Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Рафаэль Жан Сиома Феслер

Теория Гурвица в вещественном случае и для систем корней типа B и D

Резюме диссертации
на соискание учёной степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
д.мат.н., доцент
Бурман Юрий Михайлович

Москва – 2024.

1. Классические числа Гурвица

Числа Гурвица впервые были введены в конце XIX века в работе А.Гурвица [16] и практически забыты в дальнейшем. Интерес к ним возродился лищь в конце 1990-х годов среди специалистов по математической физике, а также по теории групп и алгебраической геометрии.

Первоначально числа Гурвица определялись как число классов изоморфизма разветвленных накрытий сферы, где профиль одного из критических значений фиксирован, а остальные критические значения простые. В работе Гурвица показано, что эта задача алгебраической геометрии сводится, путем рассмотрения монодромии, к комибинаторной задаче подсчета числа наборов транспозиций, произведение которых принадлежит заданному классу сопряженности в группе перестановок. Тем самым числа Гурвица позволяют связать друг с другом две по-видимому далекие области математики.

В работе 2001 года [9] (T.Ekedahl, S.Lando, M.Shapiro, A.Vainshtein) доказана замечательная формула (называемая по именам авторов ELSV), свзывающая числа Гуравица с другой областью математики — геометрией пространств модулей комплексных кривых. (А именно, числа Гурвица оказываются числами пересечений определенных классов когомологий на этих пространствах.) Тем самым числа Гурвица — по определению объект дискретный, комбинаторный — описывают структуру топологического происхождения. Еще одна топологическая реализация чисел Гурвица была обнаружена Ю.Бурманом и диссертантом в работе [2]; см. подробности в главе 1 диссертации.

Еще одна группа теорем, касающихся чисел Гурвица, была получена в течение последних тридцати дет при исследованиях, касающихся так называемой гипотезы Виттена [30]. Эта гипотеза (к настоящему моменту доказанная несколькими способами, см. [20], [19]) утверждает, что производящая функция чисел Гурвица удовлетворяет параболическому уравнению второго порядка, называемому уравнением cut-and-join и, следовательно, является тау-функцией интегрируемой иерархии КП. Комбинаторно смысл уравнения cut-and-join описывает поведение циклической структуры перестановки при умножении ее на транспозицию: либо два цикла перестановки склеиваются в один, либо один цикл делится на два [12]. Собственные функции оператора cut-and-join — многочлены Шура, что позволяет выразить через них числа Гурвица [19].

Ниже еще раз перечислены упомянутые свойства классических чисел Гурвица $h_{m,\lambda}$.

- Алгебраическое определение:
  $\#(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \;\mid \forall i \; \sigma_i \in C_2$ и $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m \in C_\lambda$
- Алгебро-геометрическое определение:
  Количество классов изоморфизма разветвленных накрытий сферы, где m конечных критические значений простые, а критическое значение ∞ имеет профиль ветвления λ
- Геометрическое определение:
  Числа пересечений в когомологиях пространства модулей стабильных кривых (формула ELSV)
- Топологическое определение:

Число разложений поверхности на m неперекрученных ленточек и n дисков, где граница поверхности состоит из s компонент, содержащих $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ вершин (концов диагоналей ленточек)

- Выражение через многочлены Шура производящей функции $H(\beta, p_1, p_2, \dots)$ (несвязных) чисел Гурвица:
  $H(\beta, p_1, p_2, \dots) = \sum_\lambda s_\lambda(1,0,0,\dots) s_\lambda(p_1, p_2, \dots) \exp^{\sum_{i=1}^\infty \lambda_i(\lambda_i - 2i+1)\beta}$
- Решение дифференциального уравнения cut-and-join:
  $\frac{\partial H}{\partial \beta} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^\infty \left((i+j)p_i p_j \frac{\partial H}{\partial p_{i+j}} + ijp_{i+j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)$
- Интегрируемая система:
  $H(\beta, p_1, p_2, \dots)$ - тау-функция интегрируемой иерархии КП

В настоящей работе мы изучаем новые типы чисел Гурвица: подкрученные (вещественные) и числа Гурвица для групп, порожденных отражениями, типов B and D. Ниже представлены основные результаты диссертации.

2. Вещественные (подкрученные) числа Гурвица

В главе 1 диссертации мы вводим новую топологическую модель для чисел Гурвица:

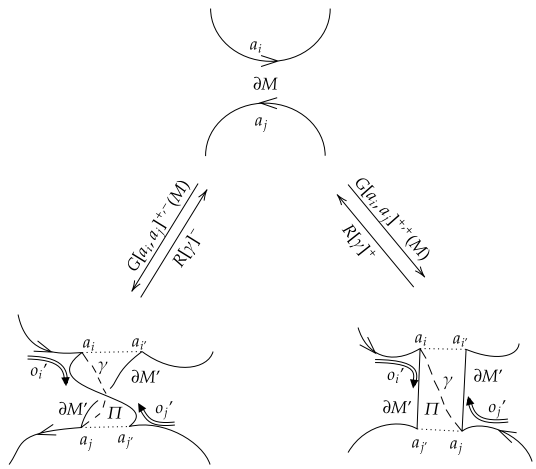
Definition. *Поверхностью с пометками на границе* (Decorated-boundary surface, DBS) называется тройка $(M, (a_1, \dots, a_n), (o_1, \dots, o_n))$, в которой M — компактная поверхность (двумерное многообразие) с краем, $a_1, \dots, a_n \in \partial M$ — отмеченные точки, а o_i — локальная ориентация границы ∂M (и, следовательно, самой поверхности M) в окрестности точки a_i. При этом предполагается, что

- каждая компонента связности поверхности M имеет непустую границу и
- каждая компонента связности границы ∂M содержит хотя бы одну отмеченную точку a_i.

Поверхности с пометками на границе M и M' с одним и тем же n называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : M \to M'$, для которого $h(a_i) = a_i'$ и $h_*(o_i) = o_i'$ для всех $i = 1, \dots, n$. Множество классов эквивалентности DBS с n отмеченными точками обозначает $\mathcal{DBS}_n$.

Выберем отмеченные точки $a_i, a_j \in \partial M$, и пусть $\varepsilon_i, \varepsilon_j \in \{+, -\}$. Возьмем точки $a_i', a_j' \in \partial M$, лежащие около a_i, a_j таким образом, чтобы дуга края $a_i a_i'$ была направлена согласно ориентации o_i, если $\varepsilon_i = +$, и против ориентации, если$\varepsilon_i = -$; то же самое для j. Возьмем теперь длинный узкий прямоугольник (“ленточку”) и приклеим ее короткие стороны к границе ∂M, как показано на рисунке 2. После приклеивания получится поверхность M' с краем $\partial M' \ni a_1, \dots, a_n$. Край M' около точек a_i и a_j содержит дугу края ∂M (“старая” часть края) и чать длинной стороны приклеенной ленточки (“новая” часть); определим локальные ориентации o_i', o_j' края $\partial M'$ в окрестности точек a_i, a_j так, чтобы ориентация “старых” частей края осталась неизменной (см. жирные искривленные стрелки на рис. 2); если же $k \neq i, j$ то возьмем $o_k' = o_k$ по определению. Теперь $(M', (a_1, \dots, a_n), (o_1', \dots, o_n'))$ — поверхность с пометками на крае, так что мы определили *отображение прикливания ленточки* $G[i,j]^{\varepsilon_i, \varepsilon_j} : \mathcal{DBS}_n \to \mathcal{DBS}_n$. Приклеивание $G[i,j]^{\varepsilon_i, \varepsilon_j}$ называется приклеиванием с перекруткой, если $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$, иначе это приклеивание без перекрутки.

Обозначим $E_n \in \mathcal{DBS}_n$ объединение n дисков, на границе каждого из которых стоит одна отмеченная точка, и пусть $M \in \mathcal{DBS}_n$ получается из E_n



прикливанием m ленточек:

$$M = G[i_m, j_m]^{\varepsilon_m, \delta'_m} \dots G[i_1, j_1]^{\varepsilon_1, \delta_1} E_n;$$

это называется *ленточным разложением.* Ленточное разложение называется ориентированным, если все знаки $\varepsilon_m = \delta_m = +$; в этом случае M — ориентированная поверхность с краем, и все локальные ориентации o_i порождаются глобальной ориентацией.

Зафиксируем натуральное число m и разбиение $(\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s)$ числа $n \stackrel{\text{def}}{=} |\lambda| \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 + \dots + \lambda_s$ на s частей. Обозначим $\mathfrak{S}_{m,\lambda}$ множество разложений на m ленточек и n дисков поверхностей, граница которых имеет s компонент связности, содержащих $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ отмеченных точек (концов диагоналей ленточек).

Подкрученные числа Гурвица определяются как

Definition.

$$h^{\sim}_{m,\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} \#\mathfrak{S}_{m,\lambda}$$

Если $\mathfrak{S}^+_{m,\lambda}$ — множество ориентированных ленточных разложений с теми же свойствами, то $\frac{1}{n!}\#\mathfrak{S}^+_{m,\lambda}$ равно классическому числу Гурвица (доказательство см. ниже в главе 1). Таким образом, определение 2 обобщает топологическое определение классических чисел Гурвица — ленточки разрешается перекручивать, и поэтому полученная поверхность, вообще говоря, неориентиуема..

У комбинаторного определения чисел Гурвица имеется следующий “подкрученный” аналог. Рассмотрим инволюцию без неподвижных точек

$$\tau = (1, 1+n)(2, 2+n) \dots (n, 2n)$$

в группе перестановок S_{2n}. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in S_{2n}$ — транспозиции. Анализ показывает, что перестановка

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_1 \dots \sigma_m \tau \sigma_m \dots \sigma_1 \tau \in S_{2n} \tag{2.1}$$

раскладывается в непересекающиеся циклы $u = c_1c_1' \dots c_sc_s'$, где $c_i' = \tau c_i^{-1}\tau$ для всех $i = 1, \dots, s$. Назовем пары (c_i, c_i') τ-симметричными циклами. Пусть $B_\lambda^\sim$ — множество перестановок, разложение которых в произведение непересекающихся циклов состоит из s пар τ-симметричных циклов длиной $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Обозначим

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_{m,\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \{&(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \mid \forall s = 1, \dots, m\, \sigma_s = (i_sj_s), j_s \neq \tau(i_s),\\ &\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_m(\tau\sigma_m\tau) \dots (\tau\sigma_1\tau) \in B_\lambda^\sim\}.\end{aligned}$$

Theorem (Глава 1, Theorem 2.4)**.**

$$h_{m,\lambda}^\sim = \frac{1}{n!}\#\mathfrak{H}_{m,\lambda};$$

между множествами $\mathfrak{H}_{m,\lambda}$ и $\mathfrak{S}_{m,\lambda}$ существует явное взаимно однозначное соответствие.

Затем мы строим уравнение с частными производными второго порядка параболического типа, которому удовлетворяет производящая функция подкрученных чисел Гурвица. Оно похоже на уравнение cut-and-join, которому удовлетворяет производящая функция классических чисел Гурвица; оба уравнения — частные случаи уравнения Лапласа–Бельтрами. Собственные функции правой части уравнения — зональные многочлены, так что можно выразить через них подкрученные числа Гурвица. А именно, рассмотрим производящую функцию $\mathcal{H}^\sim(\beta, p)$ подкрученных чисел Гурвица, определенную формулой:

$$\mathcal{H}^\sim(\beta, p) = \sum_{m\geq 0}\sum_\lambda \frac{h_{m,\lambda}^\sim}{m!} p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\dots p_{\lambda_s}\beta^m.$$

Theorem (Глава 1, Theorem 2.12)**.** *$\mathcal{H}^\sim$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial\mathcal{H}^\sim}{\partial\beta} = \mathcal{CJ}^\sim(\mathcal{H}^\sim)$, в котором*

$$\begin{aligned}\mathcal{CJ}^\sim &= \sum_{i,j\geq 1}(i+j)p_ip_j\frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + 2ijp_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial p_j} + \sum_{k\geq 1}k(k-1)p_k\frac{\partial}{\partial p_k}\\ &= \sum_{i,j\geq 1}(i+j)(p_ip_j + p_{i+j})\frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + 2ijp_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial p_j} \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Corollary. $\mathcal{H}^\sim(\beta, p) = \exp(\beta\mathcal{CJ}^\sim)\exp(p_1)$.

Выражение подкрученных чисел Гурвица через зональные многочлены выглядит так:

Theorem (Глава 1, Theorem 2.15)**.**

$$\mathcal{H}^\sim(\beta, p) = \sum_\lambda \exp\bigl(2\beta\sum_i \lambda_i(\lambda_i - i)\bigr)\frac{2^{|\lambda|}Z_\lambda(p)}{H_\lambda(2)H_\lambda'(2)},$$

где $H_\lambda(\alpha) \stackrel{def}{=} \prod_{(i,j)\in Y(\lambda)}(\alpha a(i,j) + \ell(i,j) + 1)$ и $H_\lambda'(\alpha) \stackrel{def}{=} \prod_{(i,j)\in Y(\lambda)}(\alpha a(i,j) + \ell(i,j) + \alpha)$. Символом $Y(\lambda)$ обозначена диаграмма Юнга разбиения λ, а $a(i,j)$ и $\ell(i,j)$ — “рука” и “нога”, соответственно, клетки $(i,j) \in Y(\lambda)$; Z_λ — зональные многочлены.

