

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Самылина Евгения Александровна

Хаотическая динамика обратимых и диссипативных систем

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ

на соискание ученой степени кандидата наук
по прикладной математике

Научный руководитель:
доктор наук по прикладной математике, профессор
Казаков Алексей Олегович

Москва – 2024

Диссертационная работа выполнена в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики».

Научный руководитель: доктор наук по прикладной математике, профессор Казаков Алексей Олегович

1 Введение

Актуальность. Обратимые (реверсивные) динамические системы являются математическими моделями многих физических процессов и явлений. Так, например, задачи динамики твердого тела, небесной механики, гидродинамики, квантовой механики и многие другие описываются с помощью обратимых систем. Напомним, что динамическая система называется обратимой, если она инвариантна относительно обращения времени ($t \rightarrow -t$) и некоторой замены координаты ($x \rightarrow G(x)$), такой что $G \circ G = id$.

Обратимость как некоторый тип симметрии наиболее часто проявляется в гамильтоновых динамических системах. Более того, долгое время термины «обратимый» и «гамильтоновый» считались чуть ли не синонимами, так как на практике подавляющее большинство обратимых динамических систем оказывались гамильтоновыми. Многие элементы теории гамильтоновых систем успешно переносились на случай обратимых систем. Так была построена обратимая теория КАМ (Колмогорова-Арнольда-Мозера), некоторые результаты теории локальных бифуркаций были перенесены на случай обратимых систем и т.д.

Однако динамика обратимых систем может принципиально отличаться от динамики систем гамильтоновых. Это стало понятно после работ Полити, Оппо, Бадии (1986) и Квиспела, Робертса (1989), где в обратимых системах были найдены такие диссипативные элементы динамики, как периодические источники и стоки, а также странные аттракторы и репеллеры. В работе Пиковского, Топажа (2002), на примере обратимых систем, описывающих цепочки связанных ротаторов, было показано, что в обратимых системах хаотические аттрактор и репеллер могут перекрываться, но при этом не совпадать. В дальнейшем, в работе Гонченко, Казакова, Тураева (2017) это явление получило адекватное математическое описание. Вскоре все это привело к созданию (в работах Гонченко и Тураева) концепции смешанной динамики – третьего типа хаоса, характеризующегося неустранимой неотделимостью хаотического аттрактора от хаотического репеллера.

Таким образом, стало очевидно, что обратимые системы могут демонстрировать совершенно другой, отличный от консервативного и диссипативного, тип хаотического поведения. Его исследования являются актуальным как с точки зрения развития теории динамических систем, так и для всевозможных приложений этой теории к решению физических задач. Главы 1 и 3 данной диссертационной работы посвящены исследованию особенностей хаотической динамики обратимых неконсервативных систем. Здесь диссертантом получен целый ряд новых результатов. Описаны бифуркации резонанса 1:3 в обратимом неконсервативном случае. Для обратимых трехмерных диффеоморфизмов предложен новый сценарий (взрывного) возникновения смешанной динамики. Описаны особенности хаотической динамики в неголономной модели кельтского камня. Полученные результаты не только внесли вклад в развитие теории обратимых и неголономных си-

стем, но и позволили продемонстрировать эффективность разработанных диссертантом методов.

Как было отмечено выше, обратимые системы могут демонстрировать такие диссипативные элементы динамики, как странные аттракторы. Притом, эти аттракторы могут быть в точности такими же, как в диссипативных системах. Только при этом в обратимой системе каждому аттрактору соответствует такого же типа репеллер – аттрактор для системы с обратным временем. Таким образом, результаты исследования странных аттракторов диссипативных систем могут применяться к системам обратимым (подобно тому, как некоторые результаты исследования гамильтоновых систем, также могут применяться к обратимым моделям).

Напомним, что согласно «P or Q» гипотезе, сформулированной в работе Гонченко, Казакова, Тураева (2021), все странные аттракторы можно разделить на два типа: псевдогиперболические аттракторы и квазиаттракторы. Об аттракторах первого типа можно говорить как о «настоящих» хаотических аттракторах, т.к. благодаря свойству псевдогиперболичности (обобщающему понятие гиперболичности) любая их траектория имеет положительный максимальный показатель Ляпунова и это свойство сохраняется при малых возмущениях системы (например, при изменении параметров). Во втором случае, напротив, исследователь никогда не может быть уверен, с чем именно он имеет дело, действительно с хаотическим аттрактором или же с длинным переходным процессом, после которого траектории системы убегают на простой аттрактор (например, предельный цикл). Задача как отличить «настоящий» (псевдогиперболический) аттрактор от квазиаттрактора является одной из основных проблем теории динамических систем.

Решению этой задачи для некоторых классов систем посвящена глава 2 данной диссертационной работы. Здесь с помощью численных методов, разработанных в работе Гонченко, Казакова, Тураева (2021), проведено исследование псевдогиперболичности некоторых аттракторов четырехмерных потоков и трехмерных отображений. На примере периодически возмущенной системы Шимицу-Мориока продемонстрировано, что псевдогиперболичность аттрактора может сохраняться даже при немалых возмущениях, численно построены оценки величины возмущения, при котором псевдогиперболичность аттрактора сохраняется. В классе меняющих ориентацию трехмерных отображений Эно показано, что ранее обнаруженные неориентируемые аттракторы лоренцевского и восьмерочного типов не являются псевдогиперболическими, тем самым опровергнута гипотеза об их псевдогиперболичности. При этом аттрактор Лоренца, содержащий точку периода 2, также ранее обнаруженный в неориентируемом отображении Эно, напротив, является псевдогиперболическим.

При работе над диссертацией разработаны численные методы, позволяющие выявлять области со странными аттракторами и смешанной динамикой в пространстве параметров системы, осуществлять продолжение бифуркационных кривых в пространстве параметров, а также строить инвариантные многообразия седловых периодических траекторий. Разработанные методы реализованы в рамках комплекса программ.

Степень разработанности. Свойство обратимости играло и до сих пор играет важную роль в различных областях естественных наук. Многие системы дифференциальных уравнения, возникающих при моделировании физических процессов, являются обратимы-

ми во времени. По-видимому, впервые это было замечено в 1877 г. Лошмидтом для частиц, движущихся в независимом от скорости силовом поле. Вскоре Больцманом было замечено, что уравнения Максвелла также являются обратимыми (при дополнительном условии обращения поля). В 1904 г. Пенлеве установил свойство обратимости для свободно падающего тела в ньютоновских уравнениях движения. В работах Пенроуза (1979, 1989) было показано, что уравнения Эйнштейна классической общей теории относительности являются обратимыми. В 1959 г. Вигнер показал важность симметрии обращения времени в квантовой механике.

В 70х-80х годах свойство обратимости в задачах классической механики использовалось как очень полезный инструмент для исследования симметричных периодических траекторий, а также траекторий гомоклинических и гетероклинических касаний (Деваней, Черчилль, Род). Более того, в гамильтоновых системах часто оказывалось, что для доказательства тех или иных утверждений удобнее применять свойство обратимости, чем свойство гамильтоновости (Арнольд, Деваней). В 80х-90х годах многие утверждения, доказанные для гамильтоновых систем, были адаптированы на случай систем обратимых (Севрюк, Чоу, Пэй).

В конце 80х годов, после работ Полити, Оппо, Бадии (1986), Квиспела, Робертса (1989), Цанга, Миройо, Строгаца, Вейзенфильда (1991) стало понятно, что обратимые системы могут принципиально отличаться от систем гамильтоновых. В соответствующих работах было показано, что в обратимых системах могут возникать периодические источники и стоки. При этом указывалось на возможность сосуществования таких диссипативных элементов с областями с консервативной (гамильтоновой) динамикой. Чуть позже, в теоретических работах Гонченко, Дельшамса, Лазаро, Лэмба, Стенькина, Тураева, было указано на принципиальную неотделимость диссипативных элементов динамики от консервативных в обратимых системах общего положения. Численно такое явление обсуждалось в работах Пиковского, Топажа (2002), А. Гонченко, С. Гонченко, Казакова (2013), где было обнаружено пересечение странных аттрактора и репеллера. Все это легло в основу создания в работах Гонченко и Тураева (2016, 2017) теории смешанной динамики, как третьего типа хаоса, для которого хаотический аттрактор пересекается с хаотическим репеллером, но при этом не совпадает с ним. В настоящей диссертационной работе вопросы, связанные с исследованием бифуркационных механизмов возникновения смешанной динамики, а также с проявлением этого явления в неголономной механике, занимают центральное место (главы 1 и 3).

