Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Департамент математики факультета
Санкт-Петербургская школа
физико-математических и компьютерных наук

На правах рукописи

Рагозин Илья Андреевич

Критерии согласия, основанные на характеризациях распределений, и их эффективность

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Грибкова Надежда Викторовна

Санкт-Петербург – 2024 г.

Общая характеристика работы

Актуальность исследования. Проверка статистических гипотез, является одной из важнейших задач математической статистики. Классический раздел проверки гипотез – это проверка гипотез согласия, заключающаяся в проверке соответствия выборки определенному семейству вероятностных распределений. Классическими примерами являются критерий χ^2, критерий Колмогорова-Смирнова и критерий Крамера-фон Мизеса-Смирнова. В последние годы популярной становится идея использования характеризаций распределения для построения критериев для проверки гипотез согласия. Например, в обзорной статье [3] описано множество критериев согласия для экспоненциального распределения, нормального и равномерности, основанных на характеризациях для этих семейств. Причина популярности таких критериев в удобстве их использования в практических задачах, а также, возможно, в скрытых свойствах распределений, выраженных именно в характеризационных терминах. Сама идея использовать для построения критериев согласия характериазации появилась в 50-е года XX века и принадлежит Ю. В. Linнику [7], однако до 90-х годов XX века не было инструментов и необходимой теории для ее реализации. Только спустя несколько десятков лет, с развитием теории U-статистик, построение таких критериев стало возможно. Можно привести в пример посвященные этому направлению работы следующих авторов: Барингауза и Хенце [1, 2], Никитина и Поникарова [19], Мульере и Никитина [11], Литвиновой и Никитина [25,26], Никитина и Чириной [16,17], [27,28], Волковой и Никитина [12], [22], [24] и других.

Важность построения новых критериев согласия обусловлена тем, что одной из фундаментальных проблем математической статистики является оправданный выбор критерия для проверки интересующей гипотезы из нескольких доступных. Характеристикой, на основе которой можно выполнить сравнение непараметрических критериев и выявить наиболее подходящий критерий в поставленной задаче, может служить асимптотическая эффективность или асимптотическая относительная эффективность. Отметим, что понятие асимптотической эффективности критерия, различные вариации которого появились в конце 40-х – начале 50-х годов, является более сложным, чем асимптотическая эффективность оценок. Среди трех самых известных подходов к вычислению асимптотической эффективности, наиболее удобный и точный принадлежит Бахадуру Р.; его подход позволяет сравнивать критерии, тестовые статистики которых не являются асимптотически нормальными, что делает неприменимым подход Питмена, и, как показано в [15], оказывается более чувствительным к некоторым критериям, чем подход Ходжеса-Лемана. Кроме того, хорошо известно, что достаточно одного критерия, чтобы отвергнуть проверяемую гипотезу, а каждый новый критерий ей не противоречащий, лишь постепенно приближает к принятию ее справедливости.

Цель работы. Диссертация посвящена построению и исследованию новых критериев согласия, основанных на характеризациях, на специальных свойствах и разности U-эмпирических преобразований Лапласа для специальных свойств. Результаты касаются следующих семейств распределений: логистического с произвольным параметром сдвига, экспоненциального, Парето первого типа с произвольным параметром формы и Рэлея. Основной целью данной работы является асимптотическое сравнение критериев на основе понятия локальной бахадуровской эффективности для близких альтернатив, в том числе нахождение логарифмической асимптотики вероятностей больших уклонений при нулевой гипотезе и вычисление асимптотики точного бахадуровского наклона. Дополнительно для критериев согласия для логистического распределения и распределения Рэлея была поставлена задача вычисления их мощности на основе статистического моделирования для близких альтернативных распределений.

Методы исследования. В диссертационном исследовании применяются методы теории U-статистик, систематическое изложение которой можно найти в [5] и [8], и теория Бахадура [13, 14], позволяющая выполнить асимптотическое сравнения тестовых статистик [15] на основе фундаментального понятия точного бахадуровского наклона, существование и явная формула которого получены в фундаментальной теореме Бахадура, и локальной бахадуровской эффективности.

Ключевыми моментами при решении данной задачи являются информация Кульбака-Лейблера, логарифмическая асимптотика вероятностей больших уклонений при нулевой гипотезе и закон больших чисел при альтернативе.

Основные результаты

1. Построены 4 критерия согласия, основанные на двух характеризациях логистического семейства распределений с произвольным параметром сдвига. Для этих критериев найдена логарифмическая асимптотика функции больших уклонений, благодаря чему удалось вычислить точный бахадуровский наклон и локальную бахадуровскую эффективность для рассмотренных альтернатив. Для построенных критериев методами статистического моделирования вычислена мощность относительно похожих альтернатив, близких к логистическому распределению. Новые критерии протестированы на основе реальных данных, ранее проанализированных в работе [23] с помощью классических критериев.

2. Построены и исследованы 4 критерия согласия для экспоненциального семейства распределений. Два критерия – на основе характеризации и два – на основе разности эмпирических преобразований Лапласа для левой и правой частей специального свойства из статьи [12]. Для всех критериев найдены логарифмические вероятности больших уклонений и вычислена локальная бахадуровская эффективность.

3. Асимптотически исследованы 2 критерия согласия для семейства распределений Парето первого типа с произвольным параметром формы, основанные на некоторой характеризации. