

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Федченко Анна Сергеевна

**Регуляризованные системы уравнений движения
многокомпонентных сжимаемых газовых смесей и их
разностные аппроксимации**

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ

на соискание учёной степени кандидата наук по прикладной математике

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Злотник Александр Анатольевич

Москва — 2024

Общая характеристика работы

Постановка проблемы. Уравнения, описывающие движение смеси вязких сжимаемых газов, представляют большой прикладной и теоретический интерес, поскольку описывают течения, широко распространенные в природе и технике. Системы уравнений, описывающие динамику многокомпонентных смесей, представлены в том числе в монографиях: Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. (1986); Нигматулин Р.И. (1987); Пилюгин Н.Н., Тирский Г.А. (1989); Rajagopal K.L., Tao L. (1995); Giovangigli V. (1999); Brennen C.E. (2005); Ruggeri T. Sugiyama M. (2021).

Квазигазодинамические (КГД) и квазигидродинамические (КГидД) системы уравнений являются регуляризованными системами уравнений Эйлера и Навье-Стокса вязкого сжимаемого теплопроводного газа и применяются для компьютерного моделирования широкого круга задач газовой динамики, см. в том числе монографии: Четверушкин Б.Н. (2004); Елизарова Т.Г. (2007); Шеретов Ю.В. (2009, 2016); Елизарова Т.Г., Широков И.А. (2018) и многочисленные статьи. Они удобны для дискретизации и построения простых и достаточно эффективных явных сеточных методов решения и уже несколько десятилетий используются в компьютерном моделировании самых разнообразных задач газовой динамики и сохраняют актуальность до настоящего времени. При этом КГД система применяется при любых, а более простая КГидД система — при умеренных числах Маха. Их важные математические свойства, аналогичные рассмотренным в данной диссертации, доказаны в работах: Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. (2008); Злотник А.А. (2008, 2010); Шеретов Ю.В. (2009).

Однако несмотря на обширную литературу по регуляризованным системам уравнений для однокомпонентного газа и бинарных смесей и их приложениям, математическая теория для многокомпонентных смесей развита слабо.

Актуальность темы. КГД и КГидД системы уравнений как для многоскоростной и многотемпературной, так и для односкоростной и однотемпературной бинарной газовой смеси разрабатывались, рассматривались и применялись, в частности, в: Елизарова Т.Г. (2007); Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. (2014); Балашов В.А., Савенков Е.Б. (2018); Kudryashova T., Karamzin Y., Podryga V., Polyakov S. (2018); Елизарова Т.Г.,

Злотник А.А., Шильников Е.В. (2019); Елизарова Т.Г., Шильников Е.В. (2021); Balashov V., Zlotnik A. (2021). В том числе вывод уравнения баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии был дан для некоторых моделей в: Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. (2014); Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Шильников Е.В. (2019). Выполнение уравнения баланса энтропии является важным физическим свойством модели и математическим свойством соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Большой интерес представляет также построение энтропийно корректных дискретизаций систем уравнений газовой динамики, см. в том числе: Amosov A.A., Zlotnik A.A. (1987); Tadmor E. (2003); Prokopov G.P. (2007); Tadmor E. (2016); Carpenter M.H. et al. (2016), для которых уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии выполняется на дискретном уровне.

Степень разработанности темы. В однокомпонентном случае КГД и более простая КГидД системы уравнений как регуляризованные системы уравнений Эйлера и Навье-Стокса вязкого сжимаемого теплопроводного газа достаточно хорошо разработаны в монографиях: Четверушкин Б.Н. (2004); Елизарова Т.Г. (2007); Шеретов Ю.В. (2009); Елизарова Т.Г., Широков И.А. (2017). Для них, в частности, были получены уравнения баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии. Такие важные математические свойства этих систем, как равномерная по Петровскому параболичность и диссипативность решений линеаризованных систем, доказаны в Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. (2008), Злотник А.А. (2008, 2010).