Вторая часть диссертационной работы посвящена исследованию псевдогиперболичности странных аттракторов. Теория псевдогиперболичности, обобщающая классические гиперболическую и сингулярно-гиперболическую теории, была заложена в работе Тураева, Шильникова (1998), где также были приведены первые геометрические примеры таких аттракторов. В конкретной динамической системе первый пример псевдогиперболического аттрактора (отличного от гиперболического, а также сингулярно-гиперболического) был обнаружен в работе Гонченко, Овсянникова, Тураева, Шильникова (2005). В этой работе было показано, что в классе трехмерных отображений Эно могут возникать дискретные аттракторы Лоренца. Также была выдвинута гипотеза о псевдогиперболичности обнаруженных аттракторов. Эта гипотеза позже была подтверждена в работе Гонченко, Казакова, Тураева (2021), где также был приведен первый пример дикого спирального аттрак-

тора Тураева-Шильникова, установлена его псевдогиперболичность. В работе Тураева, Шильникова (2008) было показано, что псевдогиперболичность аттрактора сохраняется при малых периодических по времени возмущениях системы. В первой части главы 2 диссертационной работы, на примере периодически возмущенной системы Шимицу-Мориока, диссертантом показано, что псевдогиперболичность также сохраняется и при немалых возмущениях.

Что касается систем из приложений, первый пример модели, демонстрирующей псевдогиперболический аттрактор был приведен в работе А. Гонченко, С. Гонченко, где в неголономной модели кельтского камня был найден дискретный аттрактора Лоренца. Его псевдогиперболичность была установлена совсем недавно в работе А. Гонченко, С. Гонченко, Казакова, Козлова. Дальнейшему исследованию дискретного аттрактора Лоренца в неголономной модели кельтского камня, посвящена вторая часть главы 3 данной диссертационной работы, где диссертантом построены границы области существования этого аттрактора.

В недавних работах А. Гонченко, А. Козлова (2016, 2017, 2021) были предложены примеры (геометрические конструкции) псевдогиперболических аттракторов для трехмерных отображений меняющих ориентацию; неориентируемые лоренцевский и восьмерочный аттракторы, а также аттрактор Лоренца, содержащий точку периода 2, были обнаружены в классе трехмерных отображений Эно с отрицательным Якобианом. Также в этих работах была выдвинута гипотеза о псевдогиперболичности обнаруженных аттракторов. Во второй части главы 2 диссертационной работы гипотеза о псевдогиперболичности неориентируемых лоренцевского и восьмерочного аттракторов была опровергнута. В тоже время было показано, что аттрактор Лоренца, содержащий точку периода 2, является псевдогиперболическим.

Цели и задачи исследования. Цель диссертационной работы – изучить некоторые особенности хаотической динамики двумерных и трехмерных обратимых неконсервативных отображений. При этом разработать необходимые подходы и методы. Для достижения поставленных целей рассматривались следующие задачи:

- описание бифуркаций потери симметрии в двумерных кубических отображениях Эно под действием обратимых неконсервативных возмущений;
- разработка новых сценариев возникновения смешанной динамики в двумерных и трехмерных обратимых диффеоморфизмах;
- исследование особенностей хаотической динамики неголономной модели кельтского камня, построение границ областей существования различного типа странных аттракторов, а также смешанной динамики в этой модели;
- определение пороговых значений амплитуды периодических возмущений в модели Шимицу-Мориока, при которых аттрактор Лоренца сохраняет псевдогиперболичность.

Методы исследования. Для достижения заявленных целей и решения поставленных задач диссертантом применялись аналитические, качественные и численные методы

теории динамических систем. При исследовании конкретных моделей (неголономная модель кельтского камня, двумерное и трехмерное отображения Эно, возмущенная система Шимицу-Мориока) применялись численные методы прикладной теории бифуркаций, методы диаграмм Ляпунова и карт динамических режимов, а также численные методы продолжения по параметру и построения инвариантных многообразий для седловых периодических траекторий. Численные методы объединены в рамках единого комплекса программ.

Теоретическая и практическая значимость. В теории динамических систем получены новые результаты. Описаны перестройки бифуркационных диаграмм в окрестности резонанса 1:3, возникающие в результате неконсервативных обратимых возмущений; предложен новый «взрывной» сценарий возникновения смешанной динамики для однопараметрических семейств трехмерных обратимых диффеоморфизмов; приведен первый пример системы с сосуществующими дискретным аттрактором и репеллером Лоренца; показано, что псевдогиперболичность аттракторов может сохраняться даже при немалых периодических возмущениях системы.

Практическая значимость диссертационной работы состоит в разработке комплекса программ для исследования обратимых и диссипативных систем, а также в получении новых результатов при исследовании прикладной модели, описывающей динамику кельтского камня на плоскости. С помощью разработанных методов для этой модели диссертантом построены границы области существования дискретных аттрактора и репеллера Лоренца, смешанной динамики, спиральных аттракторов нового типа. В результате проведенных работ выяснилось, что динамика неголономных систем является чрезвычайно богатой. Притом большинство обнаруженных динамических явлений и эффектов получили адекватное математическое описание.

Таким образом, полученные диссертантом результаты вносят существенный вклад как в развитие теории динамических систем, так и в ее приложения к исследованию конкретных обратимых и диссипативных моделей.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Бифуркации резонанса 1:3 в обратимом неконсервативном случае.

На примере модифицированных кубических отображений Эно $H_3^\pm : \bar{x} = y, \bar{y} = -x + M_1 + M_2 y \pm y^3$ показано, как обратимые неконсервативные возмущения влияют на структуру бифуркационных диаграмм в случае резонанса 1:3, т.е. бифуркаций отображений вблизи неподвижной точки с мультипликаторами $e^{\pm i2\pi/3}$. Описаны два основных типа бифуркаций разрушения симметрии, в результате которых на резонансном уровне рождаются неконсервативные точки периода 3. Показано, что в случае отображения H_3^- эти бифуркации приводят к возникновению смешанной динамики.

2. Вырожденные резонансы $p : q$ в консервативных кубических отображениях Эно H_3^\pm .

Показано, что при $M_1 = 0$ все резонансы $p : q$ в консервативных кубических отображениях Эно H_3^\pm являются вырожденными при нечетных q . В результате их бифур-

каций на резонансном уровне могут рождаться четыре орбиты периода q , тогда как в общем случае таких орбит должно быть только две.

3. Псевдогиперболический дискретный аттрактор Лоренца в периодически возмущенной системе Шимицу-Мориока.

Согласно работе Тураева-Шильникова псевдогиперболичность аттрактора сохраняется при малых периодических по времени возмущениях системы. На примере периодически возмущенной системы Шимицу-Мориока диссертантом показано, что псевдогиперболичность также сохраняется и при немалых возмущениях. При этом установлено, что соответствующий дискретный аттрактор является диким, т.е. допускает существование гомоклинических касаний.

4. Проверка псевдогиперболичности аттракторов неориентируемых трехмерных отображений Эно.

Показано, что ранее обнаруженные неориентируемые дискретные аттракторы лоренцевского типа не являются псевдогиперболическими, кроме одного типа аттракторов, содержащих точку периода 2 (а также ранее известного гетероклинического аттрактора).

5. Странные аттракторы в неголономной модели кельтского камня.

В двухпараметрическом семействе модели кельтского камня построены границы области существования аттрактора Лоренца и симметричного ему репеллера Лоренца. Описаны основные бифуркации, приводящие к их возникновению и разрушению. Также в этой модели обнаружен новый тип аттрактора Шильникова. Описан сценарий его возникновения и разрушения.

6. Смешанная динамика в неголономной модели кельтского камня.

Для трехмерных обратимых отображений предложен новый сценарий возникновения смешанной динамики в результате обратимой бифуркации слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов. Реализация сценария продемонстрирована на примере неголономной модели кельтского камня, для которой построена соответствующая бифуркационная диаграмма, и выделена область существования смешанной динамики.

7. Программный комплекс для исследования обратимых и диссипативных систем.

Разработан программный комплекс, позволяющий выявлять в пространстве параметров системы области существования странных аттракторов и смешанной динамикой, а также осуществлять продолжение бифуркационных кривых на плоскости параметров.

