Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Департамент математики факультета
Санкт-Петербургская школа физико-математических и
компьютерных наук

На правах рукописи

Синцова Ксения Анатольевна

Приближение двоякопериодическими функциями

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор.
Широков Н. А.

Санкт-Петербург - 2024

Введение

Вопросы, связанные с полиномиальным приближением на комплексной плоскости, стали изучатся с 1920-х годов. Принципиальным результатом 1950-х годов является теорема С. Н. Мергеляна [1]. Начиная с 1960-х годов, данной проблематикой занимались многие математики, упомянем для примера В. К. Дзядыка, Н. К. Лебедева, Н. А. Широкова, И. А. Шевчука, В. М. Миклюкова, В. . Белого, П. М. Тамразова, В. В. Андреевского, В. В. Маймескула, D. E. Saff, V. Totik, J. Muller, T. Ganelius [3-6], [7-8], [9-10], [14-22], [23-25], [11].

Важной темой изучаемой в работах упомянутых математиков, являлась задача о конструктивном описании классов аналитических в области функций и входящих в какой-либо класс гладкости в замкнутой области в терминах скорости их приближения полиномами. Для иллюстрации проблемы рассмотрим ограниченную жорданову область D с границей Γ.

Обозначим через $H^\alpha(\overline{D})$ класс функций f, аналитических в D и удовлетворяющих условию $|f(z) - f(\xi)| \leq c_f|z-\xi|^\alpha, z, \xi \in \overline{D}, 0 < \alpha < 1$. Пусть функция $\xi = \varphi(z)$ отображает $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ на $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \mathbb{D}$ - единичный круг, такой, что $\varphi(\infty) = \infty, \varphi'(\infty) > 0, z = \Psi(\xi)$ - обратное отображение. Для $h > 0$ положим $\Gamma_h = \Psi((1+h)\Pi), \Pi = \partial\mathbb{D}$ - единичная окружность.

Первые результаты о конструктивном описании класса $H^\alpha(\overline{D})$ для случая достаточно гладкой Γ [2] или кривой Γ с конечным числом углов [3], [6] формулировались следующим образом. Для $z \in \Gamma$ положим $\rho_h(z) = dist(z, \Gamma_h)$.

Теорема А. Для того, чтобы $f \in H^\alpha(\overline{D})$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $n = 1, 2, ...$ существовали полиномы $P_n(z), degP_n \leq n$ и некоторая постоянная c_f, не зависящая от z и n, такие, что выполняется соотношение

$$|f(z) - P_n(z)| \leq c_f \rho^\alpha_{\frac{1}{n}}(z), z \in \Gamma. \qquad (a)$$

Последующие усилия математиков были направлены на ослабление условий на границу Γ, при которых критерий (а) продолжал бы выполняться. Наиболее сильный результат был получен в работе [19], в которой кривая Γ предполагалась квазиконформной. Параллельно с этим оказалось [13], что наличие на границе внешних углов, равных нулю или 2π, может приводить к отсутствию конструктивного описания класса $H^\alpha(\overline{D})$ вида (а). При этом наличие внешних для D углов, равных 2π, на кривой Γ в случае достаточной гладкости соприкасающихся в угловой точке дуг описание (а) сохраняло конструктивное описание [6].

Наряду с конструктивным описанием классов аналитических функций в гладких областях рассматривалось конструктивное описание голоморфных функций в областях $\mathbb{C}^n$, при $n \geq 2$. [29]. Границы соответствующих областей предполагались C^2 - гладкими.

Имеется промежуточная между $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^n$ ситуация, именно, области на эллиптических кривых в $\mathbb{C}^2$, одномерные в комплексном смысле области, погруженные в $\mathbb{C}^2$, требуют для конструктивного описания классов голоморфности в них функций полиномов от двух переменных.

Первые результаты такого рода были получены в работах [11], [12]. В этих работах предполагалось, что граница области удовлетворяет условию соизмеримости дуги и хорды, и изучался именно класс $H^{\alpha}(\overline{D})$ с $0 < \alpha < 1$.

Построение требуемых полиномов происходило на плоскости $\mathbb{C}$, полиномы строились от двояко-периодических функций Вейерштрасса и их производных.

В настоящей диссертации конструктивно описываются классы $H^{r+\omega}(\overline{D})$ для модулей непрерывности ω, удовлетворяющих условию Дини (в частности, для классов $H^{r+\alpha}(\overline{D}), r \geq 0, 0 < \alpha < 1$) и для областей D, которые могут иметь конечное число внешних по отношению к D углов, равных 2π. Доказывается т. н. прямая теорема приближения для классов $C^r(D)$.

Цели и задачи исследования

Целью исследования является построение приближения полиномами от функции двух переменных, заданной на континууме эллиптической кривой в $\mathbb{C}^2$ и голоморфной в его внутренности, доказательство прямой и обратной теорем приближения двоякопериодическими функциями Вейерштрасса, а также доказательство прямой теоремы приближения для классов $C^r(D)$. Для решения данной задачи планируется выполнение следующих шагов:

• Вывод и доказательство прямой теоремы приближения функции двоякопериодическими функциями Вейерштрасса;

• Определение и изучение рассматриваемых областей и классов функций, аналитических в заданных областях и непрерывных на замыкании указанных областей, формулировка основных теорем – основного результата первой половины работы;

• Построение приближающего полинома $\mathbf{P}_n(\mathfrak{P}'(z), \mathfrak{P}(z))$;

• Проведение проверки оценки величин $\rho_n(1/n)(z)$ в окрестностях точек заострения;

• Завершение доказательства прямой теоремы;

• Вывод и доказательство обратной теоремы приближения функции двоякоперио-

дическими функциями Вейерштрасса на подмножествах областей с заострениями;
• Построение приближающего полинома;
• Задание неравенства типа Бернштейна;
• Завершение доказательства обратной теоремы.
• Рассмотрение класса функций $f \in C^r(D)$ (класс функций, у которых производная какого-то порядка является ограниченной).
• Доказательство прямой теоремы приближения полиномами от двояко-периодических функций Вейерштрасса функций, аналитических в рассматриваемых областях, у которых производная данного порядка ограничена.

