Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Факультет математики

на правах рукописи

Горгинян Юлия Ашотовна

Кватернионно-разрешимые гиперкомплексные нильмногообразия

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
М. С. Вербицкий,
PhD

Москва–2024

Введение

Данная диссертация посвящена исследованию некоторых аспектов геометрии (гипер-)комплексных нильмногообразий. Нильмногообразия представляют собой компактные фактор нильпотентной группы Ли G по кокомпактной решетке Γ. Мы используем следующее обозначение: $N = \Gamma\backslash G$.

Одной из задач данной диссертации является изучение подмногообразий в комплексных нильмногообразиях, в частности, наличие или отсутствие комплексных кривых. Этот вопрос относится к области классической алгебраической и комплексной геометрии, однако его решение с использованием стандартных методов представляет значительные трудности. Тем не менее, нильмногообразия обладают уникальным свойством: вопросы их геометрии могут быть переведены на язык теории нильпотентных алгебр Ли. Для понимания геометрической структуры нильмногообразий мы изучаем соответствующие нильпотентные алгебры Ли, которые являются конечномерными векторными пространствами. Философия тут такова: геометрия компактного комплексного многообразия $\Gamma\backslash G$ описывается линейной алгеброй соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, оператором комплексной структуры $I \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ рациональной подалгеброй $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \subset \mathfrak{g}$, порожденной $\log \Gamma \subset \mathfrak{g}$.

(Гипер-)комплексная структура на нильмногообразии индуцированна соответствующей левоинвариантной (гипер-)комплексной структурой на группе Ли. В работе [AV] А. Абашевой и М. Вербицкого рассматривались гиперкомплексные нильмногообразия с абелевой гиперкомплексной структурой (такой, для которой $\sqrt{-1}$-собственные подпространства образуют абелевы подалгебры Ли для каждой комплексной структуры, индуцированной кватернионами.) Впервые абелевы комплексные структуры были описаны в работе М. Л. Барберис [Ba]. В исследовании [AV] была дана характеристика геометрии подмногообразий в нильмногообразиях с абелевой гиперкомплексной структурой.

В первой части данной диссертации мы развиваем подход, описанный в [AV], и доказываем, что в комплексных нильмногообразиях с комплексной структурой, индуцированной кватернионами (за исключением, может быть, счетного числа), и таких, что соответствующая алгебра Ли является $\mathbb{H}$-разрешимой (1.2), отсутствуют комплексные кривые.

Условие $\mathbb{H}$-разрешимости соответствующей алгебры Ли представляет самостоятельный интерес. Например, любая алгебра Ли с абелевой гиперкомплексной структурой является $\mathbb{H}$-разрешимой. Менее очевидно существование $\mathbb{H}$-разрешимых алгебр Ли, гиперкомплексная структура которых не является абелевой. Мы приводим такой пример, используя конструкцию кватернионного дубля, описанную в [SV].

Вторая часть диссертации посвящена исследованию вопроса о $\mathbb{H}$-разрешимости алгебры Ли на гиперкомплексном многообразии. В данном контексте рассматриваются гиперкомплексные нильмногообразия, обладающие плоской связностью Обаты. Следует отметить, что связность Обаты является единственной связностью без кручения в касательном расслоении, сохраняющей гиперкомплексную структуру.

1 Кривые в гиперкомплексных нильмногообразиях

Прежде чем углубиться в исследуемую тему, мы кратко рассмотрим причины интереса к нильмногообразиям, а также обозначим наш интерес к исследованию существования кривых.

Вопрос о существовании маломерных объектов очень часто имеет ключевое значение в области алгебраической геометрии. Например, при изучении пространств модулей векторных расслоений или пучков мы ищем кривые в алгебраических многообразиях. К примеру, на некоторых поверхностях отсутствуют комплексные кривые, что оставляет пробел в классификации Энрикеса-Кодаиры. Кратко напомним результаты в этой области.

Среди компактных комплексных поверхностей важный класс занимают поверхности **класса VII**. Это некелеровы поверхности с размерностью Кодаиры $-\infty$ и первым числом Бетти $b_1 = 1$ [In]. Минимальная поверхность S класса VII называется **класс** $\mathbf{VII}_0$. В работах [Bog1], [Bog2] было показано и затем разъяснено в [Te], [LYZ], что S со вторым числом Бетти $b_2(S) = 0$ биголоморфно *поверхности Хопфа* или *поверхности Инуэ*.

