

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Международная лаборатория динамических систем и приложений

Морозов Андрей Игоревич

**ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ И ГОМОТОПИЧЕСКАЯ
КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ
МОРСА-СМЕЙЛА НА ПОВЕРХНОСТЯХ**

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Починка Ольга Витальевна

Нижний Новгород – 2024

Введение

В 1937 году А. Андронов и Л. Понтрягин [1] ввели понятие *грубой системы* дифференциальных уравнений, заданных в ограниченной части плоскости, как системы, не меняющей своих качественных свойств при малых изменениях правых частей, и указали необходимые и достаточные условия для того, чтобы система была грубой. Наиболее естественное обобщение этих условий выделяет класс динамических систем (потоков и каскадов) *Морса-Смейла*. Свое название системы Морса-Смейла получили после публикации работы [47] в 1960 году, где С. Смейл доказал выполнение соотношений, аналогичных неравенствам Морса, для потоков на n -многообразиях, чье неблуждающее множество гиперболично, состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических траекторий. Хорошо известно [38], [39], что динамические системы Морса-Смейла на многообразиях любой размерности действительно являются грубыми (структурно устойчивыми), но не являются типичными, за исключением потоков Морса-Смейла на поверхностях [1], [40] и каскадов Морса-Смейла на окружности [27].

Одним из первых вопросов, возникающих при изучении динамической системы, является вопрос о поведении ее траекторий и возможности качественно, с точностью до топологической эквивалентности (сопряженности), отличать это поведение от поведения траекторий другой системы. Решение этих задач составляет *топологическую классификацию* динамических систем и заключается, во-первых, в выделении информации о системе, однозначно определяющей ее класс топологической эквивалентности (сопряженности) и называемой *полным топологическим инвариантом*, и, во-вторых, в *реализации* – построении по выделенной информации стандартного представителя в каждом классе топологической эквивалентности (сопряженности). Возможность реализации также позволяет моделировать системы с заданными свойствами.

Например, класс эквивалентности потока Морса-Смейла на окружности однозначно определяется числом его неподвижных точек. Для каскадов на окружности полный топологический инвариант получен А. Майером [27] в 1939 году и состоит из числа периодических орбит и числа вращения Пуанкаре. В 1955 году Е. Леонтович и А. Майер [24] в качестве полного топологического инварианта ввели схему потока с конечным числом особых траекторий на двумерной сфере. В 1971 году М. Пейшото [41] формализовал понятие схемы Леонтович-Майера и доказал, что для потока на произвольной поверхности полным топологическим инвариантом является класс изоморфности ориентируемого графа, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с состояниями равновесия и замкнутыми траекториями, а ребра соответствуют некоторым компонентам связности инвариантных многообразий состояний равновесия и замкнутых траекторий, при этом изоморфность графов включает в себя сохранение

выделенных специальным образом подграфов¹.

При переходе от потоков к поверхностным диффеоморфизмам Морса-Смейла появляется новый тип траекторий, называемых *гетероклиническими* и принадлежащих пересечению $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$ инвариантных многообразий различных седловых точек. При этом пересечение $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$ является счетным множеством и каждая точка этого множества называется *гетероклинической точкой*, а орбита гетероклинической точки называется *гетероклинической орбитой*.

Для диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M^2 \rightarrow M^2$, заданного на ориентируемой поверхности M^2 , появляется возможность ввести понятие *ориентируемого гетероклинического пересечения*. Для любой гетероклинической точки $x \in W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$ определим упорядоченную пару векторов $(\vec{v}_x^u, \vec{v}_x^s)$, где:

- \vec{v}_x^u — касательный вектор к неустойчивому многообразию точки σ_2 в точке x и направленный от точки x к точке $f^{m^u}(x)$, где m^u — это период компоненты связности $W_{\sigma_2}^u \setminus \{\sigma_2\}$ содержащей x ;
- \vec{v}_x^s — касательный вектор к устойчивому многообразию точки σ_1 в точке x и направленный от точки x к точке $f^{m^s}(x)$, где m^s — это период компоненты связности $W_{\sigma_1}^s \setminus \{\sigma_1\}$ содержащей x .

Гетероклиническое пересечение диффеоморфизма f называется *ориентируемым*, если упорядоченные пары векторов $(\vec{v}_x^u, \vec{v}_x^s)$ задают одинаковую ориентацию несущей поверхности M^2 . В противном случае гетероклиническое пересечение называется *неориентируемым*.

Диффеоморфизм f называется *градиентно-подобным*, если $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u = \emptyset$ для любых различных седловых точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$.

Чтобы получить полную классификацию градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях, в 1985 году А. Безденежных и В. Гринес [4, 5, 6, 15] ввели *оснащенные графы*, аналогичные графам М. Пейшото [41] для градиентно-подобных потоков. Оснащение включало в себя информацию о границах ячеек диффеоморфизма. Модифицированный вариант графа описан в работе [18]. Также, аналогично подходу А. Ошемкова, В. Шарко [37] для градиентно-подобных потоков В. Гринес, С. Капкаева и О. Починка [16] описали трехцветный граф, как инвариант для градиентно-подобных каскадов.

Следующим логическим шагом в классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла была классификация сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов на ориентируемых поверхностях с конечным множеством гетероклинических орбит. В 1993 году В. Гринес [15], на основе графа Пейшото, описал топологический инвариант для

¹В работе [37] А. Ошемкова и В. Шарко была замечена неточность инварианта Пейшото, связанная с тем, что изоморфизм графов не различает неэквивалентного расслоения на траектории областей, ограниченных двумя периодическими орбитами.

диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических орбит, исчерпывающихся орбитами точек пересечения связных фундаментальных отрезков сепаратрис. Приведенный инвариант являлся графом, оснащенным некоторой гетероклинической подстановкой, описывающей схему пересечения инвариантных многообразий.

Немного позднее Р. Ланжевен [23] предложил рассматривать пространство орбит бассейна стока и проекции неустойчивых сепаратрис седловых точек на полученное пространство орбит. Этот подход был обобщен и успешно применен Хр. Бонатти, В. Гринесом, В. Медведевым, Э. Пеку, Ф. Лауденбахом и О. Починкой в работах [8, 7, 18, 43, 44] для топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях. Подход Ланжевена использовался и в двумерном случае. Так, в 2010 году Т. Митрякова и О. Починка [30] применили его к топологической классификации диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом орбит гетероклинического касания. Они построили топологический инвариант, названный *схемой*, состоящий из конечного числа двумерных торов с набором простых замкнутых кривых. Они также доказали, что этот инвариант является полным для рассматриваемого класса диффеоморфизмов с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа неподвижных точек, и в работе [29] решили проблему их реализации по допустимой *абстрактной схеме*.

В 1998 году иной подход использовали Хр. Бонатти и Р. Ланжвен [9], рассматривая диффеоморфизмы Смейла компактных поверхностей – структурно устойчивые диффеоморфизмы с нульмерными базисными множествами. Ими доказано, что каждому диффеоморфизму Смейла соответствует конечный комбинаторный объект, представляющий собой набор геометрических типов марковских разбиений. Диффеоморфизмы Морса-Смейла являются частным случаем диффеоморфизмов Смейла, однако, они не были выделены для отдельного рассмотрения, в связи с чем для них такая классификация оказалась неоправданно трудоемкой.

В разделе 1 приведен обзор имеющихся на сегодняшний день классификационных результатов для не градиентно-подобных диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях. Откуда видно, что, даже в случае конечного числа гетероклинических орбит для диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях, не имеется исчерпывающих классификационных результатов. Основная проблема состоит в том, что все известные на сегодняшний день полные топологические инварианты таких систем не доведены до этапа реализации. В разделе 4 настоящей работы получена полная топологическая классификация сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических орбит на ориентируемых поверхностях, включая реализацию. Инвариантом является пара схем, аналогичных схемам, введенным в работе [30].

В разделе 5.1 установлено, что условие ориентируемости гетероклинического пересечения у сохраняющего ориентацию диффеоморфизма Морса-Смейла на ориентиру-

емой поверхности гарантирует конечность числа его гетероклинических орбит. Кроме того, факт ориентируемости пересечения позволил для таких диффеоморфизмов установить в разделе 5.2 существование комбинаторных инвариантов – эффективно различимых графов. Также выделено множество допустимых графов, по каждому из которых реализован диффеоморфизм Морса-Смейла на поверхности, имеющий ориентируемое гетероклиническое пересечение.

Разделы 2,3 настоящей работы посвящены взаимосвязи поверхностных диффеоморфизмов Морса-Смейла с гомотопической теорией Нильсена-Терстона. Согласно *классификации Нильсена-Терстона* (смотри, например [10], [2] или [18, с. 284]), множество всех гомотопических классов гомеоморфизмов ориентируемой поверхности представляется в виде четырех непересекающихся множеств T_1, T_2, T_3, T_4 . Гомотопический класс из каждого подмножества характеризуется существованием в нем гомеоморфизма, называемого *канонической формой Терстона*, а именно: 1) периодического гомеоморфизма, 2) приводимого непериодического гомеоморфизма алгебраически конечного типа, 3) приводимого гомеоморфизма не являющегося гомеоморфизмом алгебраически конечного типа, 4) псевдоаносовского гомеоморфизма.

Канонические формы Терстона не являются структурно устойчивыми диффеоморфизмами, однако, С. Арансон и В. Гринес [2] предположили, что каждый гомотопический класс поверхностного гомеоморфизма содержит также и структурно устойчивый диффеоморфизм. Для класса T_1 подтверждение гипотезы Арансона-Гринеса получено А. Безденежных и В. Гринесом [6]. Именно, в каждом гомотопическом классе из множества T_1 построен градиентно-подобный диффеоморфизм и получена полная топологическая классификация таких диффеоморфизмов [4, 5]. В статье [48] анонсировано существование в каждом гомотопическом классе T_4 структурно устойчивого диффеоморфизма, неблуждающее множество которого состоит из конечного числа источников орбит и единственного одномерного аттрактора. В [17] найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности двух таких диффеоморфизмов. В разделе 2 настоящей работы описана реализация каждого гомотопического класса типа T_2 диффеоморфизмом Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим пересечением.

Согласно [2] любой гомеоморфизм гомотопического типа T_3 или T_4 имеет бесконечное множество периодических точек. В силу чего поверхностные диффеоморфизмы Морса-Смейла не могут принадлежать гомотопическим классам типов T_3 и T_4 . При этом, все градиентно-подобные диффеоморфизмы лежат в гомотопических классах типа T_1 . Тогда как диффеоморфизмы Морса-Смейла с гетероклиническими пересечениями могут принадлежать к гомотопическим классам обоих типов T_1 и T_2 . В разделе 3 настоящей работы построен алгоритм, позволяющий определить гомотопический тип Нильсена-Терстона для не градиентно-подобного диффеоморфизма Морса-Смейла на поверхности по сигнатуре его гетероклинического пересечения.

Цели и задачи исследования

Основными целями диссертации являются получение новых классификационных и реализационных результатов для класса сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла.

Поставленные задачи делятся по двум направлениям: гомотопическая теория и топологическая классификация сохраняющих ориентацию отображений поверхностей.

В рамках гомотопической теории настоящее исследование решает следующие задачи:

- Построить структурно устойчивого представителя в каждом гомотопическом классе второго типа Нильсена-Терстона;
- Разработать алгоритм, позволяющий определить гомотопический тип Нильсена-Терстона для сохраняющего ориентацию диффеоморфизма Морса-Смейла поверхности.

В рамках топологической классификации сохраняющих ориентацию отображений поверхностей настоящее исследование решает следующие задачи:

- Получить полную топологическую классификацию для диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических орбит, включая реализацию;
- Доказать, что диффеоморфизм Морса-Смейла с ориентируемыми гетероклиническими пересечениями имеет конечное число гетероклинических орбит;
- Получить комбинаторный инвариант для диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемыми гетероклиническими пересечениями;
- Доказать существование эффективного алгоритма различения полученного комбинаторного инварианта.

Научная новизна результатов

Все результаты являются новыми. Именно:

- Получена реализация диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим пересечением в каждом гомотопическом классе второго типа Нильсена-Терстона .
- Получен алгоритм распознавания принадлежности заданного неградиентно-подобного диффеоморфизма Морса-Смейла первому T_1 или второму T_2 множеству Нильсена-Тёрстона по его гетероклиническому пересечению.

