Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет математики

*на правах рукописи*

Красильников Евгений Сергеевич

# Свойство интегрируемости в комбинаторике групп перестановок

Резюме диссертации
на соискание учёной степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Ландо Сергей Константинович

Москва–2024

# Содержание

# Введение

Настоящая диссертация посвящена исследованию различных объектов комбинаторной природы и свойств инвариантов этих объектов. Интересующие нас объекты обязаны своим происхождением задачам топологии пространств отображений одномерных объектов над полем вещественных и комплексных чисел — окружности и комплексных алгебраических кривых. В вещественном случае речь идет об инвариантах узлов в трехмерной сфере, в комплексном — о мероморфных функциях на кривых. Соответствующие комбинаторные объекты естественно объединяются в алгебраические структуры — алгебры Хопфа, и с ними связаны производящие функции от бесконечного числа переменных. Часто оказывается, что эти производящие функции являются решениями интегрируемых иерархий уравнений в частных производных математической физики. Это свойство не только проясняет природу соответствующих геометрических объектов, но и дает эффективные способы вычисления этих производящих функций.

Весовая система $\mathfrak{sl}_2$ представляет собой функцию на хордовых диаграммах, удовлетворяющую 4-членному соотношению. По всякой хордовой диаграмме строится граф пересечений, вершины которого соответствуют хордам диаграммы и две вершины соединены ребром, если соответствующие хорды пересекаются. 4-членному соотношению для хордовых диаграмм отвечает 4-членное соотношение для графов пересечений. Значение весовой системы $\mathfrak{sl}_2$ на хордовой диаграмме определено её графом пересечений [4]. Это приводит к естественному вопросу (С.К. Ландо): существует ли продолжение весовой системы $\mathfrak{sl}_2$ на графы, удовлетворяющее 4-членным соотношениям для графов? Мы разрабатываем алгоритмы, которые приводят к утвердительному ответу на этот вопрос для случая графов с $n \leq 8$ вершинами.

$\mathfrak{sl}_2$-весовая система является специализацией более общей унивесальной $\mathfrak{gl}$-системы. Есть основания предполагать, что результат усреднения универсальной $\mathfrak{gl}$-системы по перестановкам является $\tau$-функцией иерархии Кадомцева-Петвиашвили, что должно привести к дальнейшему прояснению природы $\mathfrak{sl}_2$-весовой системы.

Недавно С. В. Чмутов, М. Э. Казарян и С. К. Ландо [6] ввели класс инвариантов графов, названных ими теневыми инвариантами. Эти инварианты представляют собой градуированные гомоморфизмы из алгебры Хопфа графов в алгебру Хопфа многочленов от бесконечного числа переменных. Они доказали, что результат усреднения почти всякого такого инварианта по всем графам после подходящего перешкалирования переменных превращается в линейную комбинацию одночастичных функций Шура и становится, тем самым, $\tau$-функцией интегрируемой иерархии Кадомцева–Петвиашвили. Мы доказываем аналогичное утверждение для алгебры Хопфа оснащенных графов. В то же время мы показываем, что аналогичное утверждение не справедливо для ряда других алгебр Хопфа схожей природы, в том числе для алгебр Хопфа взвешенных графов, хордовых диаграмм, бинарных дельтаматроидов. Таким образом, оказывается, что алгебры Хопфа графов и оснащенных графов играют выделенную роль среди градуированных алгебр Хопфа комбинаторной природы.

Восходящая к А.Гурвицу теория комплексных чисел Гурвица, перечисляющих разветвленные накрытия комплексной проективной прямой с предписанными данными ветвления, в последние десятилетия превратилась в одну из центральных областей математики. Одно из естественных направлений развития теории Гурвица — ее распространение на случай вещественных разветвленных накрытий проективной прямой. Простые вещественные числа Гурвица перечисляют вещественные мероморфные функции на вещественных алгебраических кривых, все конечные критические значения которых простые. М. Э. Казарян, С. К. Ландо и С. М. Натанзон [13] построили алгебры типов переходов, для которых эти числа являются структурными константами, и вывели уравнения транспозиции на производящие функции для них. Мы изучаем структуру алгебр типов переходов и разрабатываем подходы к эффективному вычислению простых вещественных чисел Гурвица.

# 1 Алгебры Хопфа комбинаторных объектов

Структура многих инвариантов комбинаторных объектов тесно связана со структурами соответствующих алгебр Хопфа. В настоящем разделе мы даём описания алгебр Хопфа объектов комбинаторной природы, которые являются предметом изучения в настоящей диссертации.

## 1.1 Определение алгебры Хопфа

Дадим определение алгебры Хопфа, следуя [3]. Все рассматриваемые ниже векторные пространства определены над полем $\mathbb{F}$ характеристики 0. Для простоты здесь и ниже можно считать, что это поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Пусть $A$ — векторное пространство. *Умножение* $\nu$ на векторном пространстве $A$ это линейное отображение $\nu : A \otimes A \to A$. Умножение *ассоциативно*, если диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\nu \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes \nu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\nu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\nu"] & A \end{tikzcd}$$

коммутативна. Здесь и ниже $id$ обозначает тождественное отображение векторного пространства в себя. *Единицей* для $\nu$ служит линейное отображение $\iota : \mathbb{F} \to A$, такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F} \otimes A \arrow[r, "\iota \otimes id"] & A \otimes A \arrow[d, "\nu"] \\ A \arrow[u] \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Векторное пространство $A$ вместе с линейным отображением $\delta : A \to A \otimes A$ (коумножением) и линейным отображением $\epsilon : A \to \mathbb{F}$ (коединицей) называется *коалгеброй*, если коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\delta \otimes id"'] \\ A \otimes A \arrow[u, "id \otimes \delta"] & A \arrow[l, "\delta"'] \arrow[u, "\delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{F} \otimes A \arrow[d] & A \otimes A \arrow[l, "\epsilon \otimes id"'] \\ A \arrow[r, equal] & A \arrow[u, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

Все рассматриваемые нами алгебры и коалгебры обладают свойствами коммутативности и кокоммутативности, т.е. коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\nu"] & A \arrow[d, equal] \\ A \otimes A \arrow[u, "\tau"'] \arrow[r, "\nu"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[d, "\tau"'] & A \arrow[l, "\delta"'] \arrow[d, equal] \\ A \otimes A & A \arrow[l, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

где $\tau : A\otimes A \to A\otimes A$ это перестановка множителей тензорного произведения, $\tau(a\otimes b) = b\otimes a$.

*Биалгебра* это векторное пространство $A$ вместе со структурой алгебры $(\nu, \iota)$ и структурой коалгебры $(\delta, \epsilon)$, такими, что

1. $\epsilon(1) = 1$
2. $\delta(1) = 1 \otimes 1$
3. $\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b)$
4. $\delta(ab) = \delta(a)\delta(b)$

Биалгебра $A$ называется *градуированной*, если $A$ раскладывается в прямую сумму векторных пространств:

$$A = \bigoplus_{k\geq 0} A_k,$$

причём умножение и коумножение в $A$ согласованы с градуировкой, т.е. $\nu(A_k \otimes A_l) \subset A_{k+l}$ для всех $k, l = 0, 1, 2, \ldots$, и $\delta(A_n) \subset A_0\otimes A_n + A_1\otimes A_{n-1} + \cdots + A_n\otimes A_0$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Градуированное векторное пространство $A$ называется векторным пространством *конечного типа*, если все $A_n$ конечномерны.

Градуированная биалгебра $A$ *связна*, если $\iota : \mathbb{F} \to A$ суть изоморфизм $\mathbb{F}$ на $A_0 \subset A$.

*Градуированная алгебра Хопфа* — это связная градуированная биалгебра конечного типа вместе с линейным отображением $S : A \to A$, таким, что

$$\nu \circ (S \otimes 1) \circ \delta = \nu \circ (1 \otimes S) \circ \delta = \iota \circ \epsilon.$$

Отображение $S$ называется *антиподом*.

## 1.2 Алгебра Хопфа многочленов

Простейшим примером алгебры Хопфа интересующего нас вида является алгебра Хопфа многочленов.

Пусть $\mathcal{R}$ — алгебра многочленов от (возможно бесконечного) набора переменных, $\mathcal{R} = \mathbb{C}[q_1, q_2, ...]$. Алгебра $\mathcal{R}$ градуирована, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_1 \oplus ...$, где $\mathcal{R}_n$ — подпространство в $\mathcal{R}$, порождённая мономами степени $n$. Степень $n$ монома $\prod\limits_{a=1}^{b} q_a^{d_a}$ определяется как сумма степеней входящих в него переменных, $n = \sum\limits_{a=1}^{b} d_a \deg(q_a)$. Натуральные степени переменных $\deg(q_a)$ заданы изначально, причем множество переменных, степень которых не превышает $n$, конечно для любого натурального $n$.

Коумножение многочленов $\delta$ является гомоморфизмом алгебр и определяется условием:

$$\delta(q_i) = q_i \otimes 1 + 1 \otimes q_i.$$

Коединицей является отображение $\epsilon : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$, ставящее в соответствие многочлену $r \in \mathcal{R}$ его свободный член $r(0, 0, ...)$. Таким образом, алгебра $\mathcal{R}$ является биалгеброй. Эта биалгебра коммутативна и кокоммутативна, операции умножения и коумножения согласованы с градуировкой, что превращает её в алгебру Хопфа многочленов. Антипод действует на переменных следующим образом: $S(q_i) = -q_i$.

