Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
“Национальный исследовательский университет ”Высшая школа экономики”

Факультет математики

Бурман Юрий Михайлович

Двумерные клеточные комплексы, вещественные числа Гурвица и интегрируемые системы

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ
на соискание ученой стемени доктора математических наук

Москва — 2023

Введение

Диссертация посвящена нескольким темам из геометрии и комбинаторики, группирующимся вокруг идеи подсчета геометрических объектов с данными особенностями. Наиболее известная задача такого типа — восходящая к Гурвицу [1] задача подсчета классов эквивалентности мероморфныз функций на кривых заданного рода, имеющих критические точки заданной структуры. Комбинаторные методы, используемые для решения этой и подобных задач, зачастую используют многочисленные варианты классического результата — матричной теоремы о деревьях (Кирхгоф, [2]).

В диссертации можно выделить три основные группы результатов:

1. (совместно с Р. Феслером) Теория вещественных чисел Гурвица, параллельная классической ("комплексной") теории. Мы формулируем и сравниваем несколько моделей для этих чисел, получаем для них явные формулы и доказываем, что производящая функция этих чисел удовлетворяет уравнению в частных производных, похожему на классическое уравнение cut-and-join.
2. (некоторые результаты получены совместно с соавторами — В.Кулишовым, Д.Звонкиным, Б.Шапиро, А.Плосконосовым и А.Трофимовой) Различные обобщения матричной теоремы о деревьях, в которой матрица Лапласа заменяется на специальные элементы групповой алгебры группы Коксетера, а определители (или миноры) — на их высшие аналоги, многочлены произвольной степени.
3. (совместно с рядом авторов, в т.ч. с Б.Шапиро и С.Львовским) Геометрические и комбинаторные результаты в задачах, аналогичных задаче Гурвица. Подсчет фунщций с заданным набором особенностей в данных алгебраических семействах (конкретно, на многообразии Севери), а также описание отображений алгебраических поверхностей, разветвленных над заданной кривой.

Здесь приводится краткое описание проведенных исследований; введение к диссертации содержит более подробное описание.

Благодарности

Большая часть результатов диссертации получена совместно с соавторами, которым я хочу выразить свою самую глубокую благодарность. Из тех моих коллег, кто не был моим соавтором, я бы хотел особо поблагодарить М. Казаряна и С. Ландо, которые на протяжении многих лет организуют научный семинар — идеальное для меня место, чтобы учиться новому и представлять свои идеи.

На протяжении всей своей научной карьеры Сергей Натанзон (1948–2020) был ведущим экспертом в вопросах вещественной геометрии (кривые с антиголоморфной инволюцией и их отображения). Его идеи во многом сформировали мои взгляды в этой области. Увы, трагмческая смерть Сергея от коронавируса помешала нам стать соавторами.

1. Вещественные числа Гурвица

Пусть m — целое число, а $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_s)$ – разбиение. Классическое (одночастное) число Гурвица $h_{m,\lambda}$ определяется как количество классов эквивалентности мероморфных функций на компактных комплексных кривых, имеющих m простых критических значений и еще одно критическое значение с профилем λ (т.е. значние, прообраз которого состоит из точек кратностью λ_1, λ_2 и т.д.). Монодромия сопоставляет функции набор перестановок и доказывает (см., например, статью [3] и ее список литературы), что число $n!h_{m,\lambda}$ равно количеству последовательностей $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ транспозиций в группе S_n (здесь $n = |\lambda|$), произведение которых имеет циклическую структуру λ. В статье [4] (и позднее в статье [5]) доказывается, что число Гурвица равно числу *ленточных разложений* профиля λ, то есть клеточных комплексов со специальным свойствами на кривой, где определена мероморфная функция.