- Получена полная топологическая классификация множества диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических орбит, включая реализацию.
- Доказано, что сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла с ориентируемыми гетероклиническими пересечениями имеет конечное число гетероклинических орбит.
- Построен граф, являющийся полным топологическим инвариантом для класса диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемыми гетероклиническими пересечениями.
- Доказано существование эффективного алгоритма установления изоморфности графов.

Теоретическая и практическая значимость проведенных исследований

В ходе работы получены фундаментальные математические результаты в области динамических систем. Многие естественные науки используют математические модели, основанные на диффеоморфизмах Морса-Смейла на 2-многообразиях. Большую практическую значимость диффеоморфизмы Морса-Смейла имеют в области обработки данных. Например, в работе [12] исследуются топологический анализ и обработка крупномасштабных распределенных данных, генерируемых сенсорными сетями. Алгоритмы, построенные на основе разложения Морса-Смейла, имеют преимущество в производительности при обработке данных. Так же комплекс Морса-Смейла обеспечивает топологически значимое разложение области. В работе [13] реализована дискретная аппроксимация комплекса Морса-Смейла, что позволяет лучше работать с многомерными наборами данных. Диффеоморфизмы Морса-Смейла могут быть использованы для описания поведения магнитных полей. Как, например, в работе [20] свойства диффеоморфизма Морса – Смейла применены для решения проблемы о существовании сепараторов в магнитном поле плазмы.

Методология и методы исследования

В ходе исследования были разработаны новые инварианты, позволяющие решить поставленные задачи. Для определения типа Нильсена-Терстона для диффеоморфизма Морса-Смейла введен индекс гетероклинического пересечения ξ . Использована новая идея построения графа, для диффеоморфизма Морса-Смейла с ориентируемыми гетероклиническими пересечениями. Также оригинальной идеей является использование пары схем для классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла.

Среди классических методов теории динамических систем использованных в работе можно выделить следующие: факторизация, линеаризующие окрестности, теория узлов, последовательное построение сопрягающего отображения.

Положения, выносимые на защиту

- Получена реализация диффеоморфизм Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим пересечением в каждом гомотопическом классе $\{h\} \in T_2$ (Теорема 1).
- Разработан алгоритм распознавания принадлежности заданного неградиентно-подобного диффеоморфизма класса $MS(M^2)$ множеству Нильсена-Тёрстона T_1 или T_2 по его гетероклиническому пересечению (Теорема 2).
- Приведена полная топологическая классификация множества $MS_1(M^2)$ диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических орбит ($beh(f) = 1$), включая реализацию (Теоремы 3,4).
- Доказано, что сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла с ориентируемыми гетероклиническими пересечениями имеет конечное число гетероклинических орбит (Теорема 5).
- Разработан граф (T_f, P_f) являющийся полным топологическим инвариантом для диффеоморфизмов класса $MS_+(M^2)$ (Теорема 6).
- Доказано существование эффективного алгоритма установления изоморфности графов (T_f, P_f) (Теорема 7).

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 91 страницу, включая 44 рисунков. Список литературы содержит 72 наименования.

Личный вклад автора

Все представленные в диссертации результаты получены автором самостоятельно. Научному руководителю О.В. Починке принадлежит постановка задач и общее руководство научно-исследовательской деятельностью диссертанта с целью подготовки к защите диссертации. В.З. Гринес и Д.С.Малышев являлись консультантами по вопросам теории графов.

1 Результаты исследования

Настоящая работа посвящена топологической и гомотопической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла f на ориентируемых поверхностях M^2 , обозначим через $MS(M^2)$ класс таких диффеоморфизмов.

Пусть $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j$ периодические орбиты диффеоморфизма $f \in MS(M^2)$. В работе [46] С. Смейл ввел понятие *отношения частичного порядка* \prec для периодических орбит

$$\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j \iff W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_j}^u \neq \emptyset.$$

Для седловых орбит $\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j$ любая точка непустого пересечения $W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_j}^u$ называется *гетероклинической*. Последовательность различных седловых периодических орбит $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{i_0}, \mathcal{O}_{i_1}, \dots, \mathcal{O}_{i_k} = \mathcal{O}_j$ ($k \geq 1$), такая что $\mathcal{O}_{i_0} \prec \mathcal{O}_{i_1} \prec \dots \prec \mathcal{O}_{i_k}$ называется *цепью длины k соединяющей периодические орбиты \mathcal{O}_i и \mathcal{O}_j* . Максимальная длина седловой цепи соединяющей орбиты \mathcal{O}_i и \mathcal{O}_j обозначается как $beh(\mathcal{O}_j|\mathcal{O}_i)$ (beh от английского *behaviour* (отношение)). Полагают $beh(\mathcal{O}_j|\mathcal{O}_i) = 0$, если $W_{\mathcal{O}_j}^u \cap W_{\mathcal{O}_i}^s = \emptyset$. Положим

$$beh(f) = \max\{beh(\mathcal{O}_j|\mathcal{O}_i)\}.$$

Диффеоморфизм $f \in MS(M^2)$ называется *градиентно-подобным*, если $beh(f) = 0$. Обозначим через $MS_1(M^2)$ диффеоморфизмы $f \in MS(M^2)$ с $beh(f) = 1$.

Если $beh(f) > 0$, то для любой гетероклинической точки $x \in W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$ диффеоморфизма $f \in MS(M^2)$ определим упорядоченную пару векторов $(\vec{v}_x^u, \vec{v}_x^s)$, где:

- \vec{v}_x^u — касательный вектор к неустойчивому многообразию точки σ_2 в точке x и направленный от точки x к точке $f^{m^u}(x)$, где m^u — это период компоненты связности $W_{\sigma_2}^u \setminus \{\sigma_2\}$ содержащей x ;
- \vec{v}_x^s — касательный вектор к устойчивому многообразию точки σ_1 в точке x и направленный от точки x к точке $f^{m^s}(x)$, где m^s — это период компоненты связности $W_{\sigma_1}^s \setminus \{\sigma_1\}$ содержащей x .

Гетероклиническое пересечение диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M^2 \rightarrow M^2$ называется *ориентируемым*, если упорядоченные пары векторов $(\vec{v}_x^u, \vec{v}_x^s)$ задают одинаковую ориентацию несущей поверхности M^2 . В противном случае гетероклиническое пересечение называется *неориентируемым*.

Обозначим через $MS_+(M^2)$ множество диффеоморфизмов $f \in MS(M^2)$ с ориентируемым гетероклиническим пересечением.

В **главе 1** приведены необходимые сведения из теории динамических систем, а так же представлен обзор имеющихся по данной тематике результатов.

Глава 2 посвящена реализации гомотопических классов типа T_2 по Нильсену-Терстону диффеоморфизмами класса $MS_+(M^2)$.

Согласно классификации Нильсена-Терстона (см., например [10], [2] или [18, с. 284]), множество всех гомотопических классов гомеоморфизмов ориентируемой поверхности представляется в виде четырех непересекающихся множеств T_1, T_2, T_3, T_4 . Гомотопический класс из каждого подмножества характеризуется существованием в нем гомеоморфизма, называемого *канонической формой Терстона*, а именно: 1) периодического гомеоморфизма, 2) приводимого непериодического гомеоморфизма алгебраически конечного типа, 3) приводимого гомеоморфизма не являющегося гомеоморфизмом алгебраически конечного типа, 4) псевдоаносовского гомеоморфизма.

Канонические формы Терстона не являются структурно устойчивыми диффеоморфизмами, однако, С.Х. Арансон и В.З. Гринес [2] предположили, что каждый гомотопический класс поверхностного гомеоморфизма содержит также и структурно устойчивый диффеоморфизм. Для класса T_1 подтверждение гипотезы Арансона-Гринеса получено А.Н. Безденежных и В.З. Гринесом [6].

Основным результатом главы 2 является следующая теорема.

Теорема 1 ([22]*, Теорема 1) *В каждом гомотопическом классе $\{h\} \in T_2$ гомеоморфизмов поверхности M^2 существует диффеоморфизм $f \in MS_+(M^2)$.*

Согласно [2] любой гомеоморфизм гомотопического типа T_3 или T_4 имеет бесконечное множество периодических точек. В силу чего поверхностные диффеоморфизмы Морса-Смейла не могут принадлежать гомотопическим классам типов T_3 и T_4 . При этом, все градиентно-подобные диффеоморфизмы лежат в гомотопических классах типа T_1 . Тогда как диффеоморфизмы Морса-Смейла с гетероклиническими пересечениями могут принадлежать к гомотопическим классам обоих типов T_1 и T_2 .

В главе 3 представлен алгоритм распознавания принадлежности заданного неградиентно-подобного диффеоморфизма $f \in MS(M^2)$ множеству Нильсена-Терстона T_1 или T_2 по его гетероклиническому пересечению.

Пусть $f \in MS(M^2)$. Так как $\{f\} \in T_i$ тогда и только тогда, когда $\{f^k\} \in T_i$, $k \neq 0$ (смотри, [34, 35, 36]), то без ограничения общности можно считать, что неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f состоит из неподвижных точек и f сохраняет ориентацию на своих инвариантных многообразиях. Тогда множество Σ_f^σ седловых точек диффеоморфизма f может быть упорядоченно согласно отношению частичного порядка Смейла [46] следующим образом:

$$\text{если } W_{\sigma_j}^u \cap W_{\sigma_i}^s \neq \emptyset, \text{ то } i < j.$$

Зафиксируем некоторую нумерацию $\sigma_1, \dots, \sigma_{k_1}$ на множестве Σ_f^σ согласованную с отношением частичного порядка Смейла.

Обозначим через $\Sigma_f^\omega, \Sigma_f^\alpha$ множество всех стоковых и источниковых точек диффеоморфизма f , соответственно, и через k_ω, k_α число точек в соответствующих множе-

ствах. Пусть

$$A_{f,0} = \Sigma_f^\omega, \quad A_{f,i} = \Sigma_f^\omega \cup \bigcup_{j=1}^i W_{\sigma_j}^u, \quad i = 1, \dots, k_1,$$

$$R_{f,i} = \Sigma_f^\alpha \cup \bigcup_{j=i+1}^{k_1} W_{\sigma_j}^s, \quad i = 0, \dots, k_1 - 1, \quad R_{f,k_1} = \Sigma_f^\alpha.$$

Из [42], [19] следует, что каждое из множеств $A_{f,i}$ ($R_{f,i}$) является *аттрактором* (*репеллером*), т.е. у него есть *захватывающая окрестность* $M_{f,i}$ ($N_{f,i}$), которая является компактной поверхностью с краем, такая, что

$$f(M_{f,i}) \subset \text{int } M_{f,i}, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(M_{f,i}) = A_{f,i}$$

$$\left(f^{-1}(N_{f,i}) \subset \text{int } N_{f,i}, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(N_{f,i}) = R_{f,i} \right).$$

Более того, аттрактор $A_{f,i}$ и репеллер $R_{f,i}$ являются *дуальными*, т.е. окрестности $N_{f,i}$ и $M_{f,i}$ могут быть выбраны таким образом, что $N_{f,i} = M^2 \setminus \text{int } M_{f,i}$ (см. [42]). Так как $A_{f,0} \subset A_{f,1} \subset \dots \subset A_{f,k_1}$, то, в силу [42], захватывающие окрестности можно выбрать так, что:

- $M_{f,i} \subset f(M_{f,i+1})$, $i = 0, \dots, k_1 - 1$;
- $\partial M_{f,i}$ не содержит гетероклинических точек;
- каждая компонента связности v множества $K_{f,i} = M_{f,i} \setminus \text{int } f(M_{f,i})$ диффеоморфна двумерному кольцу $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$ посредством некоторого диффеоморфизма $h_v : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow v$ такого, что $h_v^{-1} f h_v|_{\{0\} \times \mathbb{S}^1} (0, s) = (1, s)$, $s \in \mathbb{S}^1$ (см. Рис. 1).