Поверхность Хопфа H — это поверхность класса VII_0 с универсальным накрытием $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$. Ее можно получить как фактор $H \cong \mathbb{C}^2\backslash\{0\}/\langle\gamma\rangle$ по циклической группе, порожденной голоморфной контракцией. Поверхность Хопфа всегда содержит хотя бы одну комплексную кривую, например, возьмем эллиптическую кривую $C = \mathbb{C}^* \times \{0\}/\langle\gamma\rangle$.

Поверхности Инуэ S — это поверхности класса VII_0 с универсальным накрытием $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ — верхняя полуплоскость. Поверхности Инуэ S, биголоморфны $\mathbb{C} \times \mathbb{H}/\Gamma$, где Γ — дискретная подгруппа, действующая голоморфно на $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$. Инуэ показал, что эти поверхности имеют нулевую алгебраическую размерность и не содержат комплексных кривых. Если мы предпологаем *глобальную гипотезу о сферической оболочке*, то они являются единственными некелеровыми поверхностями без кривых.

Глобальная сферическая оболочка (GSS) на комплексной поверхности — это открытое подмножество, биголоморфное окрестности S^3 в $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ такое, что его дополнение связно. **Гипотеза о глобальной сферической оболочке** утверждает, что все поверхности **класса** $\mathbf{VII}_0$ с положительным вторым Бетти числом содержат GSS. Гипотеза доказана для $b_2 = 0$ и $b_2 = 1$

А. Телеманом в работе [Te2]. Кроме того, Длусски, Ольеклаус и Тома показали, что наличие GSS в поверхности S подразумевает, что все поверхности класса VII содержат ровно $b_2(S)$ рациональных кривых [DOT].

Существует многомерное обобщение поверхностей Инуэ. Они связаны с числовыми полями и называются многообразиями Ольеклауса-Тома. Для многих числовых полей эти многообразия вообще не содержат комплексных подмногообразий [OV1],[Ve].

Мы изучаем компактные комплексные некелеровы многообразия без кривых. Мы уже видели пример: поверхность Инуэ. В частности, как поверхности Инуэ, так и многообразия Ольеклауса-Тома подпадают под категорию *солвмногообразий*. Это гладкое многообразие, полученное из разрешимой группы Ли. Все солвмногообразия, расслоенные над тором со слоем, диффеоморфным *нильмногообразию* [Mos]. *Комплексные нильмногообразия*, за исключением торов, не являются кэлеровыми [BG].

Чтобы получить комплексное нильмногообразие без кривых, напомним стандартный прием, называющися *твисторной деформацией*.

Гладкое многообразие X называется **гиперкомплексным**, если в $\mathrm{End}(TX)$ существуют три интегрируемые почти комплексные структуры I, J и K, удовлетворяющие $I^2 = J^2 = K^2 = -Id$ и $IJ = -JI = K$. Для любого $(a, b, c) \in S^2$ линейная комбинация $L := aI + bJ + cK$ определяет другую комплексную структуру на X. Мы получаем $\mathbb{C}P^1$-семейство комплексных структур. Это называется **твисторной деформацией**.

Используя твисторную деформацию, мы доказываем следующую теорему:

Теорема 1.1: Пусть (N, I, J, K) — гиперкомплексное нильмногообразие и соответствующая алгебра Ли $\mathbb{H}$-*разрешима.* Тогда для общей комплексной структуры L, индуцированной кватернионами в комплексном многообразии (N, L) нет комплексных кривых. Здесь «общая» означает вне счетного множества.

Гиперкомплексная структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ — это тройка операторов комплексной структуры I, J и K на $\mathfrak{g}$, удовлетворяющих кватернионным соотношениям.

Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная гиперкомплексная алгебра Ли. Определим индуктивно $\mathbb{H}$-инвариантные подалгебры Ли:

$$\mathfrak{g}_i^{\mathbb{H}} := \mathbb{H}[\mathfrak{g}_{i-1}^{\mathbb{H}}, \mathfrak{g}_{i-1}^{\mathbb{H}}], \tag{1.1}$$

где $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{H}} = \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{H}} := \mathbb{H}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + I[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + J[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + K[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Определение 1.2: Гиперкомплексная нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется $\mathbb{H}$**-разрешимой**, если семейство (1.1) сходится к нулю.