Новизна и достоверность. Все результаты, изложенные в диссертационной работе, являются новыми. Они хорошо согласуются с имеющимися теоретическими представлениями и положениями. Численные эксперименты подробно описаны, большая их часть воспроизводилась другими исследователями.

Результаты, выносимые на защиту опубликованы в ведущих рецензируемых физико-математических журналах, индексируемых в научных базах Web of Science и Scopus с квартилями Q1 – 2 статьи, Q2 – 1 статья и Q3 – 2 статьи.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях:

1. Международная конференция «Shilnikov WorkShop 2016», г. Нижний Новгород, Россия, 16-17 декабря 2016 г., постерный доклад “*Неконсервативное обратимое возмущение консервативных обратимых отображений плоскости*”;
2. Международная конференция «Dynamics, Bifurcation and Chaos 2017 (DBCIV)», г. Нижний Новгород, Россия, 2-9 июля 2017 г., доклад “*Nonconservative reversible perturbations of reversible maps with unit Jacobian*”;
3. Международная конференция «Dynamics, Bifurcations and Chaos 2018», г. Нижний Новгород, Россия, 16-20 июля 2018 г., постерный доклад “*Chaotic dynamics and multistability in the nonholonomic model of Celtic stone*”;
4. Международная конференция «Shilnikov WorkShop 2018», г. Нижний Новгород, Россия, 17-18 декабря 2018 г., постерный доклад “*On the domain of existence of Lorenz-like attractors in a nonholonomic model of Celtic stone*”;
5. Международная конференция «Topological methods in dynamics and related topics», г. Нижний Новгород, Россия, 3-6 января 2019 г., постерный доклад “*Examples of Discrete Lorenz Attractors in Three-dimensional Maps*”;
6. Международная конференция «7th Bremen Summer School/Symposium on “Dynamical Systems- pure and applied”», г. Бремен, Германия, 5-9 августа 2019 г., постерный доклад “*On the region of existence of discrete Lorenz attractor in a nonholonomic Celtic stone model*”;
7. II международная конференция «Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop», г. Нижний Новгород, Россия, 9-13 декабря 2019 г., постерный доклад “*On discrete Lorenz attractors in a Celtic stone model*”;
8. КРОМШ 2021 пос. Сатера, Алуста, 17-26 сентября 2021 г., доклад “*О бифуркациях неориентируемых трёхмерных отображениях, приводящих к хаосу*”;
9. Международная конференция «Shilnikov WorkShop 2021», г. Нижний Новгород, Россия, 16-17 декабря, доклад “*On discrete homoclinic attractors of three-dimensional maps*”;
10. International Workshop on Computing Technologies and Applied Mathematics (СТАМ 2022), г. Владивосток, Россия, 11-15 июля 2022 г., доклад “*Chaotic dynamics in the nonholonomic models of celtic stone*”;
11. 27th International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2022), CentraleSupélec in Gif-sur-Yvette in Paris region, July 18 - 22, 2022, постерный доклад “*On 1:3 Resonance Under Reversible Perturbations of Conservative Cubic Hénon Maps*”.

Список статей, представленных к защите по теме диссертации (с указанием личного вклада).

- [1*] Гонченко М.С., Казаков А.О., Самылина Е.А., Шыхмамедов А.И. *On 1:3 Resonance Under Reversible Perturbations of Conservative Cubic Hénon Maps*//Regular and Chaotic Dynamics **27(6)** (2022), С. 198 - 216

<https://link.springer.com/article/10.1134/S1560354722020058>

(Главный соавтор. Предложен один из двух методов построения обратимых неконсервативных возмущений, проведены соответствующие численные эксперименты.)

- [2*] Казаков А.О., Гонченко А.С., Гонченко С.В., Самылина Е.А. *Хаотическая динамика и мультистабильность в неголономной модели кельтского камня*//Известия высших учебных заведений. Радиофизика **61(10)** (2018) С. 867 - 882

https://radiophysics.unn.ru/sites/default/files/papers/2018_10_867.pdf

(Главный соавтор. Предложен сценарий возникновения смешанной динамики, в результате слияния устойчивой и вполне неустойчивой точек, проведены все численные эксперименты, построены однопараметрические и двухпараметрические бифуркационные диаграммы.)

- [3*] Гонченко А.С., Самылина Е.А. *Об области существования дискретного аттрактора Лоренца в неголономной модели кельтского камня*//Известия высших учебных заведений. Радиофизика **62(5)** (2019) С. 412 - 428

https://radiophysics.unn.ru/sites/default/files/papers/2019_5_412.pdf

(Главный соавтор. Построены границы области существования аттрактора Лоренца, описаны соответствующие бифуркационные сценарии.)

- [4*] Gonchenko A. S., Gonchenko M. S., Kozlov A.D., Samylyna E.A. *On scenarios of the onset of homoclinic attractors in three-dimensional non-orientable maps*//Chaos **31(4)** (2021), 043122 (19 p.)

<https://doi.org/10.1063/5.0039870>

(Найдены дискретные лоренцевские и восьмерочные аттракторы в трехмерном отображении Эно с отрицательным якобианом.)

- [5*] Gonchenko S., Gonchenko A., Kazakov A., Samylyna E. *On discrete Lorenz-like attractors*//Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **31(2)** (2021), 023117 (20 p.)

<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/5.0037621>

(Показано, что аттрактор Лоренца остается псевдогиперболическим под воздействием немалых периодических возмущений системы Шимицу-Мориока.)

2 Краткое содержание работы. Основные результаты

Диссертация состоит из следующих трёх глав:

- бифуркации резонанса 1:3 в обратимом неконсервативном отображении Эно;

- хаотическая динамика неголономной модели кельтского камня;
- псевдогиперболические аттракторы трёхмерных отображений.

2.1 Бифуркации резонанса 1:3 в обратимом неконсервативном отображении Эно

В главе 1 диссертационной работы рассмотрена задача о влиянии обратимых неконсервативных возмущений на структуру бифуркационных диаграмм в окрестности резонанса 1:3, т.е. бифуркаций неподвижной точки с мультипликаторами $e^{\pm i2\pi/3}$. Данная задача решалась на примере модифицированных кубических отображений

$$H_3^\pm : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) : \bar{x} = y, \quad \bar{y} = -x + M_1 + M_2y \pm y^3, \quad (1)$$

зависящих от параметров M_1 и M_2 .

Оба отображения H_3^+ и H_3^- являются консервативными (их якобиан тождественно равен 1), а также обратимыми относительно инволюции $h : (x, y) \rightarrow (y, x)$. Предложена следующая модификация отображений (1):

$$\tilde{H}_3^\pm(\varepsilon) : \bar{x} + \varepsilon\bar{x}\bar{y} = y + \varepsilon xy, \quad \bar{y} = -x + M_1 + M_2(y + \varepsilon xy) \pm (y + \varepsilon xy)^3. \quad (2)$$

При $\varepsilon \neq 0$ отображения (2) остаются обратимыми относительно инволюции $h : (x, y) \rightarrow (y, x)$ в достаточно большой области значений x и y , но при этом больше не являются консервативными.

Для полученных отображений $\tilde{H}_3^\pm(\varepsilon)$ был проведён подробный бифуркационный анализ. Особое внимание при этом уделено исследованию локальных бифуркаций потери симметрии, связанных с резонансом 1:3. Такие бифуркации приводят к появлению пар неконсервативных периодических траекторий. В рассматриваемом случае к ним относятся два типа обратимой бифуркации вилка. Для обоих случаев установлены области параметров, соответствующих существованию неконсервативных периодических траекторий периода 3.

В случае отображения $\tilde{H}_3^+(\varepsilon)$ показано, что обратимая бифуркация вилка является суперкритической. В результате этой бифуркации из эллиптической точки E_3 периода 3 рождаются устойчивая и неустойчивая точки периода 3, а сама точка E_3 становится седловой, её якобиан равен единице. В случае отображения $\tilde{H}_3^-(\varepsilon)$ бифуркация вилка является субкритической: седловая точка периода 3 преобразуется в эллиптическую точку такого же периода, а рядом с ней рождаются две седловые точки O_1^3 и O_2^3 периода 3, причём у одной из них якобиан больше 1 ($J(O_1^3) > 1$), а у другой – меньше 1 ($J(O_2^3) < 1$).