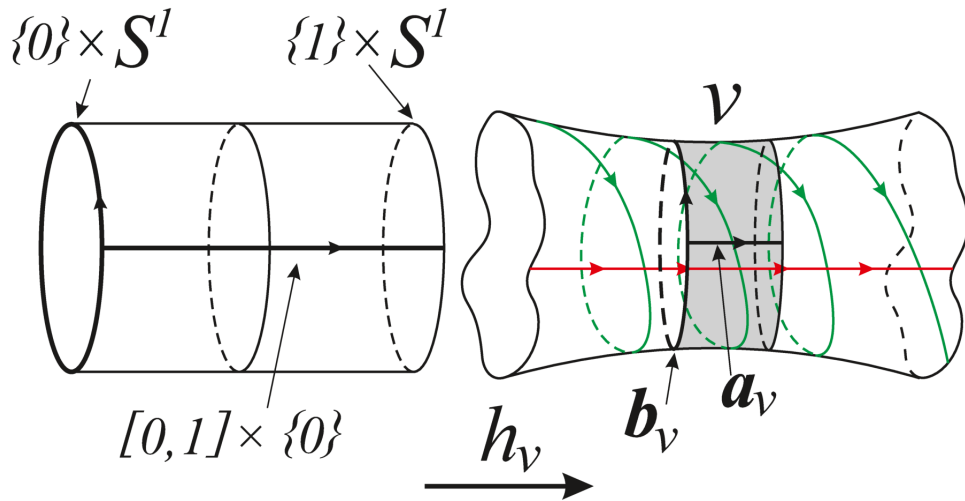


Рис. 1: Действие диффеоморфизма $h_v : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow v$.

Положим $a_v = h_v([0, 1] \times \{0\})$, $b_v = h_v(\{0\} \times \mathbb{S}^1)$. Ориентируем кривую a_v по направлению на отрезке $[0, 1]$ от 0 до 1. Тогда пространство орбит $\hat{v} = v/f$ диффеоморфно двумерному тору и естественная проекция $p_v : v \rightarrow \hat{v}$ индуцирует на торе \hat{v} образующие

$$\hat{a}_v = p_v(a_v), \hat{b}_v = p_v(b_v).$$

Пусть v компонента связности множества $K_{f,i}$ и $C_v = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(v)$. Обозначим через $L_{f,v}^s$ ($L_{f,v}^u$) объединение устойчивых (неустойчивых) сепаратрис седловых точек σ_j , $j \leq i$ ($j > i$), полностью содержащихся в множестве C_v (см. Рис. 2).

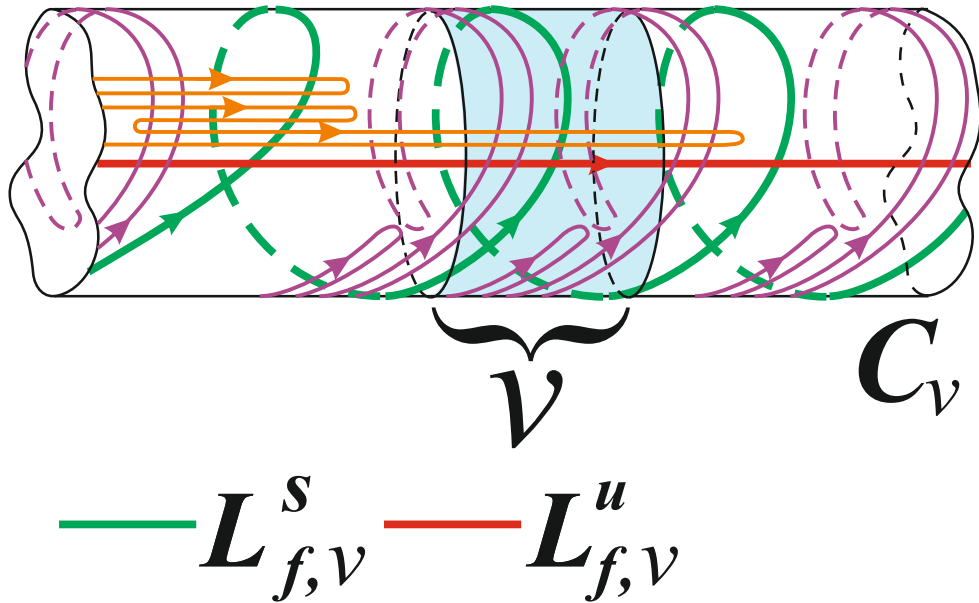


Рис. 2: Пример множества C_v , где фиолетовая и оранжевая сепаратрисы не принадлежат множествам $L_{f,v}^s$ и $L_{f,v}^u$ соответственно.

Пусть $\hat{L}_{f,v}^s = p_v(L_{f,v}^s)$, $\hat{L}_{f,v}^u = p_v(L_{f,v}^u)$. Тогда каждая компонента связности этих множеств является узлом на торе \hat{v} гомотопического типа $\langle 1, d_{f,v}^s \rangle$, $\langle 1, d_{f,v}^u \rangle$ в выбранных образующих \hat{a}_v , \hat{b}_v (см. Рис. 3). Согласно [45, Глава 2.D Упражнение 7.] число $d_{f,v}^s$ ($d_{f,v}^u$) не зависит от выбора узла из множества $\hat{L}_{f,v}^s$ ($\hat{L}_{f,v}^u$). Пусть

$$\xi_{f,v} = d_{f,v}^s - d_{f,v}^u.$$

Согласно [45, Глава 2.C] число $\xi_{f,v}$ не зависит от выбора базиса \hat{a}_v , \hat{b}_v . Компоненту v будем называть *гетероклиническим кольцом*, если множество $L_{f,v}^u$ содержит хотя бы одну неустойчивую сепаратрису седла σ_{i+1} , пересекающую множество $L_{f,v}^s$. Заметим, что в каждом множестве $K_{f,i}$ имеется не более двух гетероклинических колец. Гетероклиническое кольцо v будем называть (см. Рис. 4):

- *стягиваемым*, если кривая b_v гомотопна нулю на поверхности M^2 ;
- *тривиальным*, если $\xi_{f,v} = 0$;

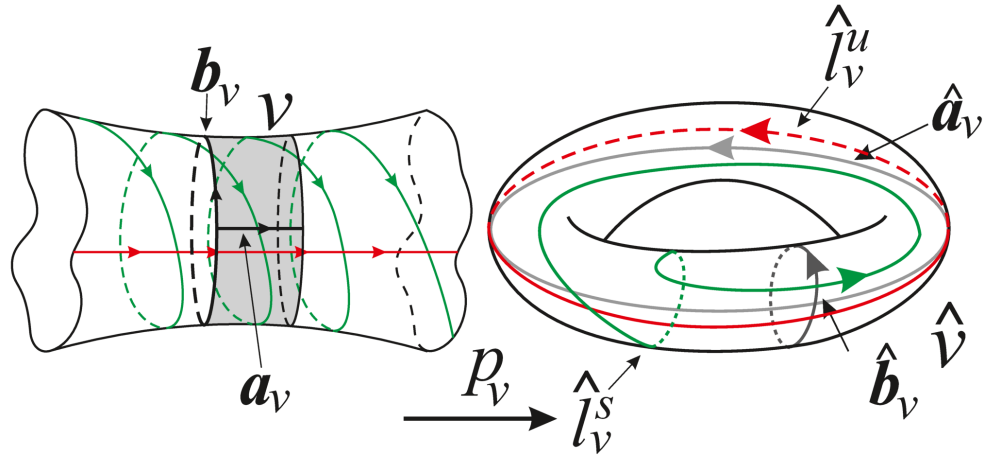


Рис. 3: На рисунке показано расположение узлов $\hat{l}_v^s \in \hat{L}_{f,v}^s, \hat{l}_v^u \in \hat{L}_{f,v}^u$ на торе \hat{v} .

- *существенным*, если v не является ни стягиваемым, ни тривиальным.

Обозначим через \mathcal{V}_f множество существенных гетероклинических колец v . Определим индекс гетероклинических пересечений ξ_f диффеоморфизма f . Если множество \mathcal{V}_f пусто, то полагаем $\xi_f = 0$. В противном случае на множестве \mathcal{V}_f введем следующее отношение эквивалентности: компоненты $v \subset K_{f,i}, v' \subset K_{f,i'}$ будем называть *эквивалентными*, если кривые $b_v, b_{v'}$ гомотопны (см. пример диффеоморфизма, содержащего кольца разных классов эквивалентности, на Рис. 4). Обозначим через $[v]$ класс эквивалентности кольца v , а через $[\mathcal{V}_f]$ множество классов эквивалентности. Предполагая, что кривые $b_v, b_{v'}$ согласованно ориентированы для эквивалентных колец v, v' , положим

$$\xi_{f,[v]} = \sum_{v \in [v]} \xi_{f,v}, \quad \xi_f = \sum_{[v] \in [\mathcal{V}_f]} |\xi_{f,[v]}|.$$

Основным результатом главы 3 является следующая теорема.

Теорема 2 ([21]*, Теорема 1) Пусть $f \in MS(M^2)$. Тогда $\{f\} \in T_1 (\{f\} \in T_2) \Leftrightarrow \xi_f = 0 (\xi_f \neq 0)^2$.

В главе 4 получена полная топологическая классификация (включая реализацию) диффеоморфизмов класса $MS_1(M^2)$.

Пусть $f \in MS_1(M^2)$. Тогда множество Σ_f периодических орбит диффеоморфизма f можно разбить на подмножества $\Sigma_f^i, i \in \{\omega, s, u, \alpha\}$ как следует:

- Σ_f^ω — множество всех стоковых точек;
- Σ_f^s — множество седловых точек, неустойчивые многообразия которых не содержат гетероклинических точек;
- Σ_f^u — множество всех остальных седловых точек;

²Для диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным набором гетероклинических орбит, заданных на двумерном торе, теорема была доказана в [31].

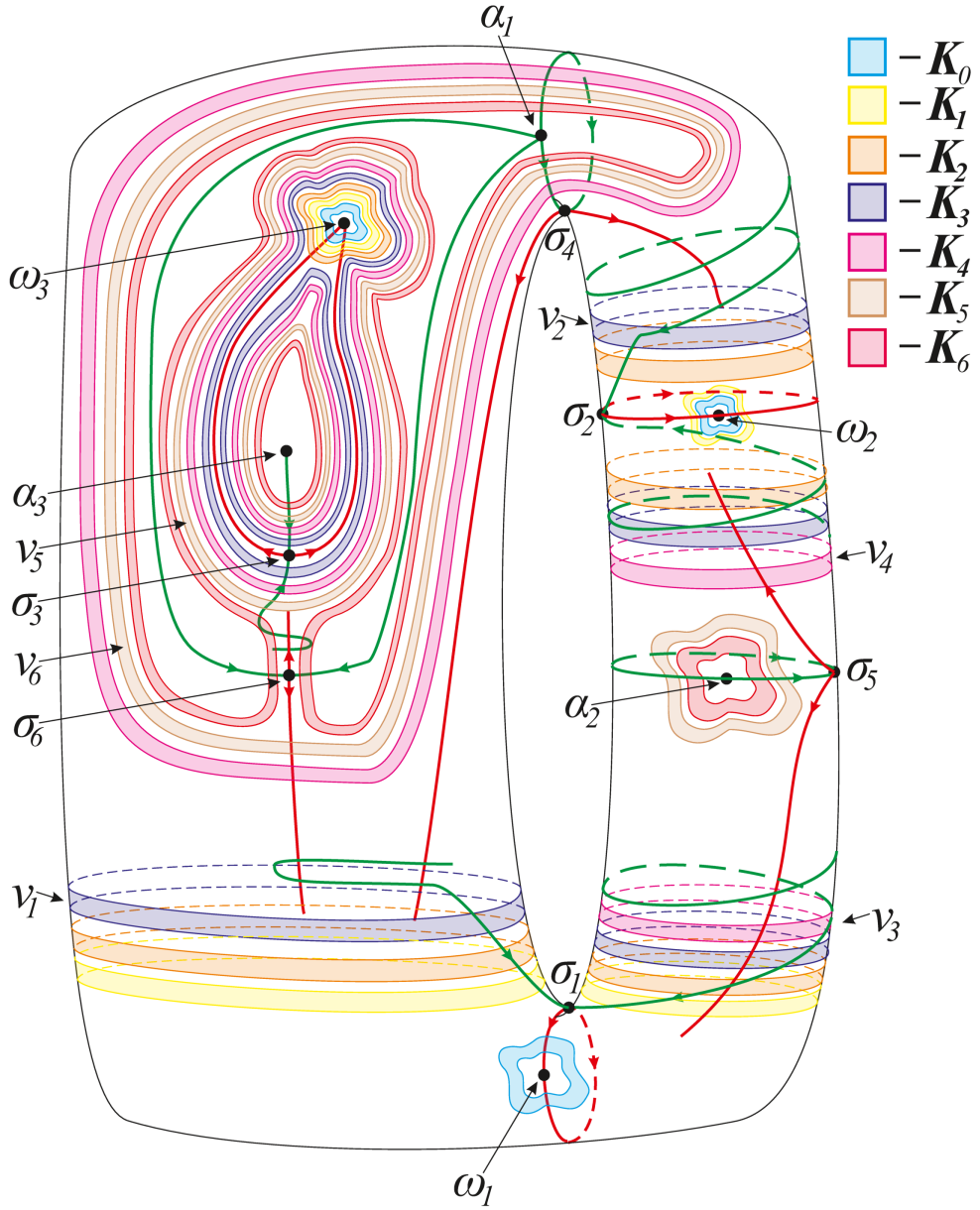


Рис. 4: Гетероклинические кольца диффеоморфизма Морса-Смейла на торе.