Обобщения КГД и КГидД систем на случай бинарных смесей газов с различными плотностями, скоростями и температурами в отсутствие потоков диффузии и химических реакций были даны в: Елизарова Т.Г. (2007); Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. (2014); случай многокомпонентных смесей см. в: Подрыга В.О. (2017). Недавно были построены соответствующие обобщения на практически важный случай гомогенных газовых смесей с общими скоростью и температурой, а также с одной общей или несколькими регуляризирующими скоростями, в том числе с учетом межфазного взаимодействия компонент смеси, см.: Балашов В.А., Савенков Е.Б. (2018); Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Шильников Е.В. (2019), Zlotnik A., Lomonosov T. (2023). При этом свойства уравнений для многокомпонентных смесей изучались не в таком объеме, а некоторые свойства не изучались вовсе. В этих моделях не учитывались диффузионные потоки между компонентами смеси, существенные в

ряде задач. Применение разностных методов, основанных на КГД и КГидД системах для бинарных смесей с общей регуляризующей скоростью, хорошо зарекомендовало себя в ряде задач компьютерного моделирования, см. в том числе: Balashov V., Zlotnik A., Savenkov E. (2017); Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Шильников Е.В. (2019); Balashov V., Zlotnik A. (2020), Balashov V., Zlotnik A. (2021); Елизарова Т.Г., Шильников Е.В. (2021).

Регуляризованные КГД и КГидД системы уравнений в баротропной постановке также ранее рассматривались в литературе. Однокомпонентный баротропный случай рассматривался в Злотник А.А., Четверушкин Б.Н (2008); Злотник А.А. (2008, 2012) , а случай баротропных бинарных двухскоростных смесей — в Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. (2014). Различные методы численного моделирования таких смесей в последние годы предлагались, например, в: Li Z., Oger G., Le Touzé D. (2020), Sondermann C.N. et al. (2021).

Численные методы, построенные на основе регуляризованных уравнений однокомпонентного газа, подробно представлены, например, в монографиях: Четверушкин Б.Н. (2004); Елизарова Т.Г. (2007); Шеретов Ю.В. (2009) и многих последующих статьях. Следует отметить, что разработано большое количество разнообразных численных методов решения систем уравнений однокомпонентной газовой динамики, см. в том числе монографии: LeVeque R.J. (2004); Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семёнов А.Ю. (2012); Abgrall R., Shu C.W., eds. (2016, 2017). Для КГД и КГидД систем уравнений бинарных смесей в отсутствие химических реакций, включая смеси с общей скоростью и температурой компонент, дискретизации строились и успешно апробировались в расчетах в том числе в: Елизарова Т.Г. (2007); Balashov V., Zlotnik A., Savenkov E. (2017); Подрыга В.О. (2017); Kudryashova T., Karamzin Y., Podryga V., Polyakov S. (2018); Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Шильников Е.В. (2019); Balashov V., Zlotnik A. (2021); Елизарова Т.Г., Шильников Е.В. (2021), Podryga, V. O., Churbanov A. G., Tarasov N. I., Polyakov S. V., Trapeznikova M. A., Churbanova N. G. (2022). Вместе с тем ввиду большой сложности систем дифференциальных уравнений, возникающих при описании динамики смесей, существует сравнительно мало строгих математических результатов об их свойствах, а также о свойствах их дискретизаций. Отметим также, что обычно КГД и КГидД регуляризации изучались отдельно друг от друга.

Энтропийно корректные дискретизации систем уравнений газовой динамики были предложены, в частности, в: Amosov A.A., Zlotnik A.A. (1987); Tadmor E. (2003, 2016); Prokhorov G.P. (2007); Carpenter M.H. et al. (2016). В статье: Злотник А.А. (2012) была построена симметричная трехточечная дискретизация такого типа для одномерных КГД уравнений газовой динамики совершенного политропного однокомпонентного газа, консервативная по массе, импульсу и полной энергии. Впоследствии аналогичные дискретизации были развиты для случая общих уравнений состояния газа, см.: Гаврилин В.А., Злотник А.А. (2015), а также для многомерного случая: Злотник А.А. (2017); была выполнена их практическая проверка.

