

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»

*На правах рукописи*

Чигарев Владимир Геннадьевич

**О хаотических аттракторах и репеллерах в системах с компактным  
фазовым пространством**

**РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

на соискание ученой степени кандидата наук по прикладной математике

Научный руководитель:  
доктор наук по прикладной математике, профессор  
Кзаков Алексей Олегович

Москва – 2024

Диссертационная работа выполнена в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики».

Научный руководитель: доктор наук по прикладной математике, профессор Казаков Алексей Олегович

## Введение

### **Актуальность.**

Исследования аттракторов и репеллеров занимают центральное место в задачах нелинейной динамики. Существует множество различных определений этих объектов, подходящих для тех или иных случаев. Как правило, под аттрактором понимается некоторое компактное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого (поглощающей области) стремятся к нему с течением времени. Если фазовое пространство системы является компактным (например, многомерный тор в случае фазовой динамики или сфера в случае осцилляторов с вращательным моментом), также можно рассматривать динамику этой системы назад во времени и определить репеллер как аттрактор для системы в обратном времени.

Как правило, изолированные аттрактор и репеллер не пересекаются, однако эти два множества могут столкнуться и объединиться в одно. Результирующее множество при этом может оказаться топологически консервативным – когда аттрактор и репеллер, как множества, совпадают со всем фазовым пространством. Но также возможен случай, при котором аттрактор и репеллер пересекаются, но при этом не совпадают. Во втором случае мы получаем смешанную динамику – третий тип хаоса (наравне с консервативным и диссипативным), теория которого была заложена совсем недавно в работах Гонченко и Тураева. В настоящий момент эта теория активно развивается. Создание методов исследования систем с пересекающимися аттрактором и репеллером, а также эффективно проверяемых критериев, позволяющих отличать смешанную динамику от двух других типов хаоса, является одной из наиболее актуальных задач нелинейной динамики. С другой стороны важно отметить, что в большинстве современных работ, посвященных исследованию смешанной динамики, аттрактор и репеллер рассматривались только лишь как множества, в то время как вопрос распределения инвариантных мер на этих множествах игнорировался.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию систем с компактным фазовым пространством, демонстрирующих пересечение хаотических аттракторов и репеллеров. По этому направлению получен ряд новых результатов. При исследовании явления пересечения этих двух множеств предложено рассматривать не только топологию этих множеств, но и вопросы распределения инвариантных мер на них, что позволило разрешить ряд парадоксов связанных с расхождением теории смешанной динамики и результатов численных экспериментов.

В главе 1 предложен метод, позволяющий для консервативных диффеоморфизмов, заданных на компактном многообразии, строить диссипативные возмущения, для которых легко определяются обратные отображения. С помощью этого метода, на основе анососского отображения двумерного тора и стандартного отображения Чирикова, построено

два модельных примера. В первом примере при добавлении диссипации получается топологически консервативный хаос, хотя визуально аттрактор и репеллер не совпадают; дано объяснение этому явлению. Во втором случае при добавлении диссипации мы сразу получаем смешанную динамику, так как из-за негиперболичности отображения, аттрактор не может полностью совпадать с репеллером. В обоих случаях предложен новый метод исследования физических инвариантных мер на основе вычисления расстояний между физическими мерами для аттрактора и репеллера. Метод применен для исследования границ применимости теории линейного отклика, в том числе для случая большого внешнего воздействия на систему.

Глава 2 диссертационной работы, посвящена исследованиям хаотического множества, возникающего в результате столкновения одномерного гиперболического аттрактора с одномерным гиперболическим репеллером на трехмерном торе. Гиперболические хаотические множества являются идеальными объектами с хорошими динамическими и статистическими свойствами. Известно множество механизмов разрушения гиперболичности. Диссертантом предложен новый механизм, связанный с возникновением гетероразмерной динамики на границе столкновения гиперболических аттрактора и репеллера. Такая динамика характеризуется наличием внутри хаотического множества траекторий с различным числом положительных показателей Ляпунова. В частности, когда периодические траектории внутри хаотического множества имеют разное количество устойчивых и неустойчивых направлений. Примечательным является тот факт, что выводы об устойчивости такой ситуации можно сделать на основе выявления так называемых гетероразмерных циклов – траекторий, соединяющих периодические траектории с разной размерностью устойчивых и неустойчивых многообразий. Диссертантом предложен метод нахождения и построения соответствующих циклов.

Актуальность результатов работы, представленных в главе 2, обусловлена двумя факторами. Во-первых, открыто и объяснено новое явление – столкновение нетривиальных гиперболических аттрактора и репеллера; установлено существование гетероразмерной динамики после такого столкновения, предложены численные методы ее выявления. Полученные результаты вносят существенный вклад в теории многомерного хаоса. Во-вторых, эти результаты также имеют прикладной характер и могут быть применены к задачам фазовой синхронизации. Например, столкновение хаотических аттрактора и репеллера естественным образом возникает при разрушении хаотической фазовой синхронизации.

В рамках работы над диссертацией разработан программный комплекс, позволяющий проводить численные исследования хаотической динамики в системах с компактным фазовым пространством. В частности, в рамках программного комплекса, реализованы такие методы исследования систем с пересекающимися аттрактором и репеллером, как вычисление расстояния Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна, взаимных размерностей Реньи, Кульбака-Лейблера и спектра сингулярностей между двумя этим множествами, построение гетероразмерных циклов для заданной пары седловых периодических траекторий, протягивание бифуркационных кривых по параметрам, вычисление различных типов показателей Ляпунова и др.

#### **Степень разработанности.**

Впервые пересечение хаотического аттрактора и хаотического репеллера в численном эксперименте было обнаружено в работе Пиковского-Топажа [1] в цепочках связанных ро-

таторов. В совокупности с теоретическими исследованиями Гонченко, Дельшамса, Лэмба, Стенькина, Томаса, Тураева, Шильникова [2, 3, 4] неустранимого и неотделимого сосуществования аттракторов и репеллеров вблизи некоторых типов гомоклинических касаний, эти исследования легли в основу создания Гонченко и Тураевым [5, 6] теории смешанной динамики – третьего типа хаоса, характеризующегося пересечением, но не совпадением аттрактора и репеллера.

На сегодняшний день смешанная динамика обнаружена во многих системах из приложений: в неголономных системах [7, 8, 9, 10, 11], в моделях гидродинамики [12], в моделях нейроноподобных связанных элементов [13, 14, 15] и др. Предложены бифуркационные сценарии возникновения этого явления [16, 17, 12], разработаны численные методы выявления смешанной динамики в пространстве параметров системы [18, 13, 14, 15], построены критерии возникновения смешанной динамики [4, 9, 19]. Однако во всех этих работах акцент делался на исследования топологии пересекающихся аттрактора и репеллера. При этом вопросы, связанные с устройством инвариантной меры на аттракторах и репеллерах, а именно мера наблюдается в системах при численном построении этих двух множеств, обходились стороной.

В главе 1 диссертационной работы этим вопросам уделяется особое внимание. Предложен новый эффективный метод, позволяющий количественно определять различимость инвариантных мер аттрактора и репеллера. Суть этого метода заключается в вычислении расстояния Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна между двумя мерами, соответственно, на аттракторе и на репеллере. Такой метод ранее применялся для сравнения двух аттракторов, взятых при различных значениях параметров системы [20]. Для пересекающихся аттрактора и репеллера такой метод применялся впервые в работе диссертанта. Также в главе 1, на основе теории фрактальных размерностей, разработаны методы, позволяющие определять такие характеристики пересекающихся аттрактора и репеллера, как относительные размерности и спектры взаимной сингулярности. Кроме того, на основе возмущения простейших отображений с помощью преобразования Мёбиуса, предложен метод построения простых модельных отображений двумерного тора, демонстрирующие пересечения аттрактора и репеллера при ненулевом параметре диссипации. Эффективность метода продемонстрирована на таких модельных отображениях, а также на более сложных примерах.

В главе 2 диссертационной работы исследуется явление столкновения гиперболических аттрактора и репеллера в отображении, заданном на трехмерном торе. В работах Гонченко, Казакова, Тураева [16, 17, 12] было показано, что такое столкновение может приводить к возникновению смешанной динамики. Также были объяснены бифуркационные механизмы перехода от разделенных друг от друга аттрактора и репеллера к смешанной динамике через столкновение этих двух множеств. Для трехмерных отображений аналогичное явление было обнаружено в работе Пиковского, Осипова, Резенблума, Закса [21]. Диссертантом дано объяснение этого явления на языке теории бифуркаций. Показано, что сразу после столкновения аттрактора и репеллера возникает одно хаотическое множество, совпадающее со всем трехмерным тором и содержащее траектории с разными размерностями неустойчивых многообразий. С помощью выявления гетероразмерных циклов сразу после столкновения аттрактора и репеллера сделаны выводы об устойчивости образовавшегося хаотического множества.

Теория гетероразмерных циклов – гетероклинических контуров, соединяющих периодические траектории с разной размерностью устойчивых и неустойчивых многообразий была заложена в работе Бонатти, Диаса [22]. В работе Абрахама, Смейла [23] предложен один из первых сценариев нарушения гиперболичности, связанный с возникновением гетероразмерных циклов. Неустранимость нетрансверсальных пересечений инвариантных многообразий в таких циклах была установлена и изучена Диасом и его коллегами [24, 25, 26]. Математическая теория для отображений с гетероразмерными циклами коиндекса один (когда разность между неустойчивыми многообразиями пары седловых орбит, соединенных этими циклами, равна единице) развита Бонатти и Диазом [22, 27], где авторы доказали  $C^1$ -устойчивость гетероразмерных циклов. Общая версия этого результата с более высокой гладкостью была недавно получена Ли и Тураевым [28]. Результаты работы [28] гарантируют существование гетероразмерной динамики, в двухпараметрическом семействе диффеоморфизмов, дающем подходящую бифуркационную развертку гетероразмерного цикла.

В заключении обзора отметим, что существуют альтернативные подходы, позволяющие сделать вывод о робастности (устойчивости к возмущениям) гетероразмерной динамики. Например, с помощью выявления блендера – компактного инвариантного множества, для которого топологически «тонкие» множества неустранимо пересекаются, гарантируя робастность гетероразмерной динамики. Такие методы были разработаны в работах Краускопфа, Осинги и их соавторов [29, 30, 31]. Однако эти методы являются очень сложными и трудоемкими. В диссертационной работе вывод о робастности гетероразмерной динамики после столкновения аттрактора и репеллера делается на основе нахождения лишь четырех траекторий, образующих гетероразмерный цикл.