Аналог алгебро-геометрического определения чисел Гурвица использует понятие подкрученного разветвленного накрытия, введенного в статье [7] (G. Chapuy, M. Dołęga). В главе 1 диссертации мы показываем, что производящая функция подкрученных чисел Гурвица удовлетворяет тому же самому уравнению с частными производными (уравнению Лапласа–Бельтрами с параметром 2) с теми же начальными условиями, что и производящая функция для подкрученных разветвленных накрытий.

Определение подкрученного разветвленного накрытия таково: пусть N — замкнутая поверхность (компактное двумерное многообразие без края, не обязательно ориентируемое), а $p : \widehat{N} \to N$ — его ориентирующее накрытие. Обозначим $\mathcal{T} : \widehat{N} \to \widehat{N}$ меняющую ориентацию инволюцию без неподвижных точек, для которой $p \circ \mathcal{T} = p$. Символом $\mathcal{J} : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ обозначим комплексное сопряжение, и пусть $\overline{\mathbb{H}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}P^1/(z \sim \mathcal{J}(z)) = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$, где $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ — верхняя полуплоскость; $\overline{\mathbb{H}}$ гомеоморфно диску. Также обозначим $\pi : \mathbb{C}P^1 \to \overline{\mathbb{H}}$ отображение факторизации.

Непрерывное отображение $f : N \to \overline{\mathbb{H}}$ называется подкрученным разветвленным накрытием, если существует разветвленное накрытие $\widehat{f} : \widehat{N} \to \mathbb{C}P^1$ такое, что

(1) $\pi \circ \widehat{f} = f \circ p$, и
(2) все критические значения отображения $\widehat{f}$ вещественны.

Свойство (1) означает, что $\widehat{f}$ — вещественное отображение по отношению к вещественной структуре $\mathcal{T}$, то есть $\widehat{f} \circ \mathcal{T} = \mathcal{J} \circ \widehat{f}$. Инволюция $\mathcal{T}$ не имеет неподвижных точек. Отсюда вытекает, что критические точки отображения $\widehat{f}$ разбиваются на пары $(a, \mathcal{T}(a))$, в профиле ветвления каждого критического значения $c \in \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$ отображения $\widehat{f}$ каждая часть повторяется дважды: $(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda_s)$, а степень отображения $\deg \widehat{f} = 2n$ четная. В этом случае мы говорим, что профиль ветвления критического значения $\pi(c) \in \partial\overline{\mathbb{H}}$ отображения $f : N \to \overline{\mathbb{H}}$ равен $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$.

Подкрученное разветвленное накрытие f называется простым, если все его критические значения, за возможным исключением $\infty \in \overline{\mathbb{H}}$, имеют профиль ветвления $2^1 1^{n-2}$. (Или, что то же самое, прообраз каждого конечного критического значения отображения $\widehat{f}$ состоит из двух простых критических точек и $2n-4$ некритических.) Обозначим $\#\mathfrak{D}_{m,\lambda}$ множество классов изоморфизма простых подкрученных разветвленных накрытий, имеющих m конечных критических значений и таких, что критическое значение ∞ имеет профиль ветвления λ.

Тогда аналог алгебро-геометрического опрелеления чисел Гурвица выгдядит так:

Theorem (Глава 1, Theorem 3.2)**.** $\#\mathfrak{D}_{m,\lambda} = \#\mathfrak{S}_{m,\lambda} = \#\mathfrak{H}_{m,\lambda} = n! h^{\sim}_{m,\lambda}$.

3. Числа Гурвица для групп, порожденных отражениями, типов B и D

В главе 2 диссертации мы изучаем числа Гурвица для групп, порожденных отражениями, типов B и D.

Группа B_n имеет хорошо известное вложение (см. [15]) в группу перестановок S_{2n} в качестве нормализатора $\mathrm{Norm}(\tau)$ элемента $\tau = (1, n+1)(2, n+$

$2)\dots(n,2n)$ (см. главу 1 и раздел 2 Введения). Отражения в группе B_n при этом соответствуют перестановкам $r_{ij} = (ij)(\tau(i),\tau(j))$ и $\ell_i = (i,\tau(i))$, здесь $1 \le i,j \le 2n$. Группа D_n — пересечение B_n с подгруппой четных подстановок; она содержит только отражения r_{ij}.

Если $x \in \mathrm{Norm}(\tau)$ имеет циклическое разложение $x = c_1 \dots c_k$, то для каждого цикла c_i, $i = 1,\dots,k$ верно одно из двух: либо существует другой цикл $c_j = \tau c_i \tau$ той же длины, либо c_i имеет четную длину и инвариантен относительно τ: $c_i = \tau c_i \tau$.

Зафиксируем два разбиения, $\lambda = (\lambda_1 \ge \dots \ge \lambda_s)$ и $\mu = (\mu_1 \ge \dots \ge \mu_t)$ такие, что $|\lambda| + |\mu| = n$, и рассмотрим множество $C_{\lambda|\mu}$ элементов $x \in B_n \subset S_{2n}$ таких, что их циклическое разложение содержит пары циклов c_i и $\tau c_i \tau$ длин (каждый из циклов) $\lambda_1,,\dots,\lambda_s$, и τ-инвариантные циклы $c_i = \tau c_i \tau$ длин $2\mu_1,\dots,2\mu_t$ (напомним, что длина такого цикла должна быть четной).

Theorem ([6, Proposition 25])**.** *Множество $C_{\lambda|\mu} \subset B_n$ — класс сопряженности. Каждый класс сопряженности в группе B_n есть $C_{\lambda|\mu}$ для некоторых λ и μ таких, что $|\lambda| + |\mu| = n$.*

Описание классов сопряженности группы D_n немного сложнее:

Theorem ([6, Proposition 25])**.**

(1) *Если разбиение μ содержит четное число частей, то класс сопряженности $C_{\lambda|\mu} \subset B_n$ лежит в D_n; если число частей нечетно, то $C_{\lambda|\mu}$ не пересекается с D_n.*
(2) *Если $\mu \neq \varnothing$ (и содержит четное число частей), то $C_{\lambda|\mu}$ — класс сопряженности в группе D_n.*
(3) *Если хотя бы одно из чисел λ_i нечетно, то $C_{\lambda|\varnothing}$ — класс сопряженности в группе D_n.*
(4) *Если все числа λ_i четные, то множество $C_{\lambda|\varnothing}$ разбивается на два класса сопряженности, $C^+_{\lambda|\varnothing}$ и $C^-_{\lambda|\varnothing}$, в группе D_n, .*

Каждый класс сопряженности в группе D_n совпадает с одним из перечисленных выше.

В частности, отражения r_{ij} образуют класс сопряженности $C_{2^1 1^{n-2}|\varnothing} \subset D_n \subset B_n$, а отражения ℓ_i — класс сопряженности$C_{1^{n-1}|1^1} \subset B_n$. Обозначим эти классы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ соответственно.