В данном параграфе диссертации все указанные поянтия переносятся на случай вещественных кривых без вещественных точек, то есть комплексных кривых с антиголоморфной инволюцией без неподвижных точек. Мероморфные функции в этом случае рассматриваются вещественные с вещественными критическими значениями, последовательности транспозиций имеют длину $2m$ и обладают определенной симметрией. Ленточные разложения инвариантны относительно инволюции.

Производящая функция классических чисел Гурвица

$$H(\beta, p) = \sum_{m,\lambda} h_{m,\lambda} \frac{\beta^m}{m!\,|\lambda|\,!} p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$$

удовлетворяет параболическому уравнению с частными производными, называемому уравнением cut-and-join. Соответствующая производящая функция вещественных чисел Гурвица удовлетворяет похожему уравнению. (Оба уравнения — частные случаи уравнения Бельтрами–Лапласа [6]: уравнение для вещественных чисел Гурвица соответствует значению параметра $\alpha = 2$, а для классических — $\alpha = 1$.)

2. Обобщения матричной теоремы о деревьях

Матрицей Лапласа называется матрица L, внедиагональные элементы которой равны w_{ij} $(1 \leq i \neq j \leq n)$, а диагональные $-\sum_{j \neq i} w_{ij}$ $(1 \leq i \leq n)$. Классическая матричная теорема о деревьях (Г. Кирхгоф, [2], 1847) выражает главный минор матрицы Лапласа в виде суммы мономов от матричных элементов, индексированных ориентированным деревьями с n вершинами и единственным источником. Теорема имеет ряд обобщений, включая формулу для произвольного минора; см. подробности в статье [7].

Во втором параграфе диссертации приводятся несколько новых обобщений. Одно из них — тождество, в котором детерминанты (миноры) заменяются на их высшие аналоги — многочлены произвольной степени от матричных элементов. Другое обобщение связано с тем фактом, что в симметрическом случае (т.е. когда $w_{ij} = w_{ji}$) матрица Лапласа это матрица элемента $W \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} w_{ij}(1 - (ij))$ групповой алгебры симметрической группы S_n, действующего в n-мерном перестановочном представлении. Мы заменяем группу S_n на произвольную группу Коксетера, а W — на произвольный элемент специальной подалгебры Ли групповой алгебры (называемой алгеброй Ли-подобных элементов). Полученные матрицы обладают интересными комбинаторными свойствами, одно из которых — аналог матричной теоремы о деревьях.

Кроме того, в этом параграфе мы доказываем топологический результат — формулу для подсчета количества вложений произвольного связного графа в поверхность минимально возможного рода. Эта теорема использует многопараметрический аналог производящей функции для чисел Гурвица и содержит в качестве одного из ингредиентов матричную теорему о деревьях.

3. Разное

Диссертация содержит ряд результатов, не связанных непосредственно с задачей Гурвица, но похожих на нее по формулировке или по используемым методам. Один из них — это матричная теорема о подграфах, где вместо суммирования по остовным деревьям графа происходит суммирование по остовным подграфам с заданным 2-ядром. Такое суммирование позволяет вычислить обобщенные миноры (или f-миноры) матрицы Лапласа, через которые, в свою очередь, легко выражаются производящие функции подграфов разных классов — например, подграфов с нулевой эйлеровой характеристикой.

В классической задаче Гурвицы подсчитывается количество функций с заданным ветвлением на кривых данного рода. Можно рассмотреть аналогичную задачу для функций из других семейств, например, для проекций плоских кривых. Для таких семейств мы получам интересный частичный результат — в случае, когда параметры задачи (род кривой, ее степень и параметр вырождения) удовлетворяют определенным неравенствам.

Также мы рассматриваем одну задачу в большей размерности — находим условия, при которых данная кривая является дивизором ветвления отображения между алгебраическими поверхностями. Наш результат здесь обобщает классическую теорему В. Куликова [8].