**Цели и задачи исследования.** Цель диссертационной работы – разработать новые методы исследования хаотической динамики диффеоморфизмов, заданных на компактном многообразии. Исследовать с помощью этих методов особенности хаотической динамики отображений двумерного и трехмерного тора.

Для достижения поставленных целей рассматривались следующие задачи:

- построение модельных отображений, демонстрирующих при изменении параметра формирование пересечения аттрактора и репеллера;
- исследование свойств физических инвариантных мер на основе вычисления расстояния Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна между физической мерой на аттракторе и физической мерой на репеллере;
- исследование взаимных размерностей для пересекающихся аттрактора и репеллера;
- описание механизмов столкновения нетривиальных гиперболических аттрактора и репеллера для диффеоморфизмов, заданных на трехмерном торе;
- создание методов выявления и построения гетероразмерных циклов;
- разработка программного комплекса, реализующего перечисленные выше методы.

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач в диссертационной работе применялись качественные, аналитические и численные методы теории динамических

систем. Аналитические методы применялись для построения диссипативных возмущений сохраняющих площадь отображений, а также для нахождения некоторых бифуркационных кривых. Качественные методы теории бифуркаций применялись для разработки сценария столкновения гиперболических аттрактора и репеллера, а также для разработки метода построения гетероразмерных циклов. Численные методы применялись для вычисления расстояния Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна, относительной размерности и спектра сингулярности для пересекающихся аттрактора и репеллера. При этом для вычисления расстояния Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна применялись пакеты программ «PyEMD: Earth mover's distance for Python» и «CLP: COIN linear program code», а вычисления относительных размерностей и спектра сингулярности производились на собственном программном обеспечении. Численные методы реализованы на языке Си++, для визуализации результатов применялся язык Python.

**Теоретическая и практическая значимость.** Теоретическая значимость диссертационной работы состоит в разработке новых подходов и методов исследования динамического хаоса, характеризующегося пересечением аттрактора и репеллера, а также в создании нового метода построения диссипативных возмущений для консервативных отображений, заданных на компактных многообразиях. Решение этих задач видится значительным продвижением для теории динамического хаоса.

Практическая значимость полученных результатов определяется следующими тремя аспектами. Разработанные в главе 1 методы сравнения хаотических множеств, в частности аттрактора и репеллера, имеют универсальный характер и применимы к широкому кругу систем (в том числе к экспериментальным наблюдениям). Обычно при исследовании зависимости динамики от параметров или от внешних воздействий упор делается на бифуркационный анализ, позволяющий отследить качественные изменения динамики. Наш метод позволяет характеризовать разницу между динамическими показателями качественно одинаковых режимов. Это особенно важно для описания эффектов при малых возмущениях, при которых можно ожидать линейную зависимость расстояний между режимами в зависимости от величины возмущения. Наши результаты показывают, что для определенного класса систем линейная зависимость сохраняется, в том числе и при больших величинах возмущения, что позволяет делать вывод о робастности динамики по отношению к внешним воздействиям, в том числе большим. Кроме того, согласно статистике цитирования в системе “google.scholar”, разработанные методы применялись более чем в 20 работах, посвященных исследованию систем из самых разных приложений (модели нейродинамики, задача о кодировании звуковой информации, модели движения твердого тела и др.), что свидетельствует о высокой практической значимости полученных результатов.

Во-вторых, описанный в главе 2 переход к гетероразмерной динамике непосредственно применим к ряду прикладных задач. Наша модель обобщает стандартную бифуркацию седло-узел на случай хаотического воздействия. Стандартная бифуркация седло-узел описывает переход от состояния равновесия к движению во многих физических системах, таких как синхронизация осцилляторов, вольт-амперная характеристика контакта Джозефсона, мобильность частиц в периодическом потенциале. Во всех этих примерах при наличии хаотического воздействия (как при хаотической внешней силе для контактов Джозефсона, так и при внутренней хаотической динамике при наличии дополнительных степеней свободы для осцилляторов и активных мобильных частиц) переход проходит по

сценарию описанному в главе 2. Таким образом, исследование механизмов столкновения аттрактора и репеллера в нашем отображении позволяет понять механизмы разрушения хаотической фазовой синхронизации в ансамблях взаимодействующих элементов. Также отметим, что согласно статистике цитирования в системе “google.scholar”, теория, представленная в главе 2 нашла применение в исследованиях мобильности активных частиц.

В-третьих, в процессе работы над диссертацией разработан программный комплекс, в рамках которого реализован ряд методов исследования аттракторов и репеллеров. Этот программный комплекс использовался для исследования рассмотренных в диссертации моделей. Однако его функциональность позволяет исследовать более широкие классы динамических систем, демонстрирующих столкновение и пересечение аттракторов и репеллеров.

### **Результаты, выносимые на защиту.**

1. Новые методы исследования хаотической динамики диффеоморфизмов, заданных на компактном многообразии.

На основе вычисления различных типов расстояний между численно определяемой физической инвариантной мерой для системы в прямом времени и соответствующей мерой для этой же системы в обратном времени разработаны методы, позволяющие определять границы применимости теории линейного отклика, в частности, исследовать случай большого внешнего воздействия на систему, а также исследовать свойства обратимости (реверсивности) системы; предложен новый способ проверки наличия/отсутствия неравномерной гиперболичности.

2. Новый сценарий столкновения хаотического аттрактора с хаотическим репеллером для отображений, заданных на трехмерном торе.

На примере трехмерного отображения, представляющего собой косое произведение двумерного диффеоморфизма Аносова и одномерного отображения Мёбиуса, показано, что гиперболический аттрактор может столкнуться с гиперболическим репеллером в результате бифуркации седло-седло, когда какая-то из седловых периодических точек принадлежащая аттрактору сливается с седловой периодической точкой, принадлежащей репеллеру. Показано, как в результате бесконечного каскада таких бифуркаций физические меры на аттракторе и репеллере становятся неразличимыми. Предложена и апробирована процедура построения гетероразмерного цикла сразу после столкновения гиперболического аттрактора и гиперболического репеллера.

3. Программный комплекс для исследования обратимых и диссипативных систем.

Разработан программный комплекс, позволяющий для систем с пересекающимися аттрактором и репеллером вычислять расстояние Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна, взаимные размерности и спектр сингулярности физических мер, вычислять спектр коротких показателей Ляпунова, а также находить гетероразмерные циклы.

**Новизна и достоверность.** Результаты, описанные в диссертационной работе, являются новыми. Они хорошо согласуются с имеющимися теоретическими представлениями и положениями. Численные эксперименты подробно описаны. Часть их воспроиз-

водились соавторами диссертанта для проверки. Для расчета расстояния Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна применялось два различных пакета программ, в обоих случаях полученные результаты совпадали.

Выносимые на защиту результаты, опубликованы в трех статьях в журнале Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science (Web of Science, Q1) – одном из ведущих журналов по теории динамического хаоса и ее приложениям.

#### **Апробация полученных результатов.**

Основные результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях и семинарах:

1. Постерный доклад “*Kantorovich-Rubinstein-Wasserstein distance between attractor and repeller*”, международная конференция «Shilnikov WorkShop 2020» 17-18 декабря 2020г. г.Нижний Новгород
2. Постерный доклад “*On the collision of a chaotic attractor with a chaotic repeller leading to the emergency of hyperchaotic orbits*”, международная конференция «Shilnikov WorkShop 2021» 16-17 декабря 2021г. г.Нижний Новгород
3. Доклад “*Attractor-repeller collision and the heterodimensional dynamics*”, международная конференция «Shilnikov WorkShop 2022» 19-20 декабря 2022г. г.Нижний Новгород
4. Доклад “*Метрические оценки подобия между хаотическими аттракторами и репеллерами*”, КРОМШ 2020 Ласпи-Батилиман.
5. Доклад “*Спектры взаимных сингулярностей перекрывающихся аттрактора и репеллера*”, КРОМШ 2021 пос. Сатера, Алужта.
6. Доклад “*Kantorovich-Rubinstein-Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller*”, научный семинар международной лаборатории динамических систем и приложений, 24 апреля 2020г. г.Нижний Новгород
7. Доклад “*Взаимные сингулярности пересекающихся аттрактора и репеллера*”, научный семинар международной лаборатории динамических систем и приложений, 01 октября 2021г. г.Нижний Новгород
8. Доклад “*Столкновение аттрактора с репеллером и гетероразмерная динамика*”, научный семинар международной лаборатории динамических систем и приложений, 18 января 2023г. г.Нижний Новгород

**Список статей, представленных к защите по теме диссертации, с указанием личного вклада диссертанта.**

[1\*] Chigarev V., Kazakov A., Pikovsky A. Kantorovich-Rubinstein-Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller//Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **30** (2020), С. 073114

<https://doi.org/10.1063/5.0007230>

(Главный соавтор. Предложен метод построения диссипативных возмущений для консервативных отображений, заданных на торе. Проведены численные эксперименты по



вычислению расстояния Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна для пересекающихся аттракторов и репеллеров.)

- [2\*] Chigarev V., Kazakov A., Pikovsky A. Mutual singularities of overlapping attractor and repeller//Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **31** (2021), С. 083127  
<https://doi.org/10.1063/5.0056891>

(Главный соавтор. Проведены численные эксперименты по вычислению относительных размерностей и спектров взаимной сингулярности аттрактора и репеллера.)

- [3\*] Chigarev V., Kazakov A., Pikovsky A. Attractor–repeller collision and the heterodimensional dynamics//Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **33** (2023), С. 063113  
<https://doi.org/10.1063/5.0144672>

(Главный соавтор. Описан сценарий столкновения гиперболических аттрактора и репеллера, предложен метод построения гетероразмерных циклов, выполнены все численные эксперименты.)

## 1 Краткое содержание работы. Основные результаты

Основные результаты диссертационной работы содержатся в трех главах:

- расстояние Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна, относительные размерности и взаимные сингулярности пересекающихся аттрактора и репеллера;
- столкновение хаотического аттрактора с хаотическим репеллером в отображениях, заданных на трехмерном торе и гетероразмерная динамика;
- численные методы и программный комплекс.