Кроме того, для отображения $\tilde{H}_3^-(\varepsilon)$ приведено численное подтверждение существования смешанной динамики. Здесь в окрестности эллиптической неподвижной точки наблюдается хаотическая динамика визуально не отличимая от консервативного (гамильтонова) хаоса, см. рис. 1. Однако численные исследования показывают, что в данном случае, на основе неконсервативных седловых точек периода 3 O_1^3 и O_2^3 , образуется негрубый гетероклинический контур, см. рис. 2. Согласно работе [1], см. также [2, 3], бифуркации таких контуров приводят к сосуществованию счетного числа устойчивых и вполне неустойчивых

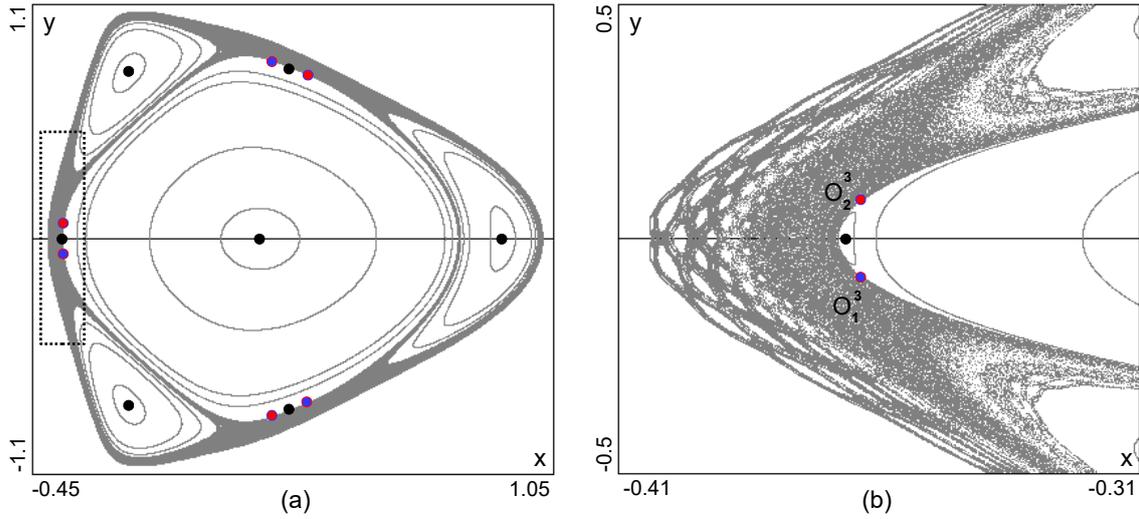


Рис. 1: Фазовый портрет и увеличенный его фрагмент для отображения $\tilde{H}_3^-(\varepsilon)$ при $M_1 = -0.364, M_2 = -0.5$ и $\varepsilon = 0.3$. Для удобства фазовый портрет повернут на $\pi/4$. В этом представлении горизонтальная ось становится $Fix(h)$. Хаотическая динамика (в серой области) кажется консервативной (фазовый портрет самосимметричен относительно горизонтальной оси). Здесь точки O_1^3 и O_2^3 соответствуют компонентам пары седловых точек периода 3 с якобианами $J(O_2^3) = 0.995 < 1$ и $J(O_1^3) = 1.005 > 1$.

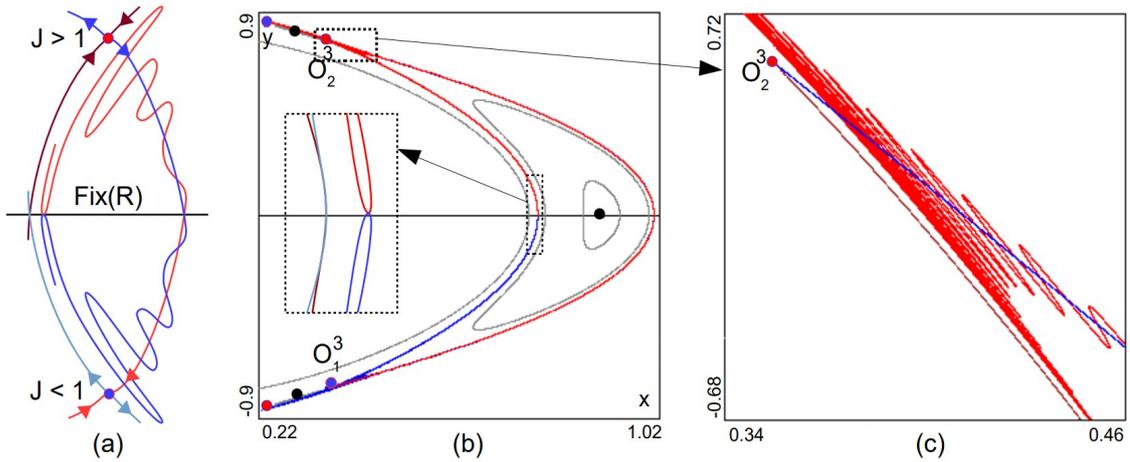


Рис. 2: (a) Схематическое представление нетрансверсального гетероклинического контура. (b), (c) Такой контур, соединяющий точки O_1^3 и O_2^3 в отображении $\tilde{H}_3^-(\varepsilon)$ при $M_1 = -0.364, M_2 = -0.5$ и $\varepsilon = 0.3$. Пара многообразий W_1^s и W_1^u пересекается трансверсально, в то время как другая пара W_2^s и W_2^u имеет квадратичное касание.

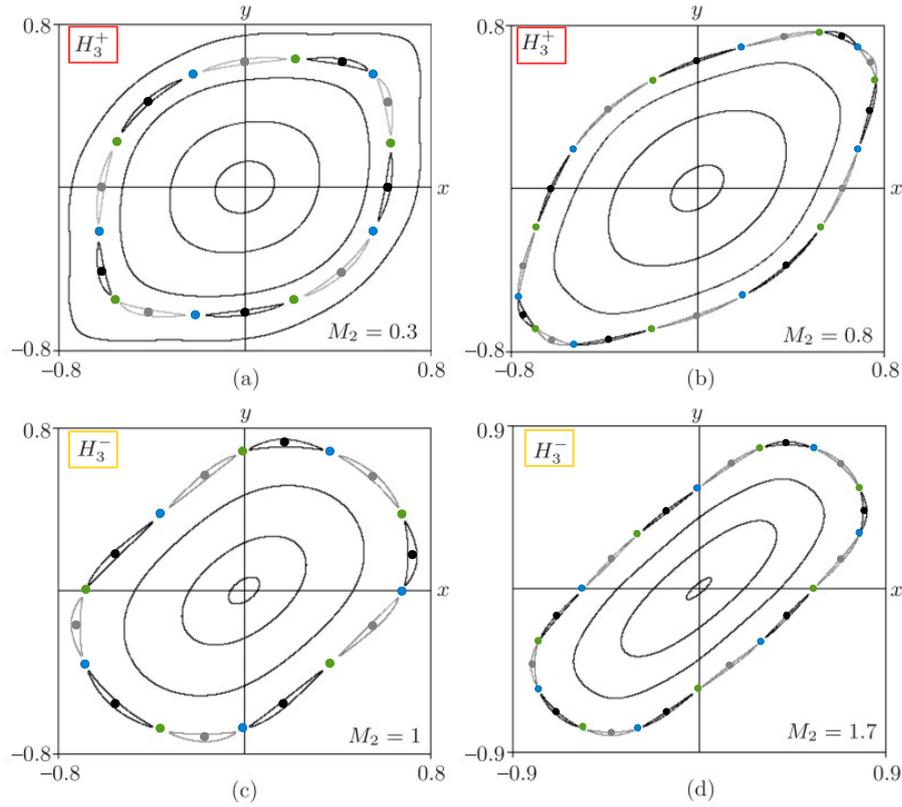


Рис. 3: Фазовые портреты вблизи вырожденных резонансов 1:5 (левый столбец) и 1:7 (правый столбец) в консервативных кубических отображениях Эно H_3^+ (верхний ряд) и H_3^- (нижний ряд).

периодических точек, имеющих в пересечении непустое замыкание, а значит, наблюдаемый на рис. 1 хаос является смешанной динамикой.

Для консервативных отображений H_3^+ и H_3^- сформулирована и доказана теорема о вырожденности нечетных резонансов при параметрах, обеспечивающих центральную симметрию.

