Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Шульга Никита Анатольевич

О функциях меры иррациональности и распределении рациональных чисел

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Мощевитин Николай Германович

Москва - 2023

Содержание

Введение

Данная диссертация посвящена двум объектам в теории чисел - вопрос-функции Минковского и функции меры иррациональности.

В 1904 году на Международном конгрессе математиков, Г. Минковский [10], представил функцию $?(x)$, которая позднее была названа вопрос-функцией Минковского. Эта функция была определена следующим образом. Пусть $?(0) = 0$ и $?(1) = 1$. Затем, для каждой пары двух последовательных рациональных чисел a/b и a'/b', для которых функция уже определена, мы определяем $?(x)$ в точке $x = (a+a')/(b+b')$ (называемой медиантой дробей a/b и a'/b') как арифметическое среднее значений на концах, то есть

$$?\left(\frac{a+a'}{b+b'}\right) = \frac{1}{2}\left(?\left(\frac{a}{b}\right) + ?\left(\frac{a'}{b'}\right)\right).$$

Продолжая этот процесс, мы определим функцию для всех рациональных чисел на интервале $[0, 1]$, если рассматривать начальные точки 0 и 1 как $0/1$ и $1/1$ соответственно. Ее можно расширить на иррациональные числа по непрерывности. Согласно Минковскому, эта функция обладает несколькими важными свойствами. В частности, она отображает все рациональные числа в двоично-рациональные, то есть рациональные числа с знаменателем вида $2^n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Более того, она отображает все квадратичные иррациональности, то есть иррациональные корни квадратных уравнений, в рациональные числа.

В данной диссертации мы рассматриваем на две проблемы, связанных с функцией Минковского. Во-первых, мы рассматриваем фольклорную гипотезу о неподвижных точках функции $?(x)$, то есть решениях уравнения $?(x) = x$. Гипотеза утверждает, что существует ровно 5 неподвижных точек - три тривиальные: $0, 1/2, 1$ и две иррациональные, симметрично расположенные относительно $1/2$. На сегодняшний день даже неизвестно, конечно ли число неподвижных точек. Мы смогли показать, что если рассмотреть самую маленькую или самую большую неподвижную точку x вопрос-функции Минковского на интервале $(0, 1/2)$ и разложить ее в непрерывную дробь $x = [a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, то

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Мы также доказываем, что некоторое утверждение о значениях функции $?(x)$ в рациональных точках влечет за собой справедливость гипотезы о (иррациональных) неподвижных точках $?(x)$.

Во-вторых, мы рассматриваем итерации вопрос-функции Минковского, то есть функцию

$$f_n(x) := \underbrace{?(?(...?}_{\text{n раз}}(x))).$$

Мы строим явное множество M вещественных чисел, заданных своими разложениями в непрерывные дроби, такое, что для каждого элемента $x_0 \in M$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$[f_n(x_0)]' = 0.$$

Отметим, что для $n = 1$ вопрос о производной функции $[f_1(x)]' = [?(x)]'$ хорошо изучен, особенно в последние годы, см. [4, 5, 6, 8, 14] и другие.

Вторым направлением данной диссертации является улучшение результатов о разности двух функций меры иррациональности. Прежде всего, напомним, что для иррационального числа $\xi \in \mathbb{R}$ функция меры иррациональности определяется как

$$\psi_\xi(t) = \min_{1 \leq q \leq t,\, q \in \mathbb{Z}} \|q\xi\|,$$

где $||.||$ обозначает расстояние до ближайшего целого.

Эта функция показывает то, насколько хорошо данное иррациональное число ξ приближается рациональными числами.

В [9] Кан и Мощевитин доказали, что для любых двух иррациональных чисел α, β, удовлетворяющих условию $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, разность

$$\psi_\alpha(t) - \phi_\beta(t)$$

меняет свой знак бесконечное количество раз при $t \to \infty$.

Остановимся на вопросе, поднятом Мощевитиным в работе [11]. Он доказал следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть α и β - два иррациональных числа. Если $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, то для любого $T \geq 1$ существует $t \geq T$ такое, что*

$$|\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)| \geqslant K \cdot \min(\psi_\alpha(t), \psi_\beta(t)),$$

где $K = \sqrt{(\sqrt{5}+1)/2} - 1$. Константа K в приведенном выше неравенстве оптимальна.