## 1.3 Алгебра Хопфа графов

Алгебра Хопфа графов введена в [10]. Пусть $\mathcal{G}$ — векторное пространство над $\mathbb{F}$, порождённое простыми графами (графами без петель и кратных рёбер). Здесь и далее мы рассматриваем графы с точностью до изоморфизма. Пространство $\mathcal{G}$ градуировано:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus ... = \langle \varnothing \rangle \oplus \langle \bullet \rangle \oplus \langle \bullet \quad \bullet\, ,\ \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \rangle \oplus ...,$$

где $\mathcal{G}_n$ — конечномерное векторное пространство, порождённое всеми графами на n вершинах.

Умножение $\nu : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ определяется дизъюнктным объединением графов и продолжается на их линейные комбинации по линейности. Коумножение графов $\delta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ для графа $G$ определяется следующим образом:

$$\delta(G) = \sum_{J_1 \sqcup J_2 = V(G)} G|_{J_1} \otimes G|_{J_2};$$

здесь суммирование идёт по всем дизъюнктным упорядоченным разбиениям множества вершин $V(G)$ графа $G$ на два подмножества, а через $G|_J$ обозначен подграф в $G$, индуцированный множеством вершин $J \subset V(G)$. На линейные комбинации графов коумножение продолжается по линейности.

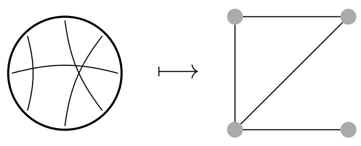
Заметим, что умножение и коумножение графов согласованы с градуировкой:

$$\nu : \mathcal{G}_k \otimes \mathcal{G}_l \longrightarrow \mathcal{G}_{k+l},$$
$$\delta : \mathcal{G}_n \longrightarrow \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G}_n \oplus \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_{n-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}_n \otimes \mathcal{G}_0.$$

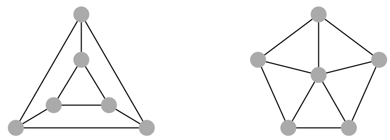
Операции умножения и коумножения превращают векторное пространство $\mathcal{G}$ в градуированную биалгебру. Эта биалгебра коммутативна, кокоммутативна, единицей служит пустой граф, коединицей — отображение $\epsilon : \mathcal{G} \to \mathbb{F}$, переводящее пустой граф в единицу поля, а всякий непустой граф — в нуль. Согласно теореме Милнора–Мура [17], всякая связная градуированная кокоммутативная биалгебра является алгеброй Хопфа, поэтому мы можем говорить о биалгебре графов как об алгебре Хопфа.

## 1.4 Алгебра Хопфа хордовых диаграмм

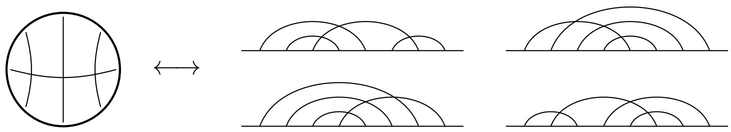
*Хордовая диаграмма $D$ порядка $n$* — ориентированная окружность с фиксированным набором из $n$ хорд, рассматриваемая с точностью до диффеоморфизма, сохраняющего ориентацию. На всех рисунках ниже предполагается, что окружность хордовой диаграммы ориентирована против часовой стрелки. *Граф пересечений* $\Gamma(D)$ хордовой диаграммы $D$ — граф, чьи вершины соответствуют хордам диаграммы $D$, и две вершины соединены ребром, если соответствующие хорды пересекаются. Ниже представлен пример сопоставления хордовой диаграмме её графа пересечений.



Однако, не всякий граф является графом пересечений какой-либо хордовой диаграммы. Все графы с числом вершин не превышающим 5 являются графами пересечений. Ниже изображены два графа с 6 вершинами, не являющихся графами пересечений. Доля таких графов быстро растёт с ростом числа вершин.

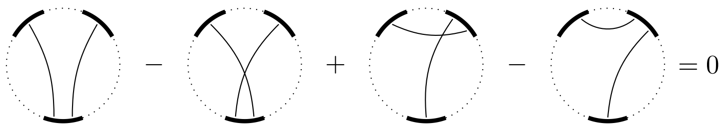


*Дуговая диаграмма* – набор точек на ориентированной прямой, попарно соединённых дугами, расположенными в верхней полуплоскости. Каждой дуговой диаграмме соответствует хордовая диаграмма, которая является результатом замыкания прямой в окружность. Наоборот, каждая хордовая диаграмма порядка $n$ допускает до $2n$ представлений в виде дуговой диаграммы. Каждое из этих представлений получается в результате разрезания окружности в точке, отличной от концов дуг. Так, следующая хордовая диаграмма имеет 4 представления в виде дуговой диаграммы.



Напротив, замыкание прямой в окружность однозначно сопоставляет всякой дуговой диаграмме хордовую диаграмму.

Обозначим через $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus ...$ градуированное векторное пространство хордовых диаграмм; каждое пространство $\mathcal{C}_n$ порождено хордовыми диаграммами с $n$ хордами. Хордовые диаграммы естественно возникают в теории В.А.Васильева инвариантов узлов конечного порядка [22]. В этой теории всякому инварианту узлов порядка не выше $n$ сопоставляется функция на хордовых диаграммах с $n$ хордами, удовлетворяющая следующему *4-членному соотношению*:



Здесь и далее пунктирной линией обозначены части окружности хордовой диаграммы, на которых могут лежать концы фиксированного набора хорд, одинакового для каждой диаграммы. Также на рисунках мы не указываем действующую на диаграммах функцию.

*Произведение* хордовых диаграмм — это хордовая диаграмма, соответствующая дуговой диаграмме, полученной последовательным соединением соответствующих дуговых диаграмм. Результат умножения хордовых диаграмм не зависит от выбора точки разрыва по модулю четырёхчленных соотношений.

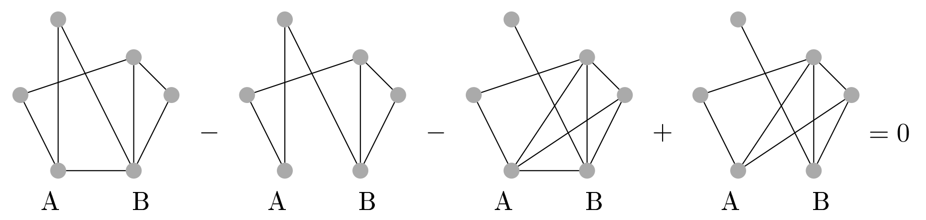
*Коумножение* $\delta$ хордовых диаграмм определено следующим образом

$$\delta(D) := \sum_{X \subset V(D)} D|_X \otimes D|_{V(D)\setminus X},$$

где через $D|_X$ обозначена хордовая диаграмма, образованная подмножеством $X \subset V(D)$ множества $V(D)$ хорд диаграммы $D$.

Умножение и коумножение продолжаются на линейные комбинации хордовых диаграмм по линейности и согласуются с градуировкой. Эти операции превращают пространство $\mathcal{C}$, факторизованное по модулю 4-членного соотношения, в градуированную алгебру Хопфа $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus ...$, $\mathcal{A}_i = \mathcal{C}_i/$<4-членные соотношения>.

Следуя [14], определим *четырёхчленное соотношение для графов*:



Соотношение строится следующим образом. Выберем произвольное ребро графа, назовём его $AB$. Первым слева элементом является исходный граф. Далее идёт этот же граф с удалённым ребром $AB$. Третий и четвёртый графы строятся следующим образом. Рассмотрим множество рёбер (отличных от $AB$), имеющих общую вершину $B$. Обозначим их $BC_1, BC_2, ..., BC_n$. Далее, если в исходном графе вершины $A$ и $C_i$ соединены ребром, удалим это ребро, если не соединены — добавим. Таким образом, задаётся третий элемент левой части равенства. Четвёртый элемент отличается от третьего удалением ребра $AB$. Линейную комбинацию графов в левой части равенства назовём *4-членным элементом.*

Факторпространство пространства графов по подпространству, порождённому 4-членными элементами, обозначим через $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus ...$, где $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_n / <$4-членные элементы$>$. На нём имеется индуцированная с $\mathcal{G}$ структура алгебры Хопфа. Как нетрудно видеть, отображение, сопоставляющее хордовой диаграмме её граф пересечений, продолжается до градуированного гомоморфизма алгебр Хопфа $\mathcal{A} \to \mathcal{F}$.

## 1.5 Алгебра Хопфа оснащенных графов

Алгебра Хопфа оснащенных графов введена в [16] как инструмент построения инвариантов конечного порядка плоских кривых. *Оснащенный граф* представляет собой простой граф $G$ вместе с *оснащением* — отображением $V(G) \to \{0, 1\}$ из множества вершин $V(G)$ графа $G$ в двухэлементное множество $\{0, 1\}$.