### 1.1 Расстояние Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна и относительные размерности пересекающихся аттрактора и репеллера

В главе 1 для систем, демонстрирующих пересечение хаотического аттрактора и хаотического репеллера, мы строим количественные характеристики различимости этих двух множеств. При этом мы обходим стороной вопросы, связанные с топологией и структурой этих двух множеств<sup>1</sup>, сосредотачиваясь больше на вопросах, связанных с распределением инвариантных мер на аттракторе и репеллере, соответственно. Более того, говоря об аттракторах и репеллерах мы будем, подразумевать, инвариантную меру для системы в прямом и обратном времени, соответственно, если иное не будет обговариваться отдельно.

Сперва, мы вводим 4 базовые модели: три отображения, заданных на двумерном торе, и систему дифференциальных уравнений, заданную на трехмерном торе.

---

<sup>1</sup>Этим вопросам посвящены, например, следующие работы [5, 16, 6, 9].

Первое отображение это отображение Аносова  $A$ :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + y_n \pmod{1}, \\ y_{n+1} &= x_n + y_n \pmod{1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Это яркий пример консервативного гиперболического хаоса [32], см. рис. 1а, демонстрирующий, что устойчивое и неустойчивое многообразия седловой неподвижной точки  $O(0, 0)$  пересекаются трансверсально.

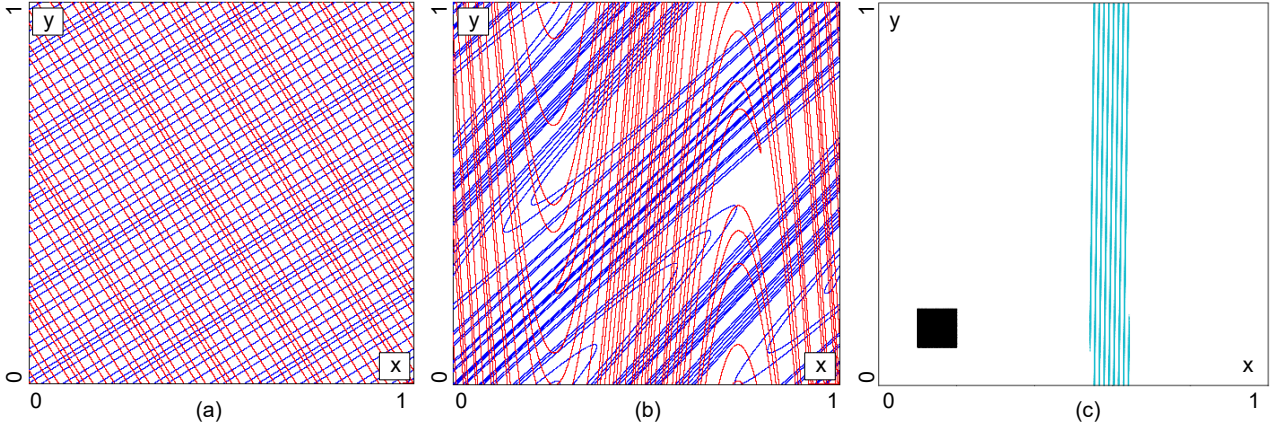


Рис. 1: Устойчивые (окрашенные красным цветом) и неустойчивые (окрашенные синим цветом) инвариантные многообразия седловой неподвижной точки  $(0, 0)$  (а) для отображения Аносова (1) и (б) стандартного отображения Чирикова (2) с  $K = 14/(2\pi)$ ; (с) образ квадрата  $([0.1, 0.2] \times [0.1, 0.2])$ , плотно заполненного начальными точками, после 80й итерации отображения (3).

Второе отображение это стандартное отображение Чирикова  $C$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + K \sin(2\pi y_n) \pmod{1}, \\ y_{n+1} &= y_n + x_{n+1} \pmod{1}, \end{aligned} \quad (2)$$

являющееся прототипом гамильтоновой динамики с разделенным фазовым пространством [33]. При малых значениях параметра  $K$  динамика близка к интегрируемой, а при  $K \gg 1$  преимущественно хаотическая. Хаос здесь не гиперболический, так как устойчивые и неустойчивые многообразия седловых периодических точек могут иметь касания, см. рис. 1б. Таким образом, не исключается существование эллиптических периодических точек [34] и островов устойчивости вокруг них. На практике, при достаточно больших значениях параметра  $K$ , такие острова обнаружить сложно. Здесь мы принимаем  $K = 14/(2\pi)$ , то есть как раз рассматриваем случай, при которых острова устойчивости не проявляются.

Третье отображение представляет собой линейный косой сдвиг по повороту окружности,  $S$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n \pmod{1}, \\ y_{n+1} &= y_n + \omega \pmod{1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Это отображение не хаотично, оно имеет два нулевых показателя Ляпунова. Известно, что для иррациональных значений параметра поворота  $\omega$  это отображение является эргодическим [35]. Ниже мы фиксируем этот параметр в значении, равном обратному к золотому

сечению ( $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ ). Чтобы проиллюстрировать его эргодичность, на рис. 1с изображена  $n$ -я итерация маленького прямоугольника ( $[0.1, 0.2] \times [0.1, 0.2]$ ), плотно заполненного начальными точками. При  $n \rightarrow \infty$  образ этого прямоугольника дает плотное вдоль оси  $y$  множество. На рис. 1с этот факт продемонстрирован для  $n = 80$ .

Во всех введенных выше отображениях аттрактор совпадает с репеллером. Чтобы «расщепить» эти множества, т.е. чтобы мера на аттракторе отличалась от меры на репеллере, нужно ввести диссипацию, разрушающую свойство сохранения фазового объема, и делающую так, чтобы в одних областях на торе якобиан был меньше единицы, а в других – больше. Для этого мы применяем отображение Мёбиуса  $M(\varepsilon, u, v)$  [36, 37]

$$e^{i2\pi(x_{n+1}-v)} = \frac{\varepsilon + e^{i2\pi(x_n-u)}}{\varepsilon e^{i2\pi(x_n-u)} + 1}. \quad (4)$$

Это отображение представляет собой отображение окружности  $x_n \rightarrow x_{n+1} \pmod{1}$ , зависящее от трех параметров  $0 \leq u, v < 1$  и  $-1 < \varepsilon < 1$ . Параметр  $\varepsilon$  определяет степень сжатия на окружности. При  $\varepsilon = 0$  отображение Мёбиуса представляет собой сдвиг окружности. Для  $\varepsilon \rightarrow 1$  оно отображает почти всю окружность в небольшую окрестность одной точки на ней.

Для отображения (4) легко определить обратное отображение:

$$M^{-1}(\varepsilon, u, v) = M(-\varepsilon, v, u)$$

Действие отображения Мёбиуса при различных значениях параметра диссипации  $\varepsilon$  ( $u = v = 0$ ), а также обратного к нему отображения проиллюстрировано на рис. 2.

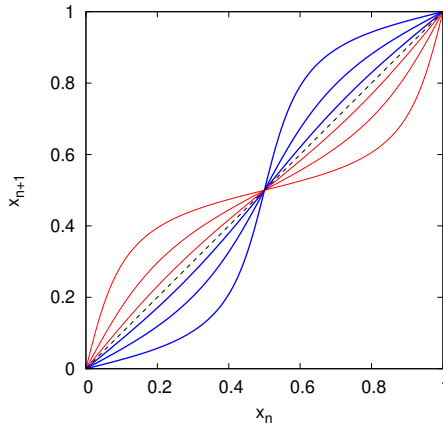


Рис. 2: Отображение Мёбиуса (синие линии)  $M(\varepsilon, 0, 0)$  и обратное отображение Мёбиуса  $M^{-1}(-\varepsilon, 0, 0)$  (красные линии) для трех значений параметра диссипации  $\varepsilon = 0.1, 0.3, 0.6$ .

Для возмущения описанных выше консервативных отображений с помощью отображения Мёбиуса  $M(\varepsilon, u, v)$  (4) мы строим композицию этих отображений с двумерным отображением вида

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \begin{pmatrix} M(\varepsilon, 0, 0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Мы рассматриваем два типа таких композиций: простейшую и симметричную. В пер-

вом случае получаем отображения вида:

$$\mathcal{A} : \mathcal{M}_\varepsilon A, \quad (6)$$

$$\mathcal{C} : \mathcal{M}_\varepsilon C, \quad (7)$$

$$\mathcal{S} : \mathcal{M}_\varepsilon S. \quad (8)$$

Во втором случае мы применяем отображение (5) к отображениям  $A, C$  и  $S$  симметричным образом, сохраняя симметрию относительно итераций вперед и назад по времени:

$$\mathcal{AS} : \mathcal{M}_\varepsilon A \mathcal{M}_\varepsilon, \quad (9)$$

$$\mathcal{CS} : \mathcal{M}_\varepsilon C \mathcal{M}_\varepsilon, \quad (10)$$

$$\mathcal{SS} : \mathcal{M}_\varepsilon S \mathcal{M}_\varepsilon. \quad (11)$$

В качестве четвертого модельного примера мы рассматриваем пример пересекающихся аттрактора и репеллера в системе с непрерывным временем. Мы строим наш пример на трехмерном торе  $0 \leq x_i < 1, i = 1, 2, 3$  следующим образом. Сначала записываем динамическую систему, сохраняющую фазовый объем, подобно трем отображениям, описанным выше:

$$\dot{x}_k = \sum_j (A_{kj} \cos 2\pi x_j + B_{kj} \sin 2\pi x_j + C_{kj} \cos 4\pi x_j + D_{kj} \sin 4\pi x_j). \quad (12)$$

Здесь  $A_{kj}, B_{kj}, C_{kj}$  и  $D_{kj}$  – параметры. Далее полагаем

$$A_{kk} = B_{kk} = D_{kk} = 0, \quad C_{kk} = \varepsilon,$$

что позволяет управлять дивергенцией фазового объема с помощью параметра  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon = 0$  фазовый объем сохраняется, а при  $\varepsilon \neq 0$  в одной части фазового пространства объемы сжимаются, а в другой – растягиваются. Далее мы перебирали значения коэффициентов  $A_{kj}, B_{kj}, C_{kj}, D_{kj}$  случайным образом из равномерного распределения на интервале  $(-0.5, 0.5)$  до тех пор пока не нашли набор, дающий хаотическую динамику и в прямом, и в обратном времени на некотором интервале параметра  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon < 0.035$ ).

