 разрезает S^3 , не диффеоморфна паре (шар, диаметр). Узел называется *простым*, если он не является ни составным, ни тривиальным.

Под *тэнглом* мы имеем в виду пару (B^3, T) , где B^3 есть трехмерный шар, а T — гладкое компактное правильное одномерное подмногообразие (с краем или без) в B^3 . Тэнгл будем называть *зацеплением*, если T

есть многообразие без края. Компонента $I \subset T$ тэнгла называется *незаузленной*, если существует правильное вложение F двумерного диска B^2 в B^3 , такое что $I \subset F(B^2)$ (здесь $F(B^2)$ может пересекать компоненты подмногообразия $T \setminus I$).

Определения (диаграммы). *Диаграммой* узла называют плоскую кривую общего положения, являющуюся проекцией узла на плоскость или двумерную сферу и снабженную дополнительной информацией о *проходах* и *переходах* в двойных точках (их называют *перекрестками* диаграммы). Диаграмма узла называется *минимальной*, если ни одна другая диаграмма, представляющая тот же узел, не имеет меньшего числа перекрестков, чем данная. *Числом перекрестков* узла называется число перекрестков в его минимальной диаграмме. Для числа перекрестков узла K используется обозначение $st(K)$.

Определение диаграммы узла естественным образом переносится на случай тэнглов и зацеплений. А именно, пусть (B^3, T) — это тэнгл; если B^3 вложен в \mathbb{R}^3 как евклидов шар, такой что ∂T лежит на большой окружности S^1 на ∂B^3 и проекция $p: T \rightarrow B^2$ (где B^2 — это евклидов двумерный шар $\partial B^2 = S^1$) регулярна, мы говорим, что $p(T)$, лежащая на B^2 , с дополнительной информацией о проходах/переходах — это *диаграмма тэнгла* T .

Определения (пространственные графы). В настоящей работе *графом* мы называем конечный одномерный клеточный комплекс: нульмерные клетки называются *вершинами*, а одномерные клетки — *ребрами*. *Пространственный граф* это такое подмножество \mathbb{R}^3 , что (1) оно объемлюще изотопно объединению конечного числа отрезков, (2) оно снабжено структурой графа. Два пространственных графа называются *эквивалентными*, если они связаны пространственной изотопией, сохраняющей структуру графа. *Петлей* в пространственном графе называем ребро, замыкание которого — окружность. *Заузленная петля* — это ребро, замыкание которого — нетривиальный узел.

Как и в случае узлов, пространственные графы удобно изучать с помощью плоских диаграмм. *Диаграмма* пространственного графа G это образ проекции общего положения графа G на плоскость, снабженный до-

полнительной информацией о проходах и переходах в двойных точках. Образ ребра на диаграмме пространственного графа называем *главной дугой*, если соответствующее ребро не является заузленной петлей и *исключительной дугой* — иначе.

2 Гипотезы Яблана–Радович и их обобщения

Перейдем теперь к основному предмету данной работы: гипотезам Яблана–Радович, выдвинутым в работе [1], и их обобщениям. Нам понадобится ряд дополнительных определений.

Определение 1. Диаграмма D узла называется *полумеандрической*, если D есть объединение двух гладких простых дуг.

Определение 2. Диаграмма D узла называется *меандрической*, если D есть объединение двух гладких простых дуг, таких что их общие концы могут быть соединены дугой, внутренность которой не пересекает диаграмму D .

Обобщим эти определения на случай пространственных графов.

Определение 3. Диаграмма пространственного графа называется *полумеандрической*, если все главные дуги представлены гладкими простыми кривыми, а все исключительные дуги составлены из двух гладких простых дуг.

Определение 4. Полумеандрическая диаграмма пространственного графа называется *меандрической*, если (1) все ее вершины лежат на границе выпуклой оболочки диаграммы, (2) каждая исключительная дуга разделена на две простые дуги точкой (не являющейся перекрестком), лежащей на границе выпуклой оболочки диаграммы.

Гипотеза 1 ([1]). *У каждого узла имеется полумеандрическая диаграмма.*

Гипотеза 2 ([1]). *У каждого узла имеется меандрическая диаграмма.*

Перед тем, как сформулировать третью гипотезу, напомним определения.

Определения. Простая дуга на диаграмме узла называется *мостом*, если у нее нет проходов. Узел называется *двухмостовым*, если у него найдется диаграмма с двумя мостами, содержащими все перекрестки диаграммы.

Гипотеза 3 ([1]). *Множество минимальных диаграмм двухмостового узла содержит полумеандрическую диаграмму.*

Утверждения, влекущие справедливость гипотезы 1, были независимо доказаны в работах [9, 10, 11, 12, 13]. То же для гипотезы 2 — в работах [14, 13]. Гипотеза 3 до недавнего времени оставалась открытой.