Пусть $\mathcal{G}^f$ — векторное пространство над $\mathbb{F}$, порождённое классами изоморфизма оснащенных графов. Это пространство также является алгеброй Хопфа; операции в ней определяются аналогично операциям алгебры Хопфа графов $\mathcal{G}$.

Градуировка имеет вид

$$\mathcal{G}^f = \mathcal{G}^f_0 \oplus \mathcal{G}^f_1 \oplus \mathcal{G}^f_2 \oplus ... = \langle \varnothing \rangle \oplus \langle ⓪, ① \rangle \oplus \langle ⓪\ \ ⓪, ①\ \ ⓪, ①\ \ ①, ⓪—⓪, ①—⓪, ①—① \rangle \oplus ...,$$

где $\mathcal{G}^f_n$ — конечномерное векторное пространство, порождённое всеми оснащенными графами на $n$ вершинах.

Умножение оснащенных графов $\nu : \mathcal{G}^f \otimes \mathcal{G}^f \longrightarrow \mathcal{G}^f$ определяется их дизъюнктным объединением. Для графов $G_1$, $G_2$:

$$\nu(G_1, G_2) = G_1 \sqcup G_2.$$

Коумножение оснащенных графов $\delta : \mathcal{G}^f \longrightarrow \mathcal{G}^f \otimes \mathcal{G}^f$ определяется следующим образом. Для оснащенного графа $G$ полагаем

$$\delta(G) = \sum_{J_1 \sqcup J_2 = V(G)} G|_{J_1} \otimes G|_{J_2},$$

где суммирование идёт по всем дизъюнктным упорядоченным разбиениям множества вершин $V(G)$ оснащенного графа $G$ на два подмножества, а через $G|_J$ обозначен оснащенный подграф в $G$, индуцированный множеством вершин $J$. При индуцировании подграфа оснащения вершин сохраняются. На линейные комбинации оснащенных графов коумножение продолжается по линейности.

Как и в случае простых графов, умножение и коумножение оснащенных графов согласованы с градуировкой:

$$\nu : \mathcal{G}^f_{l_1} \otimes \mathcal{G}^f_{l_2} \longrightarrow \mathcal{G}^f_{l_1+l_2},$$

$$\delta : \mathcal{G}^f_n \longrightarrow (\mathcal{G}^f_0 \otimes \mathcal{G}^f_n) \oplus (\mathcal{G}^f_1 \otimes \mathcal{G}^f_{n-1}) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{G}^f_n \otimes \mathcal{G}^f_0).$$

Единица, коединица и антипод вводятся аналогично соответствующим элементам структуры алгебры Хопфа простых графов.

*Оснащенная хордовая диаграмма* — это хордовая диаграмма порядка $n$ с заданным на ней оснащением. Под оснащением мы понимаем отображение, сопоставляющее каждой хорде хордовой диаграммы элемент множества $\{0, 1\}$. В [16] вводятся 4-членные соотношения для оснащённых графов и оснащённых хордовых диаграмм, а также структуры алгебр Хопфа в градуированных векторных пространствах, являющихся результатом факторизации по 4-членным соотношениям.

# 2 Весовая система $\mathfrak{sl}_2$ на графах

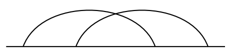
Одним из основных источников весовых систем являются алгебры Ли. Весовая система, соответствующая первому нетривиальному случаю алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, уже глубоко нетривиальна. Мы исследуем возможность её продолжения до инварианта графов, удовлетворяющего 4-членному соотношению для них.

## 2.1 Весовая система $\mathfrak{sl}_2$ на хордовых диаграммах

Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли, $\dim \mathfrak{G} = m$, $(\cdot, \cdot)$ — невырожденная инвариантная билинейная форма. Инвариантность означает, что $(x, [y, z]) = ([x, y], z)$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{G}$. Обозначим через $U(\mathfrak{G})$ универсальную обёртывающую алгебру алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Выберем ортонормированный относительно формы $(\cdot, \cdot)$ базис $\{e_1, ..., e_m\}$ в $\mathfrak{G}$. Построим отображение $w_{\mathfrak{G}} : \mathcal{A} \to U(\mathfrak{G})$ алгебры хордовых диаграмм по модулю 4-членных соотношений в универсальную обёртывающую алгебру алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Зафиксируем дуговую диаграмму $a$, представляющую хордовую диаграмму $D$. Элемент $w_{\mathfrak{G}}(D)$ универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{G})$ построим следующим образом. Для данного отображения $\phi$ множества хорд диаграммы $a$ в множество $\{1, ..., m\}$ напишем на концах каждой хорды элемент $e_i \in \mathfrak{G}$, если при отображении $\phi$ эта хорда переходит в элемент $i$. Суммирование по всем таким отображениям является образом хордовой диаграммы $D$ в универсальной обёртывающей алгебре $U(\mathfrak{G})$. Мы продолжаем отображение $w_{\mathfrak{G}}$ на всю алгебру $\mathcal{A}$ по линейности.

Например, для $m = 3$:



$$\longmapsto \quad \begin{gathered} e_1^4 + e_1e_2e_1e_2 + e_1e_3e_1e_3 + e_2e_1e_2e_1 + e_2^4 + \\ + e_2e_3e_2e_3 + e_3e_1e_3e_1 + e_3e_2e_3e_2 + e_3^4 \end{gathered}$$

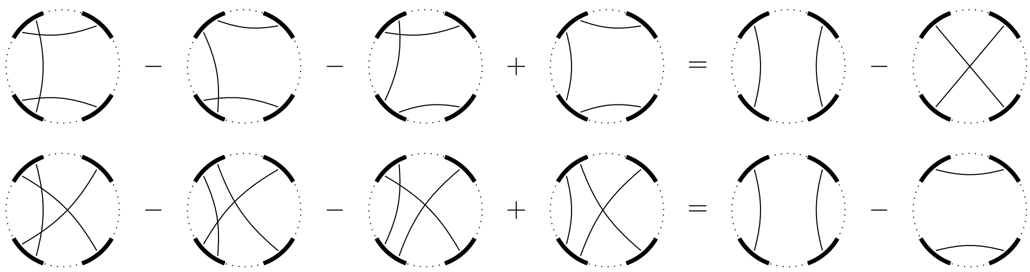
**Теорема 1.** [2, 11] *Пусть $\mathfrak{G}$ – алгебра Ли вместе с невырожденной инвариантной билинейной формой $(\cdot, \cdot)$. Тогда отображение $w_{\mathfrak{G}} : \mathcal{A} \to U(\mathfrak{G})$ обладает следующими свойствами:*
*(1) значение $w_{\mathfrak{G}}(D)$ отображения $w_{\mathfrak{G}}$ не зависит от выбора ортонормированного базиса $e_1, ..., e_m$;*

*(2) значение $w_{\mathfrak{G}}(D)$ отображения $w_{\mathfrak{G}}$ не зависит от выбранного представления хордовой диаграммы $D$ в виде дуговой диаграммы;*
*(3) образ отображения $w_{\mathfrak{G}}$ лежит в центре универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{G})$;*
*(4) отображение $w_{\mathfrak{G}}$ удовлетворяет 4-членному соотношению для хордовых диаграмм.*

Заметим, что значение отображения $w_{\mathfrak{G}}$ на произведении хордовых диаграмм равно произведению его значений на сомножителях. Таким образом, $w_{\mathfrak{G}}$ является гомоморфизмом алгебр, $w_{\mathfrak{G}} : \mathcal{A} \to ZU(\mathfrak{G})$.

В простейшем нетривильном случае, когда алгебра Ли $\mathfrak{G}$ является алгеброй Ли $\mathfrak{sl}_2$, а форма $(\cdot, \cdot)$ — формой Киллинга, центр универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}_2)$ порождается единственным элементом $c = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ — *элементом Казимира*, $ZU(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{C}[c]$. В этом частном случае функция $w_{\mathfrak{G}}$ может быть также определена с помощью следующих рекуррентных соотношений Чмутова-Варченко.

Определим *весовую систему* $\mathfrak{sl}_2$ как функцию $v$ на множестве хордовых диаграмм, которая хордовой диаграмме порядка $n$ сопоставляет многочлен степени $n$ от переменной $c$. Значение функции $v$ на хордовой диаграмме с одной хордой равно $c$. Если хордовая диаграмма содержит хорду (назовём её *листом*), пересекающую ровно одну другую хорду, то значение на исходной диаграмме равно значению на диаграмме с удаленным листом, умноженным на $(c-1)$. Если хордовая диаграмма не содержит листьев, то имеют место *рекуррентные соотношения Чмутова-Варченко*:



С их помощью можно вычислить значение весовой системы $\mathfrak{sl}_2$ на любой хордовой диаграмме. Однако сложность таких вычислений экспоненциальна: на каждом шаге диаграмма заменяется 5 более простыми диаграммами.

Если хордовая диаграмма представляет собой произведение двух непустых диаграмм, то значение весовой системы $\mathfrak{sl}_2$ на ней есть произведение её значений на сомножителях.