**Все четыре предложенных модельных примера (три отображения, заданных на двумерном торе и поток, заданный на трехмерном торе) объединяет следующее свойство:**

- при  $\varepsilon > 0$  численно построенный аттрактор пересекается с численно построенным репеллером, но при этом эти два множества визуально различаются и эта различимость не может быть устранена с помощью увеличения точности построения аттрактора и репеллера.

Далее в главе мы вводим концепцию расстояния Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна (КРВ) для количественного описания степени различимости численно построенных аттрактора и репеллера и успешно применяем ее ко всем четырем введенным моделям. Расстояние КРВ характеризует меру близости между двумя вероятностными мерами  $\mu$  и  $\nu$ .

Оно определяется как оптимальное решение транспортной задачи по Монжу и Канторовичу, а именно как транспортный протокол, минимизирующий затраты, необходимые для транспортировки массы из  $\mu$  в  $\nu$ . Мы полагаем, что обе меры представляют собой взвешенные наборы точечных мер (т.е. их плотности представляют собой наборы дельта-функций, см. [20]):

$$\mu = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \delta_{x_i}, \quad \nu = \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j \delta_{y_j}.$$

Тогда любая матрица  $f_{ij} \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq n_1$ ,  $1 \leq j \leq n_2$ , удовлетворяющая соотношениям

$$\sum_i f_{ij} = \beta_j, \quad \sum_j f_{ij} = \alpha_i,$$

производит возможную транспортировку, переносящую одну меру в другую. Оптимальная транспортировка должна минимизировать функцию стоимости, определяемую в соответствии с «выполненной работой». Выполненная работа, в свою очередь, равна умножению транспортируемой массы  $f_{ij}$  на расстояние  $c_{ij} = \|x_i - y_j\|_2$  между двумя точками. Таким образом функцию минимальной стоимости можно записать следующим образом

$$W(\mu, \nu) = \min \sum_{i,j} f_{ij} c_{ij}.$$

Мы называем эту функцию расстоянием Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна между двумя мерами  $\mu$  и  $\nu$ . В качестве расстояния  $c_{ij}$  здесь можно использовать любую метрику. Мы используем евклидово расстояние.

В первой части главы 1 проведены численные эксперименты по применимости концепции расстояния КРВ для оценки степени различимости аттракторов и репеллеров ко всем четырем рассматриваемым моделям: результаты экспериментов для трех модельных отображений представлены на рис. 3. Во всех случаях установлено, что расстояние растет линейно с увеличением параметра диссипации  $\varepsilon$ , с помощью которого системы возмущены от идеального случая, когда аттрактор в точности совпадает с репеллером. Отметим, что для пересекающихся аттрактора и репеллера такой метод применялся впервые в работе диссертанта.

Далее, мы проведем вычисления расстояния КРВ для отображения Аносова-Мёбиуса (6) и отображения Чирикова-Мёбиуса (7) на более детальной сетке, чтобы определить границы применимости теории линейного отклика. Теория линейного отклика - это методика, которая используется для анализа поведения системы под воздействием малых возмущений путем линеаризации ее динамики вокруг точки равновесия. Графики, иллюстрирующие результаты, представлены на рис. 4. Из этих графиков мы делаем выводы:

- расстояние КРВ растет линейно по параметру  $\varepsilon$  при малых значениях параметра;
- около линейный рост сохраняется также при больших значениях параметра  $\varepsilon$  (вплоть до  $\varepsilon = 1$ );
- рассмотренные отображения нереверсивны;

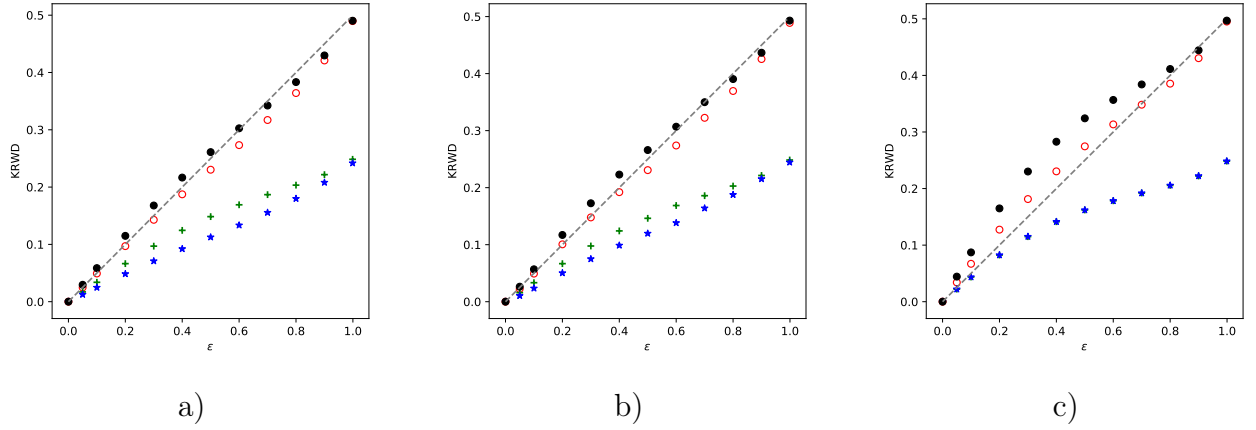


Рис. 3: Результаты расчета расстояния Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна для (а) отображения Аносова-Мёбиуса (6), (b) Чирикова-Мёбиуса (7) и (с) отображения косо́го сдвига (8). Красными кружками обозначены расстояния между аттрактором и репеллером, зелеными плюсами – расстояния между аттрактором и равномерным распределением, синие звездочками – расстояния между репеллерами и равномерным распределением (на рис. (с) звездочки перекрываются с плюсами). Черные закрашенные кружки отвечают суммам значений, отмеченных плюсами и звездочками. Заштрихованная прямые имеют наклон 0.5.

- в пространстве инвариантных мер мера Лебега лежит близко к прямой, соединяющей меру на аттракторе с мерой на репеллере;
- при  $\varepsilon = 1$  результат подтвержден аналитически;
- для отображения Чирикова-Мёбиуса (7) зависимость КРВ от параметра негладкая;

Вторая часть главы 1 посвящена исследованию фрактальных свойств пересекающихся аттрактора и репеллера. Здесь проведены исследования относительных размерностей Реньи и спектров взаимной сингулярности двух этих множеств, в случае, когда они имеют общий носитель. Теория обобщенных размерностей и спектров сингулярностей для фрактальной меры является довольно хорошо разработанной и успешней зарекомендовать себя в различных приложениях. Напомним основные ее элементы для полноты изложения. Рассмотрим множество  $U$  с фрактальной мерой. Покрывая множество ячейками размера  $\epsilon$ , мы получаем конечномерную аппроксимацию фрактальной меры с мерами ячеек  $u_i$  (для нормализации требуется  $\sum_i u_i = 1$ ). Переходя к более мелким разбиениям, определяются величины  $\tau(q; U)$  и обобщенные размерности  $D(q; U)$  согласно

$$\tau(q; U) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_i u_i^q}{\ln \epsilon}, \quad D(q; U) = \frac{\tau(q; U)}{q - 1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q - 1} \frac{\ln \sum_i u_i^q}{\ln \epsilon}. \quad (13)$$

Обратим внимание, что сумма в (13) может быть представлена как среднее по ячейкам конечного размера.  $\sum_i u_i^q = \langle u^{q-1} \rangle_U$ . Наиболее важными являются: размерность Минковского  $D(0; U)$  (дает количество пустот); информационная размерность  $D(1; U)$  (дает усредненный индекс скученности); и корреляционная размерность  $D(2; U)$  (легко вычисляемая методом Грассбергера-Прокаччия [38]). Относительные размерности Реньи определяются

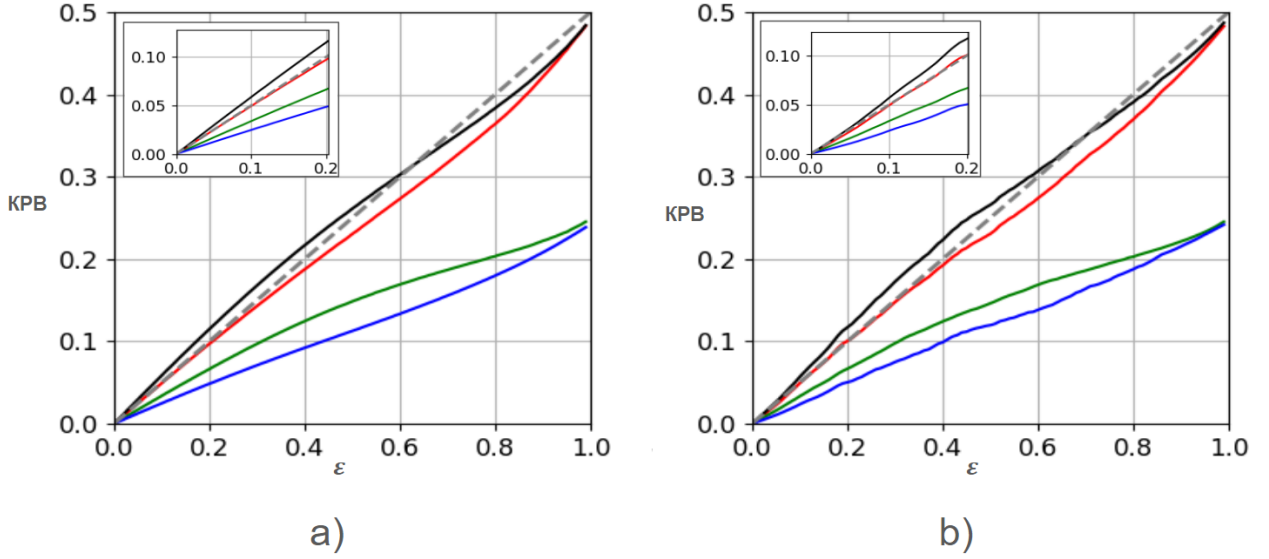


Рис. 4: Результаты расчета расстояния Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна для (а) отображения Аносова-Мёбиуса (6) и (б) Чирикова-Мёбиуса (7) с более подробным шагом. Красный – расстояния между аттрактором и репеллером, зеленый – расстояния между аттрактором и мерой Лебега, синий – расстояния между репеллером и мерой Лебега, черный = зеленый + синий, серая прямая имеет наклон 0.5

как:

$$D^R(q; U||V) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{R(\epsilon, q; U||V)}{\ln \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_i u_i^q v_i^{1-q}}{\ln \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \left\langle \left( \frac{u_i}{v_i} \right)^{q-1} \right\rangle_U}{\ln \epsilon}. \quad (14)$$

на основе формулы дивергенции Реньи

$$R(\epsilon, q; U||V) = \frac{1}{q-1} \ln \sum_i u_i^q v_i^{1-q} = \frac{1}{q-1} \ln \left\langle \left( \frac{u_i}{v_i} \right)^{q-1} \right\rangle_U. \quad (15)$$

где  $U$  и  $V$  - две фрактальные меры *имеющие общий носитель* с соответствующими значениями в  $\epsilon$ -ячейках  $u_i$  и  $v_i$ , Здесь индекс  $u$  знака усреднения указывает на то, что усреднение производится по мере  $U$ .