Определение чисел Гурвица для групп B_n и D_n похоже на определение классических чисел Гурвица; вместо транспозиций используются отражения. Для групп серии B мы считаем отражения двух видов (транспозиции и пары транспозиций) по отдельности:

Definition. Говорят, что последовательность отражений $(\sigma_1,\dots,\sigma_{m+\ell})$ в группе B_n имеет профиль (λ,μ,m,ℓ), если $\#\{p \mid \sigma_p \in \mathcal{R}\} = m$, $\#\{p \mid \sigma_p \in \mathcal{L}\} = \ell$ и $\sigma_1 \dots \sigma_{m+\ell} \in C_{\lambda|\mu}$.
Число Гурвица для группы B_n это

$$h^B_{m,\ell,\lambda,\mu} = \frac{1}{n!}\#\{(\sigma_1,\dots,\sigma_{m+\ell}) \text{ — последовательность с профилем } (\lambda,\mu,m,\ell)\}.$$

Definition. Пусть m — натуральное число, λ и μ — разбиения, и количество $\#\mu$ частей разбиения μ четно. Число Гурвица для группы D_n определяется равенством $h^D_{m,\lambda,\mu} = h^B_{m,0,\lambda,\mu}$.

Обозначим $\mathcal{C}_{\lambda|\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\#C_{\lambda|\mu}} \sum_{x \in C_{\lambda|\mu}} x \in \mathbb{C}[B_n]$ элемент групповой алгебры группы B_n — результат усреднения по классу сопряженности. Элементы $\mathcal{C}_{\lambda|\mu}$ принадлежат центру $Z[B_n]$ групповой алгебры и образуют в нем базис. Рассмотрим теперь кольцо многочленов $\mathbb{C}[p,q]$, где $p = (p_1, p_2, \dots)$ и $q = (q_1, q_2, \dots)$ — два бесконечных набора переменных. Это кольцо градуировано по общей степени, где предполагается, что степени переменных $\deg p_k = \deg q_k = k$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Отображение, переводящее $\mathcal{C}_{\lambda|\mu}$ в моном $p_\lambda q_\mu \stackrel{\text{def}}{=} p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_s} q_{\mu_1} \dots q_{\mu_t}$ — изоморфизм между $Z[B_n]$ и однородной компонентой $\mathbb{C}[p,q]_n$ степени n.

В случае группы D_n ситуация похожая (см. подробности в работе [6]): результаты усреднения по классам сопряженностим $\mathcal{C}_{\lambda|\mu}$ (где $\mu \neq \varnothing$ и содержит четное число частей), а также результаты усреднения по классам $\mathcal{C}_{\lambda|\varnothing} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\#C_{\lambda|\varnothing}} \sum_{x \in C^+_{\lambda|\varnothing} \cup C^-_{\lambda|\varnothing}} x \in \mathbb{C}[D_n]$ образуют базис в пространстве $V_n^+ \subset Z[D_n]$, изоморфном подпространству $Q_n \subset \mathbb{C}[p,q]_n$ многочленов четной степени по переменным q. При нечетном n имеет место равенство $Z[D_n] = V_n^+$, а при четном n $Z[D_n] = V_n^+ \oplus V_n^-$, где подпространство V_n^- порождено $\mathcal{B}_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\#C_{\lambda|\varnothing}} \left(\sum_{x \in C^+_{\lambda|\varnothing}} x - \sum_{x \in C^-_{\lambda|\varnothing}} x \right)$. Отображение, переводящее $\mathcal{B}_\lambda$ to $p_{\lambda_1/2} \dots p_{\lambda_s/2}$ (напомним, что все части λ_i разбиения λ должны быть четными) — изоморфизм между V_n^- и $\mathbb{C}[p]_{n/2}$.

Рассмотрим следующую производящую функцию чисел Гурвица группы B_n:

$$\mathcal{H}^B(\beta, \gamma, p, q) = \sum_{m,\ell} \sum_{\lambda,\mu} \frac{h^B_{m,\ell,\lambda,\mu}}{m!\ell!} p_\lambda q_\mu \beta^m \gamma^\ell.$$

Функция $\mathcal{H}^B$ является решением *уравнений cut-and-join*

$$\frac{\partial \mathcal{H}^B}{\partial \beta} = \mathcal{CJ}_1(\mathcal{H}^B) \quad \text{and} \quad \frac{\partial \mathcal{H}^B}{\partial \gamma} = \mathcal{CJ}_2(\mathcal{H}^B),$$

в которых

$$\mathcal{CJ}_1 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \Bigg((i+j) p_i q_j \frac{\partial}{\partial q_{i+j}} + 2ij q_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial q_j} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{1}{2}(i+j) q_i q_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + \frac{1}{2}(i+j) p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \Bigg)$$

и

$$\mathcal{CJ}_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(i p_i \frac{\partial}{\partial q_i} + i q_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

Corollary.

$$\mathcal{H}^B(\beta, \gamma, p, q) = e^{\beta \mathcal{CJ}_1 + \gamma \mathcal{CJ}_2} e^{p_1}$$

Пусть теперь

$$\mathcal{CJ} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^{\infty} \left(ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} + (i+j) p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} \right) \tag{3.1}$$

и

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} i p_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{3.2}$$

(эйлерово векторное поле). Заменим переменные:

Proposition (Глава 2, Proposition 3.1)**.** *Пусть* $u_\ell = \frac{p_\ell+q_\ell}{2}$ *и* $v_\ell = \frac{p_\ell-q_\ell}{2}$*. Тогда*

$$\begin{aligned}\mathcal{CJ}_1 = \sum_{i,j=1}^{\infty}\Big(&iju_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial u_i\partial u_j} + (i+j)u_iu_j\frac{\partial}{\partial u_{i+j}} + ijv_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial v_i\partial v_j}\\ &+ (i+j)v_iv_j\frac{\partial}{\partial v_{i+j}}\Big) = \mathcal{CJ}_u^{\sim} + \mathcal{CJ}_v^{\sim},\\ \mathcal{CJ}_2 = \sum_{\ell=1}^{\infty}\ell&\left(u_\ell\frac{\partial}{\partial u_\ell} - v_\ell\frac{\partial}{\partial v_\ell}\right) = E_u - E_v,\end{aligned}$$

где символами $\mathcal{CJ}_u$ и $\mathcal{CJ}_v$ мы обозначим оператор (3.1), действующий в переменных u_i и v_i соответственно; аналогично E_u и E_v.

В результате получается

Corollary (Глава 2, corollary 3.3)**.**

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^B(\beta,\gamma,p_1,p_2,\dots,q_1,q_2,\dots) = \sum_{\lambda,\mu}\exp\big(\beta\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_i(\lambda_i-2i+1)+\mu_i(\mu_i-2i+1)+\gamma\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_i-\mu_i)\big)\\ \times s_\lambda(1,0,0\dots)s_\mu(1,0,0\dots)s_\lambda((p_1+q_1)/2,\dots)s_\mu((p_1-q_1)/2,\dots)\end{aligned}$$

Аналогичные разультат для группы D_n:

Theorem (Глава 2, Theorem 4.1)**.** *Оператор* $\mathcal{CJ}_1^D$ *— ограничение оператора* $\mathcal{CJ}_1^B$ *на подпространство* $Q_n \subset \mathbb{C}[p,q]_n$ *многочленов четной степени по переменным* q*. Замена переменных* $p_i \mapsto p_i/2$ *превращает оператор* $\mathcal{CJ}_2^D$ *(определенный только для четных* n*) в умноженный на* 4 *оператор cut-and-join* (3.1)*, где with* $n \mapsto n/2$.