Теорема 1 *Любой резонанс $r : q$ неподвижной точки $O(0, 0)$ отображений H_3^\pm с $M_1 = 0$ является вырожденным при любом нечетном $q \geq 3$.*

Иллюстрация этого результата приведена на рис. 3. На рис. 3а,б изображены фазовые портреты вблизи вырожденных резонансов 1:5 и 1:7 для отображения H_3^+ . Эти резонансы возникают при $M_2 \approx 0.575$ и $M_2 \approx 1.15$, соответственно. В результате возникают четыре периодические траектории: пара симметричных седел (зелёные и голубые точки) и пара несимметричных периодических эллиптических траекторий (серые и черные цвета). На рис. 3с,д продемонстрированы фазовые портреты для отображения H_3^- . В отличие от предыдущего случая, здесь периодические эллиптические точки являются симметричными, в то время как периодические сёдла несимметричны. Здесь резонанс 1:5 происходит при $M_2 \approx 0.66$, а резонанс 1:7 – при $M_2 \approx 1.36$.

2.2 Псевдогиперболические аттракторы трёхмерных отображений

Определение 1 ([4]) Пусть \mathcal{A} является положительно-инвариантным множеством n -мерного C^r -гладкого потока F_t (т.е., $F_t(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ для $t > 0$). Множество \mathcal{A} называется псевдогиперболическим, если оно обладает следующими свойствами.

- 1) Для любой точки $x \in \mathcal{A}$ существует два непрерывно зависящих от x линейных подпространства, $E_1(x)$ и $E_2(x)$, где $\dim E_1 = k$ и $\dim E_2 = n - k$, которые инвариантны относительно дифференциала DF потока,

$$DF_t E_1(x) = E_1(F_t(x)), \quad DF_t E_2(x) = E_2(F_t(x)),$$

для любых $t \geq 0$.

- 2) Разложение на E_1 и E_2 является доминирующим, т.е., существуют константы $C_1 > 0$ и $\beta > 0$ такие, что

$$\|DF_t(x)|_{E_2}\| \cdot \|(DF_t(x)|_{E_1})^{-1}\| \leq C_1 e^{-\beta t}$$

для любых $t \geq 0$ и $x \in \mathcal{A}$. Это означает, что любое возможное сжатие в $E_1(x)$ равномерно слабее, чем сжатие в $E_2(x)$ и любое возможное растяжение в $E_1(x)$ равномерно сильнее любого возможного растяжения в $E_2(x)$.

- 3) Линеаризованный поток DF на E_1 экспоненциально растягивает любые k -мерные объемы, т.е., существуют константы $C_2 > 0$ и $\sigma > 0$ такие, что

$$\det(DF_t(x)|_{E_1}) \geq C_2 e^{\sigma t}$$

для любых $t \geq 0$ и $x \in \mathcal{A}$.

Если псевдогиперболическое множество \mathcal{A} является аттрактором, мы называем его псевдогиперболическим аттрактором. Заметим, что определение 1 является обобщением соответствующего определения из работы [5].

Аналогичное определение можно дать для диффеоморфизмов. Для этого нужно просто считать, что время t принимает дискретные значения, т.е. $t \in \mathbb{Z}$ и заменить F_t в приведенном выше определении на итерацию диффеоморфизма f , т.е., $F_t = f^t$.

Таким образом, используя стандартные обозначения теории нормальной гиперболичности, мы будем называть $E_2(x)$ сильно-сжимающим подпространством и обозначать через E^{ss} ; центрально-неустойчивое подпространство $E_1(x)$ будем обозначать через E^{cu} .

Глава 2 данной диссертационной работы посвящена исследованию псевдогиперболичности некоторых странных аттракторов трехмерных отображений. В первой ее части рассматривается задача о периодических возмущениях системы Шимицу-Мориока

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - \lambda y - xz \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2, \end{cases} \quad (3)$$

зависящей от параметров α и λ . Как известно, см. например, [6, 7, 8, 9], в этой системе существует аттрактор Лоренца, см. также [10]. Везде далее будем фиксировать параметры системы следующим образом: $\alpha = 0.35$, $\lambda = 0.9$. При таких значениях в системе наблюдается аттрактор Лоренца.

Согласно теореме Тураева-Шильникова, псевдогиперболичность аттракторов сохраняется при малых периодических возмущениях систем дифференциальных уравнений, демонстрирующих псевдогиперболичность аттракторов [11]. Таким образом, если взять, например, систему Шимицу-Мориока при рассматриваемых параметрах α и λ , добавить к одному из ее уравнений периодическое по времени возмущение, то при малых величинах этого возмущения в этой системе также будет наблюдаться псевдогиперболический аттрактор.

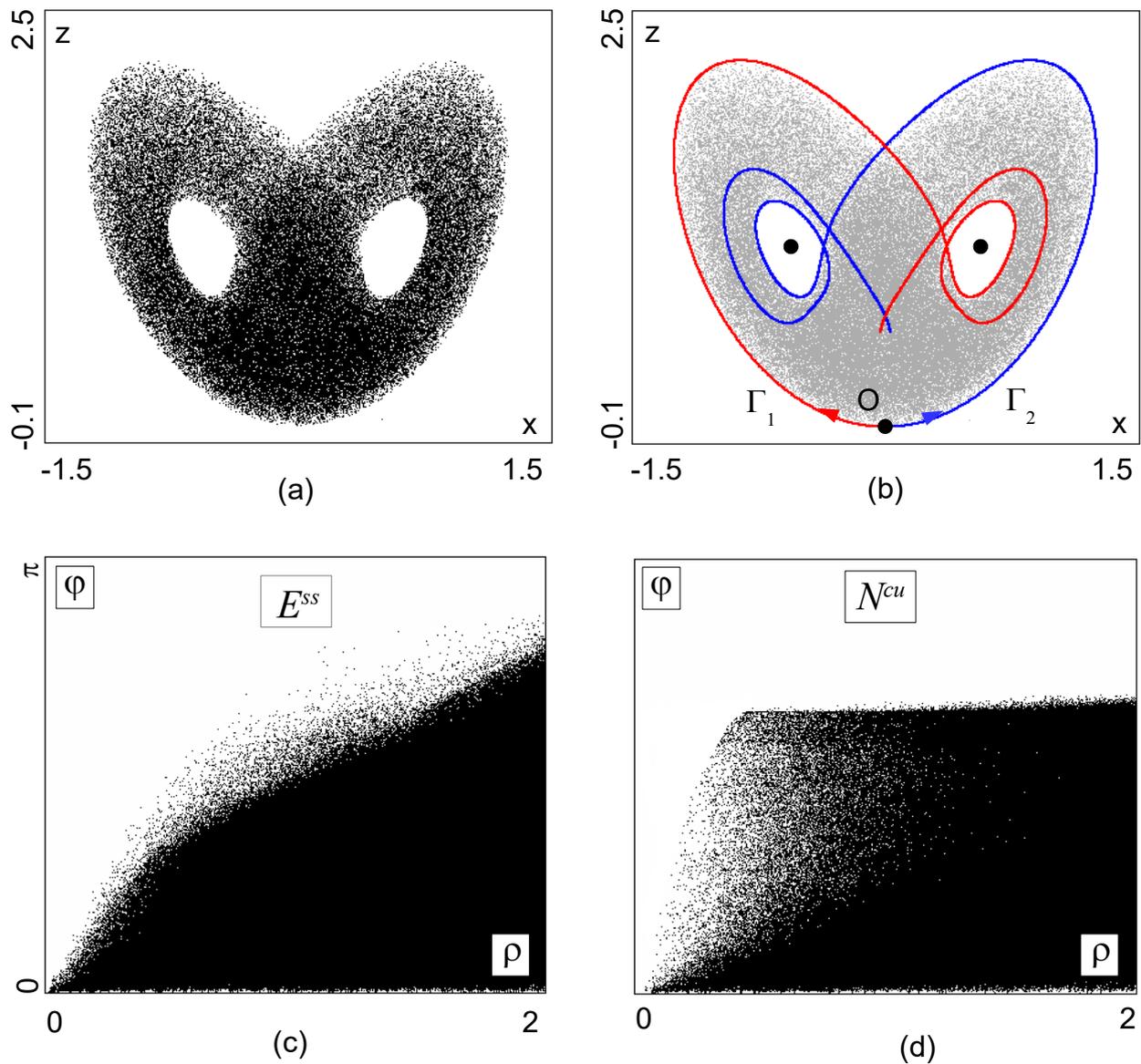


Рис. 4: Результаты проверки псевдогиперболичности аттрактора Лоренца в возмущенной системе Шимицу-Мориока (4) с параметрами $\alpha = 0.35$, $\lambda = 0.9$, $\varepsilon = 0.02$: (a) Фазовый портрет аттрактора; (b) поведение неустойчивых сепаратрис; (c) и (d) диаграммы непрерывности подпространств E^{ss} и N^{cu} .