В идеальном случае фрактальные направления множеств  $U$  и  $V$  строго ортогональны. Кроме того, поскольку приведенные выше понятия применимы к множествам с общим носителем, мы рассматриваем две меры, имеющие размерность Минковского, равную полной размерности фазового пространства (в нашем случае 2). Другими словами, в этих множествах нет пустот (что характерно для стандартных канторовских множеств), но их меры являются мультифракталами. Поэтому будем считать, что на единичном квадрате мера  $U$  фрактальна вдоль оси  $x$  (и проекцию меры на ось  $x$  мы обозначаем как  $\mu$ ) и равномерна вдоль оси  $y$ . Мера  $V$  предполагается фрактальной вдоль оси  $y$  (обозначим проекцию на ось  $y$  как  $\nu$ ) и равномерной вдоль оси  $x$ . Меры двумерной ячейки с индексами  $(i, j)$  размера  $\epsilon$  равны  $u_{ij} = \mu_i \epsilon$  и  $v_{ij} = \nu_j \epsilon$ .



Фрактальные размерности мер получаются подстановкой этих выражений в (13):

$$\begin{aligned}\tau(q; U) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_i \mu_i^q + (q-1) \ln \varepsilon}{\ln \varepsilon} = \tau(q; \mu) + q - 1, & D(q; U) &= D(q; \mu) + 1, \\ \tau(p; V) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_j \nu_j^p + (p-1) \ln \varepsilon}{\ln \varepsilon} = \tau(p; \nu) + p - 1, & D(p; V) &= D(p; \nu) + 1.\end{aligned}\quad (16)$$

Подчеркнем здесь, что, поскольку носителем двух мер является весь квадрат,  $D(0; \mu) = D(0; \nu) = 1$ .

Аналогичные вычисления относительной размерности Реньи дают

$$D^R(q; U||V) = D(q; \mu) + \frac{qD(1-q; \nu) - 1}{1-q} = D(q; U) + \frac{qD(1-q; V) - 2}{1-q}. \quad (17)$$

Полученные результаты вычислений относительных размерностей Реньи (рис. 5) показывают, что диапазон относительных размерностей растет с ростом параметра диссипации, как и ожидалось. Также показано, что наиболее удобной характеристикой различности между аттрактором и репеллером, наилучшим образом отражающей фрактальные свойства этих двух множеств, является дивергенция (размерность) Кульбака-Лейблера. Установлено, что эта размерность обращается в ноль, если аттрактор и репеллер совпадают, и растет квадратично с параметром диссипации. Дополнительно показано, что для всех рассмотренных примеров относительные размерности пересекающихся аттрактора и репеллера достаточно точно могут быть выведены из фрактальных свойств аттрактора и репеллера по отдельности. Несмотря на то, что такое представление теоретически обосновано лишь для ортогональных фрактальных мер, наши расчеты показали, что такой подход дает весьма точные результаты и для неортогональных мер, притом, как в случае гиперболических, так и негиперболических отображений.

## 1.2 Столкновения аттрактора и репеллера и гетероразменная динамика

В главе 2 исследуется явление столкновение гиперболического аттрактора и гиперболического репеллера в отображении, заданном на трехмерном торе. В качестве модельной системы здесь рассматривается хаотически управляемое отображение окружности

$$t_{n+1} = 2t_n + s_n \pmod{1}, \quad (18a)$$

$$s_{n+1} = t_n + s_n \pmod{1}, \quad (18b)$$

$$x_{n+1} = x_n + c + \mu \sin(2\pi t_n + \alpha) - \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{\varepsilon \sin 2\pi x_n}{1 + \varepsilon \cos 2\pi x_n} \right) \pmod{1}. \quad (18c)$$

Здесь уравнения (18a)–(18b) описывают управляющее отображение Аносова, а уравнение (18c) представляет собой управляемое отображение Мёбиуса. Отметим, что системы типа (18) возникают в контексте задач о хаотической фазовой синхронизации [21], когда исследуются периодические возбуждения хаотического аттрактора с четко определенной фазовой переменной. В таком контексте система (18) и ее параметры могут быть интер-



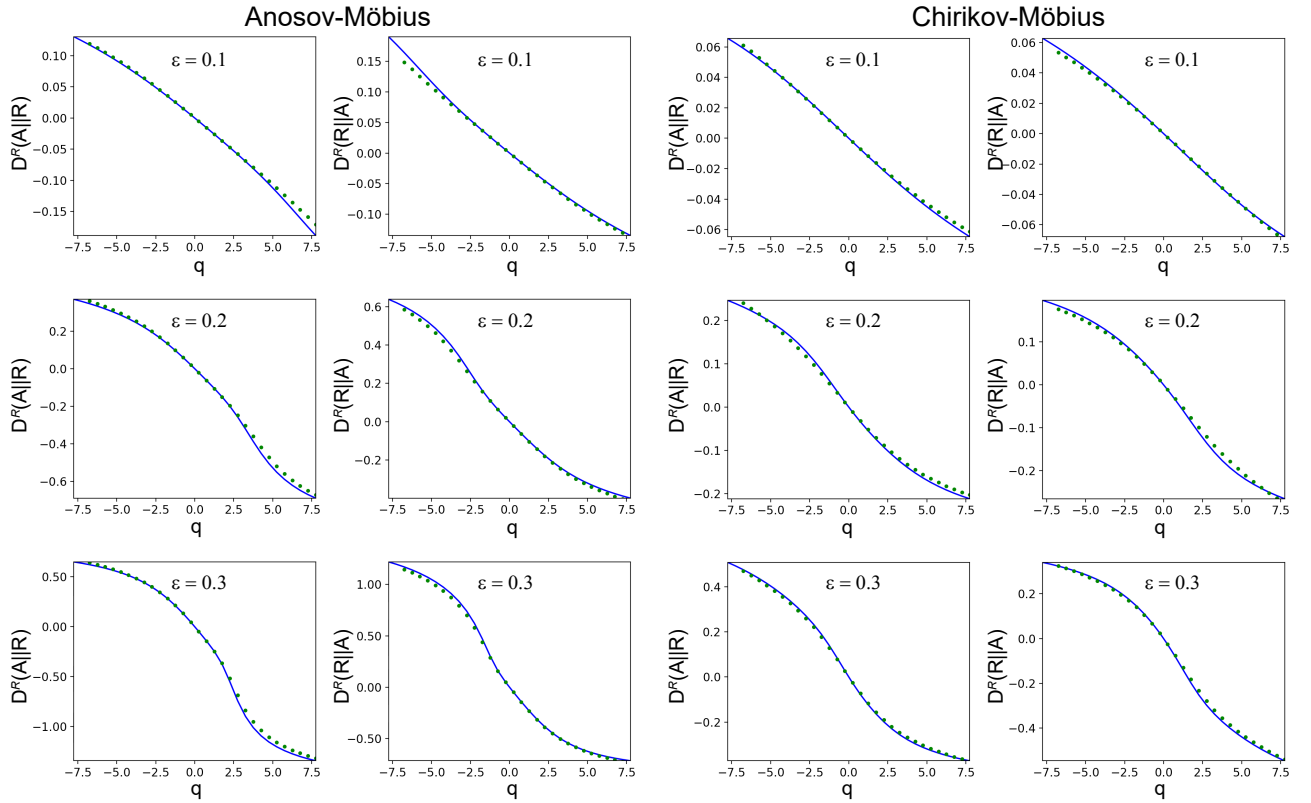


Рис. 5: Относительные размерности Реньи для отображения Аносова-Мёбиуса (6) (два столбца слева) и отображения Чирикова-Мёбиуса (7) (два столбца справа); нечетные столбцы:  $D^R(q; A||R)$ , четные столбцы:  $D^R(q; R||A)$ . Строки сверху вниз соответствуют значениям параметра диссипации в отображении Мёбиуса  $\varepsilon = 0.1, 0.2, 0.3$ . Синие кривые соответствуют непосредственному вычислению взаимных размерностей между аттрактором и репеллером; зеленые кружки – значения частичных размерностей, полученных с использованием соотношения ортогональности (17). Видно, что это соотношение хорошо работает во всех случаях. Обратите внимание, что во всех случаях  $D^R(q = 0) = 0$ , как и должно быть для двух мер, имеющих один и тот же носитель (см. свойство 6 при обсуждении размерностей Реньи).

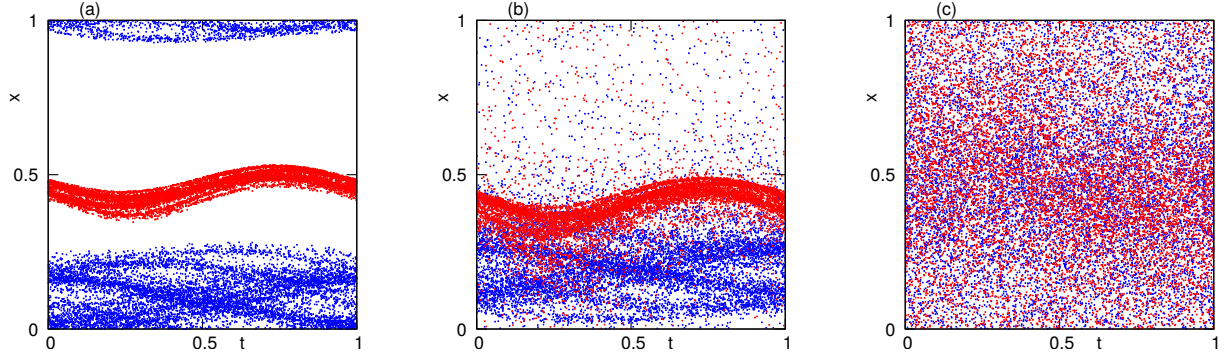


Рис. 6: Проекция аттрактора (синие точки) и репеллера (красные точки) для  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\alpha = 0$  и  $\mu = 0.1$ . (a)  $c = 0.05$ , аттрактор и репеллер разделены; (b)  $c = 0.1$ , аттрактор и репеллер пересекаются, но соответствующие им инвариантные меры совершенно разные; (c)  $c = 0.4$ , меры пересекающихся аттрактора и репеллера очень похожи.