**Теорема 2.** [5]
(1) *Функция $v$ корректно определена, т.е. результат её вычисления не зависит от порядка применения соотношений.*
(2) *Она совпадает с весовой системой, построенной по алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$.*

## 2.2 Задача о продолжении весовой системы $\mathfrak{sl}_2$ на графы

Функция на графах, удовлетворяющая четырехчленному соотношению, называется *4-инвариантом графов*. Одним из первых примеров 4-инварианта является хроматический многочлен графа. Всякий 4-инвариант графов определяет весовую систему: значение этой весовой системы на хордовой диаграмме равно значению 4-инварианта на графе пересечений диаграммы.

Следующее утверждение позволяет определить значение весовой системы $\mathfrak{sl}_2$ на графах пересечений.

**Теорема 3.** [4] *Значение весовой системы $\mathfrak{sl}_2$ на хордовой диаграмме определено ее графом пересечений.*

Это утверждение приводит к естественному вопросу (С.К. Ландо): существует ли 4-инвариант графов, значение которого на графах пересечений совпадает со значением $\mathfrak{sl}_2$-весовой системы на них?

Несмотря на значительное количество работ, посвященных этому вопросу, окончательный ответ на него до сих пор не получен. Наш первый основной результат утвердительно отвечает на этот вопрос для графов с $\leq 8$ вершинами.

**Теорема ЕК21-1.** *Весовая система $\mathfrak{sl}_2$ на графах пересечений от 1 до 8 вершин допускает продолжение до 4-инварианта графов; такое продолжение единственно.*

Вопрос о существовании и единственности продолжения на графы с бо́льшим числом вершин остаётся открытым и требует дальнейшего изучения. Один из подходов к его решению состоит в том, чтобы попытаться определить $\mathfrak{sl}_2$-весовую систему на графах, зная её значения на сериях графов, см. например [23].

Доказательство Теоремы ЕК21-1 основано на компьютерных вычислениях.

# 3 Производящие функции комбинаторных объектов как решения иерархии КП

Иерархия Кадомцева-Петвиашвили (далее — КП) — это интегрируемая система уравнений в частных производных на функции, зависящие от бесконечного набора переменных, о её решениях комбинаторной природы см., например, [12]. Младшее из уравнений иерархии КП имеет вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_2^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_1^2}\right)^2 - \frac{1}{12}\frac{\partial^4 F}{\partial p_1^4}.$$

В настоящем разделе мы даём описание пространства решений иерархии КП и изучаем некоторые семейства функций, принадлежащие этому пространству решений и связанные с рассматриваемыми нами комбинаторными объектами.

## 3.1 Полубесконечная внешняя степень

Пусть $V$ — бесконечномерное пространство рядов Лорана от одной переменной $z$. По определению, *полубесконечная внешняя степень* $\Lambda^{\infty/2}V$ — это векторное пространство, натянутое на векторы

$$v_\mu = z^{m_1} \wedge z^{m_2} \wedge z^{m_3} \wedge \dots, \quad m_1 > m_2 > m_3 > \dots, \quad m_i = \mu_i - i,$$

где $\mu$ — разбиение, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots)$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots \geq 0$, в котором все части, за исключением конечного числа, равны 0. В частности, пустому разбиению $\mu = (0, 0, 0, \dots) = \emptyset$ отвечает *вакуум-вектор* $v_\varnothing = z^{-1} \wedge z^{-2} \wedge z^{-3} \wedge \dots$.

## 3.2 Многочлены Шура

Пусть $\mu \vdash n$ — разбиение. *Многочлен Шура* $\mathcal{S}_\mu$ определяется следующим образом:

- Для одночастичного разбиения $n^1 \vdash n$ многочлен Шура $\mathcal{S}_n$ определяется посредством разложения

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1 z + \mathcal{S}_2 z^2 + \mathcal{S}_3 z^3 + \dots &= \exp(p_1 z + p_2 \frac{z^2}{2} + p_3 \frac{z^3}{3} + \dots) \\ &= 1 + p_1 z + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2) z^2 + \dots. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= 1 \\ \mathcal{S}_1 &= p_1 \\ \mathcal{S}_2 &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2) \\ \dots &= \dots \\ \mathcal{S}_n &= \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \vdash n} \prod_{\alpha_i \in \alpha} (\alpha_i - 1)! p_{\alpha_i} \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

- Для произвольного разбиения $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots), \mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots$, многочлен Шура $\mathcal{S}_\mu$ представляет собой определитель

$$\mathcal{S}_\mu = \det ||\mathcal{S}_{\mu_j - j + i}||.$$

## 3.3 Пространство решений иерархии КП

Будем говорить, что функция является *решением* иерархии КП, если она принадлежит пространству решений КП. Пространство (формальных) решений КП можно определить с помощью бозон-фермионного соответствия $\phi$, подробности см. в [12].

Рассмотрим изоморфизм $\phi : \Lambda^{\infty/2} V \to \mathbb{F}[p_1, p_2, \dots]$ полубесконечной внешней степени в пространство степенных рядов от бесконечного набора переменных. Этот изоморфизм переводит базисный вектор $v_\mu$, отвечающий разбиению $\mu$, в многочлен Шура $\mathcal{S}_\mu$. Полубесконечной плоскости, натянутой на вектора $\beta_1(z), \beta_2(z), \dots$, сопоставим вектор $\beta_1(z) \wedge \beta_2(z) \wedge \dots \in \Lambda^{\infty/2} V$ (вложение Плюккера). Представим этот вектор в виде линейной комбинации базисных векторов пространства $\Lambda^{\infty/2} V$. Поделим полученную линейную комбинацию на коэффициент при вакуум-векторе и заменим каждый базисный вектор в ней на соответствующий многочлен Шура. Получаемые таким образом формальные степенные ряды от переменных $p_1, p_2, \dots$ образуют пространство $\tau$-функций иерархии КП, а их логарифмы — пространство решений КП.

Как хорошо известно, всякая линейная комбинация $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \mathcal{S}_i$ одночастичных многочленов Шура с коэффициентом 1 при $\mathcal{S}_0$ является $\tau$-функцией иерархии КП.

## 3.4 Семейство решений иерархии КП

В [6] алгебре Хопфа графов сопоставлено решение интегрируемой иерархии Кадомцева–Петвиашвили уравнений в частных производных. Пусть $\mathbb{C}[q_1, q_2, q_3, ...]$ — градуированная алгебра Хопфа многочленов, в которой вес переменной $q_i$ равен $i$, $i = 1, 2, 3, ....$

**Теорема 4.** [6] *Пусть $I$ — инвариант графов со значениями в кольце многочленов от бесконечного набора переменных $q_1, q_2, \dots$, $I : G \mapsto I_G(q_1, q_2, \dots)$, продолжающийся до градуированного гомоморфизма алгебр Хопфа. Предположим также, что числа $i_n$, определенные равенствами*

$$i_n = n! \sum_{G, |V(G)|=n} \frac{[q_n] I_G(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|}$$

*(здесь через $|V(G)|$ обозначено количество вершин в графе $G$, $[q_n]P$ обозначает коэффициент при мономе $q_n$ в многочлене $P = P(q_1, q_2, \dots)$, а $|\operatorname{Aut}(G)|$ — порядок группы автоморфизмов графа $G$), все отличны от 0.*

*Определим производящие функции*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\circ(q_1, q_2, \dots) &= \sum_G \frac{I_G(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|}, \\ \mathcal{I}(q_1, q_2, \dots) &= \sum_{G \text{ — связный}} \frac{I_G(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|}, \end{aligned}$$

*где в первом случае суммирование берётся по всем графам, во втором — по всем связным графам. Тогда после перешкалирования переменных $q_n = \frac{2^{n(n-1)/2}(n-1)!}{i_n} p_n$ производящая функция $\mathcal{I}$ становится решением иерархии КП по новым переменным $p_i$, а $\mathcal{I}^\circ$ — $\tau$-функцией иерархии КП. Построенная $\tau$-функция не зависит от выбранного инварианта $I$.*

Среди инвариантов графов, удовлетворяющих условию теоремы, имеются такие важные как симметризованный хроматический многочлен Стенли [21], введенный в [6] многочлен Абеля и многие другие. Техника комбинаторных алгебр Хопфа, развитая в [1], позволяет строить такие инварианты по любому мультипликативному инварианту графов.

Отметим, что производящие функции $\mathcal{I}^\circ$ и $\mathcal{I}$ связаны между собой стандартным соотношением между $\tau$-функцией и соответствующим ей решением иерархии:

$$\mathcal{I} = \log \mathcal{I}^\circ.$$

Сформулированная теорема ставит естественный вопрос: какие еще алгебры Хопфа комбинаторной природы, помимо алгебры Хопфа графов, обладают аналогичным свойством? Мы показываем, что аналогичное утверждение справедливо для алгебры Хопфа оснащенных графов, введенной С. К. Ландо в [16], и не справедливо для целого ряда других близких по характеру алгебр Хопфа, в том числе, для алгебры Хопфа взвешенных графов, алгебры Хопфа хордовых диаграмм, алгебры Хопфа бинарных дельта-матроидов.

Пусть $I^f : \mathcal{G}^f \to \mathbb{F}[q_1, q_2, \dots]$ градуированный гомоморфизм алгебры Хопфа оснащенных графов в алгебру Хопфа многочленов от бесконечного набора переменных, $I^f_G(q_1, q_2, \dots)$ — инвариант оснащенного графа $G$, являющийся значением этого гомоморфизма на $G$.