Эта теорема, совместно с классической теоремой Дирихле, позволила ему также улучшить результат Дубицка из [3], так что

Следствие 1. *Пусть α и β - два иррациональных числа. Если $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, то для любого $T \geq 1$ существует $t \geq T$ такое, что*

$$\Big|\frac{1}{\psi_\alpha(t)} - \frac{1}{\psi_\beta(t)}\Big| \geqslant Kt, \quad \text{где } K \text{ определено выше.}$$

В данной диссертации мы обобщаем Теорему 1 и улучшаем Следствие 1 до неравенства с оптимальной константой.

Личный вклад

Все представленные основные результаты были получены автором лично. В работах в соавторстве, автору принадлежит более 50% результатов. В Теоремах 5 и 11 из работ [7] и [13], вклад автора равен вкладу соавторов.

Апробация результатов диссертации

Результаты данной диссертации были представлены на следующих конференциях:

1. Diophantine Analysis, Dynamics and Related Topics, Technion, Хайфа, Израиль, 5-10 Февраля 2023.
   Доклад: «Minkowski question mark and folding lemma.»

2. 66th Annual Meeting of the Australian Mathematical Society, UNSW, Сидней, Австралия, 6-9 Декабря 2022.
   Доклад: «Rational approximations to two irrational numbers.»

3. Number Theory Down Under 10, The University of Queensland, Брисбен, Австралия, 4-7 Сентября 2022.
   Доклад: «Diophantine properties of fixed points and derivative of iterations of Minkowski question mark function.»

4. The conference of World-class International Mathematical Centers in Sirius, Сочи, Россия, 9-13 Августа 2021.
   Доклад: «Rational approximations to two irrational numbers.»

5. Diophantine Analysis and Related Topics, ZOOM, Москва, Россия, 1-4 Июня 2021.
   Доклад: «Rational approximations to two irrational numbers.»

6. Transcendence and Diophantine Problems, MIPT, Moscow, Russia, 10-14 June 2019.
   Доклад: «Diophantine properties of fixed points of Minkowski question mark function.»

Публикации

Основные результаты данной диссертации представлены в четырех публикациях:

- *Difference of irrationality measure functions.* Принята к печати в **Monatshefte für Mathematik**. (2023) (с В. Рудых).
- *Rational approximations to two irrational numbers.* **Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory** Vol. 11 (2022), No. 1, 1–10.
- *On the derivative of iterations of the Minkowski question mark function at special points.* **Funct. Approx. Comment. Math.** 66(2): 191-202, (2022).
- *Diophantine properties of fixed points of Minkowski question mark function.* **Acta Arithmetica**. 195 (2020): 367-382. (с Д. Гайфулиным).

Глава 1

Вопрос-функция Минковского и её неподвижные точки

Для $x \in [0,1]$ рассмотрим разложение в непрерывную дробь

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}, \quad a_j \in \mathbb{Z}_+$$

которое является единственным и бесконечным, когда $x \notin \mathbb{Q}$ и конечным для рациональных x. Каждое рациональное число x имеет всего два представления

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] \quad \text{и} \quad x = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1], \quad \text{где} \quad a_n \geq 2.$$

Одним из эквивалентных определений $?(x)$ является следующая формула, предложенная Данжуа [1, 2].

Определение 1. *Для иррационального $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ положим по определению*

$$?(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+\ldots+a_k-1}}$$

Фольклорная гипотеза утверждает, что

Гипотеза 1. *Вопрос-функция Минковского $?(x)$ имеет ровно пять неподвижных точек. Существует только одна иррациональная неподвижная точка $?(x)$ в интервале $(0, \frac{1}{2})$.*

Наши вычисления показывают, что если существует более одной неподвижной точки в интервале $(0, \frac{1}{2})$, то первые 5400 частичных частных частных в разложении в непрерывную дробь этих чисел совпадают.

В данной диссертации установлены некоторые свойства разложения в непрерывную дробь определенных неподвижных точек $?(x)$. Следующие четыре теоремы являются основными результатами относительно неподвижных точек вопрос-функции Минковского.