- Σ_f^α — множество всех источников точек.

Из свойств введенного порядка \prec следует, что каждая орбита $\mathcal{O}_i \in \Sigma_f^u$ находится в отношении $\mathcal{O}_j \prec \mathcal{O}_i$ с некоторой периодической орбитой $\mathcal{O}_j \in \Sigma_f^s$. Пусть

$$\mathcal{A}_f = \Sigma_f^\omega \cup W_{\Sigma_f^s}^u, \mathcal{R}_f = \Sigma_f^\alpha \cup W_{\Sigma_f^u}^s, V_f = M^2 \setminus (\mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f).$$

В статье [19] показано, что множества $\mathcal{A}_f, \mathcal{R}_f$ являются аттрактором и репеллером системы соответственно. Пусть

$$\hat{V}_f = V_f / f.$$

Согласно статье [42], каждая компонента связности пространства орбит \hat{V}_f гомеоморфна двумерному тору. Обозначим через $p_f : V_f \rightarrow \hat{V}_f$ естественную проекцию, которая

также является накрытием для пространства \hat{V}_f .

Обозначим через $\hat{V}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ компоненты связности пространства орбит \hat{V}_f . Положим $V_i = p_f^{-1}(\hat{V}_i)$ и обозначим через $p_i : V_i \rightarrow \hat{V}_i$ естественную проекцию. Накрытие p_i индуцирует нетривиальный гомоморфизм $\eta_i : \pi_1(\hat{V}_i) \rightarrow m_i \mathbb{Z}$, который гомотопическому классу кривой $[\hat{c}] \in \pi_1(\hat{V}_i)$ ставит в соответствие число μm_i такое, что любое поднятие кривой \hat{c} соединяет точку $x \in V_i$ с точкой $f^{\mu m_i}(x)$. Положим

$$\hat{V}_f = \hat{V}_1 \sqcup \dots \sqcup \hat{V}_n$$

и обозначим через η_f отображение, составленное из гомоморфизмов η_1, \dots, η_n .

Обозначим через $m_f \in \mathbb{N}$ такое наименьшее число, что все точки неблуждающего множества диффеоморфизма f^{m_f} неподвижны и диффеоморфизм f^{m_f} сохраняет ориентацию на W_σ^u для всех $\sigma \in \Sigma_f$. Положим $\tilde{f} = f^{m_f}$ и заметим, что множества \mathcal{A}_f и \mathcal{R}_f так же являются аттрактором и репеллером для диффеоморфизма \tilde{f} . Положим

$$\tilde{V}_f = V_f / \tilde{f}.$$

Обозначим через $\tilde{p}_f : V_f \rightarrow \tilde{V}_f$ естественную проекцию, которая также является накрытием.

Введем следующие обозначения:

- $\mathcal{L}_f^s, \mathcal{L}_f^u$ – множества всех устойчивых, неустойчивых, соответственно, седловых сепаратрис диффеоморфизма f и $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_f^s \cup \mathcal{L}_f^u$;
- $L_f^s = \bigcup_{l \in \mathcal{L}_f^s} l, L_f^u = \bigcup_{l \in \mathcal{L}_f^u} l$ и $L_f = L_f^s \cup L_f^u$;
- $\hat{\mathcal{L}}_f^s = \{\hat{l} = p_f(l) | l \in \mathcal{L}_f^s\}, \hat{\mathcal{L}}_f^u = \{\hat{l} = p_f(l) | l \in \mathcal{L}_f^u\}$ и $\hat{\mathcal{L}}_f = \hat{\mathcal{L}}_f^s \cup \hat{\mathcal{L}}_f^u$;
- $\hat{L}_f^s = \bigcup_{\hat{l} \in \hat{\mathcal{L}}_f^s} \hat{l}, \hat{L}_f^u = \bigcup_{\hat{l} \in \hat{\mathcal{L}}_f^u} \hat{l}$ и $\hat{L}_f = \hat{L}_f^s \cup \hat{L}_f^u$;
- $\hat{\mathcal{P}}_f$ – инволюция на множестве $\hat{\mathcal{L}}_f$ такая, что для любого элемента $\hat{l} \in \hat{\mathcal{L}}_f$ выполняется $\hat{l} \cup \hat{\mathcal{P}}_f(\hat{l}) = p_f(W_\sigma^\delta \setminus \sigma)$ для некоторых $\delta \in \{s, u\}$ и $\sigma \in (\Sigma_f^s \cup \Sigma_f^u)$;
- $\tilde{\mathcal{L}}_f^s = \{\tilde{l} = \tilde{p}_f(l) | l \in \mathcal{L}_f^s\}, \tilde{\mathcal{L}}_f^u = \{\tilde{l} = \tilde{p}_f(l) | l \in \mathcal{L}_f^u\}$ и $\tilde{\mathcal{L}}_f = \tilde{\mathcal{L}}_f^s \cup \tilde{\mathcal{L}}_f^u$;
- $\tilde{L}_f^s = \bigcup_{\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{L}}_f^s} \tilde{l}, \tilde{L}_f^u = \bigcup_{\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{L}}_f^u} \tilde{l}$ и $\tilde{L}_f = \tilde{L}_f^s \cup \tilde{L}_f^u$;
- $\tilde{\mathcal{P}}_f$ – инволюция на множестве $\tilde{\mathcal{L}}_f$ такая, что для любого элемента $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{L}}_f$ выполняется $\tilde{l} \cup \tilde{\mathcal{P}}_f(\tilde{l}) = \tilde{p}_f(W_\sigma^\delta \setminus \sigma)$ для некоторых $\delta \in \{s, u\}$ и $\sigma \in (\Sigma_f^s \cup \Sigma_f^u)$.

Для любого диффеоморфизма $f \in MS_1(M^2)$ положим

$$\hat{S}_f = (\hat{V}_f, \hat{\mathcal{L}}_f, \hat{\mathcal{P}}_f), \tilde{S}_f = (\tilde{V}_f, \tilde{\mathcal{L}}_f, \tilde{\mathcal{P}}_f).$$

Определение 1 (Схема диффеоморфизма). Будем называть пару

$$\mathcal{S}_f = (\hat{S}_f, \tilde{S}_f)$$

схемой диффеоморфизма $f \in MS_1(M^2)$.

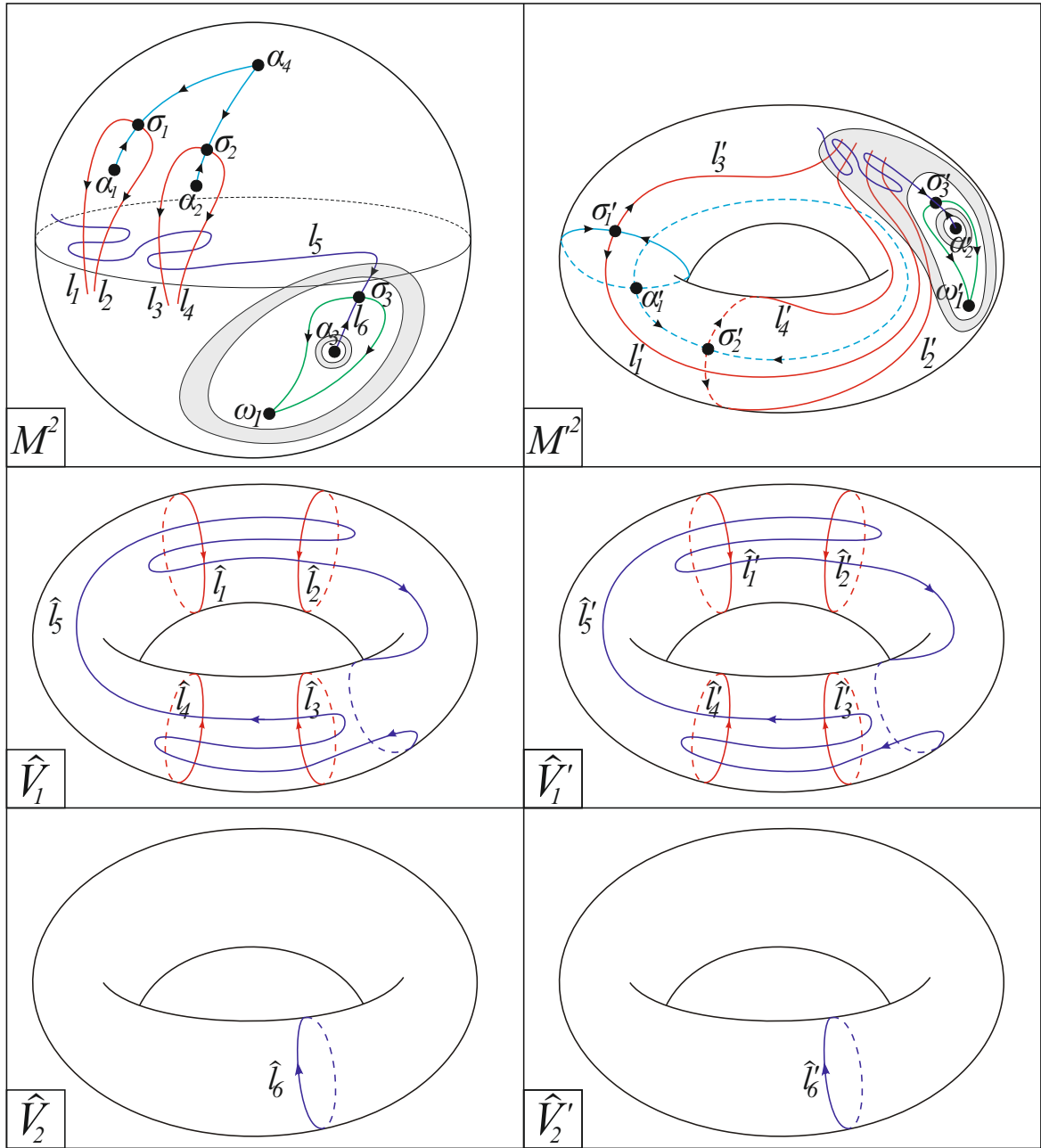


Рис. 5: Фазовые портреты топологически не сопряженных диффеоморфизмов $f, f' \in MS_1(M^2)$ с неэквивалентными наборами $\hat{S}_f, \hat{S}_{f'}$

Наборы $\hat{S}_f, \hat{S}_{f'}$ для диффеоморфизмов $f, f' \in MS_1(M^2)$ назовем *эквивалентными* (см. Рис. 5), если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$ такой что $\eta_f = \eta_{f'} \hat{\varphi}_*$ и

$$(1) \hat{L}_{f'}^s = \hat{\varphi}(\hat{L}_f^s), \hat{L}_{f'}^u = \hat{\varphi}(\hat{L}_f^u);$$

- (2) гомеоморфизм $\hat{\varphi}$ формулой $\hat{\varphi}_*(\hat{l}) = \hat{\varphi}(\hat{l})$ индуцирует взаимно однозначное соответствие $\hat{\varphi}_* : \hat{\mathcal{L}}_f \rightarrow \hat{\mathcal{L}}_{f'}$ такое, что $\hat{\varphi}_* \hat{\mathcal{P}}_f = \hat{\mathcal{P}}_{f'} \hat{\varphi}_*$.