Определим производящие функции

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{f\circ}(q_1, q_2, \dots) &= \sum_G \frac{I^f_G(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|}, \\ \mathcal{I}^f(q_1, q_2, \dots) &= \sum_{G \text{ — связный}} \frac{I^f_G(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|}, \end{aligned}$$

где в первом случае суммирование идёт по всем оснащенным графам, во втором — по связным оснащенным графам, $|\operatorname{Aut}(G)|$ — порядок группы автоморфизмов оснащенного графа $G$ (автоморфизмов графа $G$, сохраняющих оснащение). Как и в случае обычных графов, выполняется соотношение

$$\mathcal{I}^f = \log \mathcal{I}^{f\circ}.$$

Определим константы $i_n^f$, $n = 0, 1, 2, \dots$ равенством

$$i_n^f = n! \sum_{\substack{G\,-\,\text{связный}\\ |V(G)|=n}} \frac{[q_n] I_G^f(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|},$$

где через $[q_n]P$ обозначен коэффициент при мономе $q_n$ в многочлене $P = P(q_1, q_2, \dots)$. Одним из результатов диссертации является следующая

**Теорема EK19-1.** *Если $i_n^f \neq 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то после перешкалирования переменных $q_n = \frac{2^{n(n-1)/2}(n-1)!}{i_n^f} p_n$ производящая функция $\mathcal{I}^f$ становится решением иерархии КП в переменных $p_n$, а $\mathcal{I}^{f\circ}$ — $\tau$-функцией иерархии КП, представляющей собой линейную комбинацию одночастичных многочленов Шура.*

**Замечание.** Этот результат — так же, как и его доказательство, — не меняется при замене алгебры Хопфа оснащенных графов алгеброй Хопфа графов, в которой множество пометок $\{0, 1\}$ вершин заменяется произвольным конечным множеством (с аналогично определенными умножением и коумножением). Мы, однако, ограничиваемся случаем оснащенных графов, поскольку именно эта алгебра Хопфа связана с инвариантами узлов и плоских кривых. В частности, именно с ней связаны конструкции продолжения инвариантов графов до инвариантов вложенных графов и бинарных дельта-матроидов и, как следствие, продолжения инвариантов узлов до инвариантов зацеплений в [18], [15].

Аналогичные Теореме EK19-1 утверждения оказываются несправедливы для алгебры Хопфа взвешенных графов. *Взвешенный граф* — граф, каждой вершине которого поставлено в соответствие натуральное число.

**Теорема EK19-2.** *Пусть $I^w : \mathcal{G}^w \to \mathbb{F}[q_1, q_2, \dots]$ градуированный гомоморфизм алгебры Хопфа взвешенных графов в алгебру Хопфа многочленов от бесконечного набора переменных, $I_G^w(q_1, q_2, \dots)$ — инвариант взвешенного графа $G$.*

*Определим производящие функции*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{w\circ}(q_1, q_2, \dots) &= \sum_G \frac{I_G^w(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|},\\
\mathcal{I}^{w}(q_1, q_2, \dots) &= \sum_{G\,-\,\text{связный}} \frac{I_G^w(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|},
\end{aligned}$$

*где в первом случае суммирование идёт по всем взвешенным графам, во втором — по связным взвешенным графам, $|\operatorname{Aut}(G)|$ — порядок группы автоморфизмов взвешенного графа $G$.*

*Ни при каком перешкалировании переменных $q_n = a_n p_n$, $a_n \in \mathbb{F}$, $a_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, производящая функция $\mathcal{I}^{w\circ}$ не является линейной комбинацией одночастичных многочленов Шура. Более того, ни при каком перешкалировании переменных $q_n = a_n p_n$, $a_n \in \mathbb{F}$, производящая функция $\mathcal{I}^{w\circ}$ не является $\tau$-функцией иерархии КП в переменных $p_n$, и, следовательно, $\mathcal{I}^w$ не является решением иерархии КП.*

# 4 Числа Гурвица

Ещё один цикл результатов диссертации касается вещественных чисел Гурвица. Комплексные числа Гурвица и их различные обобщения играют ключевую роль в изучении геометрии пространств модулей алгебраических кривых [8], в теории топологической рекурсии [7], в решении различных перечислительных задач. Их вещественные аналоги изучены гораздо хуже, несмотря на, возможно, не менее широкую область применимости. Ниже мы напоминаем основные понятия и теоремы теории комплексных чисел Гурвица и формулируем наши результаты про их вещественные варианты.

## 4.1 Комплексные числа Гурвица

Комплексные числа Гурвица перечисляют мероморфные функции с данным набором критических значений, типы ветвления над которыми заранее заданы. Так, *число Гурвица*, отвечающее набору разбиений $(\mu_1, ..., \mu_m)$ данного числа $d$, — это сумма

$$\sum_{f:M\to S^2} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(f)|},$$

где суммирование идёт по всем разветвлённым накрытиям $f : M \to S^2$ сферы $S^2$ поверхностью $M$ степени $d$, с предписанными типами ветвлений $(\mu_1, ..., \mu_m)$ над заданными точками $t_1, ..., t_m \in S^2$. *Связное число Гурвица* определяется аналогичным образом, с условием связности накрывающей поверхности.

*Простые числа Гурвица* $h^\circ_{m,\mu}$ перечисляют разветвленные накрытия сферы $S^2$, для которых ветвление над одной точкой имеет циклический тип $\mu$ и является простым ещё над $m$ точками. Простые числа Гурвица равны величине

$$h^\circ_{m,\mu} = \frac{1}{n!}|\{(\tau_1, ...\tau_m), \tau_i \in C_2(\mathbb{S}_n)|\tau_m \circ ... \circ \tau_1 \in C_\mu(\mathbb{S}_n)\}|,$$

где через $C_2(\mathbb{S}_n)$ обозначено множество всех транспозиций в $\mathbb{S}_n$, а $C_\mu(\mathbb{S}_n)$ — множество всех перестановок с циклическим типом $\mu \vdash n$ в $\mathbb{S}_n$. *Простые связные числа Гурвица* оказываются равными величине

$$h_{m,\mu} = \frac{1}{n!}|\{(\tau_1, ...\tau_m), \tau_i \in C_2(\mathbb{S}_n)|\tau_m \circ ... \circ \tau_1 \in C_\mu(\mathbb{S}_n), \langle\tau_1, ...\tau_m\rangle \text{ действует транзитивно}\}|.$$

Введем экспоненциальные производящие функции для простых чисел Гурвица:

$$H^\circ(u; p_1, p_2...) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu} h^\circ_{m,\mu} p_{\mu_1} p_{\mu_2} ... \frac{u^m}{m!};$$

$$H(u; p_1, p_2...) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu} h_{m,\mu} p_{\mu_1} p_{\mu_2} ... \frac{u^m}{m!},$$

где $\mu$ пробегает множество всех разбиений всех натуральных чисел.

Имеет место стандартное соотношение между экспоненциальными производящими функциями связных и необязательно связных объектов:

**Теорема 5.** *Справедливо равенство* $H^\circ = \exp(H)$.

Имеет место

**Теорема 6.** [20] *Производящая функция $H^\circ$ является однопараметрическим семейством $\tau$-функций для иерархии Кадомцева-Петвиашвили, а производящая функция $H$ — однопараметрическим семейством решений этой иерархии.*

Обозначим в производящей функции $H^\circ(u; p_1, p_2...)$ коэффициент перед $\frac{u^m}{m!}$ через $H^\circ_m(p_1, p_2...)$,

$$H^\circ(u; p_1, p_2...) = \sum_{m=0}^{\infty} H^\circ_m(p_1, p_2...) \frac{u^m}{m!}.$$

Заметим, что $H^\circ_0 = H^\circ(0; p_1, p_2...) = e^{p_1}$. Следующая теорема даёт способ рекуррентного вычисления чисел Гурвица, отталкиваясь от этого начального условия.

**Теорема 7.** [9] *(Гульден-Джексон) Производящая функция $H^\circ$ для простых чисел Гурвица удовлетворяет дифференциальному уравнению:*

$$\frac{\partial H^\circ}{\partial u} = W H^\circ,$$

*где* $W = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left( (i+j) p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right)$ *— оператор транспозиции (оператор cut-and-join).*

**Следствие 8.** *Справедливо равенство $H^\circ_{m+1} = W H^\circ_m$.*

Теорема Окунькова 6 выводится из теоремы 7: функции Шура образуют явный собственный базис оператора транспозиции.

## 4.2 Вещественные мероморфные функции

Вещественные числа Гурвица перечисляют вещественные мероморфные функции на вещественных алгебраических кривых. В зависимости от рассматриваемых классов вещественных мероморфных функций будут вводиться различные виды вещественных чисел Гурвица.

*Вещественная алгебраическая кривая* $(C, \tau)$ — гладкая компактная комплексная алгебраическая кривая $C$ вместе с антиголоморфной инволюцией $\tau : C \to C$. Обозначим через $C^\tau$ множество неподвижных точек инволюции $\tau$. Кривая $(C, \tau)$ называется *разделяющей*, если поверхность $C \backslash C^\tau$ несвязна, и *неразделяющей* в противном случае. Для разделяющей вещественной кривой дополнение $C \backslash C^\tau$ состоит из двух компонент связности. Под *оснащением* разделяющей вещественной кривой будем понимать выбор одной из этих двух компонент.