Мы будем рассматривать левоинвариантные слоения на группе Ли G, порожденные подалгебрами Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Для удобства читателя, напомним определение слоения.

Распределением на гладком многообразии X называется подрасслоение $\Sigma \subset TN$ в касательном расслоении. Распределение называется **инволютивным**, если оно замкнуто относительно скобки Ли. **Лист** распределения Σ — это максимальное связное погруженное подмногообразие $L \subset N$ такое, что L касается Σ в каждой точке. Если Σ инволютивно, то множество всех ее листов называется **(гладким) слоением**.

Для каждого $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ рассмотрим левоинвариантное слоение Σ_i на группе Ли G, порождённое подалгеброй $\mathfrak{g}_i^{\mathbb{H}}$.

Теорема 1.3: Пусть C_L — комплексная кривая в комплексном нильмногообразии (N, L), где $L \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ — это *общая комплексная структура*. Предположим, что C_L касается слоения Σ_{i-1}. Тогда она также касается Σ_i.

Следствие 1.4: Пусть (N, I, J, K) — гиперкомплексное нильмногообразие и соответствующая алгебра Ли $\mathbb{H}$-разрешима. Тогда для общей комплексной структуры L, индуцированной кватернионами, в комплексном многообразии (N, L) нет комплексных кривых.

2 $\mathbb{H}$-разрешимые алгебры Ли и алгебраическая монодромия

Напомним, что многообразия с плоской связностью в касательном расслоении называются (плоскими) афинными многообразиями.

Пусть X — компактное аффинное многообразие, линейное представление голономии которого унипотентно. Тогда X допускает параллельную форму объёма. Обратное, частично, тоже верно и было доказано Голдманом, Фридом и Хиршем, [FGH, Теорема A]:

Теорема 2.1: Пусть X — компактное аффинное многообразие с параллельной формой объёма. Предположим, что аффинная группа голономии нильпотентна. Тогда представление линейной голономии унипотентно.

Мы используем следующую переформулировку 2.1:

Теорема 2.2: Пусть X — компактное аффинное многообразие с параллельной формой объёма и пусть его фундаментальная группа нильпотентна. Тогда представление монодромии унипотентно.

Отметим следующий факт – на всяком гиперкомплексном нильмногообразии существует параллельная форма объема:

Теорема 2.3: [BDV, Теорема 3.2] Пусть $N = \Gamma\backslash G$ — гиперкомплексное нильмногообразие, $n = \dim_{\mathbb{C}} G$. Тогда G допускает левоинвариантное ненулевое голоморфное сечение Ω канонического расслоения $\Lambda^{n,0}G$. Более того, $\nabla\Omega = 0$, где ∇ — это **связность Обаты**.

Заметим, что теорема (2.2) верна только в случае нильмногообразий, то есть тогда, когда соответствующая алгебра Ли имеет рациональную структуру, то есть рациональную подалгебру $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \subset \mathfrak{g}$, такую что $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R} = \mathfrak{g}$.

Нильмногообразия являются $K(\Gamma, 1)$-пространствами и $\pi_1(N) = \Gamma$. Чтобы иметь возможность применить теорему 2.1, нам также нужна форма параллельного объема на нильмногообразии. Ее существование гарантируется следующей теоремой:

В случае, когда группа Ли G допускает левоинвариантную гиперкомплексную структуру с плоской связностью Обаты, мы могли бы попытаться доказать, что $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{H}}$ — собственная подалгебра в $\mathfrak{g}$, и тогда применить индукцию, поскольку $\mathfrak{g}$ конечномерна. Для этого мы должны заботиться о существовании рациональной структуры в $\mathfrak{g}_i^{\mathbb{H}}$, которой может и не быть. Следовательно, нет способа решить эту проблему напрямую с помощью индукции.

Чтобы преодолеть эту проблему, мы вводим понятие алгебраической монодромии.