Теорема 2. *Пусть $x = [a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ - самая маленькая или самая большая неподвижная точка вопрос-функции Минковского на интервале $(0, \frac{1}{2})$. Тогда $a_1 = 2$ и для всех $n \in \mathbb{N}$*

$$a_{n+1} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Следующая теорема является более сильной версией Теоремы 2. Она использует некоторые новые геометрические соображения.

Теорема 3. *Обозначим $\kappa_1 = 2\log_2(\frac{\sqrt{5}+1}{2}) - 1 \approx 0.38848383\ldots$. Пусть x - неподвижная точка из Теоремы 2, тогда*

$$a_{n+1} < \kappa_1 \sum_{i=1}^{n} a_i + 2\log_2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \tag{1.1}$$

для всех $n \geq 1$.

Формула (1.1) дает явную оценку снизу для меры иррациональности рассматриваемых неподвижных точек. А именно, справедлива

Теорема 4. *Пусть x - неподвижная точка из Теоремы 2, тогда существует $q_0 \in \mathbb{Z}_+$ такое, что*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{\left(\frac{2\kappa_1}{\log 2}\log q + O(\log\log q)\right)q^2}$$

для всех $q > q_0 \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$.

Следующее утверждение сводит задачу о неподвижных точках $?(x)$ к свойствам значений $?(x)$ только в рациональных точках.

Теорема 5. *Гипотеза 1 следует из неравенства*

$$\left|?\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2}$$

для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$ с $q \geq q_0$ для некоторого $q_0 \in \mathbb{Z}_+$.

При доказательстве некоторых утверждений используется следующее утверждение, которое в другой формулировке известно как "Folding lemma" (см. [12]).

Лемма 1. *1. Пусть s - произвольное неотрицательное целое число, и*

$$?([a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}]) = [b_1, b_2, \ldots, b_k], \ \ b_k \neq 1.$$

Рассмотрим число

$$\theta = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n], \ \text{где} \ a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + s, \ \ s \geq 0.$$

Тогда

(a) Если $n \equiv k(\mathrm{mod}\ 2)$, то $?(\theta) = [b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, 2^{s+1} - 1, b_k, \ldots, b_1]$.

(b) Если $n \equiv k + 1(\mathrm{mod}\ 2)$, то $?(\theta) = [b_1, b_2, \ldots, b_k, 2^{s+1} - 1, 1, b_k - 1, b_{k-1}, \ldots, b_1]$.

Глава 2

Производная итераций функции $?(x)$

Рассмотрим n-ую итерацию функции $?(x)$, то есть функцию

Определение 2.

$$f_n(x) := \underbrace{?(?(...?}_{\text{n раз}}(x))).$$

Итерации вопрос-функции Минковского являются важным объектом для изучения неподвижных точек $?(x)$, то есть решений уравнения

$$?(x) = x$$

в силу следующего утверждения.

Предложение 1. *Если для каждого рационального числа $p/q \in [0,1]$ выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{p}{q}\right) = A, \text{ где } A \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \tag{2.1}$$

то существует ровно пять неподвижных точек $?(x)$ в интервале $[0,1]$.

Обратное также верно: если гипотеза о неподвижных точках верна, то (2.1) выполняется для каждого рационального p/q.

Мы будем изучать итерации $?(x)$ с другой точки зрения. Заметим, что для почти всех $x_0 \in [0,1]$ относительно меры Лебега, выполняется

$$f_n'(x_0) = ?'(x_0) \cdot ?'(x)|_{x=?(x_0)} \cdot ?'(x)|_{x=?(?(x_0))} \cdot \ldots \cdot ?'(x)|_{x=\underbrace{?(?(\ldots?}_{\text{n-1 раз}}(x_0)))}. \tag{2.2}$$

Кроме очевидных случаев кажется нетривиальной задачей найти явные примеры x_0 таких, что $f_n'(x_0) = 0$. Под очевидными примерами мы подразумеваем все рациональные числа (это следует из (2.2) в силу $?'(z) = 0$ и $?(z) \in \mathbb{Q}$ для любого $z \in \mathbb{Q}$), а также некоторые квадратичные иррациональности $x_0 = [a_1, \ldots, a_t, \ldots]$, удовлетворяющие

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_t}{t} > \kappa_2 = 4.401^+, \tag{2.3}$$