Поскольку оператор $\mathcal{CJ}_2$ — эйлерово векторное поле, мы можем свести вычисление чисел Гурвица к случаю $\ell = 0$. Существует также явная формула, выражающая B-числа Гурвица $h^B_{m,0,\lambda,\mu}$ через классические числа Гурвица $h_{m,\lambda}$. А именно, для последовательности натуральных чисел $c_1,\dots,c_n$ обозначим символом $\xi(c)$ разбиение $1^{c_1}\dots n^{c_n}$; так $|\xi(c)| = c_1+2c_2+\dots+nc_n$. Также для натуральных чисел p, q, r обозначим f^r_{pq} коэффициент при мономе x^r в многочлене $(1+x)^p(1-x)^q$.

Пусть $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \xi(\gamma)$ и $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \xi(\delta)$. Тогда

$$h^B_{m,0,\lambda,\mu} = \sum_{\substack{\alpha_i+\beta_i=\gamma_i+\delta_i\ \forall i\\ m_1+m_2=m}} \frac{h_{m_1,\xi(\alpha)}h_{m_2,\xi(\beta)}}{2^{\#\lambda+\#\mu}}\binom{m}{m_1}\binom{|\lambda|+|\mu|}{|\xi(\alpha)|}f^{\gamma_1}_{\alpha_1\beta_1}f^{\gamma_2}_{\alpha_2\beta_2}\dots$$

Theorem 3.1 (Глава 2, Theorem 5.10)**.** *Производящая функция* $\mathcal{H}^B(\beta,\gamma,u+v,u-v)$ *— двупараметрическое семейство* τ*-функций иерархии КП, независимо по переменным* u *и по переменным* v*.*

Также:

Corollary (Глава 2, Corollary 5.11)**.** *Производящая функция* $\mathcal{H}^D(\beta,u+v,u-v)$ *— однопараметрическое семейство* τ*-функций иерархии КП, независимо по переменным* u *и по переменным* v*.*

Аналог топологического определения чисел Гурвица для групп, порожденных отражениями, типа B состоит из ориентированного DBS (см. определение выше) M и сохраняющей ориентацию инволюции τ, относительно которой инвариантно ленточное разложение. Такая DBS получается приклеиванием $2m+\ell$ неперекрученных ленточек к $2n$ дискам; ее граница состоит из $2s+k$ компонент, содержащих $\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda_s, 2\mu_1, \dots, 2\mu_k$ вершин. Из них ℓ ленточек инвариантны относительно инволюции; на каждой из них есть ровно одна неподвижная точка. Остальные ленточки образуют m пар; инволюция меняет членов каждой пары местами. Набор (λ, μ, m, ℓ) называется профилем B-ленточного разложения.

Theorem 3.2 (Глава 2, Theorem 5.2)**.** *B-ленточные разложения поверхностей с пометками на границе с профилем (λ, μ, m, ℓ) находятся во взаимно однозначном соответствии с последовательностями отражений с тем же профилем.*

4. Числа Гурвица и разветвленные накрытия

В главе 3 диссертации мы строим явное соответствие между подкрученными разветвленными накрытиямии и объектами из комбинаторного определения подкрученных чисел Гурвица.

Пусть, как и выше, $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s)$ — разбиение числа $n \stackrel{\text{def}}{=} |\lambda| \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 + \dots + \lambda_s$, и $m > 0$ — целое число. Обозначим $\mathcal{H}_{m,\lambda}$ главный страт стандартного пространства Гурвица: его элементами являются классы эквивалентности пар (M, f), где M — компактная гладкая комплексная кривая, а $f : M \to \mathbb{C}P^1$ — мероморфная функция, имеющая s полюсов $u_1, \dots, u_s$ кратностей $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ и m простых критических точек.

Используя терминологию работы [7], назовем вещественную мероморфную функцию *простой*, если все ее критические точки u_i, за возможным исключением полюсов, простые, и находятся в общем положении, то есть $f(u_i) \neq f(u_j)$, кроме случаев, когда $u_j = u_i$ или $u_j = \mathcal{T}(u_i)$. Простая вещественная мероморфная функция называется *вполне вещественной*, если все ее критические значения вещественны.

Заметим, что полюса, как правило, не предполагаются простыми. Инволюция $\mathcal{T}$ не имеет неподвижных точек, так что в профиле ветвления $\widehat{f}$ над точкой ∞ каждая часть повторяется дважды: $(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda_s)$, и $\deg \widehat{f} = 2n$ — четное число. Скажем, что профилем простой подкрученной вещественной функции, описанной выше, является разбиение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$; также будем условно писать $\deg f = n$.

Обозначим $\mathbb{R}\mathcal{H}_{m,\lambda}$ множество простых вещественных мероморфных функций с профилем λ и $2m$ вещественных критических точек $u_1, \mathcal{T}(u_1), \dots, u_m, \mathcal{T}(u_m)$, с точностью до эквивалентности (так же, как в классическом пространстве Гурвица, см. [25]). Подмножество, состоящее из вполне вещественных функций, обозначим $\mathfrak{RH}_{m,\lambda} \subset \mathbb{R}\mathcal{H}_{m,\lambda}$. Критические значения функции $F \in \mathfrak{RH}_{m,\lambda}$ мы обычно обозначаем $y_0 < \dots < y_m \in \mathbb{R}$ (каждое из этих значений принимается в двух критических точках). Для $\widehat{f} \in \mathfrak{RH}_{m,\lambda}$ пусть $u \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}P^1$ — регулярное (некритическое) значение, для которого $u < y_0$; прообраз $\widehat{f}^{-1}(u) \subset \hat{N}$ состоит из $2n$ точек, а прообраз $f^{-1}(\pi(u)) \subset N$ состоит из n точек. Зафиксируем биекцию $\hat{\nu} : \widehat{f}^{-1}(\hat{u}) \to \mathcal{A}_n$ такую, что если $\hat{\nu}(x) = k$, то $\hat{\nu}(\mathcal{T}(x)) = \bar{k}$ для всех

$k = 1, \ldots, n$. Простое вполне вещественное разветвленное накрытие, в котором зафиксированы точка u и биекция $\hat{\nu}$, называется помеченным. Множество помеченных вполне вещественных простых разветвленных накрытий $(\widehat{f}, \nu)$, где $\widehat{f} \in \Re\mathfrak{H}_{m,\lambda}$, выще было обозначено $\mathfrak{D}_{m,\lambda}$.