претированы следующим образом. Отображение Аносова (18a)–(18b) описывает хаос амплитудных переменных аттрактора, а переменная  $x$  в уравнении 18c соответствует фазе. Параметр  $\mu$  описывает «внутреннюю связь» между амплитудой и фазой; он определяет фазовую диффузию и связан с уровнем когерентности свободных хаотических колебаний (большие значения  $\mu$  соответствуют более сильной фазовой диффузии, малые значения  $\mu$  означают почти регулярные повороты фаз). Особенности этой внутренней связи зависят от дополнительного фазового сдвига  $\alpha$ . Члены  $c$  и  $\varepsilon$  описывают воздействие внешней периодической силы на хаотический аттрактор, их смысл тот же, что и в контексте редукции отображения на окружности для вынужденных периодических колебаний:  $c$  примерно пропорционально расстройке частот несоответствия фаз, а  $\varepsilon$  описывает величину возбуждения.

На рисунке 6 изображены хаотический аттрактор и хаотический репеллер в системе (18). Для их построения мы численно строили достаточно длинные траектории некоторой начальной точки в прямом (для построения аттрактора) и обратном (для построения репеллера) времени, отбрасывая начальные точки, отвечающие переходным процессам. Эти траектории дают представления об инвариантных мерах аттрактора и репеллера. В ситуации, изображенной на рис. 6a, эти множества разделены: аттрактор лежит в некоторой поглащающей области, а репеллер в прямом времени служит хаотическим седлом, вблизи которого наблюдается долгоживущая переходная динамика [39]. При обращении времени в отображении эти два множества меняются ролями. На рис. 6b и 6c показаны случаи пересекающихся аттрактора и репеллера. В этом случае оба этих множества плотны во всем фазовом пространстве (на всем трехмерном торе). Однако инвариантные меры аттрактора и репеллера в случае рис. 6b совершенно разные, а в случае рис. 6c эти меры почти совпадают. Переход от разделенных аттрактора и репеллера (рис. 6a) к пересекающимся этим множествам (рис. 6b,c) называется *столкновением аттрактора и репеллера* [21].

В первой части главы 2 мы описываем бифуркации, сопровождающие это столкнове-

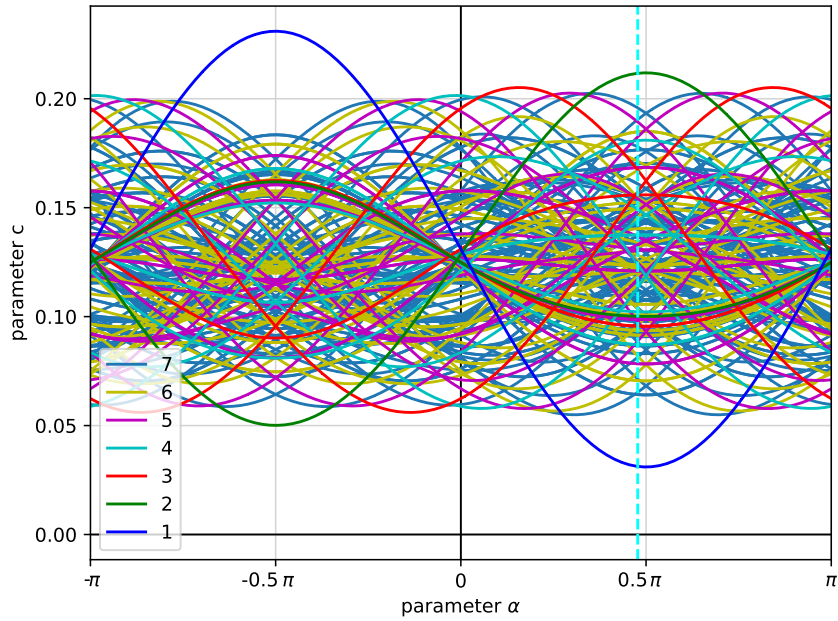


Рис. 7: Кривые касательных (седло-узловых) бифуркаций отображения (18) для всех периодических орбит отображения Аносова с периодами  $\leq 7$  (кривые для периодических орбит одного и того же периода имеют одинаковый цвет, см. легенду в левом нижнем углу), на плоскости параметров  $(c, \varepsilon)$  при  $\varepsilon = 0.4$  и  $\mu = 0.1$ . «Огибающие» этих кривых определяют границу между режимами 1 и 3 (малые значения  $c$ ) и между режимами 2 и 3 (большие значения  $c$ ).

ние. Для отображения (18) соответствующие бифуркации очень хорошо поддаются исследованию, благодаря особым свойствам отображения Мёбиуса. Любая его итерация снова является отображением Мёбиуса (хотя и с другими параметрами), т.е. для любой орбиты периода  $m$  в управляющей подсистеме (18a)–(18b) отображение  $x_n \rightarrow x_{n+m}$  является отображением Мёбиуса. Поскольку это отображение является автономным, оно:

- или (i) имеет пару из устойчивой и неустойчивой неподвижных точек (внутри базовой «области синхронизации», где число вращения является целым);
- или (ii) гладким преобразованием  $x \rightarrow y$  может быть преобразовано в поворот окружности  $y_{n+m} = y_n + m\rho$ , где  $\rho$  – число вращения. Это число монотонно зависит от параметров, что исключает существование окон периодичности более высоких порядков.

Эта особенность отображения Мёбиуса означает, что для любой движущей периодической орбиты  $(t_n, s_n)$  в уравнении 18c существует только одна возможная касательная (седло-узловая) бифуркация, разделяющая режимы (i) и (ii). На рисунке 7 показаны бифуркационные кривые, соответствующие касательным бифуркациям периодических орбит с периодом  $\leq 7$  на плоскости параметров  $(c, \alpha)$  при фиксированных  $\varepsilon = 0.4$  и  $\mu = 0.1$ .

Из рис. 7 видно, что для каждого значения параметра  $\alpha$  существует диапазон положительных значений параметра  $c$ ,  $0 < c_1(\alpha, \mu, \varepsilon) \leq c \leq c_2(\alpha, \mu, \varepsilon)$ , на котором происходят касательные бифуркации периодических точек всех возможных периодов. (Соответствующий интервал отрицательных значений  $c$ ,  $c_3(\alpha, \mu, \varepsilon) \leq c \leq c_4(\alpha, \mu, \varepsilon) < 0$ ). Мы будем называть эти диапазоны значений параметра  $c$  *переходными областями*. Таким образом, система (18) демонстрирует три динамических состояния в зависимости от величины параметра  $c$ :

1. **Диапазон малых  $|c|$  (рис. 6а).** Отдельные друг от друга аттрактор и репеллер существуют при  $c_4(\alpha, \mu, \varepsilon) < c < c_1(\alpha, \mu, \varepsilon)$ . Здесь координата  $x$  на аттракторе и репеллере является функцией, зависящей от  $(t, s)$ . Ожидается, что эта функция будет относительно гладкой при больших  $\varepsilon$  и негладкой (фрактальной) при малых  $\varepsilon$ . Все остальные точки фазового пространства (за исключением множества меры нуль) принадлежат бассейну аттрактора (репеллера, для системы в обратном времени). Число вращения  $\rho$  здесь равно нулю.
2. **Диапазон больших  $|c|$  (рис. 6с).** Аттрактор и репеллер пересекаются и не имеют изолированных периодических орбит для  $c > c_2(\alpha, \varepsilon, \mu)$  и  $c < c_3(\alpha, \varepsilon, \mu)$ . Таким образом, для этого диапазона параметров не существует гиперболических множеств. Эволюция переменной  $x$  для каждой периодической орбиты отображения Аносова описывается суперпозицией отображений Мёбиуса, в результате чего получается отображение Мёбиуса, гладко сопряженное сдвигу окружности. Это означает, что полная система (18) не имеет изолированных периодических орбит.
3. **Диапазон средних  $|c|$  (рис. 6б).** соответствует переходной области. В этих переходных областях  $c_1 \leq c \leq c_2$  и  $c_3 \leq c \leq c_4$  некоторые пары седловых периодических орбит уже исчезли в результате касательной бифуркации, а некоторые все еще существуют. Аттрактор и репеллер пересекаются, но их меры сосредоточены в разных областях.

Во второй части главы 2 мы строим гетероразмерный цикл в области  $c_1 \leq c \leq c_2$ , т.е. гетероклинический цикл, соединяющий унаследованные от прежнего аттрактора и репеллера седловые периодические орбиты. Для краткости мы называем их *A-орбитами* и *R-орбитами*, соответственно. Эти орбиты имеют разные размерности устойчивых и неустойчивых многообразий: A-орбиты имеют двумерное устойчивое и одномерное неустойчивое многообразия (одно устойчивое и одно неустойчивое направления из отображения Аносова (18a)–(18a) и один устойчивый собственный вектор в направлении  $x$ ), R-орбиты имеют одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия (здесь собственный вектор в направлении  $x$  неустойчивый).

Характерной особенностью режима 3 является существование гетероразмерных циклов [22, 27, 28], состоящих из пар гетероклинических траекторий, соединяющих A-орбиты с R-орбитами: одна из этих траекторий лежит в трансверсальном пересечении двумерных многообразий A-орбиты и R-орбиты, а другая проходит через нетрансверсальное (к размерности 1) пересечение одномерных многообразий этих орбит, см. рис. 8. Во второй части главы 2 мы даем численное подтверждение существования таких циклов. Для простоты мы ограничиваемся простейшим случаем, когда A- и R-орбиты имеют период два, а пара неподвижных точек  $A_1$  и  $R_1$ , принадлежавших аттрактору и репеллеру, соответственно, уже исчезли в результате касательной бифуркации.