Научная новизна результатов

Все выносимые на защиту результаты являются новыми.
В рамках диссертационной работы получены результаты приближения функции, заданной на эллиптической кривой в $\mathbb{C}^2$ с помощью полиномов от функций Вейерштрасса, а также их производных. Поставлена и доказаны прямая и обратная теоремы о приближении указанного типа функций, доказана прямая теорема приближения для классов функций $C^r(D)$. Принципиальное значение играет то, что задача приближения была перенесена на плоские области, а само приближение представлено при помощь функций Вейерштрасса.

Теоретическая и практическая значимость результатов

Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при дальнейших исследованиях полиномиальной аппроксимации на подмножествах эллиптических кривых.

Методология и методы исследования

Для получения заявленных результатов была применена теория эллиптических функций, конкретно теория функций Вейерштрасса, теория аппроксимации, а также свойства конформных отображений областей на внешность круга.

Положения, выносимые на защиту

1. Получена прямая теорема приближения функций из класса $H^{r+\omega}(\overline{D})$ полиномами от двояко-периодических функций Вейерштрасса для областей D, которые

могут иметь конечное число внешних по отношению к D граничных углов, равных 2π.
2. Получена обратная теорема приближения для функций из класса $H^{r+\omega}(\overline{D})$ для упомянутых выше областей.
3. Получена прямая теорема приближения для классов $C^r(D)$.

Достоверность результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения.
Полный объем диссертации составляет 61 страницу. Список литературы содержит 35 наименования.

Личный вклад автора

Все результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно.

1 Содержание работы

В **первой главе** формулируется и доказывается прямая теорема приближения функции, заданной на эллиптической кривой при помощи полиномов Вейерштрасса.

Пусть Q - параллелограмм на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с вершинами 0, $2\omega_1, 2\omega_2$, $2\omega_3 \stackrel{\text{def}}{=} 2(\omega_1+\omega_2), Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0, \mathfrak{P}$ - классическая функция Вейерштрасса с периодами $2\omega_1, 2\omega_2$ [2, Гл.1]. $\mathring{Q}$ - внутренность Q, D - жорданова область, на границу которой ниже будут наложены некоторые условия, $\overline{D} \subset \mathring{Q}$.

Пусть $\omega : \{x \in R : x \geq 0\} \to \{x \in R : x \geq 0\}$ – строго возрастающая функция, $\omega(0) = 0$, которую мы будем рассматривать в качестве модуля непрерывности. Через $H^{\omega}(\overline{D})$ обозначим множество функций, аналитических в D, непрерывных в $\overline{D}$, для которых выполнено соотношение $|f(z_1) - f(z_2)| \leq c_f\omega(|z_1 - z_2|)$, для любых $z_1, z_2 \in \overline{D}$.

Пусть $H^{\omega+r}(\overline{D})$ - множество функций, аналитических в D и таких, что $f^{(r)} \in H^{\omega}(\overline{D})$; $H^{\omega+0}(\overline{D}) \stackrel{\text{def}}{=} H^{\omega}(\overline{D})$.

Мы предполагаем, что модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет неравенству:

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{t}dt + x\int_x^{\infty}\frac{\omega(t)}{t^2}dt \leq c\omega(x), x > 0.$$

Предполагаем, что жорданова область D обладает следующими свойствами:

1) имеется конечное число точек $z_1, ..., z_m \in \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \partial D, m \geq 1$, и их окрестностей $\Omega_1, ..., \Omega_m$, $z_j \in \Omega_j$, таких, что $\overline{\Omega}_k \cap \overline{\Omega}_l = \emptyset$, $k \neq l$;

2) дуги $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$ лежат на $\Gamma, \Gamma_j \subset \Gamma\setminus\bigcup_{r=1}^m \Omega_r, \Gamma_k \bigcap \Gamma_l = \emptyset, k \neq l, \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j = \Gamma\setminus\bigcup_{r=1}^m \Omega_r$ и концы Γ_j - точки z^0_{2j-1} и z^0_{2j}, причем $z_j, z^0_{2j-1}, z^0_{2j}, z_{j+1}$ следуют в порядке положительного обхода кривой Γ, $z_{m+1} \stackrel{\text{def}}{=} z_1$. Предполагаем, что существует $b > 0$, где $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$ - дуга с концами ξ_1, ξ_2, содержащаяся в дуге кривой Γ, с концами z^0_{2j} и z^0_{2j-1}, не содержащей точку z_j, выполнено соотношение

$$|\Gamma(\xi_1, \xi_2)| \leq b|\xi_2 - \xi_1|. \qquad (b)$$

Далее условие b) мы будем называть условием соизмеримости длины дуги и хорды. Дуга Γ с концами в точках z^0_{2j-1} и z^0_{2j-2}, содержащая точку z_j, имеет касательную в каждой точке.