*Вещественное голоморфное отображение* вещественной кривой $(C_1, \tau_1)$ в вещественную кривую $(C_2, \tau_2)$ — голоморфное отображение $f : C_1 \to C_2$, такое, что $f \circ \tau_1 = \tau_2 \circ f$. В частности, *вещественная мероморфная функция* на $(C, \tau)$ это вещественное мероморфное отображение из $(C, \tau)$ в $(\mathbb{C}P^1, \sigma)$, где $\sigma : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ — стандартное комплексное сопряжение, $\sigma : z \mapsto \overline{z}$.

Вещественная мероморфная функция $f : C \to \mathbb{C}P^1$ *простая*, если все её конечные критические значения просты. Вещественная мероморфная функция $f : C \to \mathbb{C}P^1$ *чисто вещественная*, если все её конечные критические значения вещественны.

## 4.3 Случай разделяющих вещественных кривых

### 4.3.1 Простые чисто вещественные числа Гурвица

*Оснащённая вещественная мероморфная функция* — это вещественная мероморфная функция $f : (C, \tau) \to (\mathbb{C}P^1, \sigma)$, определённая на оснащенной вещественной кривой $(C, \tau)$. Обозначим через $C^f$ связную компоненту, определяющую оснащение.

Определим тип ветвления оснащенной вещественной мероморфной функции $f:(C,\tau)\to(\mathbb{C}P^1,\sigma)$ над точкой $\infty\in\mathbb{R}P^1$. Полюсы функции $f$ разбиваются на вещественные и пары $\tau$-сопряженных невещественных полюсов. В каждой паре ровно один из $\tau$-сопряженных полюсов лежит в компоненте $C^f$. Порядки этих $\tau$-сопряженных полюсов образуют разбиение $\lambda=(\ell_1,\ell_2,...)$. Вещественный полюс функции $f$ *положительный*, если функция $f$ слева от полюса возрастает, и *отрицательный*, если $f$ слева от полюса убывает. Порядки положительных и отрицательных полюсов образуют разбиения $\kappa^+=(k_1^+,k_2^+,...)$ и $\kappa^-=(k_1^-,k_2^-,...)$ соответственно. *Тип ветвления функции* $f$ над бесконечностью это тройка разбиений $\mu=(\kappa^+,\kappa^-,\lambda)$.

*Оснащенные простые чисто вещественные числа Гурвица* $h^{\mathbb{R}\circ}_{m;\mu}$ перечисляют вещественные мероморфные функции с типом ветвления $\mu=(\kappa^+,\kappa^-,\lambda)$ над бесконечностью и $m$ данными невырожденными вещественными значениями. Формально,

$$h^{\mathbb{R}\circ}_{m;\mu}=\sum_f\frac{1}{\#\mathrm{Aut}(f)},$$

где через $\#\mathrm{Aut}(f)$ обозначен порядок группы автоморфизмов функции $f$.

Обозначим через $h^{\mathbb{R}}_{m;\mu}$ число всех простых оснащенных чисто вещественных мероморфных функций, область определения которых связна.

### 4.3.2 Оператор транспозиции

Сопоставим типу ветвления

$$\mu=(\kappa^+,\kappa^-,\lambda)=((k_1^+,k_2^+,...),(k_1^-,k_2^-,...),(\ell_1,\ell_2,...))$$

моном

$$p_\mu=p^+_{k_1^+}p^+_{k_1^+}...p^-_{k_1^-}p^-_{k_2^-}...q_{\ell_1}q_{\ell_2}...$$

от переменных $p_i^+,p_i^-,q_i$, $i=1,2,...$. Введем производящие функции

$$H^{\mathbb{R}}(u;p_1^+,...,p_1^-,...,q_1...)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_\mu h^{\mathbb{R}}_{m;\mu}p_\mu\frac{u^m}{m!},$$

$$H^{\mathbb{R}\circ}(u;p_1^+,...,p_1^-,...,q_1...)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_\mu h^{\mathbb{R}\circ}_{m;\mu}p_\mu\frac{u^m}{m!};$$

здесь суммирование в правой части идёт по всем тройкам разбиений $\mu=(\kappa^+,\kappa^-,\lambda)$ и всем неотрицательным значениям $m$.

**Теорема 9.** *Справедливо равенство* $H^{\mathbb{R}\circ}=\exp(H^{\mathbb{R}})$.

Следующая теорема вводит уравнение транспозиции для вещественного случая — аналог уравнения Гульдена-Джексона для комплексных чисел Гурвица.

**Теорема 10.** [13] *Производящая функция* $H^{\mathbb{R}\circ}$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial H^{\mathbb{R}\circ}}{\partial u}=W^+(H^{\mathbb{R}\circ}),$$

*где* $W^+=\sum_{i,j=1}^{\infty}\left(p_i^{\bar{i}}p_j^+\frac{\partial}{\partial p^{\bar{i}}_{i+j}}+p^{\bar{i}}_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial p_i^{\bar{i}}\partial p_j^+}\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(ip^+_{2i}\frac{\partial}{\partial q_i}+q_i\frac{\partial}{\partial p^+_{2i}}\right)$, *где для натурального* $i$ *через* $\bar{i}$ *обозначен знак* $+$, *если число* $i$ *четное, и знак* $-$, *если нечетное.*

Применение оператора $W^+$ к начальному условию $H^{\mathbb{R}\circ}(0, p_1^{\pm}, p_2^{\pm}, ...) = e^{p_1^+ + p_1^- + q_1}$ позволяет последовательно вычислять любое количество начальных членов производящей функции $H^{\mathbb{R}\circ}$,

$$H^{\mathbb{R}\circ}(u, p_1^{\pm}, p_2^{\pm}, ...) = e^{uW^+} e^{p_1^+ + p_1^- + q_1}.$$

### 4.3.3 Действие оператора транспозиции

Выберем конечное множество $N$ с числом элементов $n$ и разбиение множества $N$ в несвязное объединение $N = N^+ \sqcup N^-$ подмножеств $N^+$ и $N^-$, состоящих из $n^+$ и $n^-$ элементов соответственно, $n^+ + n^- = n$. *Состоянием* называется разбиение множества $N = \{1, 2, 3, ..., n\}$ в несвязное объединение одно- и двух-элементных подмножеств, такое, что каждое двухэлементное подмножество содержит один элемент из множества $N^+$ и один из множества $N^-$. *Переход* — это упорядоченная пара состояний. *Типом перехода* называется его орбита относительно действия на множестве переходов группы $\mathbb{S}_{n^+} \times \mathbb{S}_{n^-}$, переставляющей элементы в $N^+$ и $N^-$.

В [13] введена алгебра типов переходов $A_{n^+,n^-}$ и дана интерпретация дифференциального оператора в правой части уравнения транспозиции как оператора умножения на класс транспозиции в этой алгебре. Доказано, что оператор $W^+$ на векторном пространстве $A_{n^+,n^-}$ самосопряжён относительно заданного на $A_{n^+,n^-}$ невырожденного скалярного произведения, а значит имеет собственный базис. Непосредственное вычисление собственного базиса оператора $W^+$ трудоемко и требует нахождения корней полиномов возрастающей степени с рациональными коэффициентами; вместо вычисления собственных чисел и собственного базиса оператора $W^+$ мы представляем его в блочном виде, который позволяет эффективно вычислять значения вещественных чисел Гурвица.

Алгебра $A_{n^+,n^-}$ раскладывается в прямую сумму подпространств, порождённых переходами, левые состояния которых содержат $t$ двухэлементных подмножеств, $A_{n^+,n^-} = \oplus_t A_{n^+,n^-,t}$. Подпространства $A_{n^+,n^-,t}$ инвариантны относительно действия оператора $W^+$.

В разделах 4.1.3, 4.1.4 основной части Диссертации мы изучаем свойства представлений произведения двух симметрических групп в алгебре $A_{n^+,n^-}$, изоморфной алгебре многочленов от переменных $p_k^+, p_k^-, q_l$. Мы описываем разложение оператора транспозиции в прямую сумму операторов, отвечающих изотипическим разложениям представлений. Мы показываем, что такие операторы в подходящем базисе записываются целочисленными матрицами и даем явные способы вычисления этих матриц.

**Теорема EK23-3.** *Действие оператора $W^+$ на пространстве многочленов степени $n = n^+ + n^-$ раскладывается в прямую сумму его действия на подпространствах изотипических представлений группы $\mathbb{S}_{n^+} \times \mathbb{S}_{n^-}$.*

В разделах 4.1.1, 4.1.2 мы описываем набор методов для разложения действия оператора $W^+$ в прямую сумму его действий на изотипических подпространствах, а в 4.1.5 приводим пример такого разложения для случая алгебры $A_{2,4}$.