В данном разделе, на примере следующего периодического возмущения системы Шимицу-

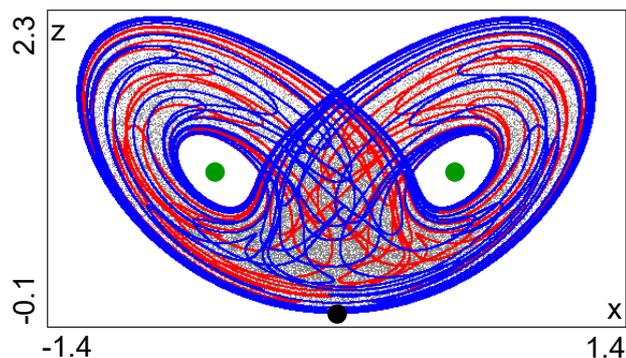


Рис. 5: Поведение неустойчивых сепаратрис Γ_1 и Γ_2 , подтверждающие наличие гомоклинических касаний для аттрактора, приведенного на рис. 4а.

Мориока

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - \lambda y - xz \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2 + \varepsilon z \sin t, \end{cases} \quad (4)$$

диссертантом показано, что псевдогиперболичность аттрактора также сохраняется и при немалых величинах возмущениях ε . При этом установлено, что соответствующий дискретный аттрактор Лоренца является диким, т.е. допускает существование гомоклинических касаний.

В диссертационной работе выполнена проверка всех трех условий определения псевдогиперболичности для аттракторов системы (4) при различных величинах возмущения ε . Спектр показателей Ляпунова для аттрактора, найденного при $\varepsilon = 0.02$:

$$\Lambda_1 = 0.04728, \Lambda_2 = -0.00111, \Lambda_3 = -1.29617.$$

Так как $\Lambda_2 > \Lambda_3$, а $\Lambda_1 + \Lambda_2 > 0$ можно сделать вывод, что условия 2 и 3 определения псевдогиперболичности выполняются.

Диаграммы для E^{ss} и E^{cu} , изображенные на рис. 4с и 4d, показывают, что здесь также выполняются условия непрерывности для этих подпространств (условие 1 определения). Таким образом, можно сделать вывод, что данный дискретный аттрактор Лоренца является псевдогиперболическим.

Кроме того рассматриваемый аттрактор является диким, в чем позволяет убедиться численное построение длинных кусков неустойчивого многообразия [5*]. Поведение неустойчивых сепаратрис Γ_1 и Γ_2 неподвижной точки O , см. рис. 5, свидетельствует о невозможности избежать гомоклинических касаний этих сепаратрис с двумерным неустойчивым многообразием точки O .

Результаты численных исследований показывают, что псевдогиперболичность аттрактора разрушается примерно при $\varepsilon \approx 0.045$.

Во второй части главы 2 диссертационной работы проверена гипотеза о псевдогиперболичности ранее обнаруженных аттракторов в трехмерном неориентируемом отображе-

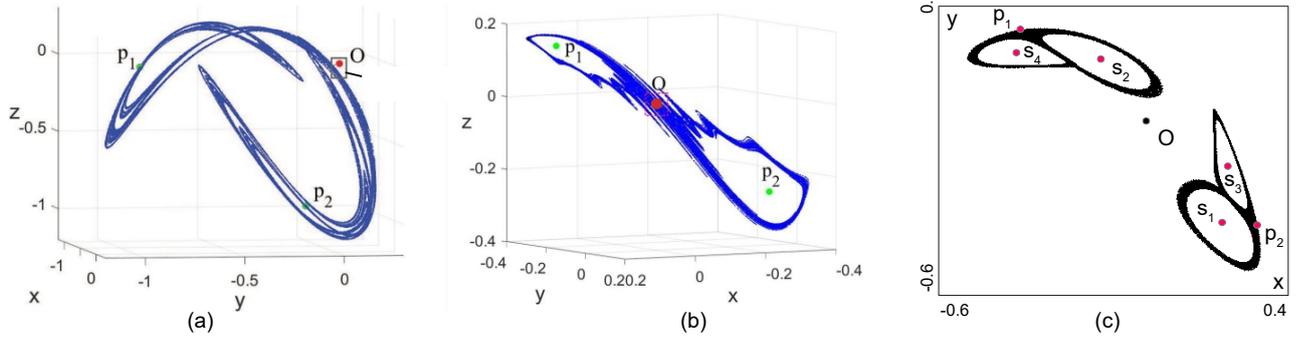


Рис. 6: Портреты аттракторов отображения (5), псевдогиперболичность которых проверялась в данной работе: (a) неориентируемый аттрактор Лоренца, $g(y, z) = y^2 + 1.5z^2 + 10yz + 2z^3$, $B = -0.5$, $A = -2.599$ и $C = -2.056$; (b) неориентируемый восьмерочный аттрактор, $g(y, z) = y^2 + 1.5z^2 + 10yz + 2z^3$, $B = -0.5$, $A = -2.599$ и $C = -2.056$; аттрактор Лоренца, содержащий точку периода 2, $g(y, z) = -z^2$, $B = -0.8$, $A = -1.3072$ и $C = -1.05$.

нии Эно

$$\begin{cases} \bar{x} = y, \\ \bar{y} = z, \\ \bar{z} = Bx + Az + Cy + g(y, z). \end{cases} \quad (5)$$

Это отображение зависит от параметров A, B, C (B – якобиан отображения), и функции $g(y, z)$, зависящей от переменных y и z и обращающейся вместе с первыми производными в ноль при $y = z = 0$.

В случае $B < 0$ отображение (5) является меняющим ориентацию. Его бифуркации на плоскости параметров (A, C) (при фиксированном значении якобиана B) исследовались в работах [12, 13] с помощью т.н. метода карт седел, представляющих собой разбиение плоскости параметров (A, C) кривыми, разграничивающими области с различными расположениями мультипликаторов неподвижной точки $O(0, 0, 0)$, вокруг которой образуется гомоклинический аттрактор.

В работах [4*, 5*] в классе неориентируемых отображений (5) обнаружены новые примеры гомоклинических аттракторов: неориентируемые лоренцевский и восьмерочный аттракторы, а также аттрактор Лоренца, содержащий точку периода 2. Также в этой работе выдвинута гипотеза о псевдогиперболичности этих аттракторов.

Численные исследования проведенные в диссертационной работе показали, что неориентируемые лоренцевский и восьмерочный аттракторы ранее найденные в работе [4*], см. также рис. 6b, c, не являются псевдогиперболическими, а аттрактор Лоренца, содержащий точку периода 2, обнаруженный в работе [5*], см. также рис. 6c, является псевдогиперболическим.

2.3 Хаотическая динамика в неголономной модели кельтского камня

Кельтский камень – это твёрдое тело, нижняя часть которого выглядит как усечённый параболоид, а верхняя как плоскость. Если положить такой камень на горизонтальную поверхность, то он будет опираться на неё только одной точкой выпуклого участка.

Особенность кельтского камня состоит в следующем: если закрутить его против часовой стрелки, то он продолжит своё движение как обычное круглое тело. Однако если закрутить его по часовой стрелке, то через некоторое время камень замедлит своё движение, начнет раскачиваться, а в итоге и вовсе поменяет направление своего вращения на противоположное, то есть станет вращаться против часовой стрелки. Такое явление называется эффектом реверса.

Самой популярной математической моделью кельтского камня является неголономная модель. Кроме того, эта модель является одной из наиболее интересных и богатых с точки зрения возможных динамических явлений, среди моделей динамики твердого тела. В ней впервые был обнаружен целый ряд новых явлений, ранее казавшихся возможными лишь в специфических математических системах. Так, в модели кельтского камня впервые были обнаружены эффект реверса [18, 19, 20], странные аттрактора [21] и странные репеллеры (так как система является обратимой), смешанная динамика и дискретный аттрактор Лоренца [22], спиральный хаос и т.д.