Следует отметить, что альтернативные регуляризованные системы уравнений в однокомпонентном случае изучались и применялись в том числе в: Feireisl E., Vasseur A. (2010); Guermond J.L., Popov B. (2014); Svärd M. (2018); Feireisl E. et al. (2020); Dolejší V., Svärd M. (2021). При этом до сих пор их практическая апробация была довольно ограниченной в отличие от КГД и КГидД систем.

Целью данного диссертационного исследования является анализ свойств КГД и КГидД систем уравнений многокомпонентных газовых смесей и построение для них энтропийно корректных пространственных дискретизаций. Для достижения поставленной цели ставятся следующие **задачи**.

1. Для агрегированной КГидД системы уравнений гомогенной многокомпонентной газовой смеси с общей регуляризирующей скоростью при наличии потоков диффузии получить уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии и исследовать свойства L^2 -диссипативности линеаризованной системы.
2. Получить уравнения баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии для агрегированных КГД и КГидД систем уравнений гомогенной многокомпонентной газовой смеси при наличии потоков диффузии. Построить линеаризованные системы уравнений и вывести существование, единственность и L^2 -диссипативность слабых решений начально-краевой задачи. Исследовать исходную систему уравнений на сильную параболичность и локальную по времени классическую однозначную разрешимость задачи Коши.
3. Исследовать свойства КГД и КГидД систем уравнений односкоростных многокомпонентных газовых смесей в баротропном приближении.

4. Построить энтропийно корректные дискретизации одномерных КГД и КГидД систем уравнений динамики как многоскоростных и многотемпературных, так и односкоростных и одготемпературных (при наличии потоков диффузии) многокомпонентных газовых смесей.

Научная новизна. В работе рассмотрены обобщения известных в литературе КГД и КГидД систем уравнений (бинарных или однокомпонентных) на многокомпонентный случай.

Во-первых, было проведено обобщение агрегированной КГидД системы уравнений гомогенной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью с бинарного случая на многокомпонентный, причем с учетом потоков диффузии. Для нее было выведено уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии. В линеаризованной постановке доказано свойство L^2 -диссипативности.

Во-вторых, было дано обобщение на многокомпонентный случай КГД и КГидД систем уравнений гомогенной газовой смеси также с дополнительным учетом потоков диффузии. Эти системы были рассмотрены как в случае, когда компоненты смеси представляют собой совершенные политропные газы, так и в баротропном приближении. Для них были выведены уравнения баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии. Построены линеаризованные системы уравнений и выведены существование, единственность и L^2 -диссипативность слабых решений начально-краевой задачи. Были исследованы такие свойства как сильная параболичность и локальная по времени классическая однозначная разрешимость задачи Коши для исходных системы. Также КГД и КГидД системы уравнений изучены не отдельно, а единообразно.

В-третьих, путем обобщения дискретизации для однокомпонентного газа была получена оригинальная энтропийно корректная дискретизация одномерных КГД и КГидД систем уравнений многоскоростной и многотемпературной, а также односкоростной и одготемпературной при наличии потоков диффузии многокомпонентной газовой смеси. дискретизация для вторых систем получена агрегированием дискретизаций для первых систем, что является новым подходом.

Теоретическая и практическая значимость состоят в выводе важных математических свойств рассматриваемых систем уравнений газовых смесей, а также в построении энтропийно корректных дискретизаций в одномерном случае. В число этих свойств входят выполнение уравнения баланса энтропии

с неотрицательным производством энтропии, существование, единственность и L^2 -диссипативность решений задач для линеаризованных систем и параболичность по Петровскому и классическая однозначная разрешимость задачи Коши для исходных систем уравнений. Эти свойства подтверждают физическую корректность рассматриваемых систем уравнений, а также обосновывают их математические регуляризующие свойства. Разработанные дискретизации можно применять для численного моделирования течений смесей.