Дуги $\Gamma(z^0_{2j-1}, z_j) \subset \Omega_j$, $\Gamma(z_j, z^0_{2j-2}) \subset \Omega_j$ обладают следующим свойством: если $\Theta(\xi)$ - угол наклона ориентированной касательной к Γ в положительном направлении вещественной оси, то с некоторыми $b_1 > 0, \sigma > 0$ имеется соотношение

$$|\Theta(\xi_2) - \Theta(\xi_1)| \leq b_1|\xi_2 - \xi_1|^\sigma, \qquad (c)$$

в случае, когда $\Gamma(\xi_1, \xi_2) \subset \Gamma(z^0_{2j-1}, z_j)$ или $\Gamma(\xi_1, \xi_2) \subset \Gamma(z_j, z^0_{2j-2})$. Внешний по отношению к D угол η^* между касательными к дугам $\Gamma(z^0_{2j-1}, z_j)$ и $\Gamma(z_j, z^0_{2j-2})$ в точке z_j равен

$$\eta^* = 2\pi, j = 1...m.$$

Обозначим через $\varphi(z)$ функцию, которая конформно отображает $\mathbb{C}\backslash\overline{D}$ на внешность единичного круга $\mathbb{D}$ так, что $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) > 0, z = \Psi(\xi)$ - обратное отображение. Для $t > 0$ положим $\Gamma_{1+t} \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : z = \Psi(\xi), |\xi| = 1 + t\}$, для $z \in \Gamma$ полагаем $\rho_t(z) \overset{\text{def}}{=} dist(z, \Gamma_{1+t})$.

Основной результат:

Теорема 1.1. *Пусть D удовлетворяет указанным выше условиям, модуль непрерывности ω удовлетворяет соотношению (1), $f \in H^{\omega+r}(\overline{D})$, $r \in \mathbb{Z}, r \geq 0$. Тогда существует постоянная $c = c(f)$ такая, что при n = 1,2... найдется полином $\mathbf{P}_n(u, v)$ от двух переменных, $deg\mathbf{P}_n \leq n$, такой, что справедливо соотношение:*

$$|f(z) - \mathbf{P}_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leq c\rho^r_{\frac{1}{n}}(z)\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z)), \quad z \in \Gamma.$$

Доказательству теоремы 1.1 посвящена первая глава работы.

Вспомогательные выводы и утверждения:

Лемма 1. *Пусть $Q_\mathbf{t} \overset{\text{def}}{=} \omega_3 + \mathbf{t}(Q - \omega_3)$ – параллелограмм с центром в точке ω_3 и сторонами длины $2\mathbf{t}|\omega_1|, 2\mathbf{t}|\omega_2|, 0 < \mathbf{t} < 1$. Пусть выполнено условие $\overline{D} \subset Q_\mathbf{t}$. Пусть функция F аналитична в $Q_\mathbf{t}$, принадлежит в $\overline{Q}_\mathbf{t}$ классу $H^{1+\alpha}$, кроме того, $F(z) = F(2\omega_3 - z)$ для произвольного $z \in \overline{Q}_\mathbf{t}$. Тогда для произвольного n можно указать полином $Q_n, degQ_n \leq n$, такой, что*

$$|F(z) - Q_n(\mathfrak{P}(z))| \leq c \cdot n^{-(\alpha+1)},$$

$$|F'(z) - (Q_n(\mathfrak{P}(z)))'| \leq c \cdot n^{-\alpha}, z \in \overline{Q}_\mathbf{t}$$

Следующая теорема в духе результатов Е. М. Дынькина [7], но у него она не встречается для областей, которые рассматриваются в данной работе.

Теорема 1.3. *Существует продолжение f_0 функции f в $\mathbb{C} \setminus D$ такое, что*

1. $f_0 \in C(\mathbb{C}), f_0 \in C^1(\mathbb{C} \setminus \overline{D}), f_0(z) = 0$, при $|z| \geq R_0$.
2. $|f'_{0\overline{z}}(z)| \leq c \cdot dist^{r-1}(z, \Gamma)\omega(dist(z, \Gamma)), c$ не зависит от $z, z \in \mathbb{C} \setminus D$.

Как показано в диссертации (см. главу 1, стр. 20) можно определить полином $Q_{m_0}(u)$ так, чтобы функция $s(z) = \mathfrak{P}'(z)Q_{m_0}(\mathfrak{P}(z))$ была однолистной в параллелограмме $Q_\mathbf{t}$.

Лемма 2. *Для $z \in D$ справедливо соотношение*

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\overline{Q}_t\setminus\overline{D}} \frac{f'_{0\overline{\xi}}(\xi)s'(\xi)}{s(\xi)-s(z)} dA(\xi),$$

где dA - двумерная мера Лебега.

Доказательство леммы 2 основано на использовании свойств функции f_0, свойств модуля непрерывности, а также на применении формулы Коши. Положим $G = s(D)$, функция Φ конформно отображает $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ на $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ так, что $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty) > 0$, ψ - обратное к Φ отображение.

Для $t \in \overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G}, \Theta\in[0;2\pi], R>1$ положим

$$t_{R,\Theta} \stackrel{\text{def}}{=} \psi(Re^{-i\Theta}\Phi(t)), t_R \stackrel{\text{def}}{=} t_{R,0} = t_R(t)$$

Для $w \in \overline{G}, t\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ полагаем $R = 1+\frac{1}{n}$ и $K_n(w,t,R,\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{k}\frac{(t_{R,\Theta}-t)^{\nu-1}}{(t_{R,\Theta}-w)^{\nu}}$,

$$\Pi_n(w,t) = C_{n,q}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q K(w,t,R,\Theta)\,d\Theta,$$

$$\mathbf{P}_n(\mathfrak{P}(z),\mathfrak{P}'(z)) = -\frac{1}{\pi}\int_{\overline{Q}_t\setminus\overline{D}} f'_{0\overline{\xi}}(\xi)s'(\xi)\Pi_n(s(z),s(\xi))\,dA(\xi).$$

Далее существенно получить оценки для выражений $(t_{R,\Theta}-t)$ и $(t_{R,\Theta}-\omega)$.
Применяются следующие результаты.