где для κ_2 найдена точная формула

$$\kappa_2 = \frac{4L_5 - 5L_4}{L_5 - L_4}, \quad L_j = \log\frac{j + \sqrt{j^2+4}}{2} - j \cdot \frac{\log 2}{2}, \quad j = 4, 5$$

и была обнаружена в [5]. Объяснение заключается в том, что в [5] была доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Для любого иррационального $x_0 = [a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, удовлетворяющего неравенству* (2.3)*, производная $?'(x_0)$ существует, и $?'(x_0) = 0$.*

Из Теоремы 6 видно, что если x_0 - квадратичная иррациональность, и выполняется формула (2.3), то одновременно $?(x_0) \in \mathbb{Q}$ и $?'(x_0) = 0$, и, таким образом, из (2.2) следует, что $f_n'(x_0) = 0$.

В данной диссертации мы приводим множество M иррациональных чисел, такое что для всех $x_0 \in M$ и для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ выполнено $f_n'(x_0) = 0$.

Для формулировки нашего результата нам сначала нужно ввести некоторые обозначения.

Пусть $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ - последовательность положительных целых чисел произвольной длины $k \geq 0$. Когда $k = 0$, считаем что A - пустая последовательность. Для непустой последовательности A мы рассматриваем соответствующую ей цепную дробь

$$[A] = [a_1, a_2, \ldots, a_k] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots + \frac{1}{a_k}}}.$$

Для последовательности $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ мы обозначаем за

$$S_A = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

сумму всех ее элементов.
Для последовательности $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ введем обозначение $d(A) = d(a_1, a_2, \ldots, a_k) = k$ для ее длины.
Обозначим за

$$(A, b) = (a_1, \ldots, a_k, b)$$

последовательность, полученную конкатенацией последовательности A с элементом $b \in \mathbb{Z}_+$.
Теперь рассмотрим множество последовательностей $A_i = (a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{d(A_i)}^i)$.
Под

$$(A_1, A_2) = (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{d(A_1)}^1, a_1^2, a_2^2, \ldots, a_{d(A_2)}^2)$$

мы подразумеваем последовательность, полученную конкатенацией последовательностей A_1 и A_2.
Для цепной дроби вида $x_0 = [A_1, \tau_1, A_2, \tau_2, \ldots]$, где $\tau_i \in \mathbb{Z}_+$, мы используем следующее обозначение для суммы всех частных частных до A_k включительно.

$$\sigma_{A_k} = S_{A_1} + \tau_1 + S_{A_2} + \ldots + \tau_{k-1} + S_{A_k}.$$

В данной диссертации мы рассматриваем специальное множество M иррациональных чисел. Мы берем произвольные последовательности $A_i = (a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{d(A_i)}^i)$ и рассматриваем цепную дробь

$$x = [A_1, \tau_1, A_2, \tau_2, \ldots] \tag{2.4}$$

такую, что

$$\text{для всех } k \in \mathbb{Z}_+ \quad \tau_k = \sigma_{A_k} + s_k, \ \text{ где } s_k > (\kappa_2 - 1)S_{A_{k+1}} + \sigma_{A_k} + 2, \ s_k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.5}$$

Наше множество M состоит из всех x вида (2.4), построенных по описанной процедуре, то есть

$$M = \Big\{ x \text{ вида (2.4) с } \tau_k \text{ удовлетворяющим (2.5)} \Big\}.$$

Наш основной результат относительно итераций $?(x)$ формулируется следующим образом.

Теорема 7. *Множество M обладает следующими свойствами:*
(i) для всех $x \in M$, выполнено

$$?'(x) = 0.$$

(ii) для всех $x \in M$, выполнено

$$?(x) \in M.$$

Одним из ключевых наблюдений для нашего рассуждения снова является Лемма 1 и следующее ее следствие вместе с базовыми фактами из теории цепных дробей.