Методология и методы исследования. В диссертации использованы матричный анализ, методы математического и функционального анализа, включая элементы теории пространств Лебега и Соболева. Использована также теория систем дифференциальных уравнений с частными производными – как слабых решений, так и классических решений. Применены методы дискретизации таких уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Выведено уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии для агрегированной КГидД системы уравнений гомогенной многокомпонентной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью при наличии потоков диффузии между компонентами смеси, доказано свойство L^2 -диссипативности линеаризованной системы уравнений.
2. Выведены уравнения баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии для агрегированных КГД и КГидД систем уравнений гомогенной многокомпонентной газовой смеси с различными регуляризующими скоростями при наличии потоков диффузии. Построена линеаризация системы уравнений на постоянном решении и выведены существование, единственность и L^2 -диссипативность слабых решений начально-краевой задачи для нее. Установлены сильная параболичность и локальная по времени классическая однозначная разрешимость задачи Коши для исходных нелинейных систем.
3. Исследованы свойства аналогичные указанным в пункте 2 для КГД и КГидД систем уравнений односкоростных многокомпонентных газовых смесей в баротропном случае.
4. Построена энтропийно корректная дискретизация одномерных КГД и КГидД систем уравнений динамики как многоскоростных, так и од-

носкоростных (при наличии потоков диффузии) многокомпонентных газовых смесей.

Достоверность теоретических результатов работы подтверждается строгими математическими доказательствами соответствующих теорем. Построенные дискретизации были успешно апробированы в тестовых расчетах (другими авторами).

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих конференциях:

Ежегодная межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов им. Е.В. Арменского (Москва, МИЭМ НИУ ВШЭ, 2020, 2021, 2023 гг.)

Всероссийская научная конференция «Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко (Пушино, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2022 г.)

International conference One-Parameter Semigroups of Operators (OPSO) (Online, НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, 2023 г.)

На конференциях имени Е.В. Арменского в 2021 и 2023 гг. представленные доклады были отмечены дипломами за лучшую работу аспиранта. Ссылки на опубликованные краткие сообщения и тезисы докладов даны в тексте диссертации.

Личный вклад. Теоретические результаты по анализу КГД и КГидД систем уравнений динамики многокомпонентных газовых смесей, а также по построению энтропийно корректных дискретизаций получены совместно с А.А. Злотником. Соответствующие результаты в баротропном случае были получены соискателем самостоятельно.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации составляет 109 стр. Работа включает одну таблицу. Список литературы содержит 72 наименования.

Основные выводы исследования. В главе 1 проводится анализ свойств агрегированной КГидД системы уравнений гомогенной газовой смеси с общей регуляризирующей скоростью. В разделе 1.1 вводится соответствующая система уравнений и строятся ее следствия. Раздел 1.2 посвящен выводу уравнения баланса энтропии для этой системы уравнений при наличии потоков диффузии.

В теореме 1.2.1 представлено уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии.

В разделе 1.3 проводится разложение КГидД системы уравнений относительно градиента искомых функций (плотностей компонент, скорости и температуры). Далее в разделе 1.4 с помощью этого разложения система уравнений линеаризуется на постоянном решении. Затем проводится ее симметризация. Выписывается интегральное тождество для симметризованной системы уравнений. В теореме 1.4.1 для ее слабых решений устанавливаются свойства L^2 -диссипативности и единственности, а также выводится энергетическая оценка. Далее в разделе 1.5 аналогичные результаты получены для упрощенной линеаризованной КГидД системы.

В заключение в разделе 1.6 проводится анализ типа исходной КГидД системы уравнений гомогенной газовой смеси. К исходной системе уравнений с отброшенными младшими членами и замороженными коэффициентами применяется преобразование Фурье по пространству, что приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Устанавливается, что в отсутствие потоков диффузии введенная в разделе 1.1 система уравнений имеет составной тип, как и система уравнений Навье-Стокса сжимаемого однокомпонентного газа.

В главе 2 реализуется анализ КГД и КГидД систем уравнений многокомпонентной газовой смеси при наличии потоков диффузии, причем обе агрегированные системы уравнений рассматриваются параллельно за счет введения параметра, принимающего значения 0 (КГидД система) и 1 (КГД система). В разделе 2.1 выписываются соответствующие системы уравнений и дополнительные уравнения баланса. В разделе 2.2 в теореме 2.2.1 выводится регуляризованное уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии.