## 4.4 Случай необязательно разделяющих вещественных кривых

### 4.4.1 Простые чисто вещественные числа Гурвица

Определим тип ветвления простой вещественной мероморфной функции $f$. Полюсы функции $f$ разбиваются на вещественные и пары комплексно-сопряженных невещественных. Знак вещественного полюса определен только для полюса четного порядка: знак *положителен*, если соответствующая точка является локальным минимумом, и *отрицателен*, если локальным максимумом. Таким образом, *тип ветвления* функции $f$ над бесконечностью имеет вид

$$\mu = (\kappa^+, \kappa^-, \kappa, \lambda) = ((k_2^+, k_4^+, ...), (k_2^-, k_4^-, ...), (k_1, k_3, ...), (\ell_1, \ell_2, \ell_3, ...)),$$

где $\kappa^+$ и $\kappa^-$ это разбиения, образованные четными частями, состоящими из порядков положительных и отрицательных вещественных полюсов соответственно, разбиение $\kappa$ образовано нечетными частями, состоящими из порядков полюсов нечетных порядков, а разбиение $\lambda$ образовано порядками пар сопряженных невещественных полюсов.

*Простые чисто вещественные числа Гурвица* $\tilde{h}^{\mathbb{R}\circ}_{m;\mu}$ перечисляют вещественные мероморфные функции с типом ветвления $\mu = (\kappa^+, \kappa^-, \kappa, \lambda)$ над бесконечностью и $m$ данными невырожденными вещественными значениями. Через $\tilde{h}^{\mathbb{R}}_{m;\mu}$ обозначим *связные* простые чисто вещественные числа Гурвица со связной областью определения.

### 4.4.2 Оператор транспозиции

Сопоставим типу ветвления $\mu = (\kappa^+, \kappa^-, \kappa, \lambda)$ моном

$$p_\mu = p^+_{k_2^+} p^+_{k_4^+} ... p^-_{k_2^-} p^-_{k_4^-} ... p_{k_1} p_{k_3} ... q_{\ell_1} q_{\ell_2} ...$$

от переменных $p^+_{2i}, p^-_{2i}, p_{2i-1}, q_i, i = 1, 2, ....$ Производящие функции для случая необязательно разделяющих вещественных кривых имеют вид

$$\tilde{H}^{\mathbb{R}}(u; p_2^+, ..., p_2^-, ..., p_1 ..., q_1 ...) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} \tilde{h}^{\mathbb{R}}_{m;\mu} p_\mu \frac{u^m}{m!},$$

$$\tilde{H}^{\mathbb{R}\circ}(u; p_2^+, ..., p_2^-, ..., p_1 ..., q_1 ...) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} \tilde{h}^{\mathbb{R}\circ}_{m;\mu} p_\mu \frac{u^m}{m!};$$

здесь суммирование идёт по всем четвёркам разбиений $\mu = (\kappa^+, \kappa^-, \kappa, \lambda)$ и всем неотрицательным значениям $m$.

**Теорема 11.** [19] [13] *Производящая функция $\tilde{H}^{\mathbb{R}\circ}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial \tilde{H}^{\mathbb{R}\circ}}{\partial u} = \tilde{W}^{\mathbb{R}}(\tilde{H}^{\mathbb{R}\circ}),$$

*где*

$$\tilde{W}^{\mathbb{R}} = \sum_{i,j} \left( p_{2i-1} p_{2j-1} \frac{\partial}{\partial p^-_{2i+2j-2}} + p_{2i-1} p^+_{2j} \frac{\partial}{\partial p_{2i+2j-1}} + p^+_{2i} p^+_{2j} \frac{\partial}{\partial p^+_{2i+2j}} \right) +$$

$$+ \sum_{i,j} \left( 2p_{2i+2j-1} \frac{\partial^2}{\partial p_{2i-1} \partial p^+_{2j}} + \frac{1}{2} p^-_{2i+2j-2} \frac{\partial^2}{\partial p_{2i-1} \partial p_{2j-1}} + 2p^+_{2i+2j} \frac{\partial^2}{\partial p^+_{2i} \partial p^+_{2j}} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left( i p^+_{2i} \frac{\partial}{\partial q_i} + q_i \frac{\partial}{\partial p^+_{2i}} \right),$$

*с начальными условиями*

$$\tilde{H}^{\mathbb{R}\circ}(0; p_1, p_2, \dots, q_1, \dots) = e^{p_1 + q_1/2}.$$

### 4.4.3 Действие оператора транспозиции

Обозначим через $N_n$ конечное множество $N_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Назовём *состоянием* множества $N_n$ инволюцию на нём, т.е. его разбиение на одноэлементные и двухэлементные подмножества. *Переход* — это упорядоченная пара состояний. *Типом перехода* назовём класс эквивалентности переходов относительно действия группы $\mathbb{S}_n$ перестановками множества $N_n$.

В [19] введена алгебра типов переходов $A_n$, в [13] оператор $\tilde{W}^{\mathbb{R}}$ интерпретируется как оператор умножения на класс транспозиции в этой алгебре.

**Теорема EK23-6.** *Оператор $\tilde{W}^{\mathbb{R}}$ на векторном пространстве $A_n$ самосопряжён относительно заданного на $A_n$ скалярного произведения.*

**Следствие 12.** *Оператор $\tilde{W}^{\mathbb{R}}$ данной степени $n$ диагонализируем.*

Непосредственное вычисление собственного базиса оператора $\tilde{W}^{\mathbb{R}}$ трудоемко и требует нахождения корней полиномов возрастающей степени с рациональными коэффициентами; вместо вычисления собственных чисел и собственного базиса оператора $\tilde{W}^{\mathbb{R}}$ мы представляем его в блочном виде, который позволяет эффективно вычислять значения вещественных чисел Гурвица.

Алгебра $A_n$ раскладывается в прямую сумму подпространств, порождённых переходами, левые состояния которых содержат $m$ одноэлементых подмножеств, $A_n = \oplus_m A_{n,m}$. Подпространства $A_{n,m}$ инвариантны относительно действия оператора $\tilde{W}^{\mathbb{R}}$.

В разделах 4.2.3, 4.2.4 основной части Диссертации мы изучаем свойства представлений симметрической группы в алгебре $A_n$, изоморфной алгебре многочленов от переменных $p_k, p_k^+, p_k^-, q_l$. Мы описываем разложение оператора транспозиции в прямую сумму операторов, отвечающих изотипическим разложениям представлений симметрической группы. Мы показываем, что такие операторы в подходящем базисе записываются целочисленными матрицами и даем явные способы вычисления этих матриц.

**Теорема EK23-7.** *Действие оператора $\tilde{W}^{\mathbb{R}}$ на пространстве многочленов данной степени $n$ раскладывается в прямую сумму его действий на подпространствах изотипических представлений группы $\mathbb{S}_n$.*

В разделах 4.2.1, 4.2.2 мы описываем набор методов для разложения действия оператора $\tilde{W}^{\mathbb{R}}$ в прямую сумму его действий на изотипических подпространствах, а в 4.2.5 приводим пример такого разложения для случая алгебры $A_6$.

## 5 Основные результаты диссертации

Основные результаты диссертации содержатся в следующих теоремах.

**Теорема EK19-1.** *Пусть $I^f$ — инвариант оснащенных графов со значениями в кольце многочленов от бесконечного набора переменных $q_1, q_2, \dots$, $I^f : G^f \mapsto \mathbb{F}(q_1, q_2, \dots)$, продолжающийся до градуированного гомоморфизма алгебр Хопфа.*

*Определим константы $i_n^f$, $n = 0, 1, 2, \dots$ равенством*

$$i_n^f = n! \sum_{\substack{G \text{ — связный} \\ |V(G)|=n}} \frac{[q_n] I_G^f(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|},$$

*где через $[q_n]P$ обозначен коэффициент при мономе $q_n$ в многочлене $P = P(q_1, q_2, \dots)$, $|V(G)|$ — количество вершин в графе $G$, $|\operatorname{Aut}(G)|$ — порядок группы автоморфизмов графа $G$.*

*Определим производящие функции*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{f\circ}(q_1, q_2, \dots) &= \sum_G \frac{I_G^f(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|}, \\ \mathcal{I}^{f}(q_1, q_2, \dots) &= \sum_{G \text{ — связный}} \frac{I_G^f(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|}, \end{aligned}$$

*где в первом случае суммирование идёт по всем оснащенным графам, во втором — по связным оснащенным графам.*

*Тогда если $i_n^f \neq 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то после перешкалирования переменных $q_n = \frac{2^{n(n-1)/2}(n-1)!}{i_n^f} p_n$ производящая функция $\mathcal{I}^f$ становится решением иерархии КП в переменных $p_n$, а $\mathcal{I}^{f\circ}$ — $\tau$-функцией иерархии КП.*

**Теорема EK19-2.** *Пусть $I^w : \mathcal{G}^w \to \mathbb{F}[q_1, q_2, \dots]$ градуированный гомоморфизм алгебры Хопфа взвешенных графов в алгебру Хопфа многочленов от бесконечного набора переменных, $I_G^w(q_1, q_2, \dots)$ — инвариант взвешенного графа $G$.*

*Определим производящие функции*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{w\circ}(q_1, q_2, \dots) &= \sum_G \frac{I_G^w(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|}, \\ \mathcal{I}^{w}(q_1, q_2, \dots) &= \sum_{G \text{ — связный}} \frac{I_G^w(q_1, q_2, \dots)}{|\operatorname{Aut}(G)|}, \end{aligned}$$