4. План диссертации

Диссертация состоит из введения, списка литературы и следующих статей:

Числа в скобках — ссылки на список литературы в конце

1. [16] Yu. Burman. Triangulation of surfaces with boundary and the homotopy principle for functions without critical points (Триангуляции поверхностей с краем и гомотопический принцип для функций без критических точек) // Annals of Global Analysis and Geometry, Vol. 17 (1999), No. 3, pp. 221–238.
2. [12] Yu. Burman, B. Shapiro, Around matrix-tree theorem (Вокруг матричной теоремы о деревьях) // Mathematical Research Letters, Vol. 13 (2003), No. 5. p. 7611–774.
3. [15] A. Berenstein, Yu. Burman, Quasiharmonic polynomials for Coxeter groups and representations of Cherednik algebras (Квазигармонические многочлены для групп Коксетера и представления алгебр Чередника) // Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 362 (2010). No. 1, pp. 229–260.

4. [4] Yu. Burman, D. Zvonkine. Cycle factorizations and 1-faced graph embeddings (Факторизации цикла и одногранные вложения графов) // European Journal of Combinatorics, Vol. 31 (2010), No. 1, pp. 129–144.
5. [9] Yu. Burman, A. Ploskonosov, A. Trofimova, Matrix-tree theorems and discrete path integration (Матричная теорема о деревьях и дискретное интегрирование по путям) // Linear Algebra and its Applications, Vol. 466 (2015), pp. 64–82.
6. [13] Yu. Burman, S. Lvovski, On projections of smooth and nodal plane curves (О проекциях гладких и нодальных плоских кривых) // Moscow Mathematical Journal, Vol. 15 (2015), No. 1, pp. 31–48.
7. [11] Yu. Burman, Higher matrix-tree theorems and Bernardi polynomial (Высшие аналоги матричной теоремы о деревьях и многочлен Бернарди) // Journal of Algebraic Combinatorics, Vol. 50 (2019), No. 4, pp. 427–446.
8. [14] Yu. Burman. B. Shapiro, On Hurwitz–Severi numbers (О числах Гурвица–Севери) // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, Vol. XIX (2019), No. 1, pp. 155–167.
9. [18] Yu. Burman, R. Froeberg, B. Shapiro, Algebraic relations between harmonic and anti-harmonic moments of plane polygons (Алгебраические соотношения между гармоническими и анти-гармоническими моментами плоских многоугольников) // International Mathematics Research Notices. Vol. 14 (2021), pp. 11140–11168.
10. [10] Yu. Burman, V. Kulishov, Lie elements and the Matrix-tree theorem (Элементы Ли и матричная теорема о деревьях) // Moscow Mathematical Journal, Vol. 23 (2023), No. 1, pp. 47–58.

5. Список основных результатов диссертации

1. В [5] вводится понятие вещественного числа Гурвица $h^{\sim}_{m,\lambda}$ (где m — целое число, а λ — разбиение) и доказывается, что количество элементов каждого из трех множеств $\mathfrak{D}_{m,\lambda}$, $\mathfrak{S}_{m,\lambda}$ and $\mathfrak{H}_{m,\lambda}$ равно $n!h_{m,\lambda}$. Здесь

- $\mathfrak{D}_{m,\lambda}$ — множество классов эквивалентности вещественных мероморфных функций на вещественной кривой без вещественных точек, имеющих m вещественных критических значений с профилем $2^2 1^{n-4}$ и одно критическое значение с профилем $1^{2\lambda_1} 2^{2\lambda_2} \dots$.
- $\mathfrak{S}_{m,\lambda}$ — множество последовательностей $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ транспозиций $\sigma_l \in S_{2n}$ таких, что перестановка $x\tau x^{-1}\tau \in S_{2n}$, где $x = \sigma_1 \dots \sigma_m$, а $\tau = (1, n+1) \dots (n, 2n)$, раскладыватся на циклы $c_1, c_1', c_2, c_2', \dots$, где для всех k длины циклов c_k и c_k' равны λ_k и $c_k' = \tau c_k \tau$.
- $\#\mathfrak{H}_{m,\lambda}$ — множество ленточных разложений вещественной поверхности с краем, содержащих m ленточек и имеющих профиль λ; диссертация содержит точное определение этих понятий.