В этом случае удобнее рассматривать вторую итерацию отображения. Тогда точки периода два  $A_2$  и  $R_2$  в отображении (18) становятся неподвижными точками. Мы обозначаем соответствующую неподвижную точку дважды примененного отображения Аносова (18a)–(18b) через  $P_2$ , неподвижную точку отображения Аносова через  $P_1$ . Цикл, который мы построим, начинается с  $A_2$ . Затем значения  $(t, s)$  становятся близкими к неподвиж-

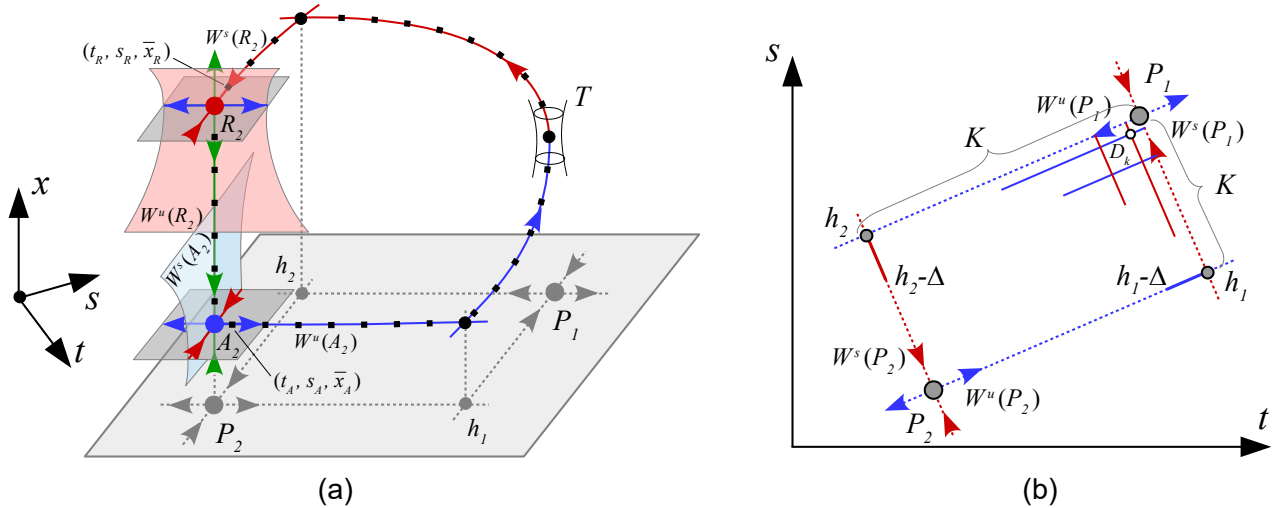


Рис. 8: (a) Иллюстрация к построению гетероразмерного цикла, соединяющего точки  $A_2$  и  $R_2$ . Кроме точек  $A_2$  и  $R_2$ , этот цикл также состоит из двух орбит (отмечены черными квадратными точками). Одна (тривиальная) орбита принадлежит трансверсальному пересечению двумерных многообразий  $W^s(A_2)$  и  $W^u(R_2)$ , вдоль этой орбиты меняется только переменная  $x$  (поэтому она выглядит как вертикальная линия на рисунке). Другая (нетривиальная) орбита проходит через нетрансверсальное (коразмерности 1) пересечение одномерных многообразий  $W^u(A_2)$  и  $W^s(R_2)$  внутри узкого туннеля  $T$ . Точки  $P_1$  и  $P_2$  это неподвижная точка и точка периода 2 в отображении Аносова (18a)–(18b); гетероклинические точки  $h_1$  и  $h_2$  принадлежат пересечению  $W^u(P_2) \cap W^s(P_1)$  и  $W^s(P_2) \cap W^u(P_1)$ , соответственно. (b) Гетероклинический цикл, соединяющий точки  $P_1$  и  $P_2$  в отображении Аносова (18a)–(18b). Эта конструкция используется для нахождения гомоклинической орбиты к точке  $P_2$  в этом отображении. Затем эта гомоклиническая орбита используется в качестве управляющей траектории для численного построения гетероразмерного цикла в отображении (18).

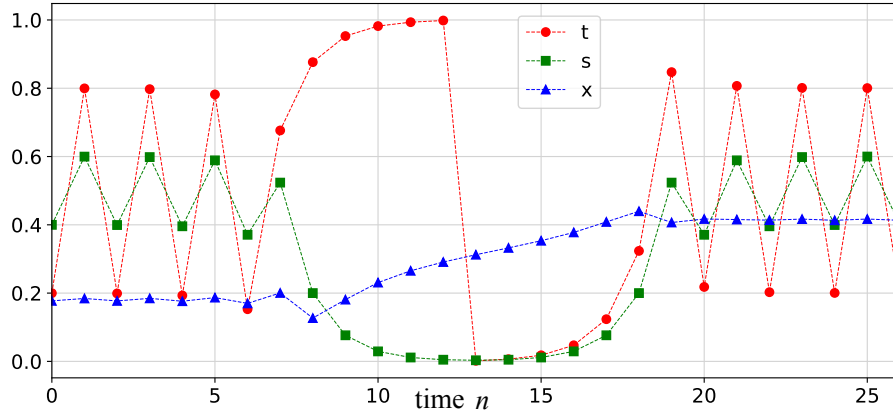


Рис. 9: Иллюстрация к построению гетероразмерного цикла. Параметры:  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $\mu = 0.08$ ,  $c = 0.07112495671202002$ . Видно, что по переменным  $t$  и  $s$  (красный и зеленый маркеры) эта траектория является гомоклинической траекторией к точке периода два  $P_2$  (при  $n < 5$  и  $n > 20$ ), проходящей вблизи неподвижной точки  $P_1 : (t, s) = (0, 0)$  (при  $10 \lesssim n \lesssim 15$ ). Во время нахождения траектории  $(t, s)$  вблизи неподвижной точки  $P_1$  переменная  $x$  (синие маркеры) изменяется от  $x \approx 0.2$  (положение аттрактора) до  $x \approx 0.4$  (положение репеллера).

ной точке  $P_1$  и на этих итерациях значения  $x$  перемещаются от бывшего аттрактора к бывшему репеллеру через узкий туннель (область  $\Gamma$  на рис. 8а), расположенный в том месте, где существовали неподвижные точки  $A_1$  и  $R_1$  до касательной бифуркации. После этого траектория приближается асимптотически близко к  $R_2$ . Эта траектория отмечена на рис. 8а. Ее численное построение изображено на рис. 9.

Алгоритм численного построения гетероразмерного цикла состоит из двух этапов. Сначала мы вычисляем управляющую траекторию в отображении Аносова (18а)–(18б) как гомоклиническую траекторию для точки  $P_2$ , которая очень близко подходит к неподвижной точке  $P_1$ . На следующем этапе мы используем эту траекторию в качестве управляющей в отображении Мёбиуса (18с) для построения полного гетероклинического цикла, соединяющего точки  $A_2$  и  $R_2$ .

Важно отметить, что с помощью описанной выше процедуры можно построить множество различных гетероразмерных циклов (так как существует (бесконечно) много различных гомоклинических орбит к точке  $P_2$ , проходящих вблизи точки  $P_1$  в отображении Аносова). Однако в этом нет необходимости, так как согласно теории, развитой в работе [28], существование одного гетероразмерного цикла влечет существование множества таких циклов в окрестности рассматриваемых значений параметров. Наши расчеты, таким образом, подтверждают, что при столкновении аттрактора и репеллера в отображении (18), возникает гетероразмерная динамика. Примечательно, что такой режим исчезает, когда через касательную бифуркацию исчезает «последняя» пара периодических орбит (т.е. система переходит в режим 2 по классификации, представленной выше). Такова специфика отображения Мёбиуса, которое может иметь только пару неподвижных точек, но не может иметь изолированных периодических орбит высоких периодов.



### 1.3 Программный комплекс

Основная часть результатов диссертационного исследования получена с помощью применения численных методов. Для проведения необходимых численных экспериментов диссертантом был разработан программный комплекс. Функциональность комплекса позволяет:

- вычислять расстояние Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна между аттрактором и репеллером;
- вычислять относительные размерности Реньи и взаимные сингулярности аттрактора и репеллера;
- строить гетероразмерные циклы для трехмерных систем, демонстрирующих пересечение аттрактора и репеллера.

Для расчета расстояния Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна мы использовали два свободно доступных пакета программ: пакет «PyEMD: Earth mover's distance for Python» [40], работающий на основе алгоритма, описанного в работе Дженсена [41] и пакет «CLP: COIN linear program code» [42], реализующий прямые методы решения симплексной задачи. Соответствующие программные коды были интегрированы в структуру программного комплекса диссертанта. Оба они дали одинаковые результаты при расчете расстояния Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна между аттракторами и репеллерами отображений (9), (10) и (11), а также потока (12).

Подробное описание всех необходимых формул для расчета относительных размерностей Реньи и взаимных сингулярностей приведено во второй части главы 2 диссертационной работы. В рамках программного комплекса диссертантом разработаны численные методы, реализующие алгоритм вычислений относительных размерностей и взаимных сингулярностей по аналитическим формулам и численным схемам, описанным во второй части главы 2.

Далее дадим более подробное описание метода численного построения гетероразмерного цикла.

- Сначала на плоскости  $(t, s)$  находим точки пересечения  $h_1$  и  $h_2$  неустойчивого многообразия  $W^u(P_2)$  с устойчивым многообразием  $W^s(P_1)$ , и неустойчивого многообразия  $W^u(P_1)$  с устойчивым многообразием  $W^s(P_2)$  соответственно, см. рис. 8b. Это простая задача, потому что все многообразия являются прямыми линиями. Таким образом, мы строим два гетероклинических соединения  $P_2 \rightarrow P_1$  и  $P_1 \rightarrow P_2$ .
- Затем находим гомоклиническую траекторию отображения Аносова (18a)–(18b)  $P_2 \rightarrow P_2$ , проходящую вблизи построенных гетероклинических циклов. Для этого на неустойчивом многообразии  $W^u(P_2)$  возьмем небольшой отрезок  $[h_1 - \Delta, h_1]$ , где точка  $h_1 - \Delta$  лежит между точками  $P_2$  и  $h_1$ . Мы итерируем этот отрезок вперед по времени (например, применяем  $K$  итераций), пока итерация точки  $h_1$  не подойдет достаточно близко к точке  $P_1$ . Аналогично на устойчивом многообразии  $W^s(P_2)$  возьмем небольшой отрезок  $[h_2 - \Delta, h_2]$ , где точка  $h_2 - \Delta$  лежит между точками  $P_2$  и  $h_2$ . Мы итерируем его назад по времени (снова  $K$  раз), пока итерация  $h_2$  не приблизится к точке

$P_1$ . Это гарантирует, что соответствующие образы отрезков  $[h_1 - \Delta, h_1]$  и  $[h_2 - \Delta, h_2]$  пересекаются в некоторой точке  $D_k$ , которая настолько близка к точке  $P_1$  насколько мы хотим (увеличивая  $K$ , мы можем сделать точку  $D_k$  сколь угодно близкой к  $P_1$ ).