В работе [4] А. В. Малютина и автора была доказана теорема, обобщающая гипотезы 1 и 2, а также доказана гипотеза 3. Сформулируем эти результаты в виде теорем.

Теорема 1 ([4]). *У любого пространственного графа найдется меандрическая диаграмма.*

Теорема 2 ([4]). *Множество минимальных диаграмм двухмостового узла содержит полумеандрическую диаграмму.*

3 k -Дуговое число перекрестков

Из результатов предыдущего пункта следует, что, если k — натуральное число большее единицы, то у каждого узла найдется диаграмма, составленная из k гладких простых дуг. Возникает естественный вопрос: насколько диаграмма узла, составленная из k гладких простых дуг, сложнее минимальной диаграммы того же узла? Введем следующее определение.

Определение 5. Минимальное число перекрестков среди всех диаграмм узла K , которые представимы объединением не более чем k гладких простых дуг, назовем k -дуговым числом перекрестков узла K (обозначение $\text{cr}_k(K)$). При этом 2-дуговое число перекрестков также будем называть *полумендрическим числом перекрестков*.

В работе [3] автора исследуется связь между k -дуговыми числами перекрестков и классическим числом перекрестков узла. В частности, доказаны следующие теоремы:

Теорема 3 ([3]). *Для любого узла K справедливо неравенство*

$$\text{cr}_2(K) \leq \sqrt[4]{6^{\text{cr}(K)}}.$$

Теорема 4 ([3]). *Для любого узла K и для любого натурального $k \geq 2$ справедливо неравенство*

$$\text{cr}_k(K) \leq \text{cr}_{k+1}(K) + \frac{2(\text{cr}_{k+1}(K))^2}{(k+1)^2}.$$

Замечание. Очевидно, что для фиксированного узла K числа $\text{cr}_k(K)$ образуют невозрастающую последовательность. Приняв обозначение

$$p^*(K) = \min\{k \mid \text{cr}_k(K) = \text{cr}(K)\},$$

получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \text{cr}_2(K) &\geq \text{cr}_3(K) \geq \dots \geq \text{cr}_{p^*(K)-1}(K) > \\ &> \underbrace{\text{cr}_{p^*(K)}(K) = \text{cr}_{p^*(K)+1}(K) = \dots}_{=\text{cr}(K)} \end{aligned}$$

В этом контексте удобно интерпретировать $\text{cr}(K)$ как $\text{cr}_\infty(K)$.

Замечание. Ясно, что для любого нетривиального узла K верно неравенство $p^*(K) \leq 2\text{cr}(K)$. При этом верхняя оценка на $p^*(K)$ не может расти медленнее, чем линейная функция от $\text{cr}(K)$. Это доказывают примеры на рис. 1: диаграммы, изображенные там (и подобные

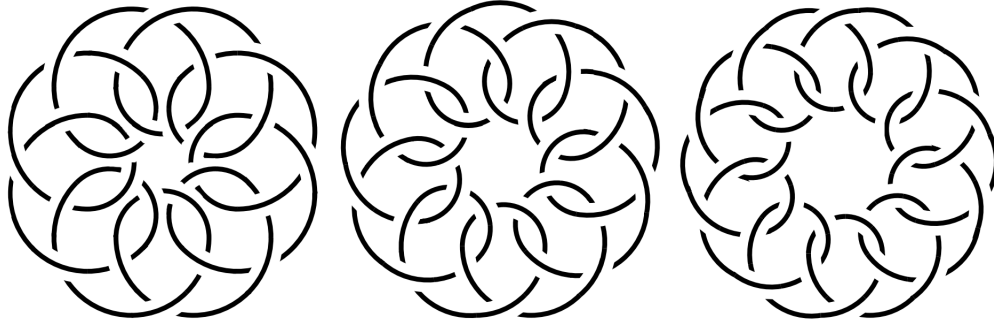


Рис. 1: Примеры узлов, у которых $p^*(K) = \frac{cr(K)}{3}$.

им), являются единственными (с точностью до изотопии) минимальными диаграммами соответствующих узлов (по третьей гипотезе Тейта, см. [15, 16]), но ни одну из этих диаграмм нельзя разбить менее чем на $\frac{cr(K)}{3}$ гладких простых дуг.

Замечание. Используя теорему 4, можно улучшить оценку на полумеандрическое число перекрестков для некоторых классов узлов. А именно, если рассмотреть узлы, у которых $p^*(K) \leq n$, где n – некоторое фиксированное число, то для них $cr_2(K)$ оценивается полиномом степени не выше 2^{n-2} от $cr(K)$. Это, однако, не позволяет улучшить оценку на полумеандрическое число перекрестков для всех узлов (см. предыдущее замечание).