Далее в разделе 2.3 выполняется разложение КГД и КГидД систем уравнений относительно градиента искомых функций. Затем в разделе 2.4 они линеаризуются на постоянном решении и симметризуются. Леммы 2.4.1 и 2.4.2 связаны с исследованием билинейных форм, участвующих в определении слабого решения полученной симметризованной системы. Теорема 2.4.1 посвящена существованию и единственности слабого решения начально-краевой задачи во введенном пространстве вектор-функций, а также его L^2 -диссипативности. В следствии 2.4.1 дается усиленная форма свойства L^2 -диссипативности.

Затем в разделе 2.5 устанавливается параболичность КГД и КГидД систем уравнений и локальная по времени классическая разрешимость задачи Коши для них.

В разделах 2.6 - 2.9 доказываются аналогичные свойства баротропных КГД и КГидД систем уравнений.

В главе 3 строится аппроксимация по пространству одномерных КГД и КГидД систем уравнений многокомпонентной газовой смеси. В разделе 3.1 вводится одномерная регуляризованная система уравнений динамики многоскоростной и многотемпературной газовой смеси. В лемме 3.1.1 представлены уравнения баланса кинетической и внутренней энергий смеси, а также уравнение баланса энтропии смеси с неотрицательным производством энтропии. Далее в разделе 3.2 рассматриваются уравнения для случая односкоростной и одготемпературной газовой смеси при наличии потоков диффузии. Выписывается уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии.

В разделе 3.3 строится пространственная дискретизация одномерной регуляризованной системы уравнений многоскоростной и многотемпературной газовой смеси. Данную дискретизацию отличают нестандартные усреднения, которые в дальнейшем гарантируют неотрицательность производства энтропии в дискретном уравнении баланса энтропии. В лемме 3.3.1 выписываются полудискретные уравнения баланса кинетической и внутренней энергий компонент смеси. В теореме 3.3.1 представлено уравнение баланса энтропии для построенного выше дискретного по пространству метода.

В заключительном разделе 3.4 рассматривается пространственная дискретизация одномерных КГД и КГидД систем уравнений динамики односкоростной и одготемпературной газовой смеси при наличии потоков диффузии. В данном случае дискретизация проводится не непосредственно, а посредством агрегирования построенных в предыдущем разделе полудискретных уравнений динамики многоскоростных смесей. Именно этот нестандартный подход в итоге обеспечивает выполнение полудискретного уравнения баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии, которому посвящена теорема 3.4.1.

Все перечисленные леммы, утверждения и теоремы сопровождаются доказательствами.

Список опубликованных статей по теме диссертации. По теме диссертации опубликованы 5 статей [1;3-6] и препринт [2]. Все статьи проиндек-

сированы в Scopus, при этом журнал [4] имеет рейтинг Q1, журналы [1;3;5] — рейтинг Q2, журнал [6] — рейтинг Q3. Препринт [2] проиндексирован в РИНЦ.

Результаты главы 1 получены при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-01-00262, результаты главы 2 – при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-11-00169.

1. Злотник А.А., Федченко А.С. Свойства агрегированной квазигазодинамической системы уравнений гомогенной газ // *Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления.* – 2021. – Т. 501, №1. – С. 31-37.

2. Злотник А.А., Федченко А.С. Свойства агрегированной квазигидродинамической системы уравнений гомогенной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* – 2021. – № 77. – С. 1-25.

3. Злотник А.А., Федченко А.С. О свойствах квазигидродинамической системы уравнений гомогенной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью // *Дифф. уравнения.* – 2022. – Т. 58, №3. – С. 346-360.

4. Zlotnik A.A., Fedchenko A.S. On properties of aggregated regularized systems of equations for a homogeneous multicomponent gas mixture // *Math. Models in the Appl. Sci.* – 2022. – Vol. 45, no. 15. – Pp. 8906-8927.

5. Zlotnik A.A., Fedchenko A.S., Lomonosov T.A. Entropy correct spatial discretizations for 1D regularized systems of equations for gas mixture dynamics // *Symmetry.* – 2022. – Vol. 14, no. 10. Article 2171.

6. Fedchenko A.S. Properties of regularized equations for barotropic gas mixtures // *J. Math. Sci.* – 2023. – Vol. 270, no. 6. – Pp. 1-12.