На рисунке 5 изображены диффеоморфизмы $f, f' \in MS_1(M^2)$. Слева изображен диффеоморфизм f двумерной сферы, неблуждающее множество которого состоит из неподвижных источниковых точек $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, неподвижных седловых точек $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и неподвижной стоковой точки ω_1 . Так же отмечены сепаратрисы $l_1, \dots, l_6 \in \mathcal{L}_f$. На множестве $\hat{V}_f = \hat{V}_1 \sqcup \hat{V}_2$ отмечены проекции сепаратрис $\hat{\mathcal{L}}_f = \{\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_6\}$. Инволюция $\hat{\mathcal{P}}_f$ действует следующим образом:

$$\hat{\mathcal{P}}_f(\hat{l}_1) = \hat{l}_2, \hat{\mathcal{P}}_f(\hat{l}_3) = \hat{l}_4, \hat{\mathcal{P}}_f(\hat{l}_5) = \hat{l}_6.$$

На рисунке справа изображен диффеоморфизм f' двумерного тора, неблуждающее множество которого состоит из неподвижных источниковых точек α'_1, α'_2 , неподвижных седловых точек $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ и неподвижной стоковой точки ω'_1 . Так же отмечены сепаратрисы $l'_1, \dots, l'_6 \in \mathcal{L}_{f'}$. На множестве $\hat{V}_{f'} = \hat{V}'_1 \sqcup \hat{V}'_2$ отмечены проекции сепаратрис $\hat{\mathcal{L}}_{f'} = \{\hat{l}'_1, \dots, \hat{l}'_6\}$. Инволюция $\hat{\mathcal{P}}_{f'}$ действует следующим образом:

$$\hat{\mathcal{P}}_{f'}(\hat{l}'_1) = \hat{l}'_3, \hat{\mathcal{P}}_{f'}(\hat{l}'_2) = \hat{l}'_4, \hat{\mathcal{P}}_{f'}(\hat{l}'_5) = \hat{l}'_6.$$

Для наборов $\hat{S}_f, \hat{S}_{f'}$ существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$ такой, что $\eta_f = \eta_{f'} \hat{\varphi}$ и выполняется пункт (1) эквивалентности наборов. Но для любого такого гомеоморфизма не выполнено условие (2) $\hat{\varphi}_* \hat{\mathcal{P}}_f = \hat{\mathcal{P}}_{f'} \hat{\varphi}_*$. Топологическая несопряженность диффеоморфизмов f, f' очевидно следует из негомеоморфности поверхностей, на которых они заданы.

Наборы $\tilde{S}_f, \tilde{S}_{f'}$ для диффеоморфизмов $f, f' \in MS_1(M^2)$ назовем *эквивалентными* (см. Рис. 6), если существует гомеоморфизм $\tilde{\varphi} : \tilde{V}_f \rightarrow \tilde{V}_{f'}$ такой что:

- (1) $\tilde{\mathcal{L}}_{f'} = \tilde{\varphi}(\tilde{\mathcal{L}}_f)$;
- (2) гомеоморфизм $\tilde{\varphi}$ формулой $\tilde{\varphi}_*(\tilde{l}) = \tilde{\varphi}(\tilde{l})$ индуцирует взаимно однозначное соответствие $\tilde{\varphi}_* : \tilde{\mathcal{L}}_f \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{f'}$ такое, что $\tilde{\varphi}_* \tilde{\mathcal{P}}_f = \tilde{\mathcal{P}}_{f'} \tilde{\varphi}_*$.

На рисунке 6 изображены диффеоморфизмы $f, f' \in MS_1(M^2)$. Слева изображен диффеоморфизм f двумерной сферы, неблуждающее множество которого состоит из периодической источниковой орбиты $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ периода 3, неподвижных источниковых точек α_4, α_5 , периодической седловой орбиты $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ периода 3, неподвижной седловой точки σ_4 и неподвижной стоковой точки ω_1 . Так же отмечены сепаратрисы $l_1, \dots, l_8 \in \mathcal{L}_f$. На множестве $\hat{V}_f = \hat{V}_1 \sqcup \hat{V}_2$ отмечены проекции сепаратрис $\hat{\mathcal{L}}_f = \{\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_4\}$. Инволюция $\hat{\mathcal{P}}_f$ действует следующим образом:

$$\hat{\mathcal{P}}_f(\hat{l}_1) = \hat{l}_2, \hat{\mathcal{P}}_f(\hat{l}_3) = \hat{l}_4.$$

На множестве $\tilde{V}_f = \tilde{V}_1 \sqcup \tilde{V}_2$ отмечены проекции сепаратрис $\tilde{\mathcal{L}}_f = \{\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_8\}$. Инволюция $\tilde{\mathcal{P}}_f$ действует следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{P}}_f(\tilde{l}_1) = \tilde{l}_2, \tilde{\mathcal{P}}_f(\tilde{l}_3) = \tilde{l}_4, \tilde{\mathcal{P}}_f(\tilde{l}_5) = \tilde{l}_6, \tilde{\mathcal{P}}_f(\tilde{l}_7) = \tilde{l}_8.$$

На рисунке справа изображен диффеоморфизм f' двумерного тора, неблуждающее множество которого состоит из периодической источниковой орбиты $\{\alpha'_2, \alpha'_3\}$ периода 2, неподвижной источниковой точки α'_1 , периодической седловой орбиты $\{\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3\}$ периода 3, неподвижной седловой точки σ'_4 и неподвижной стоковой точки ω'_1 . Так же отмечены сепаратрисы $l'_1, \dots, l'_8 \in \mathcal{L}_{f'}$. На множестве $\hat{V}_{f'} = \hat{V}'_1 \sqcup \hat{V}'_2$ отмечены проекции сепаратрис $\hat{\mathcal{L}}_{f'} = \{\hat{l}'_1, \dots, \hat{l}'_4\}$. Инволюция $\hat{\mathcal{P}}_{f'}$ действует следующим образом:

$$\hat{\mathcal{P}}_{f'}(\hat{l}'_1) = \hat{l}'_2, \hat{\mathcal{P}}_{f'}(\hat{l}'_3) = \hat{l}'_4.$$

На множестве $\tilde{V}_{f'} = \tilde{V}'_1 \sqcup \tilde{V}'_2$ отмечены проекции сепаратрис $\tilde{\mathcal{L}}_{f'} = \{\tilde{l}'_1, \dots, \tilde{l}'_8\}$. Инволюция $\tilde{\mathcal{P}}_{f'}$ действует следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{P}}_{f'}(\tilde{l}'_1) = \tilde{l}'_4, \tilde{\mathcal{P}}_{f'}(\tilde{l}'_2) = \tilde{l}'_5, \tilde{\mathcal{P}}_{f'}(\tilde{l}'_3) = \tilde{l}'_6, \tilde{\mathcal{P}}_{f'}(\tilde{l}'_7) = \tilde{l}'_8.$$

Для наборов $\hat{S}_f, \hat{S}_{f'}$ существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$ такой, что $\eta_f = \eta_{f'} \hat{\varphi}$ и выполняются пункты (1) и (2) эквивалентности наборов. Также для наборов $\tilde{S}_f, \tilde{S}_{f'}$ существует гомеоморфизм $\tilde{\varphi} : \tilde{V}_f \rightarrow \tilde{V}_{f'}$ такой, что выполняется пункт (1) эквивалентности наборов. Но для любого такого гомеоморфизма не выполнено условие (2) $\tilde{\varphi}_* \tilde{\mathcal{P}}_f = \tilde{\mathcal{P}}_{f'} \tilde{\varphi}_*$. Топологическая несопряженность диффеоморфизмов f, f' очевидно следует из негомеоморфности поверхностей, на которых они заданы.

Определение 2 (Эквивалентность схем). Схемы $\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in MS_1(M^2)$ будем называть эквивалентными если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$, осуществляющий эквивалентность наборов $\hat{S}_f, \hat{S}_{f'}$ и поднимающийся до гомеоморфизма $\tilde{\varphi} : \tilde{V}_f \rightarrow \tilde{V}_{f'}$, осуществляющего эквивалентность наборов $\tilde{S}_f, \tilde{S}_{f'}$.

Основным результатом главы 4 является следующая теорема.

Теорема 3 ([32]*, Теорема 1.) Два диффеоморфизма $f \in MS_1(M^2), f' \in MS_1(M^2)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы $\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_{f'}$ эквивалентны.

На основе свойств схемы диффеоморфизма $f \in MS_1(M^2)$ вводится понятие абстрактной схемы \mathcal{S} и доказывается следующая теорема.

Теорема 4. ([32]*, Теорема 2) Для любой абстрактной схемы \mathcal{S} существует диффеоморфизм $f \in MS_1(M^2)$, схема \mathcal{S}_f которого эквивалентна схеме \mathcal{S} .

По любой абстрактной схеме $\mathcal{S} = (\hat{S}, \tilde{S})$ можно определить род поверхности, на которой реализуется диффеоморфизм $f \in MS_1(M^2)$ по данной схеме. Для этого построим два набора окружностей S_ω, S_α по набору \tilde{S} следующим образом.

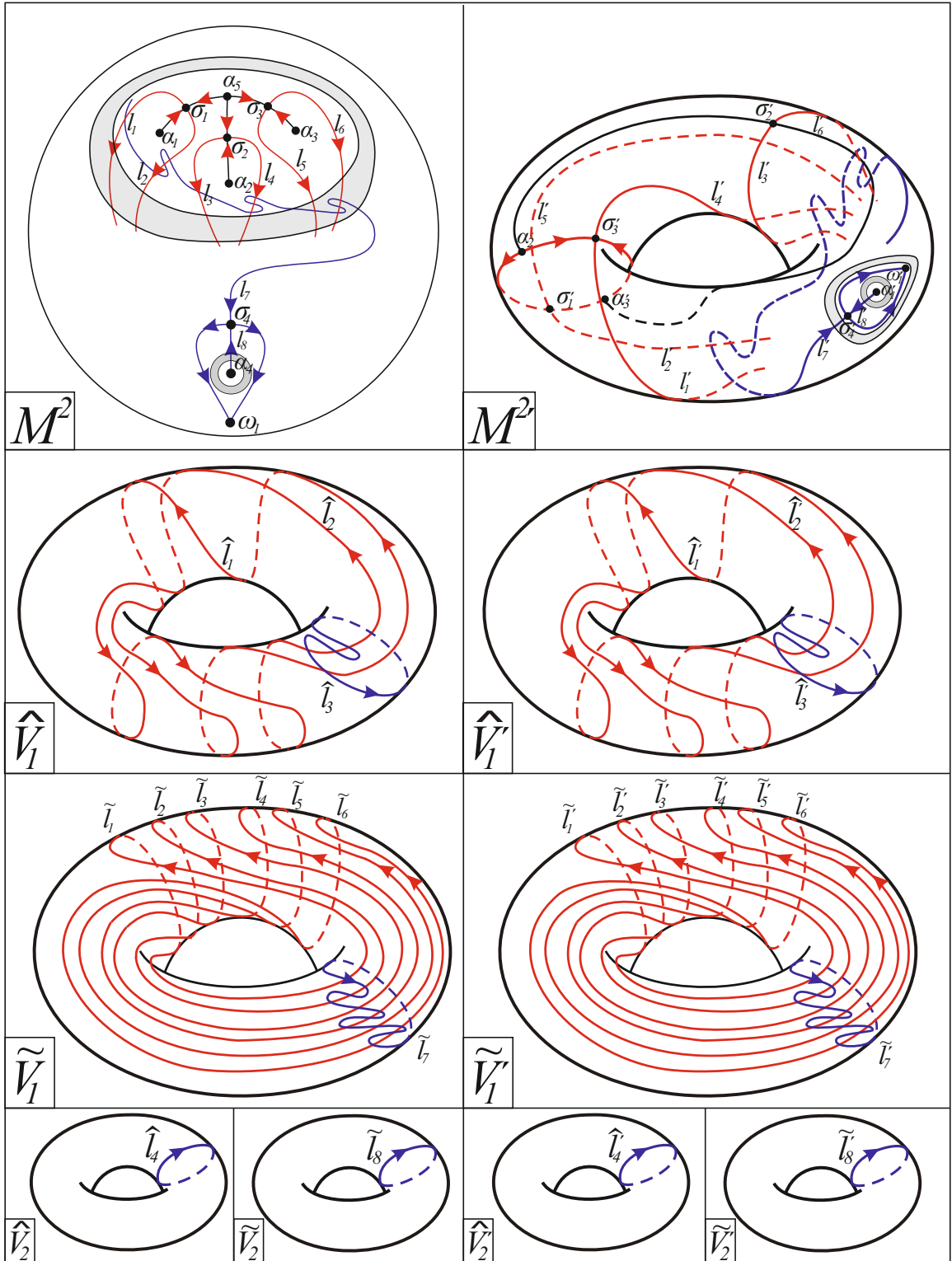


Рис. 6: Фазовые портреты топологически не сопряженных диффеоморфизмов $f, f' \in MS_1(M^2)$ с неэквивалентными наборами $\tilde{S}_f, \tilde{S}_{f'}$