*где в первом случае суммирование идёт по всем взвешенным графам, во втором — по связным взвешенным графам, $|\operatorname{Aut}(G)|$ — порядок группы автоморфизмов взвешенного графа $G$.*

*Ни при каком перешкалировании переменных $q_n = a_n p_n$, $a_n \in \mathbb{F}$, $a_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, производящая функция $\mathcal{I}^{w\circ}$ не является линейной комбинацией одночастичных многочленов Шура. Более того, ни при каком перешкалировании переменных $q_n = a_n p_n$, $a_n \in \mathbb{F}$, производящая функция $\mathcal{I}^{w\circ}$ не является $\tau$-функцией иерархии КП в переменных $p_n$, и, следовательно, $\mathcal{I}^w$ не является решением иерархии КП.*

**Теорема EK21-1.** *Весовая система $\mathfrak{sl}_2$ на графах пересечений от 1 до 8 вершин допускает продолжение до 4-инварианта графов; такое продолжение единственно.*

**Теорема EK23-6.** *Оператор $\tilde{W}^{\mathbb{R}}$ на векторном пространстве $A_n$ самосопряжён относительно заданного на $A_n$ скалярного произведения.*

**Теорема EK23-3.** *Действие оператора транспозиции $W^+$ для случая разделяющих вещественных кривых на пространстве многочленов степени $n = n^+ + n^-$ раскладывается в прямую сумму его действия на подпространствах изотипических представлений группы $\mathbb{S}_{n^+} \times \mathbb{S}_{n^-}$.*

Таким образом, для фиксированных $n^+$ и $n^-$ вычисление однородной составляющей производящей функции $e^{p_1^+ + p_1^- + q_1}$ можно выполнить, действуя в соответствии со следующим алгоритмом:

1. найти разложение действия группы $\mathbb{S}_{n^+} \times \mathbb{S}_{n^-}$ на пространстве состояний $V_{n^+,n^-}$ на неприводимые;
2. для каждой из подалгебр $A_{n^+,n^-,t} \subset A_{n^+,n^-}$ алгебры переходов найти ее разложение в прямую сумму алгебр эндоморфизмов изотипических подпространств неприводимых представлений группы $\mathbb{S}_{n^+} \times \mathbb{S}_{n^-}$;
3. разложить действие оператора транспозиции $W^+$ в прямую сумму действий умножениями в каждой из алгебр эндоморфизмов изотипических подпространств;
4. разложить начальные условия по изотипическим подпространствам;
5. воспользовавшись знанием характеристического многочлена ограничения оператора транспозиции на изотипическое подпространство, выписать рациональную производящую функцию для вещественных чисел Гурвица, определяемых соответствующим изотипическим подпространством.

**Теорема EK23-7.** *Действие оператора транспозиции $\tilde{W}^{\mathbb{R}}$ для случая необязательно разделяющих вещественных кривых на пространстве многочленов данной степени $n$ раскладывается в прямую сумму его действий на подпространствах изотипических представлений группы $\mathbb{S}_n$.*

Тем самым, вычисление однородной составляющей степени $n$ производящей функции $\tilde{H}^{\mathbb{R}\circ} = e^{u\tilde{W}^{\mathbb{R}}} e^{p_1+q_1/2}$ можно выполнить, действуя в соответствии со следующим алгоритмом:

1. найти разложение действия группы $\mathbb{S}_n$ на пространстве состояний $V_n$ на неприводимые;
2. для каждой из подалгебр $A_{n,m} \subset A_n$ алгебры переходов найти ее разложение в прямую сумму алгебр эндоморфизмов изотипических подпространств неприводимых представлений группы $\mathbb{S}_n$;
3. разложить действие оператора транспозиции $\tilde{W}^{\mathbb{R}}$ в прямую сумму действий умножениями в каждой из алгебр эндоморфизмов изотипических подпространств;
4. разложить начальные условия по изотипическим подпространствам;
5. воспользовавшись знанием характеристического многочлена ограничения оператора транспозиции на изотипическое подпространство, выписать рациональную производящую функцию для вещественных чисел Гурвица, определяемых соответствующим изотипическим подпространством.

## 6 Публикации, содержащие результаты диссертации

**EK19** Красильников, Е.С., “Инварианты оснащенных графов и иерархия Кадомцева–Петвиашвили”, Функциональный анализ и его приложения, 53, 14–26, 2019, Российская академия наук, Математический институт им. ВА Стеклова
Krasilnikov,E.S., *Invariants of framed graphs and the Kadomtsev–Petviashvili hierarchy*, Functional Analysis and Its Applications, 53, 14–26, 2019, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute

**EK21** Красильников, Е.С., “Продолжение весовой системы $\mathfrak{sl}_2$ на графы с $n \leq 8$ вершинами”, Arnold Mathematical Journal, 7, 609–618, 2021, Springer
Krasilnikov,E.S., *An Extension of the $\mathfrak{sl}_2$ Weight System to Graphs with $n \leq 8$ Vertices*, Arnold Mathematical Journal, 7, 609–618, 2021, Springer

**EK23** Красильников, Е.С., “Структура алгебр типов переходов и оператор транспозиции”, Алгебра и анализ, 35, 133–170, 2023
Krasilnikov,E.S., *On the structure of the algebra of transition types and the cut-and-join operator*, Algebra i Analiz, 35, 133–170, 2023

## Список литературы


[1] Aguiar, M., Bergeron, N, Sottile, F., *Combinatorial Hopf algebras and generalized Dehn–Sommerville relations*, Compositio Mathematica, **142**, 1–30, 2006, London Mathematical Society

[2] Bar-Natan, D., *On the Vassiliev knot invariants*, Topology, **34**, 423–472, 1995, Elsevier

[3] Chmutov S., Duzhin S., Mostovoy J., *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, 2012, Cambridge University Press

[4] Chmutov S., Lando, S, *Mutant knots and intersection graphs*, Algebraic & Geometric Topology, **7**, 1579–1598, 2007, Mathematical Sciences Publishers

[5] Chmutov S., Varchenko, A., *Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from* $\mathfrak{sl}_2$, Topology, **36**, 153–178, 1997, Elsevier

[6] Chmutov, S., Kazarian, M., Lando, S., *Polynomial graph invariants and the KP hierarchy*, Selecta Mathematica, **26**, 34, 2020, Springer

[7] Dunin-Barkowski P., Kazaryan M., Popolitov A., Shadrin S., Sleptsov A., *Topological Recursion for the extended Ooguri–Vafa partition function of colored HOMFLY-PT polynomials of torus knots*, Advances in Theoretical and Mathematical Physics, **26**, 793-833, 2022

[8] Ekedahl, T., Lando, S., Shapiro, M., Vainshtein, A., *Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves*, arXiv preprint math/0004096, 2000

[9] Goulden, I., Jackson, D., *Transitive factorisations into transpositions and holomorphic mappings on the sphere*, Proceedings of the American Mathematical Society, **125**, 51–60, 1997

[10] Joni, SA and Rota, G-C, *Coalgebras and bialgebras in combinatorics*, Studies in Applied Mathematics, **61**, 93–139, 1979, Wiley Online Library

[11] Kontsevich, M., *Vassiliev knot invariants*, Adv. in Soviet Math., 137–150, 1993

[12] Казарян М.Э., Ландо С.К., *Комбинаторные решения интегрируемых иерархий*, Успехи математических наук, **70**, 77-106, 2015, Российская академия наук, Математический институт им. ВА Стеклова

[13] Kazarian, M., Lando, S., Natanzon, S., *On framed simple purely real Hurwitz numbers*, Izvestiya: Mathematics, **85**, 681, 2021, IOP Publishing

[14] Lando, S., *On a Hopf algebra in graph theory*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **80**, 104–121, 2000, Elsevier

[15] Lando, S., Zhukov, V., *Delta-matroids and Vassiliev invariants*, arXiv preprint arXiv:1602.00027, 2016

[16] Ландо, С.К., *J-инварианты орнаментов и оснащенные хордовые диаграммы*, Функциональный анализ и его приложения, **40**, 1–13, 2006, Российская академия наук, Математический институт им. ВА Стеклова

[17] Milnor, John W and Moore, John C, *On the structure of Hopf algebras*, Annals of Mathematics, 211–264, 1965, JSTOR

[18] Nenasheva, M., Zhukov, V., *An extension of Stanley's chromatic symmetric function to binary delta-matroids*, Discrete Mathematics, **344**, 2021, Elsevier

[19] Natanzon, S.M., *Simple Hurwitz numbers of a disk*, Functional Analysis and Its Applications, **44**, 36–47, 2010, Springer

[20] Okounkov, Andrei, *Toda equations for Hurwitz numbers*, arXiv preprint math/0004128, 2000

[21] Stanley, Richard P, *A symmetric function generalization of the chromatic polynomial of a graph*, Advances in Mathematics, **111**, 166–194, 1995, Elsevier

[22] Vassiliev, VA, *Cohomology of knot spaces*, 1990, Theory of Singularities and its Applications

[23] Зинова П.А. , *Значения* $\mathfrak{sl}_2$*-весовой системы на семействе графов, не являющихся графами пересечений хордовых диаграмм*, Математический сборник, **213**, 115–148, 2022