Следствие 2. *Пусть*

$$?([a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}]) = [b_1, b_2, \ldots, b_k], \ \ b_k \neq 1.$$

и $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i + s$, где $s \in \mathbb{Z}_+$.
Рассмотрим число $\gamma = [a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_s]$. Тогда существует последовательность положительных целых чисел $(b_{k+2}, \ldots, b_p)$ для которой

1. *Если $n \equiv k (mod\ 2)$, то $?(\gamma) = [b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, z, b_{k+2}, \ldots, b_p]$.*

2. *Если $n \equiv k + 1 (mod\ 2)$, то $?(\gamma) = [b_1, \ldots, b_k, z, b_{k+2}, \ldots, b_p]$.*

где

$$2^{s+1} - 1 \leq z \leq 2^{s+2} - 1.$$

Глава 3

Функции меры иррациональности

Определение 3. *Для иррационального числа $\xi \in \mathbb{R}$ функция меры иррациональности определяется как*

$$\psi_\xi(t) = \min_{1 \le q \le t,\, q \in \mathbb{Z}} \|q\xi\|,$$

где $||.||$ обозначает расстояние до ближайшего целого.

Для любого $\xi \in \mathbb{R}$ и для каждого $t \ge 1$ очевидно, что

$$\psi_\xi(t) \le \frac{1}{t}. \tag{3.1}$$

В [9] Кан и Мощевитин доказали, что для любых двух иррациональных чисел α, β таких, что $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, разность

$$\psi_\alpha(t) - \phi_\beta(t)$$

меняет свой знак бесконечное количество раз при $t \to \infty$.

Очевидно, что отсюда следует, что разность их обратных величин

$$R(t) = R_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{\psi_\beta(t)} - \frac{1}{\psi_\alpha(t)}$$

также меняет свой знак бесконечное количество раз при $t \to \infty$.

Дубицкас в [3] доказал следующий результат.

Теорема 8. *Для любых иррациональных чисел α, β, удовлетворяющих $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, последовательност $R(n), n \in \mathbb{Z}_+$ является неограниченной.*

Для формулировки дальнейших результатов нам потребуются константы $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$$K = \sqrt{\tau} - 1 = 0.2720^+, \tag{3.2}$$

$$C = K(\sqrt{\tau} + \tau^{-3/2}) = \sqrt{5}(1 - \sqrt{\phi}) = 0.47818^{+}. \tag{3.3}$$

В 2019 году Мощевитин [11] доказал следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть α и β - два иррациональных числа. Если $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, тогда для любого $T \geq 1$ существует $t \geq T$ такое, что*

$$|\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)| \geqslant K \cdot \min(\psi_\alpha(t), \psi_\beta(t)). \tag{3.4}$$

Также было доказано, что константа K в (3.4) является оптимальной.
Используя Теорему 9 и (3.1), Мощевитин вывел более сильную версию Теоремы 8.

Следствие 3. *Пусть α и β - два иррациональных числа. Если $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, тогда для любого $T \geq 1$ существует $t \geq T$ такое, что*

$$\Big|\frac{1}{\psi_\alpha(t)} - \frac{1}{\psi_\beta(t)}\Big| \geqslant Kt, \quad \text{с } K \text{ из (3.2).}$$

Мы доказываем улучшение этого результата, увеличив константу до оптимальной.

Теорема 10. *1) Пусть α и β - два иррациональных числа. Если $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, то для любого $T \geq 1$ существует $t \geq T$ такое, что*

$$\Big|\frac{1}{\psi_\alpha(t)} - \frac{1}{\psi_\beta(t)}\Big| \geqslant Ct, \quad \text{где } C \text{ определено в (3.3).} \tag{3.5}$$

2) Константа C в (3.5) является оптимальной, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существуют α и β с $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$ такие, что

$$\Big|\frac{1}{\psi_\alpha(t)} - \frac{1}{\psi_\beta(t)}\Big| \leqslant (C + \varepsilon)t$$

для всех достаточно больших t.

Опредедение 4. *Для пары иррациональных чисел α, β, удовлетворяющих $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, определим $C_{\alpha,\beta}$ как*

$$C_{\alpha,\beta} = \sup\{C : |\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)| \geqslant C \cdot \min(\psi_\alpha(t), \psi_\beta(t)) \ \text{ для бесконечного множества } t \in \mathbb{N}\}.$$

Используя это обозначение, Теорему 9 можно сформулировать следующим образом.

Theorem 9'. *Пусть α и β - два иррациональных числа, удовлетворяющих $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$. Тогда*

$$C_{\alpha,\beta} \geq C_1,$$

где $C_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} - 1 \approx 0.272^{+}$.

Основной результат данной диссертации формулируется следующим образом.