Рассмотрим паросочетания на множестве$\mathcal{A}_n = (1, \bar{1}, \ldots, n, \bar{n})$; их можно отождествить с инволюциями без неподвижных точек в группе перестановок S_{2n}. Для двух таких инволюций δ_1 и δ_2 пусть $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \delta_1\delta_2 \in S_{2n}$. Поскольку $\delta_1\sigma\delta_1 = \delta_2\delta_1 = \sigma^{-1}$, разложение перестановки σ на независимые циклы выглядит как $c_1c_1' \ldots c_sc_s'$, где $c_k' \stackrel{\text{def}}{=} \delta_1 c_k^{-1}\delta_1$; так что c_k и c_k' имеют одну и ту же длину. Обозначим λ_i длину c_i, а разбиение $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ обозначим $\Lambda(\delta_1, \delta_2)$; при этом $|\Lambda(\delta_1, \delta_2)| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s = n$. Парочетанию δ можно соотнести граф $\Gamma(\delta)$, множество вершин которого — $\mathcal{A}_n$, и две вершины p и q соединены ребром (неориентированным), если $\delta(p) = q$. Объединение ребер графов $\Gamma(\delta_1)$ и $\Gamma(\delta_2)$ представляет собой объединение циалов длиной $2\lambda_1, \ldots, 2\lambda_s$.

Обозначим $\mathfrak{P}_{m,\lambda}$ множество последовательностей паросочетаний $\delta_{-1}, \ldots, \delta_{m-1}$, удовлетворяющих условиям

$$\Lambda(\delta_k, \delta_{k+1}) = 2^1 1^{n-2} \quad \text{for all } k = -1, \ldots, m-2 \tag{4.1}$$

$$\delta_{-1} = (1, \bar{1}) \ldots (n, \bar{n}) \tag{4.2}$$

$$\Lambda(\delta_{-1}, \delta_{m-1}) = \lambda \tag{4.3}$$

В работе [1] было построено явное взаимно однозначное соответствие Δ между множествами $\mathfrak{P}_{m,\lambda}$ и $\mathfrak{D}_{m,\lambda}$.

Рассмотрим последовательность транспозиций $((i_1, j_1), \ldots, (i_m, j_m)) \in \mathfrak{H}^{\mathbb{R}}_{m,\lambda}$ и произведения $x_k = (i_1, j_1) \ldots (i_k, j_k)$ для всех $k = 1 \ldots m$. Пусть $\delta_k = (\tau x_{k+1})\tau(\tau x_{k+1})^{-1}$ для $k = 0, \ldots, m-1$, и $\delta_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \tau$.

Теорема A. *(Глава 3, Theorem 2.2) Отображение* $\mathcal{P}((i_1, j_1), \ldots, (i_m, j_m)) \stackrel{def}{=} (\tau, \delta_0, \ldots, \delta_{m-1})$ *является соответствием* $2^m : 1$ *между множествами* $\mathfrak{H}^{\mathbb{R}}_{m,\lambda}$ *и* $\mathfrak{P}_{m,\lambda}$. *Композиция* $\mathcal{P}((i_1, j_1), \ldots, (i_m, j_m))$ *и* Δ *дает соответствие* $2^m : 1$ *между* $\mathfrak{H}^{\mathbb{R}}_{m,\lambda}$ *и* $\mathfrak{D}_{m,\lambda}$

Обозначим $\mathbb{R}\mathcal{H}^{\text{num}}_{m,\lambda}$ множество наборов $(M, \mathcal{T}, f, \nu)$, с точностью до эквиалентности, для которых

- $(M, \mathcal{T}, f) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_{m,\lambda}$,
- ν — биекция между множеством критических точек функции f и множеством $\{1, \ldots, 2m\}$ такая, что $\nu(\mathcal{T}(u_i)) = 2m + 1 - \nu(u_i)$,
- Если $1 \le \nu(a) < \nu(b) \le m$, то $\mathrm{Re}(f(a)) < \mathrm{Re}(f(b))$.

Наконец, рассмотрим отображение $\mathcal{LL} : \mathcal{H}_{m,\lambda} \to \mathbb{C}^{(m)}$, называемое *отображением Ляшко–Лоойенги* (ЛЛ), переводящее точку (M, f) пространства $\mathcal{H}^{\text{num}}_{m,\lambda}$ в множество точек $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{C}P^1$ — критических значений f. Вот важный результат о локальной структуре отображения ЛЛ:

Теорема B. *(Глава 3, Theorem 3.8) Локальная кратность отображения Ляшко–Лоойенги в окрестности точки* $F \in \Re\mathfrak{H}_{m,\lambda}$ *равна* 2^m.

Затем мы доказываем, что соответствие теоремы A и теоремы B на самом деле взаимно обратны, с точностью до множителя 2^m. Вначале, рассмотрев монодромию, мы показываем, что

Теорема C. *(Глава 3, Theorem 4.1) Отображение* $(F, \nu) \mapsto (\delta_{-1} \overset{def}{=} \tau, \delta_0, \ldots, \delta_{m-1})$ *— взаимно однозначное соответствие между* $\mathfrak{D}_{m,\lambda}$ *и* $\mathfrak{H}^{\mathbb{R}}_{m,\lambda}$.

Используя эту теорему мы получаем оконательный результат:

Theorem (Глава 3, Theorem 4.3)**.** *Соответствия между* $\mathfrak{D}_{m,\lambda}$ *и* $\mathfrak{H}^{\mathbb{R}}_{m,\lambda}$*, полученные в теореме C и в теореме A, взаимно обратны.*

Опишем кратко гипотетическое алгебро-геометрическое определение чисел Гурвица для групп, порожденных отражениями, типов B и D. Пусть $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_s)$ и $\mu - (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_t)$ — два разбиения такие, что $|\lambda| + |\mu| = n$. Рассмотрим голоморфные отображения $H \xrightarrow{p} G \xrightarrow{f} \mathbb{C}P^1$, где

- G и H — комплексные кривые;
- f — голоморфное отображение степени n с m простыми критическими точками и критическим значением $\infty \in \mathbb{C}P^1$, описанным ниже;
- p — голоморфное отображение степени 2 с ℓ простыми критическими точками;
- Прообраз $f^{-1}(\infty) = \{x_1, \ldots, x_s, q_1, \ldots, q_t\}$, где кратность точки x_i равна λ_i, $i = 1, \ldots, s$, а кратноеть точки q_i равна μ_i, $i = 1, \ldots, t$. Кроме того, предполагается, что $x_1, \ldots, x_s$ — регулярные значения отображения p, а $q_1, \ldots, q_t$ — критические значения.

Поскольку степень отображения p равна 2, кривая H — гиперэллиптическая, и на ней имеется гиперэллиптическая инволюция $\mathcal{T} : H \mapsto H$, для которой $p \circ \mathcal{T} = p$ (она меняет местами два прообраза любой точки $x \in G$); критические точки отображения p — неподвижные точки $\mathcal{T}$.