В неголономной модели кельтского камня заложен принцип отсутствия проскальзывания при движении. Это условие (скорость точки контакта камня с плоскостью равна нулю) выражается как $\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0$, где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость камня, \mathbf{v} – скорость его центра масс, \mathbf{r} – вектор, соединяющий центр масс камня с точкой его контакта с плоскостью.

Для составления неголономной модели используются хорошо известные законы механики: закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса, а итоговая система состоит из шести дифференциальных уравнений [21]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + mg\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega},\end{aligned}\tag{6}$$

характеризующих изменение моментов инерции $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ и ориентации $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ кельтского камня.

Вектора \mathbf{M} и $\boldsymbol{\omega}$ связаны соотношением

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}),\tag{7}$$

где $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции. Вектор \mathbf{r} зависит от δ и формы поверхности камня. Например, в случае кельтского камня в форме усеченного параболоида полагают, что $\mathbf{r} = \mathbf{Q}\mathbf{r}^*$, где

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица поворота между главными горизонтальными осями инерции и геометрическими осями параболоида, а вектор \mathbf{r}^* связан с вектором $\boldsymbol{\gamma}$ с помощью формул

$$r_1^* = -a_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_3}, \quad r_2^* = -a_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \quad r_3^* = -h + \frac{a_1 \gamma_1^2 + a_2 \gamma_2^2}{2\gamma_3^2},\tag{8}$$

в которых a_1 и a_2 – главные радиусы кривизны параболоида, а h – высота центра масс

камня. Из этих соотношений так же выражается вектор $\dot{\mathbf{r}}$ через \mathbf{M} и $\boldsymbol{\gamma}$.

Важным свойством системы (6) является ее обратимость относительно инволюции $h : \boldsymbol{\omega} \rightarrow -\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}$ и обращения времени $t \rightarrow -t$. Также важно отметить, что эта система обладает первым интегралом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) \quad , \quad (9)$$

который называется интегралом энергии, а также для этой системы выполняется условие $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$. Условие $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$ означает, что система (6) является фактически пятимерной: ее фазовое пространство – это $R^3 \times S^2$, так как $\mathbf{M} \in R^3$ и $\boldsymbol{\gamma} \in S^2 = \{(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) | \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1\}$. Существование интеграла энергии \mathcal{H} означает, что фазовое пространство расслаивается на инвариантные относительно потока поверхности $\mathcal{H} = \text{const}$. Соответственно система в ограничении на каждую такую поверхность является четырехмерной с фазовым пространством гомеоморфным $S^2 \times S^2$.

В рассматриваемой задаче, как и во многих других задачах динамики твердого тела, для визуализации результатов исследования удобно применять переменные Андуайе – Дебри, (L, H, G, g, l) , в которых условие $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$ выполняется автоматически. Везде далее графические иллюстрации численного счета приведены для трехмерного отображения Пуанкаре некоторой секущей $\mathcal{S} = \{g = 0\}$, на которой введены координаты $l, L/G$ и H/G .

В главе 3 диссертационной работы описаны бифуркации, в результате которых меняется тип устойчивых режимов в модели (6), а также возникает хаотическая динамика: странные аттракторы и смешанная динамика. При этом следующие параметры модели считались фиксированными

$$m = 1, g = 100, a_1 = 9, a_2 = 4, h = 1,$$

На плоскости параметров (δ, E) построены бифуркационные диаграммы в двух различных случаях:

1. $I_1 = 5, I_2 = 6, I_3 = 7$;
2. $I_1 = 2, I_2 = 6, I_3 = 7$.

В первом случае получены следующие результаты:

- обнаружен новый тип аттрактора Шильникова, см. рис. 7а. Этот аттрактор в отличие от классического аттрактора Шильникова, содержит пару неподвижных точек типа седло-фокус с двумерным неустойчивым многообразием. Показано, что этот аттрактор рождается «жестким образом» в результате субкритической бифуркации Неймарка-Сакера, а разрушается в результате граничного кризиса;
- показано, что при изменении параметра энергии отделенные аттрактор и репеллер, см. рис. 7b, могут сливаться в одно хаотическое множество, отвечающее смешанной динамике, см. рис. 7c;
- предложен новый сценарий «взрывного» возникновения смешанной динамики в результате обратимой бифуркации слияния устойчивого и неустойчивого предельных

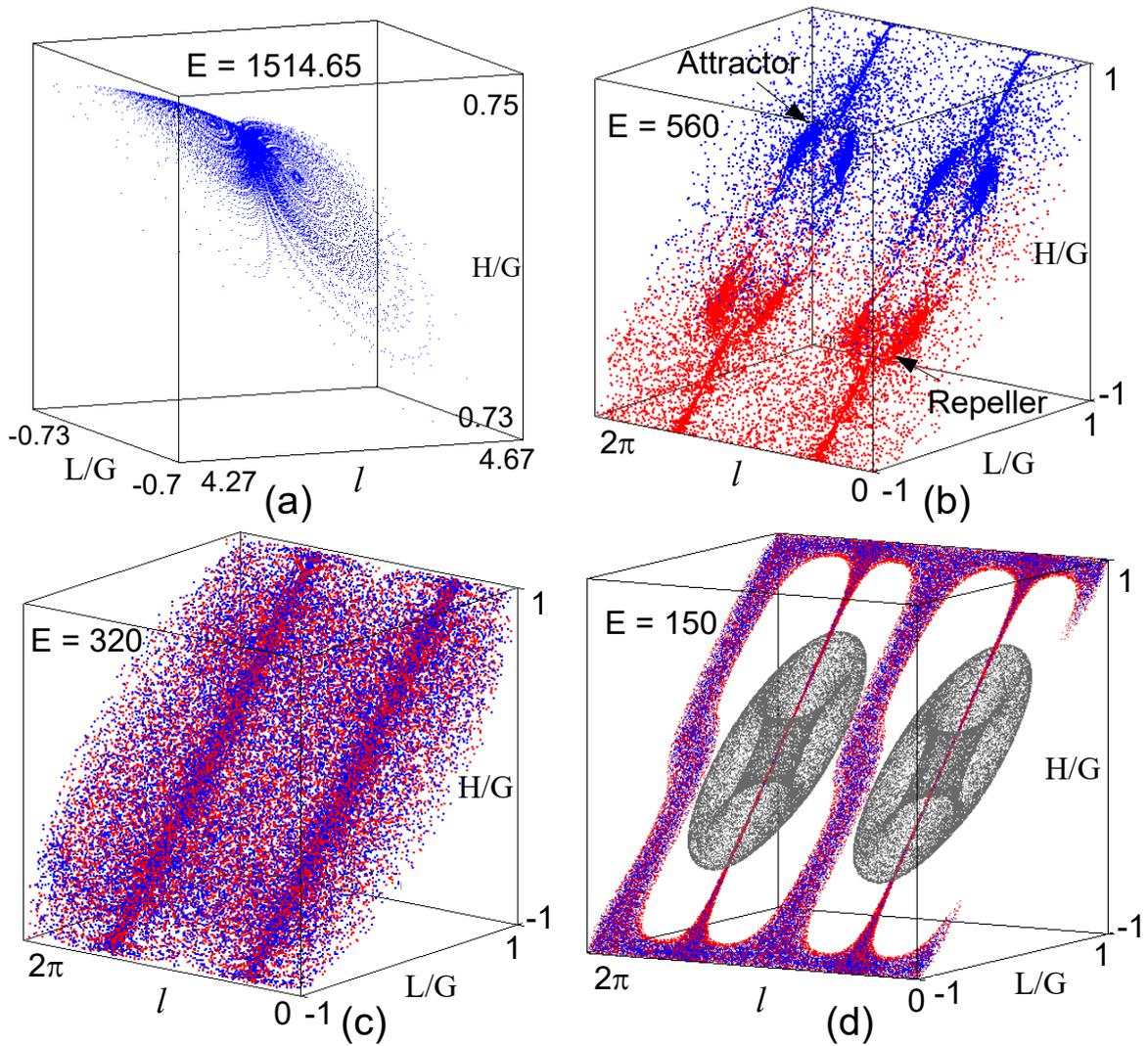


Рис. 7: Портреты хаотических режимов для отображения Пуанкаре в неголономной модели кельтского камня (6) при $I_1 = 5, I_2 = 6, I_3 = 7$ (синим цветом обозначены итерации точек на аттракторе, красным – на репеллере, серым – на консервативных инвариантных множествах): (a) дискретный аттрактор Шильникова; (b) хаотические аттрактор и репеллер не пересекаются; (c) смешанная динамика (аттрактор с репеллером пересекаются, но не совпадают); (d) смешанная динамика сосуществует с «КАМ-торами».