Лемма 3. [3].*Существует абсолютная постоянная $c>1$ такая, что для $R = 1+\frac{1}{n}$, $n\geq 1, |\Theta|\leq\pi$ при $t\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}$, $\tau\in G$ справедливы оценки*

$$c^{-1}(n|\Theta|+1)^{-4}|t_R-\tau| \leq |t_{R,\Theta}-\tau| \leq c(n|\Theta|+1)^4|t_R-\tau|.$$

Лемма 4. [5, Гл. 9], [9, Гл. 2]. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{C}$ - жорданова область $z_0\in\partial\Omega$, f аналитична в Ω, непрерывна в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет условию*

$$|f(z)| \leq M\left(1+\frac{|z-z_0|}{\rho}\right)^A,$$

при $A>0$ и $z\in\partial\Omega$. Тогда при $z\in\overline{\Omega}, |z-z_0|\leq\rho$ справедливо соотношение

$$|f(z)| \leq C_0^A M,$$

где C_0 не зависит от области Ω, M и функции f.

Для окончания доказательства теоремы 1.1 нужна функция $M(\tau)$, которая равна $M(\tau) = |f'_{0\overline{\xi}}(\lambda(\tau)|\cdot|\lambda'(\tau)|, \tau\in\overline{Q}_t$, где $\lambda(\tau)$ - обратное отображение к отображению $s(\xi)$.

$$0 \le M(\tau) \le C_f |\lambda(\tau)| dist^{r-1}(\lambda(\tau), \partial D))\omega(dist(\lambda(\tau), \partial D))$$
$$\le b_{20} dist^{r-1}(\tau, \partial G)\omega(dist(\tau, \partial G)), \tau \in s(\overline{Q}_t \setminus \overline{D}). \qquad (d)$$

Благодаря ранее выясненным свойствам этой функции, а именно формуле (d), к ней можно применить известный в литературе результат, содержащийся в следующей лемме (лемма 5).

Применение леммы 5 заканчивает процедуру оценок приближения функции постоенными полиномами.

Лемма 5. *Для любой функции M, заданной на множестве $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ и удовлетворяющей условиям (d), при $t_0^* \in \partial G$ и $\rho_0 > 0$ справедлива оценка*

$$\int_{B_{\rho_0}(t_0^*)} \frac{M(\tau)}{|\tau - t_0^*|} \, dA(\tau) \le C_M \rho_0^r \omega(\rho_0).$$

Во **второй главе** работы приведена формулировка и доказательство обратной теоремы приближения.

Определим эллиптическую кривую, пусть $E = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{C}^2 : \eta^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3\} \subset \mathbb{C}^2_{\zeta,\eta}$. Указанная кривая (с добавленной точкой на бесконечности) биголоморфно параметризуется подходящим комплексным тором $\mathbb{C} \setminus (2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z})$ с помощью вектор-функции $T(z) = (\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))$.

Зададим параллелограмм периодов функции Вейерштрасса, пусть $Q = \{z \in \mathbb{C} : z = 2\boldsymbol{\omega}_1\alpha_1 + 2\boldsymbol{\omega}_2\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1)\}$ - параллелограмм периодов функции $\mathfrak{P}(z)$.

Пусть область D - жорданова область, определенная в главе 1.

Зададим веса приближений доказываемых теорем. Пусть Φ - конформное отображение множества $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ на $\mathbb{C} \setminus \{|z| \le 1\}$, где $\Phi(\infty) = \infty, \Phi'(\infty) > 0$, и пусть $\Psi = \Phi^{-1}$ - обратное отображение. Обозначим $L_{1+t} = \Psi(|z| = 1 + t)$, где $t > 0$, и пусть

$$\delta_n(z) = dist(z, L_{1+1/n}), z \in \Gamma.$$

Тогда взаимнооднозначное отображение параллелограмма Q на E будем определять следующим образом

$$T(z) = (\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z)) \qquad (e)$$

Обозначим

$$\delta_n(\zeta, \eta) = \delta_n(T^{-1}(\zeta, \eta)).$$

Положим $G = T(D)$.

Пусть функция $Y(\zeta, \eta)$ определена на области $\overline{G}$. Будем говорить, что функция $Y(\zeta, \eta) \in H^{\boldsymbol{\omega}+r}(\overline{G})$, если функция $Y(T(z))$, определенная на множестве $\overline{D}$, принадлежит $H^{\boldsymbol{\omega}+r}(\overline{D})$.

Основной результат:

Теорема 2.1. *Пусть D - односвязная область (определенная в пунктах (b) и (c) на стр. 5), $\overline{D} \subset IntQ \subset \mathbb{C}$, и пусть $G = T(\overline{D}), G \subset E \subset \mathbb{C}^2$, где преобразование $T(z)$ определено в (e). Если некоторая голоморфная в G функция $F : G \to \mathbb{C}$, может быть приближена последовательностью полиномов $P_n(\zeta, \eta), degP_n \leq n$, двух переменных так, что для некоторой постоянной $C(F, G)$ при произвольном $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства*

$$|F(\zeta, \eta) - P_n(\zeta, \eta)| \leq C(F, G)\delta_n^r(\zeta, \eta)\omega(\delta_n(\zeta, \eta))$$

при $(\zeta, \eta) \in \partial G$, то $F \in H^{\omega+r}(\overline{G})$.

Теорема 2.1 получается из следующего результата.

Теорема 2.2. *Пусть D - односвязная область (определенная в пунктах (b) и (c) на стр. 5), $\overline{D} \subset IntQ, \Gamma = \partial D$. Пусть $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$. Если найдется такая последовательность полиномов двух переменных $P_n(\zeta, \eta), degP_n \leq n$, что для некоторой постоянной $C(F, D)$, независящей от n, выполняются неравенства*

$$|f(z) - P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leq C(F, D)\delta_n^r(z)\omega(\delta_n(z)), \qquad (f)$$

при $z \in \Gamma$, то функция f принадлежит классу $H^{\omega+r}(\overline{D})$.

Доказательство теоремы 2.2 требует установить вариант неравенства Бернштейна.