Теорема 11. *Пусть α и β - два иррациональных числа, удовлетворяющих $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$. Если хотя бы одно из чисел α или β не эквивалентно $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, тогда*

$$C_{\alpha,\beta} \geq C_2,$$

где $C_2 = \sqrt{\sqrt{2}+1} - 1 \approx 0.5537^+$.

Также мы доказываем, что константу C_2 в предыдущей теореме нельзя улучшить.

Теорема 12. *Константа C_2 в Теореме 11 является оптимальной в том смысле, что существуют два иррациональных числа θ и ω, такие что $\theta \pm \omega \notin \mathbb{Z}$, по крайней мере одно из них не эквивалентно τ и*

$$C_{\theta,\omega} = C_2.$$

В доказательстве мы используем язык комбинаторики слов. Здесь мы приводим основную конструкцию, необходимую для доказательства всех основных результатов.

Рассмотрим объединение $U = D_\alpha \cup D_\beta$ двух последовательностей $D_\alpha = \{q_0 = 1 \leq q_1 < q_2 < \ldots\}$ и $D_\beta = \{t_0 = 1 \leq t_1 < t_2 < \ldots\}$ знаменателей подходящих дробей α и β. Мы строим бесконечное слово W на алфавите $\{B_*^*, Q^*, T_*\}$, где $*$ будет соответствовать некоторым индексам элементов из D_α и D_β, следуя следующей процедуре. Первый элемент U - это $1 = q_0 = t_0$. Он принадлежит обеим последовательностям, поэтому мы начинаем наше бесконечное слово с B_0^0. Затем мы рассматриваем следующий элемент U. Существует три возможных ситуации:

1. Если следующий элемент U - это q_j из множества D_α, и он не принадлежит множеству D_β, мы пишем букву Q^j;

2. Если следующий элемент U - это t_i из множества D_β, и он не принадлежит множеству D_α, мы пишем букву T_i;

3. Если следующий элемент U равен q_j из D_α и также t_i из D_β, мы пишем букву B_i^j.

Эта конструкция позволяет нам анализировать взаимное расположение знаменателей подходящих дробей для двух чисел, что дает возможность найти необходимые большие расстояния между двумя функциями.

Список Литературы

[1] A. Denjoy. Sur une fonction de Minkowski. *J. Math. Pures Appl.*

[2] A. Denjoy. Sur une fonction réelle de Minkowski. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1932.

[3] A. Dubickas. On rational approximations to two irrational numbers. *J. Number Theory*, 177:43–59, 2017.

[4] A. A. Dushistova, I. D. Kan, and N. G. Moshchevitin. Differentiability of the Minkowski question mark function. *J. Math. Anal. Appl.*, 401(2):774–794, 2013.

[5] A. A. Dushistova and N. G. Moshchevitin. On the derivative of the Minkowski $?(x)$ function. *Fundam. Prikl. Mat.*, 16(6):33–44, 2010.

[6] D. R. Gaifulin and I. D. Kan. The derivative of the Minkowski function. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 85(4):5–52, 2021.

[7] D. Gayfulin and N. Shulga. Diophantine properties of fixed points of Minkowski question mark function. *Acta Arith.*, 195(4):367–382, 2020.

[8] D. R. Gayfulin and I. D. Kan. Stationary points of the Minkowski function. *Mat. Sb.*, 212(10):3–15, 2021.

[9] I. D. Kan and N. G. Moshchevitin. Approximations to two real numbers. *Unif. Distrib. Theory*, 5(2):79–86, 2010.

[10] H. Minkowski. Zur Geometrie der Zahlen. *Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresous*, pages 164–173, 1904.

[11] N. Moshchevitin. Über die Funktionen des Irrationalitätsmaßes für zwei irrationale Zahlen. *Arch. Math. (Basel)*, 112(2):161–168, 2019.

[12] A. J. van der Poorten and J. Shallit. Folded continued fractions. *J. Number Theory*, 40(2):237–250, 1992.

[13] V. Rudykh, N. Shulga. Difference of irrationality measure functions. *Monatsh Math* (2023).

[14] P. Viader, J. Paradís, and L. Bibiloni. A new light on Minkowski's $?(x)$ function. *J. Number Theory*, 73(2):212–227, 1998.