В силу [18, Лемма 3.2.1] для каждой компоненты связности \tilde{V}_i множества \tilde{V}_f такой, что $\tilde{\mathcal{L}}^s \cap \tilde{V}_i \neq \emptyset$, существует узел, который пересекается с каждым узлом $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{L}}^s \cap \tilde{V}_i$ в единственной точке (см. Рис. 7), назовем такой узел *экватором*. Выберем экватор $\tilde{\beta}_i^s$ для каждой компоненты связности \tilde{V}_i , такой, что $\tilde{\mathcal{L}}^s \cap \tilde{V}_i \neq \emptyset$. Обозначим через B^s

объединение всех экваторов $\tilde{\beta}_i^s$. Точки $\tilde{l} \cap B^s$, $\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{l}) \cap B^s$ назовем *парными*. Обозначим через S_ω набор узлов, полученных из B^s взятием связной суммы вдоль попарно не пересекающихся окрестностей парных точек, а также добавлением узлов $\tilde{p}(p^{-1}(\hat{b}_i))$ для $i : \mathcal{L}^s \cap \tilde{V}_i = \emptyset$ (см. Рис. 7).

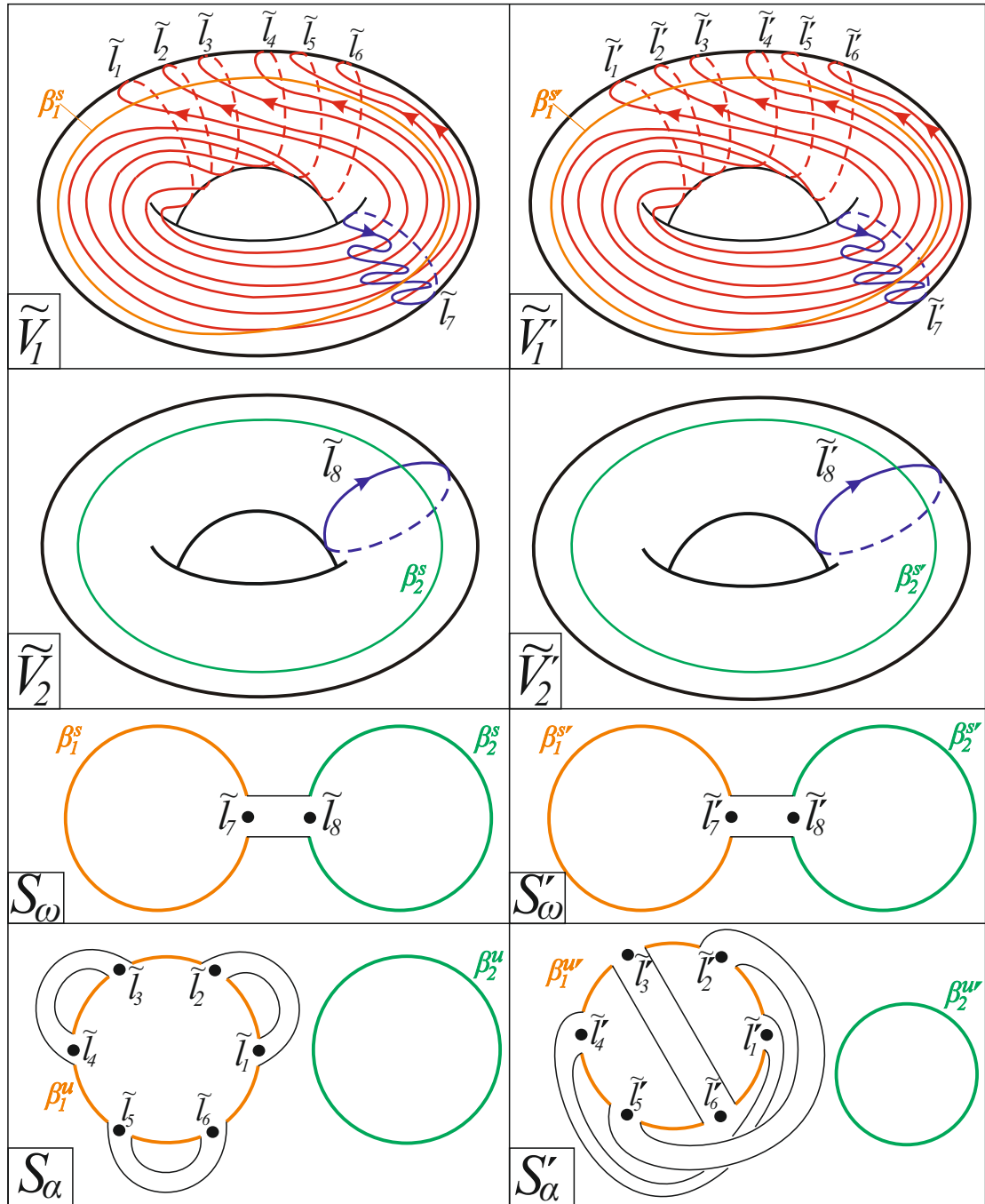


Рис. 7: Пространства $\tilde{V}_f, \tilde{V}_{f'}$ для диффеоморфизмов f, f' , изображенных на рисунке 6, с отмеченными узлам $\beta_1^s, \beta_2^s, \beta_1^{t_s}, \beta_2^{t_s}$, а также наборы узлов S_ω, S_α диффеоморфизма f и S'_ω, S'_α диффеоморфизма f' .

Аналогичным образом строится набор узлов S_α из экваторов B^u к узлам $\tilde{\mathcal{L}}^u$. Обозначим через $k^s, k^u, k^\omega, k^\alpha$ число узлов в множествах $\tilde{\mathcal{L}}^s, \tilde{\mathcal{L}}^u, S_\omega, S_\alpha$, соответственно.

Следующая лемма позволяет определить род несущей поверхности диффеоморфизма $f \in MS_1(M^2)$ по схеме \mathcal{S} .

Лемма 4.1 ([32]*, Лемма 1) *Род g несущей поверхности диффеоморфизма $f \in MS_1(M^2)$ со схемой \mathcal{S} вычисляется по формуле*

$$2 - 2g = k^\alpha + k^\omega - \frac{1}{2}(k^s + k^u).$$

В главе 5 рассматривается класс $MS_+(M^2)$. Сначала устанавливается, что любой диффеоморфизм рассматриваемого класса имеет конечное число орбит.

Теорема 5 ([33]*, Теорема 1) *Если диффеоморфизм $f \in MS_+(M^2)$, то $beh(f) = 1$.*³

Таким образом, для диффеоморфизмов класса $MS_+(M^2)$ справедливы все классификационные результаты, изложенные в разделе 4 для диффеоморфизмов класса $MS_1(M^2)$. Однако, ориентируемость гетероклинического пересечения позволяет довести полный инвариант (схему диффеоморфизма) до комбинаторного описания.

Именно, описана процедура однозначного построения графа T_f с подстановкой P_f по схеме \mathcal{S}_f диффеоморфизма $f \in MS_+(M^2)$. Более детально.

Рассмотрим набор $\tilde{\mathcal{S}}_f$ схемы \mathcal{S}_f описанной в главе 4. Положим $\tilde{V}_i = \tilde{p}_f p_f^{-1}(\hat{V}_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ и обозначим через $\tilde{V}_{i,\kappa}$ компоненты связности множества \tilde{V}_i , $\kappa \in \{0, \dots, m_i - 1\}$. Положим

$$\tilde{\mathcal{L}}_{i,\kappa}^s = \{\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{L}}_f | \tilde{l} \cap \tilde{V}_{i,\kappa} \neq \emptyset\}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{i,\kappa}^u = \{\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{L}}_f | \tilde{l} \cap \tilde{V}_{i,\kappa} \neq \emptyset\}.$$

Для сепаратрис из набора $\tilde{\mathcal{L}}_{i,\kappa}^s, (\tilde{\mathcal{L}}_{i,\kappa}^u)$ определяется их гомотопический тип $\langle 1, \tilde{\nu}_i^s \rangle$ ($\langle 1, \tilde{\nu}_i^u \rangle$), который совпадает для всех $\kappa \in \{0, \dots, m_i - 1\}$. Обозначим через $\tilde{r}_i^s, \tilde{r}_i^u$ число компонент связности множеств $\tilde{\mathcal{L}}_{i,\kappa}^s, \tilde{\mathcal{L}}_{i,\kappa}^u$, соответственно. Так как кривые семейства $\tilde{\mathcal{L}}_{i,\kappa}^s, (\tilde{\mathcal{L}}_{i,\kappa}^u)$ не пересекаются, то будем считать, что нумерация выбрана естественным образом, согласно ориентации образующей $\tilde{b}_{i,\kappa}$.

Аналогично, рассмотрим набор $\hat{\mathcal{S}}_f$ схемы \mathcal{S}_f , определим соответствующие множества проекций сепаратрис $\hat{\mathcal{L}}_i^s, \hat{\mathcal{L}}_i^u$, обозначим через $\langle \mu_i^s, \nu_i^s \rangle$, $\langle \mu_i^u, \nu_i^u \rangle$ их гомотопические типы, обозначим через r_i^s, r_i^u число элементов в соответствующем множестве.

Построим граф T_f с вершинами B_f , ребрами E_f следующим образом.

1. Вершины B_f . Все вершины B_f графа T_f расположены на плоскости \mathbb{R}^2 и находятся в следующем соответствии ζ с диффеоморфизмом f .

1.1. Для $i \in \{1, \dots, n\}$, $\kappa \in \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$ разместим вершину $\delta_{i,\kappa}$ в точке с координатами $(5(i - 1), 5\kappa)$. Положим $\zeta(\tilde{V}_{i,\kappa}) = \delta_{i,\kappa}$.

1.2. Если $\tilde{r}_i^s \neq 0$, то для $j_s \in \{0, \dots, \tilde{r}_i^s - 1\}$, $\kappa \in \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$ разместим вер-

³Независимое доказательство этого факта было дано в работе А.Н. Безденежных [3] с использованием глубоких результатов А.Г. Майера о связи числа попарно не пересекающихся самопредельных траекторий с родом несущей поверхности [26]. Доказательство теоремы 5, приведенное в настоящей работе, основано лишь на свойстве линеаризующих окрестностей и факторпространств.

шины δ_{i,κ,j_s}^s на единичной окружности $C_{i,\kappa}^s$ с центром $\delta_{i,\kappa}$ так, что точка δ_{i,κ,j_s}^s имеет координаты

$$\left(\cos \left(\frac{2\pi j_s}{\tilde{r}_i^s} \right) + 5(i-1), \sin \left(\frac{2\pi j_s}{\tilde{r}_i^s} \right) + 5\kappa \right).$$

Положим $\zeta(\tilde{l}_{i,\kappa,j_s}^s) = \delta_{i,\kappa,j_s}^s$.

1.3. Если $\tilde{r}_i^u \neq 0$, то для $j_u \in \{0, \dots, \tilde{r}_i^u - 1\}$, $\kappa \in \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$ разместим вершины δ_{i,κ,j_u}^u на окружности $C_{i,\kappa}^u$ радиуса 2 с центром $\delta_{i,\kappa}$ так, что точка δ_{i,κ,j_u}^u имеет координаты

$$\left(2\cos \left(\frac{2\pi j_u}{\tilde{r}_i^u} \right) + 5(i-1), 2\sin \left(\frac{2\pi j_u}{\tilde{r}_i^u} \right) + 5\kappa \right).$$

Положим $\zeta(\tilde{l}_{i,\kappa,j_u}^u) = \delta_{i,\kappa,j_u}^u$.