Теорема 2.3. *Пусть D - описанная выше область, $\overline{D} \subset IntQ, \Gamma = \partial D$. Для произвольного полинома двух переменных $q_n(\zeta, \eta), degq_n \leq n$, для которого выполнено неравенство*

$$|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leq \delta_n^r(z)\omega(\delta_n(z)),$$

при $z \in \Gamma$, справедливо также неравенство

$$|q_n'(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leq C(D)\delta_n^{r-1}(z)\omega(\delta_n(z)),$$

при $z \in \Gamma$.

Рассмотрим сигма-функцию Вейерштрасса $\sigma(u)$, определяемую выражением

$$log\frac{\sigma(z)}{z} = -\int_0^z \left(\int_0^v \left(\mathfrak{P}(\eta) - \frac{1}{\eta^2}\right) d\eta\right) dv$$

Согласно [2, гл. 1], $\sigma(z)$ - целая функция, имеющая простые нули в вершинах сетки периодов (т.е. в точках $2\boldsymbol{\omega}_1 n_1 + 2\boldsymbol{\omega}_2 n_2$, где $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$), для которой справедливо выражение g).

Выберем натуральное m и целые числа k_1^0, k_2^0 так, чтобы $\omega^0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2k_1^0\omega_1 + 2k_2^0\omega_2}{m} \in D$.

Рассмотрим функцию

$$\mathfrak{I}(z)=\frac{\sigma(z-\boldsymbol{\omega}^0)^m}{\sigma(z)^{m-1}\sigma(z+2k_1^0\boldsymbol{\omega}_1+2k_2^0\boldsymbol{\omega}_2)},$$

пусть величины $\eta_i, i=1,2$ - параметры функции Вейерштрасса,

$$\sigma(z+2\boldsymbol{\omega}_i)=-e^{2\eta_i(z+\boldsymbol{\omega}_i)}\sigma(z), i=1,2. \qquad (g)$$

Заметим, что $\mathfrak{I}(z)$ имеет нуль кратности m в точке $\boldsymbol{\omega}^0$ и полюс порядка $m-1$ в точке 0. Также из (g) следует, что

$$\mathfrak{I}(z+\boldsymbol{\omega}_i)=\mathfrak{I}e^{2\eta_i(m\boldsymbol{\omega}^0-2k_1^0\boldsymbol{\omega}_1-2k_2^0\boldsymbol{\omega}_2)}=\mathfrak{I}(z), i=1,2,$$

т.е. $\mathfrak{I}(z)$ - двоякопериодическая функция с периодами $2\boldsymbol{\omega}_1, 2\boldsymbol{\omega}_2$. Пусть множество $\Omega=\Omega(D)$ получается из области D преобразованиями $z\to z+2\boldsymbol{\omega}_1 n_1+2\boldsymbol{\omega}_2 n_2$:

$$\Omega=\{z: z=2\boldsymbol{\omega}_1 n_1+2\boldsymbol{\omega}_2 n_2+z_D, z_D\in D, n_1, n_2\in\mathbb{Z}\}$$

Целью данного параграфа является построение гармонической в $\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}$ функции $V(z)$, принимающей на $\partial\Omega$ значения, равные

$$V_{\mathfrak{I}}(z)=-log|\mathfrak{I}(z)|.$$

Воспользуемся решением вспомогательной задачи Дирихле. При произвольном натуральном L рассмотрим параллелограмм

$$Q_L=\{z: z=2\boldsymbol{\omega}_1 k_1+2\boldsymbol{\omega}_2 k_2, k_1, k_2\in\mathbb{R}, |k_1|\le L, |k_2|\le L\}.$$

Далее рассмотрим функцию $\mathrm{w}_L(z)$, гармоническую в области $Q_L\setminus\overline{\Omega}$ и непрерывную вплоть до ее границы, удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$\mathrm{w}_L(z)=\begin{cases}1, & \mathrm{z}\in\partial Q_L,\\ 0, & \mathrm{z}\in\partial\Omega\bigcap Q_L.\end{cases}$$

Вспомогательные выводы и утверждения:

Лемма 6. *В произвольной ограниченной области* $\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}\subset\mathbb{C}\setminus\Omega$,

$$\mathrm{w}_L(z)\rightrightarrows 0, L\to\infty.$$

Пользуясь принципом максимального модуля, свойствами функции $\sigma(z)$ приходим к доказательству леммы 6.

Положим

$$V_{min}=\min_{z\in\partial D}V_{\mathfrak{I}}(z), V_{max}=\max_{z\in\partial D}V_{\mathfrak{I}}(z).$$

Пусть $V_L^+(z), V_L^-(z)$ - решения задачи Дирихле в области $Q_L\setminus\overline{\Omega}$ со следующими граничными условиями:

$$V_L^+(z)=\begin{cases} V_{max}, & \text{z} \in \partial Q_L. \\ V_{\mathfrak{Z}}(z), & \text{z} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

$$V_L^-(z)=\begin{cases} V_{min}, & \text{z} \in \partial Q_L. \\ V_{\mathfrak{Z}}(z), & \text{z} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Из принципа максимума вытекает, что при $L\to\infty, V_L^+(z)$ - убывающее, а $V_L^-(z)$ - возрастающее семейство функций.

И далее, применяя результаты леммы 6, приходим к выводу, что существуют пределы

$$\lim_{L\to\infty} V_L^+(z)=\lim_{L\to\infty} V_L^-(z)=V(z),$$

и функция $V(z)$ - гармоническая в $\mathbb{C}\setminus\Omega$.

Далее устанавливаются некоторые ограничения на рост полиномов от $\mathfrak{P},\mathfrak{P}'$, вблизи полюсов функций $\mathfrak{P},\mathfrak{P}'$.