Определение 2.4: Пусть $\mathfrak{g}$ алгебра Ли, $\nabla : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ есть $\mathbb{R}$-линейное отображение. **Алгебраической группой монодромии** $\mathscr{Hol}^a_\nabla$ называется подгруппа $\mathrm{GL}(B)$, порожденная матричными экспонентами:

$$\mathscr{Hol}^a_\nabla := \langle e^{t\nabla_X} \mid t \in \mathbb{R}, \text{ for all } X \in \mathfrak{g} \rangle.$$

Неформально, она позволяет нам мерять, насколько действие монодромии плоской связности отличается от действия дифференциала левого сдвига на группе Ли.

Мы доказываем следующую теорему:

Теорема 2.5: Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ гиперкомплексного нильмногообразия $\Gamma\backslash G$ с плоской связностью Обаты, является $\mathbb{H}$-разрешимой.

3 Пучки Ли

В данной диссертации дан лишь частичный ответ на вопрос об $\mathbb{H}$-разрешимости алгебры Ли. В этом разделе мы даем новый взгляд на проблему $\mathbb{H}$-разрешимости.

Также, мы описываем новый подход, который может помочь в дальнейших исследованиях.

Введем следующие определения:

Определение 3.1: Пусть V — векторное пространство и $S \subset \mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, V)$ подпространство такое, что для любого $w \in S$ отображение $w(x, y)$, обозначаемое в дальнейшем как $[x, y]_w$, удовлетворяет условию Якоби $[[x, y]_w, z]_w + [[y, z]_w, x]_w + [[z, x]_w, y]_w = 0$. Тогда S называется **пучком Ли**. Когда $\dim S = k$, мы называем его k**-пучком**.

Определение 3.2: Пучок Ли $S \subset \mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, V)$ S**-разрешим**, если V допускает фильтрацию $V = V_0 \supset V_1 \supset ... \supset V_n = 0$ такую, что $[V_i, V_i]_w \subset V_{i-1}$ для всех $w \in S$.

Гипотеза 3.3: («основная гипотеза»)
Пусть $S \subset \mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, V)$ — пучок Ли. Предположим, что алгебра Ли $(V, [\cdot, \cdot]_w)$ нильпотентна для всех $w \in S$. Будет ли из этого следовать, что (V, S) S-разрешимо?

Эта гипотеза нас интересует только тогда, когда $S = \mathbb{H}$, а пучок Ли происходит из гиперкомплексной структуры на алгебре Ли, но это может быть верно в целом.

Теоретическая значимость результатов

Результаты этого исследования имеют интересные следствия и могут быть развиты в дальнейших исследованиях. Одним из немедленных результатов является создание множества новых примеров компактных комплексных многообразий без комплексных кривых. Кроме того, другой результат частично характеризует гиперкомплексные нильмногообразия, имеющие плоскую связность Обаты.

Практическая значимость результатов

Диссертация носит исключительно теоретический характер.

Личный вклад

Все основные результаты были получены автором.

Апробация результатов диссертационного исследования

1. Seminário de Geometria Diferencial, доклад “Complex curves in hypercomplex manifolds”, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil;

2. Geometric Structures and Moduli Spaces, постер "Complex curves in hypercomplex nilmanifolds with $\mathbb{H}$-solvable Lie algebras”, UNC, Cordoba, Argentina;

3. Brazil-China Joint Mathematical Meeting, постер “Flat hypercomplex nilmanifolds are quaternionic-solvable”, Foz do Iguacu, Brazil, July, 2023;

4. Estruturas geométricas em variedades, доклад “Flat hypercomplex nilmanifolds are $\mathbb{H}$-solvable ”, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, August, 2023;

5. Geometry Seminar, доклад “Quaternionic-solvable hypercomplex nilmanifolds”, UFRJ, Rio de Janeiro, Brazil, November, 2023;

6. Algebraic Geometry, Lipschitz Geometry and Singularities, доклад “Complex curves in nilmanifolds”, Pipa, Brazil, December 2023

7. Conference on Singularity and Birational Geometry, доклад “Complex curves in nilmanifolds”, Yonsei University in Seoul, Korea, January, 2024.