2. Ребра E_f .

2.1. Каждую вершину $\delta_{i,\kappa}$ соединим ребрами $(\delta_{i,\kappa}, \delta_{i,\kappa,j_s}^s)$ и $(\delta_{i,\kappa}, \delta_{i,\kappa,j_u}^u)$ с вершинами δ_{i,κ,j_s}^s и δ_{i,κ,j_u}^u , соответственно.

2.2. Каждую пару вершин $\delta_{i,\kappa,j_s}^s, \delta_{i,\kappa,j_s+1}^s$ ($\delta_{i,\kappa,\tilde{r}_i^s}^s = \delta_{i,\kappa,0}^s$) соединим ребром (дугой окружности $C_{i,\kappa}^s$) $(\delta_{i,\kappa,j_s}^s, \delta_{i,\kappa,j_s+1}^s)$ цвета s . Положим

$$c_{i,\kappa}^s = \{\delta_{i,\kappa,0}^s, (\delta_{i,\kappa,0}^s, \delta_{i,\kappa,1}^s), \delta_{i,\kappa,1}^s, \dots, (\delta_{i,\kappa,\tilde{r}_i^s-1}^s, \delta_{i,\kappa,0}^s), \delta_{i,\kappa,0}^s\}.$$

Назовем циклы $c_{i,\kappa}^s$ s -циклами.

2.3. Каждую пару вершин $\delta_{i,\kappa,j_u}^u, \delta_{i,\kappa,j_u+1}^u$ ($\delta_{i,\kappa,\tilde{r}_i^u}^u = \delta_{i,\kappa,0}^u$) соединим ребром (дугой окружности $C_{i,\kappa}^u$) $(\delta_{i,\kappa,j_u}^u, \delta_{i,\kappa,j_u+1}^u)$ цвета u . Положим

$$c_{i,\kappa}^u = \{\delta_{i,\kappa,0}^u, (\delta_{i,\kappa,0}^u, \delta_{i,\kappa,1}^u), \delta_{i,\kappa,1}^u, \dots, (\delta_{i,\kappa,\tilde{r}_i^u-1}^u, \delta_{i,\kappa,0}^u), \delta_{i,\kappa,0}^u\}.$$

Назовем циклы $c_{i,\kappa}^u$ u -циклами

2.4. Вершины $\delta_{i,\kappa,j_s}^s = \zeta(\tilde{l}_{i,\kappa,j_s}^s)$, $\delta_{i,\tilde{\kappa},j_u}^s = \zeta(\tilde{l}_{i,\tilde{\kappa},j_u}^s)$, соединим ребром $(\delta_{i,\kappa,j_s}^s, \delta_{i,\tilde{\kappa},j_u}^s)$, если $\tilde{l}_{i,\kappa,j_s}^s = \tilde{P}_f(\tilde{l}_{i,\tilde{\kappa},j_u}^s)$. Назовем вершины $\delta_{i,\kappa,j_s}^s, \delta_{i,\tilde{\kappa},j_u}^s$ и инцидентное им ребро $(\delta_{i,\kappa,j_s}^s, \delta_{i,\tilde{\kappa},j_u}^s)$ *парными*.

2.5. Вершины $\delta_{i,\kappa,j_u}^u = \zeta(\tilde{l}_{i,\kappa,j_u}^u)$, $\delta_{i,\tilde{\kappa},j_u}^u = \zeta(\tilde{l}_{i,\tilde{\kappa},j_u}^u)$, соединим ребром $(\delta_{i,\kappa,j_u}^u, \delta_{i,\tilde{\kappa},j_u}^u)$, если $\tilde{l}_{i,\kappa,j_u}^u = \tilde{P}_f(\tilde{l}_{i,\tilde{\kappa},j_u}^u)$. Назовем вершины $\delta_{i,\kappa,j_u}^u, \delta_{i,\tilde{\kappa},j_u}^u$ и инцидентное им ребро $(\delta_{i,\kappa,j_u}^u, \delta_{i,\tilde{\kappa},j_u}^u)$ *парными*. Заметим, что образом парных вершин, относительно автоморфизма P , являются парные вершины.

3. Автоморфизм P_f .

3.1. Действие автоморфизма P_f индуцируется диффеоморфизмом f , с помощью соответствия ζ по формуле

$$P_f = \zeta \tilde{p}_f f \tilde{p}_f^{-1} \zeta^{-1} : B_f \rightarrow B_f.$$

Определение 6. Графы (T_f, P_f) $(T_{f'}, P_{f'})$ диффеоморфизмов $f, f' \in MS_+(M^2)$ назовем *изоморфными*, если существует изоморфизм ξ , переводящий вершины и ребра

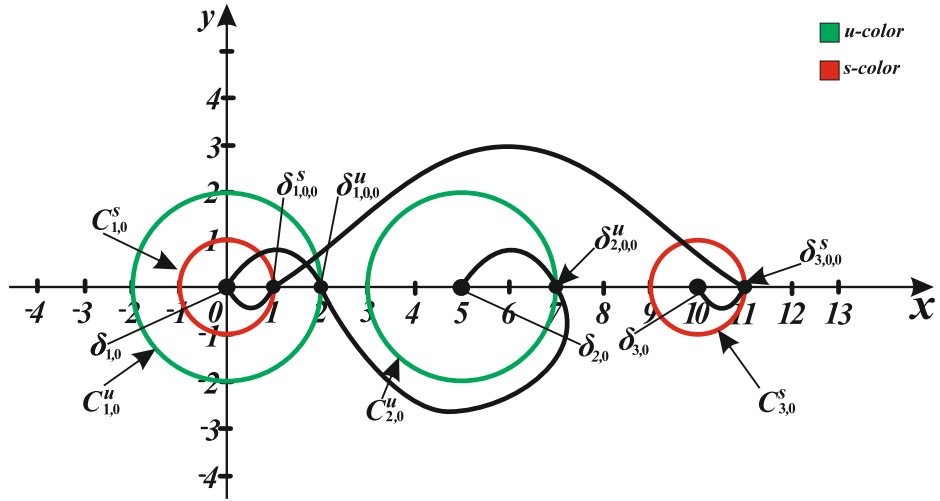


Рис. 8: Пример графа T_f .

графа T_f в вершины и ребра графа $T_{f'}$ с сохранением цветности и сопрягающий автоморфизмы, то есть $P_{f'} = \xi P_f \xi^{-1}$.

Основным результатом раздела 5 является следующий факт.

Лемма 5.1 Графы (T_f, P_f) , $(T_{f'}, P_{f'})$ диффеоморфизмов $f, f' \in MS_+(M^2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда эквивалентны их схемы $\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_{f'}$.

В ходе доказательства леммы 5.1 используются и доказываются следующие леммы.

Лемма 5.2 ([28] Лемма 1.) Пусть $c \subset \mathbb{T}^2$ не гомотопная нулю простая замкнутая кривая на торе такая, что $[c] = \langle \mu, \nu \rangle$. Если $\hat{\phi} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ — гомеоморфизм такой, что $\hat{\phi}_*([b]) = [b]$, то кривая $\hat{\phi}(c)$ имеет гомотопический тип $\langle \mu, \bar{\nu} \rangle$, где $\bar{\nu} \equiv \nu \pmod{\mu}$. Обратно, для любого $\bar{\nu} \equiv \nu \pmod{\mu}$ существует единственный (с точностью до изотопии) гомеоморфизм $\hat{\phi} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ такой что $\hat{\phi}_*([b]) = [b]$ и кривая $\hat{\phi}(c)$ имеет гомотопический тип $\langle \mu, \bar{\nu} \rangle$.

Лемма 5.3 ([28] Лемма 2.) Существует диффеоморфизм $\hat{\phi}_i : \hat{V}_i \rightarrow \mathbb{T}^2$ такой, что $\hat{\phi}_{i*}([b_i]) = [b]$, $\hat{\phi}_i(\hat{L}_i^s) = \hat{\Gamma}_i^s$, $\hat{\phi}_i(\hat{L}_i^u) = \hat{\Gamma}_i^u$ и диффеоморфизм $\hat{\phi}_i$ поднимается до диффеоморфизма $\tilde{\phi}_i : \tilde{V}_i \rightarrow \mathbb{T}^2$ такого, что $\tilde{\phi}_{i,\kappa}([b_i]) = [b_i]$, $\tilde{\phi}_{i,\kappa}(\tilde{L}_{i,\kappa}^s) = \tilde{\Gamma}_{i,\kappa}^s$, $\tilde{\phi}_{i,\kappa}(\tilde{L}_{i,\kappa}^u) = \tilde{\Gamma}_{i,\kappa}^u$, где $\tilde{\phi}_{i,\kappa} = \tilde{\phi}_i|_{\tilde{V}_{i,\kappa}}$.

Непосредственным следствием леммы 5.1 является следующий классификационный результат.

Теорема 6 ([28]*, Теорема 1) Диффеоморфизмы $f, f' \in MS_+(M^2)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их графы (T_f, P_f) , $(T_{f'}, P_{f'})$ изоморфны.

Принято считать, что алгоритм является *эффективным*, если время его работы ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации. Такое понимание эффективной разрешимости восходит к А. Кобхэму [11]. Стандартом труднорешаемости является NP-полнота (или NP-трудность) задачи [14]. На настоящее время для задачи изоморфизма в классе всех графов не доказана ни полиномиальная разрешимость, ни NP-полнота. Вместе с тем, графы диффеоморфизмов из класса

$MS_+(M^2)$ не являются графами общего вида, что позволяет разработать полиномиальный от количества вершин алгоритм решения задачи изоморфизма для данных графов. Основные ресурсы для построения данного алгоритма состоят в том, что максимальная степень вершин графов диффеоморфизмов из $MS_+(M^2)$, кроме вершин δ_i , не превосходит четырех и что для любого d задача изоморфизма обыкновенных графов максимальной степени не более чем d полиномиально разрешима [25].

Теорема 7 ([28]*, Теорема 2) *Существует эффективный алгоритм установления изоморфности графов $(T_f, P_f), (T_{f'}, P_{f'})$.*

Доказательство теоремы 7 заключается в последовательном упрощении графа T_f до факторграфа T'_f , а затем и до простого графа Γ_f , причем, веса вершин графа T_f сохраняются в метки графа Γ_f таким образом, что граф T_f восстанавливается единственным образом из графа Γ_f . Для двух диффеоморфизмов $f, f' \in MS_+(M^2)$ с графами $(T_f, P_f), (T_{f'}, P_{f'})$ соответственно, перестроения графов производятся за полиномиальное время, а так же изоморфность графов $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ проверяется за полиномиальное время [25].

Заключение

В настоящей диссертационной работе получена топологическая классификация сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических орбит заданных на ориентируемых поверхностях, комбинаторный инвариант для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемой гетероклиникой заданных на ориентируемых поверхностях, а так же гомотопическая классификация более общего класса сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла заданных на ориентируемых поверхностях.

Получена реализация структурно устойчивого представителя (сохраняющего ориентацию диффеоморфизма Морса-Смейла с ориентируемыми гетероклиническими пересечениями) в каждом гомотопическом классе второго типа Нильсена-Тёрстона.

Перечислим основные результаты, доказанные в настоящей диссертационной работе:

- Описана реализация диффеоморфизм Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим пересечением в каждом гомотопическом классе $\{h\} \in T_2$ (Теорема 1).
- Описан алгоритм распознавания принадлежности заданного неградиентно-подобного диффеоморфизма класса $MS(M^2)$ множеству Нильсена-Тёрстона T_1 или T_2 по его гетероклиническому пересечению (Теорема 2).
- Приведена полная топологическая классификация множества $MS_1(M^2)$ диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических орбит ($beh(f) = 1$), включая реализацию (Теоремы 3,4).
- Доказано, что сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла с ориентируемыми гетероклиническими пересечениями имеет конечное число гетероклинических орбит (Теорема 5).
- Описан граф (T_f, P_f) являющийся полным топологическим инвариантом для диффеоморфизмов класса $MS_+(M^2)$ (Теорема 6).
- Доказано существование эффективного алгоритма установления изоморфности графов (T_f, P_f) (Теорема 7).

Апробация результатов исследования

Участие в конференциях

1. *Determination of the homotopy type of a Morse-Smale diffeomorphism on a surface by heteroclinic intersection*, International conference "Dynamics in Siberia Новосибирск, 2023.