Назовем диаграмму $H \xrightarrow{p} G \xrightarrow{f} \mathbb{C}P^1$, описанную выше, B-разветвленным накрытием с профилем (λ, μ, m, ℓ). D-разветвленное накрытие это B-разветвленное накрытие с профилем $(\lambda, \mu, m, 0)$, так что инволюция $\mathcal{T}$ не имеет неподвижных точек.

Два B-(или D-)разветвленных накрытия F и F' называются эквивалентными, если существует пара биголоморфных отображений φ_1 и φ_2 такиъ, что приведенная ниже диаграмма коммутативна:

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi_1"'] & G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_2"'] & \mathbb{C}P^1 \arrow[d, "id"'] \\
H' \arrow[r, "p'"'] & G' \arrow[r, "f'"'] & \mathbb{C}P^1
\end{tikzcd}
$$

Conjecture. Пусть λ и μ — разбиения, для которых $|\lambda| + |\mu| = n$. Существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности B-разветвленных накрытий с профилем (λ, μ, m, ℓ) и B-ленточными разложениями с тем же профилем.

Corollary. *Пусть* λ *и* μ *— те же разбиания. Существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности* B*-разветвленных* *накрытий с профилем $(\lambda, \mu, m, 0)$ и D-ленточными разложениями с тем же профилем.*

Обзор результатов. Перечислим еще раз результаты и открытые вопросы в двух следующих таблицах:

Вещественные числа Гурвица $h^{\sim}_{m,\lambda}$:

- Алгебраическое определение:
  $\#(\sigma_1 \ldots, \sigma_m) \mid \sigma_i \in C_2$ и $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_m \tau \sigma_m \ldots \sigma_1 \tau \in B^{\sim}_{\lambda}$
- Алгебро-геометрическое определение:
  Количество классов изоморфизма вещественных разветвленных накрытий сферы с m вещественными простыми критическими значениями (профиль ветвления $[2^2, 1^{2n-4}]$) а критическое значение ∞ имеет профиль (λ, λ)
- Геометрическое определение:
  Нерешенный вопрос
- Топологическое определение:
  Число разложений поверхности на m неперекрученных ленточек (возможно, перекрученных) и n дисков, где граница поверхности состоит из s компонент, содержащих $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ вершин (концов диагоналей ленточек)
- Выражение производящей функции $\mathcal{H}^{\sim}(\beta, p_1, p_2, \ldots)$ несвязных вещественных чисел Гурвица через зональные многочлены Z_λ:
  $\mathcal{H}^{\sim}(\beta, p_1, p_2, \ldots) = \sum_\lambda \exp\bigl(2\beta \sum_i \lambda_i(\lambda_i - i)\bigr) \frac{2^{|\lambda|} Z_\lambda(p)}{H_\lambda(2) H'_\lambda(2)}$.
- Дифференциальное уравнение Бельтрами–Лапласа: :
  $\frac{\partial \mathcal{H}^{\sim}}{\partial \beta} = \sum_{i,j \geq 1} (i+j)(p_i p_j + p_{i+j}) \frac{\partial \mathcal{H}^{\sim}}{\partial p_{i+j}} + 2ij p_{i+j} \frac{\partial^2 \mathcal{H}^{\sim}}{\partial p_i \partial p_j}$
- Интегрируемая система:
  Открытый вопрос

Числа Гурвица для группы, порожденной отражениями, типа B: $h^B_{(\lambda,\mu,m,\ell)}$:

- Алгебраическое определение:
  $\#(\sigma_1 \ldots, \sigma_{m+\ell}) \mid \#\{p \mid \sigma_p = r_{ij}, 1 \leq i < j \leq 2n\} = m$, $\#\{p \mid \sigma_p = l_i, 1 \leq i \leq 2n\} = \ell, \sigma_1 \ldots \sigma_{m+\ell} \in C_{\lambda|\mu}$
- Алгебро-геометрическое определение (Гипотеза):
  Число классов изоморфимзма диаграмм разветвленных накрытий $F : H \xrightarrow{p} G \xrightarrow{f} \mathbb{C}P^1$,где G и H — комплексные кривые, f — мероморфная функция степени n с m простыми критичскими точками, p — голоморфное отображение степени 2 с ℓ простыми критическими точками; критическое значение ∞ функции F имеет профиль ветвления $(\lambda, \lambda, 2\mu)$
- Геометрическое определение:
  Нерешенный вопрос
- Топологическое определение:
  Множество разложений поверхностей на $2m + \ell$ неперекрученных ленточек и $2n$ дисков, граница поверхности состоит из $2s + k$ компонент, содержащих $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_s, \lambda_s, 2\mu_1, \ldots 2\mu_k$ отмеченных точек, на поверхности имеется сохраняющая ориентацию инволюция, относительно которой ℓ ленточек инвариантны; в каждой из них имеется неподвижная точка.

- Выражение производящих функций $\mathcal{H}^B(\beta,\gamma,p_1,p_2,\dots)$ несвязных B-чисел Гурвица через многочлены Шура s_λ:
$\mathcal{H}^B(\beta,\gamma,p_1,p_2,\dots,q_1,q_2,\dots) = \sum_{\lambda,\mu} \exp\big(\beta \sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_i(\lambda_i - 2i+1) + \mu_i(\mu_i - 2i+1) + \gamma\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_i - \mu_i)\big) \times s_\lambda(1,0,0\dots)s_\mu(1,0,0\dots)s_\lambda((p_1+q_1)/2,\dots)s_\mu((p_1 - q_1)/2,\dots)$
- Дифференциальное уравнение Два уравнения cut-and-join:
$\frac{\partial\mathcal{H}^B}{\partial\beta} = \sum_{i,j=1}^{\infty}\bigg((i+j)p_iq_j\frac{\partial}{\partial q_{i+j}} + 2ijq_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial q_j} + ijp_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_j} + \frac{1}{2}(i+j)q_iq_j\frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + \frac{1}{2}(i+j)\bigg)\mathcal{H}^B$ $\frac{\partial\mathcal{H}^B}{\partial\gamma} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(ip_i\frac{\partial}{\partial q_i} + iq_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\mathcal{H}^B$
- Интегрируемая система:
Производящая функция $\mathcal{H}^B(\beta,\gamma,u+v,u-v)$ — двупараметрическое семейство τ-функций иерархии КП

Дополнение

Во время написания данной работы появился препринт Д. Городкова, М. Карева и мой [11], в которой доказана высказанная выше гипотеза и дано геометричекое определение чисел Гурвица для групп, порожденных отражениями, типа B. А именно, там сделано следующее:

Известно, что обычные числа Гурвица задаются формулой ELSV [9]: для всех $g \ge 0, k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$h_{g;k_1,\dots,k_n} = (2g-2+n+\sum_{i=1}^{n}k_i)!\prod_{i=1}^{n}\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\int_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}}\frac{\Lambda_{g,n}}{(1-k_1\psi_1)\cdots(1-k_n\psi_n)},$$

где $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ — компактификация Делиня–Мамфорда пространства модулей кривых рода g с n отмеченными точками, $\Lambda_{g,n}$ — полный класс Черна расслоения, двойственного к расслоению Ходжа, а ψ_i — соответствующие ψ-классы. В работе [11] доказано следующее утверждение:

Theorem. *Логарифм производящей функции $\mathcal{H}^B$ (зависящий от переменных u и v) равен*

$$\log\mathcal{H}^B = \sum_{\substack{g\ge 0,n\ge 1\\ k_1,\dots,k_n\in\mathbb{N}}}\frac{(2\beta)^{2g-2+n+\sum_{i=1}^{n}k_n}e^{\sum_{i=1}^{n}k_n\gamma}}{n!}$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\int_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}}\frac{\Lambda_{g,n}}{(1-k_1\psi_1)\cdots(1-k_n\psi_n)}u_{k_1}\dots u_{k_n} + \sum_{\substack{g\ge 0,n\ge 1\\ k_1,\dots,k_n\in\mathbb{N}}}\frac{(2\beta)^{2g-2+n+\sum_{i=1}^{n}k_n}e^{\sum_{i=1}^{n}-\gamma k_n}}{n!}$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\int_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}}\frac{\Lambda_{g,n}}{(1-k_1\psi_1)\cdots(1-k_n\psi_n)}v_{k_1}\dots v_{k_n}.$$

Публикации, содержащие основные результаты диссертации:

- R.Fesler Hurwitz numbers for reflection groups B and D, *Mathematical Notes* vol.114:5-6.
- Y. Burman, R. Fesler, Ribbon decomposition and twisted Hurwitz numbers, *Mathematics Research Reports, Volume 5 (2024) p. 1-19*

Список литературы

[1] H. Ben Dali, Generating Series of non-oriented constellations and marginal sums in the Matching-Jack conjecture, *Algebraic Combinatorics, 5 (6), pp. 1299-1336, 2022*

[2] Y. Burman, R. Fesler, Ribbon decomposition and twisted Hurwitz numbers *to appear in Mathematics Research Reports*

[3] Y. Burman, R. Fesler, Real algebraic curves and twisted Hurwitz numbers *ArXiv: 2403.06171 [math.AG]*

[4] Y. Burman, B. Shapiro, On Hurwitz–Severi numbers *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* Vol XIX (2019) No. 1. P. 155-167.

[5] Yu. Burman, D. Zvonkine, Cycle factorization and 1-faced graph embeddings, *Eurepean Journal of Combinatorics*, Vol. 31, no. 1 (2010), pp. 129–144.

[6] R.W.Carter, Conjugacy classes in the weyl group, Compositio Mathematica, tome 25 (1972), no. 1 , pp. 1–59.

[7] G. Chapuy, M. Dołęga, Non-orientable branched coverings, b-Hurwitz numbers, and positivity for multiparametric Jack expansions, *Advances in Mathematics*, 409 (2022), 108645.

[8] J. E. Humphreys, Reflection Groups and Coxeter Groups. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 29, Cambridge University Press, 1992

[9] Ekedahl, T. and Lando, S. and Shapiro, M. and Vainshtein, A., Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves. *Inventiones mathematicae* 146 (2001), 297–327

[10] R.Fesler Hurwitz numbers for reflection groups B and D, *Mathematical Notes* vol.114:5-6.

[11] R.Fesler, D. Gorodkov, M.Karev Hurwitz numbers for complex reflection groups $G(m, 1, n)$, *ArXiv: 2403.01963 [math.CO]*.

[12] I. P. Goulden, D. M. Jackson, *Transitive factorisation into transpositions and holomorphic mappings on the sphere*, Proc. Amer. Math. Soc.,125, no. 1, 51–60 (1997)

[13] IP. Goulden, M. Guay-Paquet, J. Novak . Monotone Hurwitz Numbers in Genus Zero. *Canadian Journal of Mathematics*. 2013;65(5):1020-1042.

[14] I. Goulden, A. Yong, Tree-like properties of cycle factorizations, *Journal of Combinatorial Theory Series A*, Vol. 98, no. 1 (2002), pp. 106–117.

[15] J. E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups.* Cambridge University Press, First edition, 1990.

[16] A. Hurwitz, Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, In: Math. Ann. 39.1 (1891), pp. 1–60

[17] P. Johnson. Double Hurwitz numbers via the infinite wedge, *TAMS*, 367 (2015), no. 9 , pp. 6415–6440.

[18] M. Kazarian. KP hierarchy for Hodge integrals, *Adv. Math.*, 221.1 (2009), pp. 1–21.

[19] M. E. Kazarian and S. K. Lando, An algebro-geometric proof of Witten's conjecture. *J. Amer. Math. Soc.* 20 (2007), 1079-1089, March 2007

[20] M. Kontsevich, Intersection theory on the moduli space of curves and the Airy function, *Comm. Math. Phys.*, 147, 1–23 (1992)

[21] R. Kramer. KP hierarchy for Hurwitz-type cohomological field theories, Max-Planck-Institut für Mathematik Preprint Series 2021 (42a), 9.10.2021.

[22] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, Graphs on Surfaces and Their Applications, w/appendix by Don B. Zagier, EMS, volume 141, Springer, 2004.

[23] I G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials. *Oxford Mathematical Monographs*, The Clarendon Press, Oxford University Press, Second edition, 1995. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

[24] T. Miwa, M. Jimbo, and E. Date. Solitons: Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras, Cambridge University Press, 2000, in: Cambridge Tracts in Mathematics, V. 135.

[25] S.M. Natanzon, Moduli of real algebraic surfaces, and their superanalogues. Differentials, spinors, and Jacobians of real curves. *Russ. Math. Surv.*, vol. 54 (1999), no. 6, p. 1091–1147.

[26] S. M. Natanzon and A. Yu. Orlov, BKP and projective Hurwitz numbers, *Lett. Math. Phys.* 107 (2017), no. 6, 1065–1109. MR 3647081

[27] A. Okounkov. Toda equations for Hurwitz numbers, *Math. Res. Letters* 7 (2000), pp. 447–453.

[28] M. Romagny, S. Wewers, Hurwitz spaces, *Séminaires et Congrès*, vol. 13 (2006), pp. 313–341.

[29] M. Sato and Y. Sato. Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold, in: North-Holland Math. Stud. U.S.-Japan seminar on nonlinear partial differential equations in applied science (Tokyo, July 1982). Vol. 81. Lecture Notes Numer. Appl. Anal. 5. 1983, pp. 259–271.

[30] E. Witten, Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space, Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990), vol. 1, Bethlehem, PA: Lehigh Univ., pp. 243–310,