циклов. Реализация сценария продемонстрирована на примере слияния т.н. БМ-циклов в неголономной модели. Построена соответствующая бифуркационная диаграмма, выделена область существования смешанной динамики;

- показано, что смешанная динамика в неголономной модели кельтского камня может сосуществовать с консервативными структурами типа КАМ-торов, см. рис. 7d.

Во втором случае, в двухпараметрическом семействе модели построены границы области существования дискретного аттрактора Лоренца и симметричного ему репеллера Лоренца, см. рис. (8). Аттрактор Лоренца содержит седловую неподвижную точку O_a с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями, репеллер Лоренца содержит седловую неподвижную точку O_r с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями. Описаны основные бифуркации, приводящие к их возникновению и разрушению.

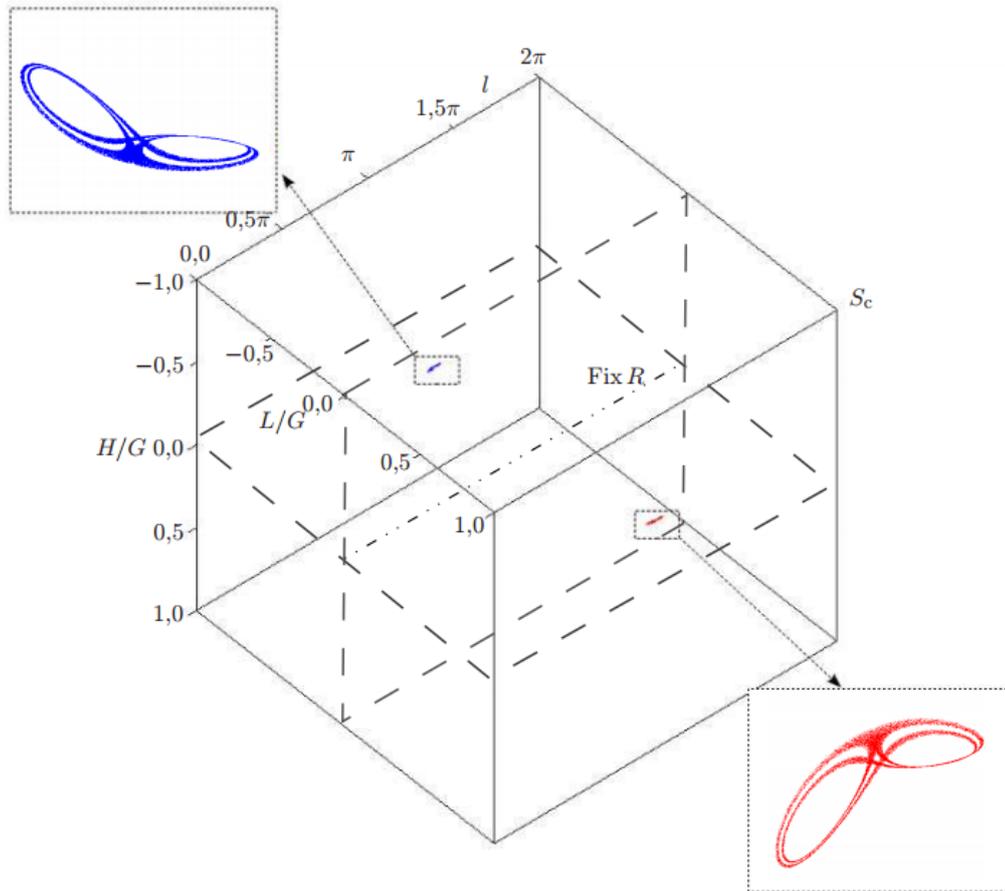


Рис. 8: Портреты дискретных аттрактора Лоренца (синий цвет) и репеллера Лоренца (красный цвет) для отображения Пуанкаре в неголомонной модели кельтского камня (6) при $I_1 = 2, I_2 = 6, I_3 = 7$ и $(\delta, E) = (0.425, 743.3)$.

Показано, что аттрактор Лоренца в рассматриваемом случае возникает в результате гетероклинической бифуркации, когда одномерное неустойчивое многообразие точки O_a ложится на инвариантную кривую, которая, в свою очередь рождается из гомоклинической структуры типа «восьмерка бабочка». Разрушается аттрактор в результате граничного кризиса, когда неустойчивое многообразие точки O_a начинает пересекаться с устойчивым многообразием, ограничивающим его области притяжения. Соответствующие бифуркационные кривые построены на плоскости параметров (δ, E) с использованием разработанной диссертантом программы протягивания по параметру.

Список литературы

- [1] Lamb J. S. W., Stenkin O. V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits //Nonlinearity. – 2004. – Т. 17. – №. 4. – С. 1217.
- [2] Gonchenko S. V., Turaev D. V., Shilnikov L. P. On Newhouse domains of two-dimensional diffeomorphisms which are close to a diffeomorphism with a structurally unstable heteroclinic cycle //Proc. Steklov Inst. Math. – 1997. – Т. 216. – С. 70-118.
- [3] Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Lázaro J. T. Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps //Nonlinearity. – 2012. – Т. 26. – №. 1. – С. 1.
- [4] Gonchenko S., Kazakov A., Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractor in a four-dimensional Lorenz system //Nonlinearity. – 2021. – Т. 34. – №. 4. – С. 2018.
- [5] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора //Математический сборник. – 1998. – Т. 189. – №. 2. – С. 137-160.
- [6] Shilnikov A. L. Bifurcations and chaos in the Shimizu–Marioka system //Methods and qualitative theory of differential equations. – 1986. – С. 180-193.
- [7] Shilnikov A. Bifurcations and chaos in the Shimizu–Morioka system: II //Methods and Qualitative Theory of Differential Equations. – 1989. – С. 130-137.
- [8] Shilnikov A. L. Bifurcation and chaos in the Morioka-Shimizu system //Selecta Math. Soviet. – 1991. – Т. 10. – №. 2. – С. 105-117.
- [9] Shil'nikov A. L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka model //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1993. – Т. 62. – №. 1-4. – С. 338-346.
- [10] Capiński M. J., Turaev D., Zgliczyński P. Computer assisted proof of the existence of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka system //Nonlinearity. – 2018. – Т. 31. – №. 12. – С. 5410.
- [11] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа //Доклады Академии наук. – Федеральное государственное бюджетное учреждение "Российская академия наук 2008. – Т. 418. – №. 1. – С. 23-27.
- [12] Gonchenko A. S., Kozlov A. D. On scenarios of chaos appearance in three-dimensional nonoriented maps //Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva. – 2016. – Т. 18. – №. 4. – С. 17-29.
- [13] Козлов А.Д. Примеры странных аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях //Журнал Средневолжского математического общества. – 2017. – Т. 19. – №. 2. – С. 62-75
- [14] Sevryuk M. B. Reversible systems. – Springer, 2006. – Т. 1211.

- [15] Gonchenko S. V., Turaev D. V. On three types of dynamics and the notion of attractor //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2017. – Т. 297. – С. 116-137.
- [16] Gonchenko S. V., Lamb J. S. W., Rios I., Turaev D. Attractors and repellers in the neighborhood of elliptic points of reversible systems //Dokl. Akad. Nauk. – 2014. – Т. 454. – №. 4. – С. 375-378; see also: //Dokl. Math. – 2014. – Т. 89. – №. 3. – С. 65-67 (Russian).
- [17] Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Kazakov A. O. Three types of attractors and mixed dynamics of nonholonomic models of rigid body motion //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2020. – Т. 308. – С. 125-140.
- [18] Астапов И. С. //Вестн. МГУ. Математика. Механика. – 1980. – №. 2. – С. 97.
- [19] Карапетян А. В. О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости//Прикладная математика и механика. – 1981. – Т. 45. – №. 5. – С. 808-814.
- [20] Маркеев А. П. О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости//Прикладная математика и механика. – 1983. – Т. 47. – №. 4. – С. 575-582.
- [21] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней //Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173. – №. 4. – С. 407-418.
- [22] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone //Regular and Chaotic Dynamics. – 2013. – Т. 18. – С. 521-538.