2. *Determination of the homotopy type of a Morse-Smale diffeomorphism on a surface by heteroclinic intersection*, Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения, Южный Урал, Якты-Куль (озеро Банное), 2023.
3. *Determination of the homotopy type of a Morse-Smale diffeomorphism on a surface by heteroclinic intersection*, International Conference on Nonlinear Dynamics and Integrability and Scientific School “Nonlinear Days”, Ярославль, 2022.
4. *Determination of the homotopy type of a Morse-Smale diffeomorphism on a surface by heteroclinic intersection*, Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2022.
5. *Determination of the homotopy type of a Morse-Smale diffeomorphism on a surface by heteroclinic intersection*, Вторая конференция Математических центров, Москва, 2022.
6. *Реализация гомеоморфизмов поверхности алгебраически конечного порядка диффеоморфизмами Морса-Смейла с ориентируемой гетероклиникой*, Конференции международных математических центров мирового уровня, Сочи, 2021.
7. *Realisation of homeomorphism of surfaces of algebraically finite type by Morse-Smale diffeomorphisms with orientable heteroclinic*, International conference “Dynamics in Siberia”, Новосибирск, 2021.
8. *Реализация гомеоморфизмов поверхностей алгебраически конечного типа диффеоморфизмами Морса-Смейла с ориентируемой гетероклиникой*, “Нелинейные дни в Саратове для молодых”, Саратов, 2021.
9. *Conjugacy of orientation preserving Morse-Smale diffeomorphisms graphs*, International conference “Dynamics in Siberia”, Новосибирск, 2020.
10. *Комбинаторный инвариант для поверхностных диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемой гетероклиникой*, Международная конференция “КРОМШ 2020”, Батилиман, 2020.
11. *Morse-Smale surfaced diffeomorphisms with orientable heteroclinic*, International conference “Mathematical Spring”, Нижний Новгород, 2019.
12. *Morse-Smale surfaced diffeomorphisms with orientable heteroclinic*, International conference “Topological methods in dynamics and related topics”, Нижний Новгород, 2018.

Основные результаты диссертации опубликованы в восьми статьях:

1. Morozov A., Pochinka O. Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic orbits on surfaces // Moscow Mathematical Journal. 2023. Vol. 23. No. 4. P. 571-590.
2. Grines V., Morozov A., Pochinka O. Determination of the Homotopy Type of a Morse-Smale Diffeomorphism on an Orientable Surface by a Heteroclinic Intersection //Qualitative Theory of Dynamical Systems. – 2023. – Vol. 22. – №. 3. – P. 120.
3. Malyshev D., Morozov A., Pochinka O. Combinatorial invariant for Morse–Smale diffeomorphisms on surfaces with orientable heteroclinic //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2021. – Vol. 31. – №. 2. – P. 023119.
4. Morozov A., Pochinka O. Morse-Smale surfaced diffeomorphisms with orientable heteroclinic //Journal of Dynamical and Control Systems. – 2020. – Vol. 26. – P. 629-639.
5. Гринес В. З., Морозов А. И., Починка О. В. Реализация гомеоморфизмов поверхностей алгебраически конечного порядка диффеоморфизмами Морса–Смейла с ориентируемым гетероклиническим пересечением //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2021. – Т. 315. – №. 0. – С. 95-107.
6. Морозов А. И. Реализация гомотопических классов гомеоморфизмов тора простейшими структурно устойчивыми диффеоморфизмами //Журнал Средневолжского математического общества. – 2021. – Т. 23. – №. 2. – С. 171-184.
7. Морозов А. И., Починка О. В. Комбинаторный инвариант для поверхностных диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемой гетероклиникой //Журнал Средневолжского математического общества. – 2020. – Т. 22. – №. 1. – С. 71-80.
8. Morozov A. Determination of the homotopy type of a Morse-Smale diffeomorphism on a 2-torus by heteroclinic intersection // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 17. No. 4. P. 465-473.

Список литературы

- [1] Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // докл. АН СССР. – 1937. – Т. 14. – №. 5. – С. 247-250.
- [2] Anosov D. V., Aranson S. Kh., Grines V. Z., Plykin R.V., Sataev E. A., Safonov A. V., Solodov V. V., Starkov A. N., Stepin A. M., Shlyachkov S. V. Dynamical systems with hyperbolic behavior, Dynamical systems – 9, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern prob. mat. Fundam. directions, 66, VINITI, M., 1991, 5–242.
- [3] Безденежных А.Н. Диссертация “Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством на двумерных многообразиях. ”, Горьковский ордена трудового красного знамени государственный университет им. Н.И. Лобачевского. Горький, 1985 г.
- [4] Bezdenezhnykh A. N., Grines V. Z. Dynamical Properties and Topological Classification of Gradient-Like Diffeomorphisms on Two-Dimensional Manifolds I. Sel. Math. Sov. 1992. V. 11, 1, 1–11.
- [5] Bezdenezhnykh A. N., Grines V. Z. Dynamical Properties and Topological Classification of Gradient-Like Diffeomorphisms on Two-Dimensional Manifolds II. Sel. Math. Sov. 1992. V. 11, 1, 13–17.
- [6] Bezdenezhnykh A. N., Grines V. Z. Realization of gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds //Differential and integral equations. – 1985. – С. 33-37.
- [7] Bonatti C. et al. Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves on 3-manifolds //Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 2019. – Т. 39. – №. 9. – С. 2403-2432.
- [8] Bonatti C., Grines V. Z., Pochinka O. V. Classification of morse-smale diffeomorphisms with finite sets of heteroclinic orbits on 3-manifolds //Doklady Mathematics. – Pleiades Publishing, Ltd.(Плеядес Паблшинг, Лтд), 2004. – Т. 69. – №. 3. – С. 385-387.
- [9] Bonatti C., Langevin R., Difféomorphismes de Smale des surfaces. Asterisque. Societe mathematique de France. Paris. 1998, 250.
- [10] Casson A. J., Bleiler S. A. Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston. – Cambridge University Press, 1988. – №. 9.
- [11] Cobham A. The intrinsic computational difficulty of functions. Proceedings of the 1964 international congress for logic, methodology, and philosophy of science, North-Holland, Amsterdam, pp. 24–30.
- [12] Gao J. Sarkar R. Zhu X. (2008). Morse-smale decomposition, cut locus and applications in wireless sensor networks.

- [13] Gerber S., Potter K. Data analysis with the morse-smale complex: The msr package for r //Journal of Statistical Software. – 2012. – Т. 50. – С. 1-22.
- [14] Гэри М. и др. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – Мир, 1982. – Т. 416.
- [15] Grines V. Z. Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces //Matematicheskie Zametki. – 1993. – Т. 54. – №. 3. – С. 3-17.
- [16] Grines V. Z., Kapkaeva S. K., Pochinka O. V. A three-colour graph as a complete topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of surfaces //Sbornik: Mathematics. – 2014. – Т. 205. – №. 10. – С. 1387.
- [17] Grines V. Z., Kurenkov E. D. Diffeomorphisms of 2-manifolds with one-dimensional sparsely situated basic sets //Izvestiya: Mathematics. – 2020. – Т. 84. – №. 5. – С. 862.
- [18] Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V. Dynamical systems on 2-and 3-manifolds. – Cham : Springer, 2016. – Т. 46.
- [19] Grines V.Z. et al. Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2010. – Т. 271. – №. 1. – С. 103-124.
- [20] Гринес В. З. и др. Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса–Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы //Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2014. – Т. 10. – №. 4. – С. 427-438.
- [21] Grines V., Morozov A., Pochinka O. Determination of the Homotopy Type of a Morse-Smale Diffeomorphism on an Orientable Surface by a Heteroclinic Intersection //Qualitative Theory of Dynamical Systems. – 2023. – Т. 22. – №. 3. – С. 120.
- [22] Grines V. Z., Morozov A. I., Pochinka O. V. Realization of Homeomorphisms of Surfaces of Algebraically Finite Order by Morse–Smale Diffeomorphisms with Orientable Heteroclinic Intersection //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2021. – Т. 315. – №. 1. – С. 85-97.
- [23] Langevin R. Quelques nouveaux invariants des difféomorphismes Morse–Smale d’une surface //Annales de l’institut Fourier. – 1993. – Т. 43. – №. 1. – С. 265-278.
- [24] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории //ДАН СССР. – 1955. – Т. 103. – №. 4. – С. 557-560.
- [25] Luks E. M. Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time //Journal of computer and system sciences. – 1982. – Т. 25. – №. 1. – С. 42-65.

- [26] Майер А. О траекториях на ориентируемых поверхностях //Матем. сб. – 1943. – Т. 12. – №. 54. – С. 1.
- [27] Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность //Ученые записки ГГУ. – 1939. – №. 12. – С. 215-226.
- [28] Malyshev D., Morozov A., Pochinka O. Combinatorial invariant for Morse–Smale diffeomorphisms on surfaces with orientable heteroclinic //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2021. – Т. 31. – №. 2. – С. 023119.
- [29] Mitryakova T. M., Pochinka O. V. Realization of cascades on surfaces with finitely many moduli of topological conjugacy //Mathematical Notes. – 2013. – Т. 93. – С. 890-905.
- [30] Митрякова Т. М., Починка О. В. О необходимых и достаточных условиях топологической сопряженности диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом орбит гетероклинического касания //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2010. – Т. 270. – №. 0. – С. 198-219.
- [31] Morozov A. I. Determination of the Homotopy Type of a Morse–Smale Diffeomorphism on a 2-torus by Heteroclinic Intersection //Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2021. – Т. 17. – №. 4. – С. 465-473.
- [32] Morozov A., Pochinka O. Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic orbits on surfaces...
- [33] Morozov A., Pochinka O. Morse-Smale surfaced diffeomorphisms with orientable heteroclinic //Journal of Dynamical and Control Systems. – 2020. – Т. 26. – С. 629-639.
- [34] Nielsen, J. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen.// I Acta Math. - 1927. - 50. - p. 189-358; II Acta Math. - 1929 - 53. - p. 1-76; III Acta Math. - 1932. - 58. - p. 87-167;
- [35] Nielsen, J. Die Structur periodischer Transformationen von Flächen. // D.K. Dan. Vidensk. Selsk. Math-fys. Medd. - 1937. - 15. - p. 1-77.
- [36] Nielsen, J. Surface transformation classes of algebraically finite type.// Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. - 1944. - 21. - p. 89.
- [37] Oshemkov A. A., Sharko V. V. Classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds //Sbornik: Mathematics. – 1998. – Т. 189. – №. 8. – С. 1205.
- [38] Palis J. On Morse-Smale dynamical systems //Topology. – 1969. – Т. 8. – №. 4. – С. 385-404.

- [39] Palis J., Smale S. Structural stability theorems //The Collected Papers of Stephen Smale: Volume 2. – 2000. – С. 739-747.
- [40] Peixoto M. M. Structural stability on two-dimensional manifolds //Topology. – 1962. – Т. 1. – №. 2. – С. 101-120.
- [41] Peixoto M. M. On the classification of flows on 2-manifolds //Dynamical systems. – Academic Press, 1973. – С. 389-419.
- [42] Pixton D. Wild unstable manifolds //Topology. – 1977. – Т. 16. – №. 2. – С. 167-172.
- [43] Pochinka O. V. Classification of Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds //Doklady Mathematics. – SP MAIK Nauka/Interperiodica, 2011. – Т. 84. – С. 722-725.
- [44] Починка О. В., Шутов А. А. О связи динамики градиентно-подобного 3-диффеоморфизма со структурой характеристического пространства //Динамические системы. – 2014. – Т. 4. – №. 3-4 (32). – С. 185-192.
- [45] Rolfsen D. Knots and links. – American Mathematical Soc., 2003. – Т. 346.
- [46] Smale S. Differentiable dynamical systems //Bulletin of the American mathematical Society. – 1967. – Т. 73. – №. 6. – С. 747-817.
- [47] Smale S. Morse inequalities for a dynamical system. – 1960.
- [48] Zhiron A. Y., Plykin R. V. The correspondence between one-dimensional hyperbolic attractors of diffeomorphisms of surfaces and generalized pseudo-Anosov diffeomorphisms //Mat. Zametki. – 1995. – Т. 58. – №. 1. – С. 149-152.