Также мы доказываем, что производящая функция

$$H^{\sim}(\beta, p) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{m \geq 0} \sum_{\lambda} \frac{h^{\sim}_{m,\lambda}}{m!\,|\lambda|\,!} p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_s} \beta^m$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных $\frac{\partial H^{\sim}}{\partial \beta} = \mathrm{CJ}^{\sim}(H^{\sim})$, где $\mathrm{CJ}^{\sim}$ (“подкрученный оператор cut-and-join”) — оператор Лапласа–Бельтрами с параметром $\alpha = 2$ (классический оператор cut-and-join — то же самое с параметром $\alpha = 1$).

2. Рассмотрим конечномерное векторное пространство V, набор векторов $e_1, \dots, e_N \in V$ и ковекторов $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in V^*$. Пусть $M[e, \alpha] : V \to V$ — линейный оператор ранга 1, заданный формулой $M[e, \alpha](v) = \langle \alpha, v \rangle e$. В [9] рассматривается линейный оператор $R : V \to V$ вида $R = P(M[e_1, \alpha_1], \dots, M[e_N, \alpha_N])$, где

$$P(x_1, \dots, x_N) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{1 \le i_1, \dots, i_s \le N} c_{i_1, \dots, i_s} x_{i_1} \dots x_{i_s}$$

— произвольный некоммутативный многочлен степени m. Мы доказываем явную формулу для характеристического многочлена оператора R в терминах e_i, α_h и коэффициентов $c_{i_1 \dots i_s}$. Формула имеет вид “дискретного интеграла по путям”; из нее вытекает формула Коши–Бине и многочисленные версии матричной теоремы о деревьях и их аналоги, в том числе формула Г. Кеньона для определителя лапласиана в дискретном пространстве со связностью.

3. В статье [11] доказывается трехпараметрическое семейство тождеств

$$\Delta \mathcal{B}_{n,k}(q, y, z) = \widehat{\mathcal{B}}_{n,k}(q, y-1, z-1),$$

где $\mathcal{B}_{n,k}(q, y, z)$ и $\widehat{\mathcal{B}}_{n,k}(q, y, z)$ — формальные линейные комбинации ореинтированных графов с n вершинами и k ребрами; коэффициент при графе G в $\mathcal{B}_{n,k}$ — ориентированный аналог $B_G(q, y, z)$ многочлена Татта графа G (определение было впервые дано в статье [17]), а коэффициент в $\widehat{\mathcal{B}}_{n,k}$ равен сумме членов степени k в $B_G(q, y, z)$. Также Δ — линейный оператор на пространстве графов (“абстрактный лапласиан”). Выбирая специальные значения параметров, мы получаем различные результаты, близкие к матричной теореме о деревьях. В частности, получается формула

$$\Delta \det\nolimits_{n,k}^{I} = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{G \in \mathfrak{A}_{n,k}^{I}} G,$$

где $\det_{n,k}^{I}$ — формальная альтернированная сумма вполне циклических графов, у которых вершины $I = \{i_1, \dots, i_s\} \subset \{1, \dots, n\}$, и только они, изолированы. Также $\mathfrak{A}_{n,k}^{I}$ — множество ациклических графов, в которых вершины из множества I, и только они, являются стоками. Левая часть равенства — многочлен произвольной степени, представляющий собой аналог определителя матрицы (точнее, минора).