8. Special Holonomy and Geometric Structures on Complex Manifolds, постер “Complex curves in hypercomplex nilmanifolds”, IMPA Rio de Janeiro, Brazil, March 2024

9. Algebraic geometry seminar, доклад “Complex curves in nilmanifolds”, HSE, Moscow, Russia, April 2024

10. Algebra seminar, доклад “Complex curves in hypercomplex nilmanifolds”, KU Leuven, Leuven, Belgium, May 2024

4 Публикации, содержащие основные результаты диссертации

1. Y. Gorginyan, *Complex curves in hypercomplex nilmanifolds with $\mathbb{H}$-solvable Lie algebras (Комплексные кривые в гиперкомплексных нильмногообразиях с $\mathbb{H}$-разрещимой алгеброй Ли)*, Journal of Geometry and Physics Volume 192, October 2023, 104900

2. Ю. Горгинян, *Плоские гиперкомплексные нильмногообразия $\mathbb{H}$-разрешимы*, Функциональный анализ и его приложения, вып. 3, том 58, 2024

Благодарности

Я невероятно благодарна моему научному руководителю Мише Вербицкому. Его помощь в написании этой диссертации была неоценима, и он также сыграл решающую роль в моем развитии как математика. Я искренне ценю его терпение и поддержку в ответах на все мои многочисленные вопросы.

Список литературы

[AV] Abasheva A., Verbitsky M., *Algebraic dimension and complex subvarieties of hypercomplex nilmanifolds*, https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.05528. (Cited on page 1.)

[Ba] M. L. Barberis, *Lie groups admitting left invariant hypercomplex structures*, 1994, Ph. D. dissertation, National University of Cordoba, Argentina. (Cited on page 1.)

[BDV] M. L. Barberis, I. G. Dotti, M. Verbitsky, *Canonical bundles of complex nilmanifolds,*, Math. Res. Lett. 16 (2009), no. 2, 331–347. (Cited on page 5.)

[BG] Benson C., Gordon C. S., *Kähler and symplectic structures on nilmanifolds,* Topology, 27(4), 513–518, 1988. (Cited on page 3.)

[Bog1] Bogomolov, Fedor A. (1976), *Classification of surfaces of class VII0 with b2=0*, Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya, 10 (2): 273–288, ISSN 0373-2436, MR 0427325 (Cited on page 2.)

[Bog2] Bogomolov, Fedor A. (1982), *Surfaces of class VII0 and affine geometry*, Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya, 46 (4): 710–761, (Cited on page 2.)

[DOT] Dloussky, Georges; Oeljeklaus, Karl; Toma, Matei (2003), *Class VII0 surfaces with b2 curves*, The Tohoku Mathematical Journal, Second Series, 55 (2): 283–309, (Cited on page 3.)

[FGH] D. Fried, W. Goldman, M. W. Hirsch, *Affine manifolds with nilpotent holonomy*, Commentarii Mathematici Helvetici, volume 56, pages 487-523, 1981. (Cited on page 4.)

[In] M. Inoue, *On surfaces of class VII0*, Inventiones math., 24 (1974), 269–310. (Cited on page 2.)

[LYZ] Li, J.; Yau, S. T.; Zheng, F.: *On projectively flat Hermitian manifolds, Comm. in Analysis and Geometry*, 2, 103-109 (1994) (Cited on page 2.)

[Mos] G. D. Mostow, *Factor spaces of solvable Lie groups*, Ann. of Math., 60 (1954), 1-27 (Cited on page 3.)

[Ob] Obata M., *Affine connections on manifolds with almost complex, quaternionic or Hermitian structure,* Jap. J. Math., 26 (1955), 43-79. (Not cited.)

[OV1] L. Ornea, M. Verbitsky, Math. Res. Lett., 18:4 (2011), 747–754. (Cited on page 3.)

[SV] Soldatenkov A., Verbitsky M., *Holomorphic Lagrangian fibrations on hypercomplex manifolds,* International Mathematics Research Notices 2015 (4), 981-994. (Cited on page 1.)

[Te] Teleman, A. *Projectively flat surfaces and Bogomolov's theorem on class V II0 -surfaces*, Int. J. Math., Vol.5, No 2, 253-264 (1994) (Cited on page 2.)

[Te2] Teleman, A.: *Donaldson theory on non-Kählerian* surfaces and class VII surfaces with b2 = 1, Invent. math. 162, 493-521 (2005) (Cited on page 3.)

[Ve] S. Verbitskaya, "Curves on the Oeljeklaus–Toma Manifolds", Funktsional. Anal. i Prilozhen., 48:3 (2014), 84–88; Funct. Anal. Appl., 48:3 (2014), 223–226 (Cited on page 3.)