- Итерации точки  $D_k$  в отображении Аносова (18a)–(18b) дают гомоклиническую орбиту к точке  $P_2$ , которая очень близко подходит к неподвижной точке  $P_1$  и, таким образом, проводит большое время в окрестности этой точки. Далее мы будем использовать ее в качестве управляющей силы для отображения Мёбиуса (18c).
- На следующем шаге мы находим точку  $(t_A, s_A, x_A)$  на неустойчивом многообразии  $W^u(A_2)$  очень близко к точке  $A_2$ . Для этого возьмем точку  $(t_A, s_A)$ , которая очень близка к точке  $P_2$  и в то же время принадлежит траектории  $D_k$ . Затем выбираем несколько значений  $x_i$ , близких к  $x$ -координате точки  $A_2$ , и итерируем точки  $(t_A, s_A, x_i)$  назад во времени. Значения  $(t, s)$  сходятся к точке  $P_2$ , а значения  $x$  либо растут, либо убывают, за исключением тех, которые принадлежат  $W^u(A_2)$ . Взяв больше значений  $x$  между соседними точками, которые при этих обратных итерациях проходят по разным ветвям (вверх и вниз) вдоль устойчивого многообразия  $W^s(A_2)$  в направлении  $x$ , можно найти точку  $(t_A, s_A, x_A)$  на неустойчивом многообразии  $W^u(A_2)$  с заданной точностью. Таким же образом мы находим точку  $(x_R, t_R, s_R)$ , лежащую на одномерном устойчивом многообразии точки  $R_2$ .
- Наконец, мы итерируем точки  $(t_A, s_A, x_A)$  и  $(x_R, t_R, s_R)$  соответственно вперед и назад во времени, пока их  $(t, s)$ -координаты не достигнут точки  $D_k$ . Вообще говоря, в этой точке результирующие координаты  $\bar{x}_A$  и  $\bar{x}_R$  не совпадают. Однако, варьируя один из параметров в отображении (18) (мы варьировали параметр  $c$ ), можно найти значение, при котором  $\bar{x}_A = \bar{x}_R$ . На этом построение гетероклинической связи между одномерными многообразиями  $W^u(A_2)$  и  $W^s(R_2)$  искомого гетероразмерного цикла завершается.
- Заметим, что всегда существует пересечение двумерных многообразий  $W^u(R_2)$  и  $W^s(A_2)$ , обеспечивающее вторую гетероклиническую связь между точками  $R_2$  и  $A_2$ . Таким образом, описанная процедура дает численное подтверждение существования гетероразмерного цикла.



## Список литературы

- [1] Topaj D., Pikovsky A. Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2002. – Т. 170. – №. 2. – С. 118-130.
- [2] Gonchenko S. V., Turaev D. V., Shilnikov L. P. On Newhouse domains of two-dimensional diffeomorphisms which are close to a diffeomorphism with a structurally unstable heteroclinic cycle //Proc. Steklov Inst. Math. – 1997. – Т. 216. – С. 70-118.
- [3] Lamb J. S. W., Stenkin O. V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits //Nonlinearity. – 2004. – Т. 17. – №. 4. – С. 1217.
- [4] Delshams A. et al. Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps //Nonlinearity. – 2012. – Т. 26. – №. 1. – С. 1.
- [5] Gonchenko S. V. Reversible mixed dynamics: A concept and examples //Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. – 2016. – Т. 5. – №. 4. – С. 365-374.
- [6] Gonchenko S. V., Turaev D. V. On three types of dynamics and the notion of attractor //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2017. – Т. 297. – С. 116-137.
- [7] Kazakov A. O. Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane //Regular and Chaotic Dynamics. – 2013. – Т. 18. – №. 5. – С. 508-520.
- [8] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone //Regular and Chaotic Dynamics. – 2013. – Т. 18. – С. 521-538.
- [9] Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Kazakov A. O. Three types of attractors and mixed dynamics of nonholonomic models of rigid body motion //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2020. – Т. 308. – С. 125-140.
- [10] Bizyaev I. A., Mamaev I. S. Separatrix splitting and nonintegrability in the nonholonomic rolling of a generalized Chaplygin sphere //International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2020. – Т. 126. – С. 103550.
- [11] Kuznetsov S. P., Kruglov V. P., Borisov A. V. Chaplygin sleigh in the quadratic potential field //Europhysics Letters. – 2020. – Т. 132. – №. 2. – С. 20008.
- [12] Kazakov A. Merger of a Henon-like attractor with a Henon-like repeller in a model of vortex dynamics //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2020. – Т. 30. – №. 1. – С. 011105.
- [13] Emelianova A. A., Nekorkin V. I. On the intersection of a chaotic attractor and a chaotic repeller in the system of two adaptively coupled phase oscillators //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2019. – Т. 29. – №. 11. – С. 111102.

- [14] Emelianova A. A., Nekorkin V. I. The third type of chaos in a system of two adaptively coupled phase oscillators //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2020. – T. 30. – №. 5. – C. 051105.
- [15] Emelianova A. A., Nekorkin V. I. Emergence and synchronization of a reversible core in a system of forced adaptively coupled Kuramoto oscillators //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2021. – T. 31. – №. 3. – C. 033102.
- [16] Gonchenko A. S. et al. On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky–Topaj system of coupled rotators //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2017. – T. 350. – C. 45-57.
- [17] Kazakov A. O. On the appearance of mixed dynamics as a result of collision of strange attractors and repellers in reversible systems //Radiophysics and Quantum Electronics. – 2019. – T. 61. – C. 650-658.
- [18] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kazakov A. O. Dynamics of the Suslov problem in a gravitational field: Reversal and strange attractors //Regular and Chaotic Dynamics. – 2015. – T. 20. – C. 605-626.
- [19] Turaev D. A criterion for mixed dynamics in two-dimensional reversible maps<? A3B2 show [editpick]?> //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2021. – T. 31. – №. 4. – C. 043133.
- [20] Muskulus M., Verduyn-Lunel S. Wasserstein distances in the analysis of time series and dynamical systems //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2011. – T. 240. – №. 1. – C. 45-58.
- [21] Pikovsky A. et al. Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization //Physical review letters. – 1997. – T. 79. – №. 1. – C. 47.
- [22] Bonatti C., Diaz L. J. Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms //Annals of Mathematics. – 1996. – T. 143. – №. 2. – C. 357-396.
- [23] Abraham R., Smale S. Nongenericity of  $\Omega$ -stability //The Collected Papers of Stephen Smale: Volume 2. – 2000. – C. 735-738.
- [24] Diaz L. J., Rocha J. Nonconnected heterodimensional cycles: bifurcation and stability //Nonlinearity. – 1992. – T. 5. – №. 6. – C. 1315.
- [25] Diaz L. J. Robust nonhyperbolic dynamics and heterodimensional cycles //Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 1995. – T. 15. – №. 2. – C. 291-315.
- [26] Diaz L. J. Persistence of cycles and nonhyperbolic dynamics at heteroclinic bifurcations //Nonlinearity. – 1995. – T. 8. – №. 5. – C. 693.
- [27] Bonatti C., Diaz L. J. Robust heterodimensional cycles and-generic dynamics //Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. – 2008. – T. 7. – №. 3. – C. 469-525.
- [28] Li D., Turaev D. Persistence of heterodimensional cycles //arXiv preprint arXiv:2105.03739. – 2021.

- [29] Hittmeyer S. et al. Existence of blenders in a Henon-like family: Geometric insights from invariant manifold computations //Nonlinearity. – 2018. – T. 31. – №. 10. – C. R239.
- [30] Hittmeyer S. et al. How to identify a hyperbolic set as a blender //Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2020. – T. 40. – №. 12. – C. 6815-6836.
- [31] Hammerlindl A. et al. Determining the global manifold structure of a continuous-time heterodimensional cycle //Journal of Computational Dynamics. – 2022. – T. 9. – №. 3. – C. 393-419.
- [32] Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the modern theory of dynamical systems. – Cambridge university press, 1995. – №. 54.
- [33] Chirikov B., Shepelyansky D. Chirikov standard map //Scholarpedia. – 2008. – T. 3. – №. 3. – C. 3550.
- [34] Duarte P. Plenty of elliptic islands for the standard family of area preserving maps //Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non lineaire. – No longer published by Elsevier, 1994. – T. 11. – №. 4. – C. 359-409.
- [35] Cornfeld I. P., Fomin S. V., Sinai Y. G. Ergodic theory. – Springer Science & Business Media, 2012. – T. 245.
- [36] Marvel S. A., Mirollo R. E., Strogatz S. H. Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Mobius group action //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2009. – T. 19. – №. 4. – C. 043104.
- [37] Gong C. C., Toenjes R., Pikovsky A. Coupled Mobius maps as a tool to model Kuramoto phase synchronization //Physical Review E. – 2020. – T. 102. – №. 2. – C. 022206.
- [38] Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors //Physical review letters. – 1983. – T. 50. – №. 5. – C. 346.
- [39] Lai Y. C., Tél T. Transient chaos: complex dynamics on finite time scales. – Springer Science & Business Media, 2011. – T. 173.
- [40] Doran G. PyEMD: Earth mover's distance for Python. – 2014.
- [41] P. Jensen. Operation research methods, 1999. [Online; accessed May 2020].
- [42] Forrest J., de la Nuez D., Lougee-Heimer R. CLP user guide, 2004 //Software available at <http://www.coin-or.org/Clp/index.html>. – 2010.