Пусть, $\delta_n(z)$ определено выше и функция $\mathrm{w}(z):\Gamma\to\mathbb{R}$. Сформулируем условия на функцию $\mathrm{w}(z)$, которые приводятся в тексте диссертации (глава 2, стр. 42):

1. $\mathrm{w}(z)>A_1 n^{-A_2}, A_1=A_1(D)>0, A_2=A_2(D)>0$;

2. Для точек $z_1,z_2\in\Gamma$, где $|z_1-z_2|\le\delta_n(z_1)$, справедливо соотношение $\mathrm{w}(z_2)\asymp\mathrm{w}(z_1)$, причем постоянные соизмеримости зависят только от области D, но не от точек z_1,z_2;

3. Для некоторых положительных постоянных $k_1=k_1(D), C_1=C_1(D)$ и постоянных точек $z_1,z_2\in\Gamma$ справедливо неравенство

$$\mathrm{w}(z_2)\le C_1\mathrm{w}(z_1)\left(\frac{|z_2-z_1|}{\delta_n(z_1)}+1\right)^{k_1}.$$

Сформулируем следующую лемму.

Лемма 7. *Пусть функция* $\mathrm{w}(z)$ *удовлетворяет условиям (1)-(3). Тогда найдется некоторое число* $\varepsilon_0>0$ *такое, что для произвольного многочлена двух переменных* $q_n(\zeta,\eta), deg q_n\le n$, *удовлетворяющего неравенству*

$$|q_n(\mathfrak{P}(z),\mathfrak{P}'(z))|\le\mathrm{w}(z),$$

при $z\in\Gamma$ *будет справедливо неравенство:*

$$|q_n(\mathfrak{P}(z),\mathfrak{P}'(z))|\le C_2 e^{C_3 n},$$

при $z\in Q_{\varepsilon_0}$, *где* $Q_{\varepsilon_0}=\mathbb{C}\setminus(\Omega\cup\bigcup_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}}\{|z-2\boldsymbol{\omega}_1 n_1-2\boldsymbol{\omega}_2 n_2|<\varepsilon_0\}), C_2=C_2(D), C_3=C_3(D)$.

Лемма 8. ([4], П. М. Тамразов) *Пусть задана ограниченная область $J \subseteq D$. Тогда найдется постоянная $C_4 = C_4(J)$ такая, что для произвольных положительных постоянных k, a, b и для произвольной субгармонической в области J функции $h(z)$, удовлетворяющей неравенству*

$$h(\zeta) \leq klog(a|\zeta - z_0| + b), \zeta \in \partial J, z_0 \in G,$$

справедливо неравенство

$$h(\zeta) \leq k[log(a|\zeta - z_0| + b) + C_4], \zeta \in J.$$

Лемма 9. *Пусть функция* $\mathrm{w}(z)$ *удовлетворяет условиям 1)-3), а многочлен* $q_n(\zeta, \eta)$ *удовлетворяет условиям леммы 7. Тогда существует постоянная $C_5 = C_5(D)$ такая, что для произвольной точки $z_0 \in \Gamma$ справедливо неравенство*

$$|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \leq C_5 \mathrm{w}(z_0),$$

если $|\zeta - z_0| = \delta_n(z_0)$.

Теорема $2.3'$**.** *Пусть D - область, определенная в п.1, функция* $\mathrm{w}(z)$ *удовлетворяет условиям 1)-3). Для произвольного полинома двух переменных* $q_n(\zeta, \eta), degq_n \leq n$, *для которого выполнено неравенство*

$$|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leq \mathrm{w}(z),$$

при $z \in \Gamma$, *справедливо также неравенство*

$$|q_n^{(k)}(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leq C_k \frac{\mathrm{w}(z)}{\delta_n^k(z)},$$

при $z \in \Gamma$.

Для завершения доказательства теоремы 2.1 в соответствии с теоремой Тамразова достаточно доказать следующее неравенство

$$|f^{(r)}(z_1) - f^{(r)}(z_2)| \leq C_f \omega(|z_1 - z_2|),$$

для $z_1, z_2 \in \Gamma$.

Обозначим для краткости $P_n(z) = P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))$, где $P_n(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$ взяты из формулы (f).

Доказательство проходит с использованием выводов теоремы 2.2 и теоремы $2.3'$. Определенным образом выберем натуральное L и полагаем, что $\Delta_n(z) = P_{L^{n+1}}(z) - P_{L^n}(z)$. Проведя некоторые рассуждения, получаем, что функция

$$f^{(r)}(z) = P_L^{(r)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n^{(r)}(z),$$

непрерывна.

Имеем

$$|f^{(r)}(z_1)-f^{(r)}(z_2)|\le|P_L^{(r)}(z_1)-P_L^{(r)}(z_2)|+\left|\sum_{n=1}^{\infty}(\Delta_n^{(r)}(z_1)-\Delta_n^{(r)}(z_2))\right| \qquad (h)$$

Вввиду особенностей построения полинома $P_L(z)$ выводим следующее соотношение:

$$|P_L^{(r)}(z_1)-P_L^{(r)}(z_2)|\le C'_{13}|z_1-z_2|\le C_{13}\omega(z_1-z_2)$$

Далее проводим оценку второго слагаемого из (h) и получаем следующее представление:

$$\sum_{n=1}^{N_0}|\Delta_n^{(r)}(z_1)-\Delta_n^{(r)}(z_2)|\le C_{15}|z_1-z_2|\sum_{n=0}^{N_0}\frac{\omega(\delta_{L^n}(z_1))}{\delta_{L^n}(z_1)}.$$

Использую результаты теоремы $2.3'$, геометрические свойства рассматриваемых областей, а также определение модуля непрерывности $\omega(t)$, получаем

$$\left|\sum_{n=0}^{N_0}(\Delta_n^{(r)}(z_1)-\Delta_n^{(r)}(z_2))\right|\le C_{16}\frac{\omega(\delta_{L^{N_0}}(z_1))}{\delta_{L^{N_0}}(z_1)}|z_1-z_2|\le C_{16}\omega(|z_1-z_2|),$$

где $C_{16}=C_{16}(D)$. И далее

$$\left|\sum_{n=N_0+1}^{\infty}(\Delta_n^{(r)}(z_1)-\Delta_n^{(r)}(z_2))\right|\le C_{17}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n\varepsilon_0}}\omega(\delta_L^{N_0+1}(z_1))\le$$

$$\le C_{18}\omega(\delta_L^{N_0+1}(z_1))\le C_{19}\omega(|z_1-z_2|).$$

Полученные результаты при учете всех предыдущих рассуждений доказывают вывод теоремы 2.2.