4. В статье [14] мы изучаем следующий вопрос: пусть p — точка (комплексной проективной) плоскости. Сколько существует нодальных плоских кривых степени d и рода g, имеющих заданный набор из ℓ касательных в самой точке p, заданный набор прямых, проходящих через p и касающихся кривой в других точках и, если позволяет размерность, заданный набор прямых, проходящих

через p и содержащих ноды кривой. Ответ равен

$$\begin{aligned} \binom{d}{2}^{d+\ell-g-2} d^\ell h_{g,1^d}/d! \qquad & \text{если } d+\ell \geq g+2, \\ d^{d+2\ell-g-2}\binom{2g-d-\ell-1}{g-3} h_{g,1^d}/d! \qquad & \text{если } d+\ell < g+2 \leq d+2\ell, \end{aligned}$$

где $h_{g,1^d}$ — классическое число Гурвица. Оставшийся случай $g+2 > d+2\ell$ в настоящее время остается открытым.

Список литературы

[1] A. Hurwitz, Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen // Math. Ann. Vol. 51 (1899), pp. 196–226 (Mathematische Werke II, pp. 342–373).

[2] G. Kirchhoff, Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung det linearen Verteilung galvanischer Ströme gefurht wird // Ann. Phys. Chem., Vol. 72 (1847), pp. 497–508.

[3] Maxim E. Kazarian and Sergey K. Lando, An algebro-geometric proof of Witten conjecture // J. Amer. Math. Soc., 20 (2007), 1079–1089.

[4] Yu. Burman, D. Zvonkine. Cycle factorizations and 1-faced graph embeddings // European Journal of Combinatorics, Vol. 31 (2010), No. 1, pp. 129–144.

[5] Yu. Burman, R. Fesler, Ribbon decomposition and twisted hurwitz numbers, submitted to Communications in Contemporary Mathematics.

[6] Ian G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, w/contributions by A. Zelevinsky, *Oxford Mathematical Monographs* (The Clarendon Press, Oxford University Press, second edition, 1995).

[7] S. Chaiken, A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem // SIAM J. Alg. Disc. Math., Vol. 3 (1982), no. 3, pp. 319–329.

[8] Vik. S. Kulikov, Chisini's conjecture // Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. Vol. 63 (1999), no. 6, pp. 83–116 (Russian), English translation: Izv. Math. Vol. 63 (1999), no. 6, pp. 1139–1170.

[9] Yu. Burman, A. Ploskonosov, A. Trofimova, Matrix-tree theorems and discrete path integration // Linear Algebra and its Applications, Vol. 466 (2015), pp. 64–82.

[10] Yu. Burman, V. Kulishov, Lie elements and the Matrix-tree theorem // Moscow Mathematical Journal, Vol. 23 (2023), No. 1, pp. 47–58.

[11] Yu. Burman, Higher matrix-tree theorems and Bernardi polynomial // Journal of Algebraic Combinatorics, Vol. 50 (2019), No. 4, pp. 427–446.

[12] Yu. Burman Y. M., B. Shapiro, Around matrix-tree theorem // Mathematical Research Letters, Vol. 13 (2003), No. 5. p. 761–774.

[13] Yu. Burman, S. Lvovski, On projections of smooth and nodal plane curves // Moscow Mathematical Journal, Vol. 15 (2015), No. 1, pp. 31–48.

[14] Yu. Burman. B. Shapiro, On Hurwitz–Severi numbers // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, Vol. XIX (2019), No. 1, pp. 155–167.

[15] A. Berenstein, Yu. Burman, Quasiharmonic polynomials for Coxeter groups and representations of Cherednik algebras// Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 362 (2010). No. 1, pp. 229–260.

[16] Yu. Burman. Triangulation of surfaces with boundary and the homotopy principle for functions without critical points // Annals of Global Analysis and Geometry, Vol. 17 (1999), No. 3, pp. 221–238.

[17] J. Awan, O. Bernardi, Tutte polynomials for directed graphs, arXiv:1610.01839v2.

[18] Yu. Burman, R. Froeberg, B. Shapiro, Algebraic relations between harmonic and anti-harmonic moments of plane polygons // International Mathematics Research Notices. Vol. 14 (2021), pp. 11140–11168.