Для доказательства теорем 3 и 4 использовался результат, доказанный в работе [2] А. В. Малютина и автора:

Теорема 5 ([2]). *У любого узла с числом перекрестков, большим десяти, найдется минимальная диаграмма, содержащая простую дугу, проходящую через восемь перекрестков.*

4 Ленточные перестройки

Техника полумеандрических диаграмм была использована автором для получения нового результата о ленточных перестройках. Напомним определение ленточной перестройки.

Определение 6 (ленточные перестройки зацеплений). Пусть L — зацепление в \mathbb{R}^3 , I — отрезок $[0, 1]$, а $f: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ — вложение, такое что

$$f(I \times I) \cap L = f(I \times \partial I).$$

Говорят, что зацепление

$$M = (L \setminus f(I \times \partial I)) \cup f(\partial I \times I)$$

является результатом *ленточной* (или *вложенной*) *перестройки* зацепления L вдоль *ленты* $f(I \times I)$. (См. рис. 2.)

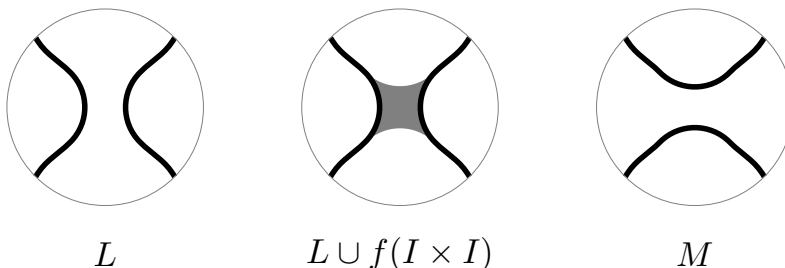


Рис. 2: Ленточная перестройка.

Теорема 6 ([5]). Из любого нетривиального узла K , используя одну ленточную перестройку, можно получить двухкомпонентное брунново зацепление L такое, что

$$\text{cr}(L) \leq 4\sqrt[4]{6}^{\text{cr}(K)} + 2.$$

Список литературы

- [1] Radovic Ljiljana, Jablan Slavik. Meander knots and links // *Filomat*. — 2015. — Vol. 29, no. 10. — P. 2381–2392.
- [2] Юрий Белоусов, Андрей Малютин. Простые дуги в плоских кривых и в диаграммах узлов // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. — 2017. — Т. 23, № 4. — С. 63–76.
- [3] Белоусов Юрий. Полумеандрическое число перекрестков узла и родственные инварианты // *Записки научных семинаров ПОМИ*. — 2018. — Т. 476. — С. 20–33.
- [4] Belousov Yury, Malyutin Andrei. Meander diagrams of knots and spatial graphs: Proofs of generalized Jablan–Radović conjectures // *Topology and its Applications*. — 2020. — Vol. 274. — P. 107–122.
- [5] Лернейские узлы и вложенные перестройки / Белоусов Юрий, Карев Максим, Малютин Андрей, Миллер Алексей и Фоминых Евгений // *Алгебра и анализ*. — 2021. — Т. 33, № 1. — С. 30–66.
- [6] Adams Colin. *The knot book*. — American Mathematical Soc., 1994.
- [7] Rolfsen Dale. *Knots and links*. — American Mathematical Soc., 2003. — Vol. 346.
- [8] Burde Gerhard, Zieschang Heiner, Heusener Michael. *Knots*. — Walter de Gruyter, 2013. — Vol. 5.
- [9] Von Hotz Günter. Arkadenfadendarstellung von Knoten und eine neue Darstellung der Knotengruppe // *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* / Springer. — 1960. — Vol. 24. — P. 132–148.
- [10] Makanin Gennadiy. On an analogue of the Alexander-Markov theorem // *Mathematics of the USSR-Izvestiya*. — 1990. — Vol. 34, no. 1. — P. 201.

- [11] Kneissler Jan. Woven braids and their closures // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 1999. — Vol. 8, no. 02. — P. 201–214.
- [12] Ozawa Makoto. Edge number of knots and links // arXiv preprint arXiv:0705.4348. — 2007.
- [13] Owad Nicholas. Straight knots // arXiv preprint arXiv:1801.10428. — 2018.
- [14] Adams Colin, Shinjo Reiko, Tanaka Kokoro. Complementary regions of knot and link diagrams // Annals of Combinatorics. — 2011. — Vol. 15, no. 4. — P. 549–563.
- [15] Menasco William, Thistlethwaite Morwen. The Tait flyping conjecture // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1991. — Vol. 25, no. 2. — P. 403–412.
- [16] Menasco William, Thistlethwaite Morwen. The classification of alternating links // Annals of Mathematics. — 1993. — P. 113–171.