В **третьей главе** мы рассмотрим приближение полиномами от двояко-периодических функций Вейерштрасса для функций, аналитических в области и непрерывных в ее замыкании. Эта задача тесно связана с приближением голоморфными полиномами от двух переменных функции, голоморфной в области на эллиптической кривой. Предпологаем, что у всей границы области D на плоскости длина дуги соизмерима с длиной хорды (см. условие b) на стр. 4). Данное условие переносится и на область $T(D)$ на эллиптической кривой. Возможность получения оценки приближения полиномами от функкий $\mathfrak{P}(z),\mathfrak{P}'(z)$, которая согласуется с т.н. обратной теоремой, т. е. с восстановлением гладкости функции по скорости приближения, была получена (в главе 1) для классов аналитических в области функций, у которых в замыкании области производная заданного порядка имеет модуль непрерывности гельдеровского типа, при этом порядка, меньшего единицы.

Метод приближения, применяемый ранее, не давал возможности изучать классы аналитических функций, у которых производная какого-то порядка ограничена. В настоящей главе мы используем другой метод аппроксимации для приближения полиномами от двояко-периодических функций Вейерштрасса функций, аналитических в области, у которых производная данного порядка ограничена.

Пусть $\mathfrak{P}(z)$ - двояко-периодическая функция Вейерштрасса с периодами $2\omega_1, 2\omega_2$, $Q = \{z \in \mathbb{C} : z = 2t_1\boldsymbol{\omega}_1 + 2t_2\boldsymbol{\omega}_2, 0 < t_1 < 1, 0 < t_2 < 1\}$ - параллелограмм периодов функции $\mathfrak{P}(z)$. Область D - односвязная область. Для $Q_{\mathbf{t}} = \omega_1 + \omega_2 + \mathbf{t}(Q - \omega_1 - \omega_2)$, но $0 < \mathbf{t} < 1$, $\mathbf{t}$ выберем так, чтобы $\overline{D} \subset Q_{\mathbf{t}}, \Gamma = \partial D$.

Предполагаем, что Γ удовлетворяет следующему условию: существует $b > 0$, не зависящее от $z_1, z_2 \in \Gamma$, такая, что, по крайней мере, для одной из дуг Γ с концами z_1 и z_2, которую мы обозначим $\Gamma(z_1, z_2)$, ее длина не превосходит ведичин $b \cdot |z_2 - z_1|$. Далее длину дуги α будем обозначать $|\alpha|$.

Пусть r - натуральное. Обозначим через $C_A^r(D)$ следующий функциональный класс: $C_A^r(D) = \{f : f$ аналитична в D и существует постоянная c_f такая, что $|f^{(r)}(z)| \leq c_f, z \in D\}$. Известно [29, гл. 7], что для $f \in C_A^r(D)$ для почти всех $z_0 \in \Gamma$ относительно длины кривой Γ существуют некасательные пределы у функции $f^{(r)}(z)$ и они ограничены величиной c_f.

Основной результат:

Теорема 3.1. *Пусть $f \in C_A^r(D)$. Тогда существует постоянная c_f^*, не зависящая от n и z, и для любого $n = 1, 2, ...$ существует полином $P_n(u, v)$ от двух переменных, $degP_n \leq n$, такие, что справедливо соотношение*

$$|f(z) - P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leq c_f^* \rho_{\frac{1}{n}}^r(z), z \in \partial D.$$

Замечание 3. *Клас функций $C_A^r(D)$ можно трактовать, как класс функций f, аналитичных в D, у которых $f^{(r-1)}$ имеет в $\overline{D}$ модуль непрерывности $\omega(\delta) = c \cdot \delta$. Доказательство прямой теоремы в главе 1 для такого модуля непрерывности не проходит, в настоящей главе мы применяем другой метод приближения.*

2 Публикации по результатам исследования

Результаты диссертации изложены в трех статьях [29], [30], [31] в резенцируемых научных журналах. Статьи [29] и [31] входят в реферативные базы Scopus и Web of Science. Статья [30] входит в список D списка журналов, рекомендованных в НИУ ВШЭ.

• Sintsova K. A., Shirokov N. A., Approximation by Polynomials Composed of Weierstrass Doubly Periodic Functions, Vestnik St. Petersburg University, Mathematics, 56, pages 46–56, 2023. (Приближения полиномами от двояко-периодических функций Вейерштрасса).

• Синцова К. А., Обратная теорема приближения на подмножествах областей с заострениями, Записки научных семинаров ПОМИ, 527, 204–220, 2023.

• Sintsova K. A., Shirokov N. A., Approximation by doubly periodic functions in the classes C^r_A, Vestnik St. Petersburg University, Mathematics, 57, pages 345-352, 2024. (Приближение двоякопериодическими функциями в классах C^r_A). DOI:10.1134/S1063454124700195

Апробация работы

Результаты работы докладывались на семинаре по теории функций и операторов ПОМИ РАН и на международной конференции "Герценовские чтения"в РГПУ им. А. И. Герцена в апреле 2024 года.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Для функций f из классов аналитических функций $H^{r+\omega}(\overline{D})$, где модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Дини, а граница области $D \subset C$ содержит конечное число внешних по отношению к D углов, равных 2π, построены полиномы от двух переменных P_n, таких, что $|f(z) - P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))|$ при $z \in \partial D$ имеют убывания, согласующуюся с обратным утверждением. Здесь $\mathfrak{P}$ - фиксированная двояко-периодическая функция Вейерштрасса.

2. Доказано обратное утверждение к п. 1, именно, если функция f при $z \in \partial D$ приближена со скоростью, упоминаемой в п. 1, то $f \in H^{r+\omega}(\overline{D})$.

3. Для областей D, длина дуги граница которой соизмерима с длиной хорды, и для функции f, аналитической в D и удовлетворяющей условию $|f^{(r)}(z)| \leq c_f, z \in D, r \geq 1$, построен полином P_n, такой, что $P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))$ приближает функцию f при $z \in \partial D$ со скоростью, получаемой в п. 1 для $\omega(t) = t$ и $r - 1$ вместо r.

Список литературы

[1] Мергелян С. Н., Некоторые вопросы конструктивной теории функций, Труды МИАН СССР, 37, 1-92, 1951.

[2] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, Москва, «Наука», 1970.

[3] Белый В. И., Конформные отображения и приближение аналитических функций в областях с квазиконформной границей, Математический сборник, (102-144), № 3, 341-361, 1977.

[4] Белый В. И., Миклюков В. М., Некоторые свойства конформных и квазиконформных отображений и прямые теоремы конструктивной теории функций, Известия АН СССР, серия математическая, 38, 1343-1361, 1974.

[5] Дзядык В.К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, Москва, «Наука», 1977.

[6] Дзядык В. К., О конструктивной характеристике функций классов Гельдера на замкнутых множествах с кусочно-гладкой границей,допускающей нулевые углы, УМЖ, 20, № 5, 603-619, 1968.

[7] Лебедев Н. А., Тамразов П. М., Обратные теоремы приблидения на регулярных компактах комплексной плоскости, Известия АН СССР, серия матем., 34, №6, 1340-1390, 1970.

[8] Лебедев Н. А., Широков Н. А., О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами, Известия АН Арм. ССР, 8, №4, 311 - 341, 1971.

[9] Тамразов П. М., Гладкие и полиномиальные приближения, Киев, «Наукова думка», 1975.

[10] Тамразов П. М., Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов, Известия АН СССР, серия математическая, 32, №5, 1033-1043, 1968.

[11] Хаустов А. В.., Широков Н. А., Обратная теорема приближения на подмножествах эллиптических кривых, Записки научных семинаров ПОМИ, 314, 257-271, 2004.

[12] Хаустов. А. В.., Широков Н. А., Полиномиальные приближения на замкнутых подмножествах эллиптических кривых, Записки научных семинаров ПОМИ, 302, 178-187, 2003.

[13] Широков Н. А., Конструктивные описания классов функций полиномаильными приближениями, $1, 2$, Записки научных семинаров ПОМИ, 254, 207-234, 1998.

[14] Широков Н. А., О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами, ДАН СССР, 205, № 4, 798-800, 1972.

[15] Andrievskii V. V., Geometric properties of Dzjadyk domains, Ukr. Math. J. 33 (1982) 543-547.

[16] Andrievskii V. V., The geometric structure of regions, and direct theorems of the constructive theory of functions, Math. USSR Sb. 54 (1986) 39-56.

[17] Andrievskii V. V., Belyi V. I., Dzjadyk V. K., Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Variable, Word Federation Publisher, Atlanta, GA, 1995.

[18] Andrievskii V. V., Pritsker I. E., Varga R. S., Simultaneous approximation and interpolation of functions on continua in the complex plane, J. Math. Pures Appl. 80, 4 (2001) 373-388.

[19] Belyi V. I., Conformal mappings and the approximation of analytic functions in domains with a quasiconformal boundary, Math. USSR Sb. 31 (1997) 289-317.

[20] Belyi V. I., Tamrazov P. M., Polynomial approximations and smoothness moduli of functions in regions with quasiconformal boundary, Siberian Math. J. 21 (1981) 434-445.

[21] Dynkin E. M., The pseudoanalytic extension, Journal d' analyse mathematique, 60, 45-70, 1993.

[22] Dynkin E. M., The rate of polynomial approximation in the complex domain, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 864, 90-142, 1981.

[23] Muller J., An Extended Faber Operator, Constr, Approx. 19 (2003): 399-410.

[24] Pommerenke Ch., Boundary Behavior of Conformal Maps, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 299, 1992.

[25] Saff E. B., Lulinsky D. S., Story Asymptotics for Extremal Polynomials Associated with Weights on R, Lecture Notes in Mathematics, 1305, Springer-Verlag,, 1988.

[26] Shirokov N. A., Jakson-Bernstein theorem in strictly pseudoconvex domain in C^n, Constructive Approximation, №4, 455-461, 1989.

[27] Хаустов А. В.., Широков Н. А., Обратная теорема приближения на подмножествах эллиптических кривых, Записки научных семинаров ПОМИ, 314, 257-271, 2004.

[28] Хаустов. А. В.., Широков Н. А., Полиномиальные приближения на замкнутых подмножествах эллиптических кривых, Записки научных семинаров ПОМИ, 302, 178-187, 2003.

[29] Sintsova K. A., Shirokov N. A., Approximation by Polynomials Composed of Weierstrass Doubly Periodic Functions, Vestnik St. Petersburg University, Mathematics, 56, pages 46–56, 2023.

[30] Синцова К. А., Обратная теорема приближения на подмножествах областей с заострениями, Записки научных семинаров ПОМИ, 527, 204–220, 2023.

[31] Sintsova K. A., Shirokov N. A., Approximation by doubly periodic functions in the classes C^r_A, Vestnik St. Petersburg University, Mathematics, 57, pages 345-352, 2024. DOI: 10.1134/S1063454124700195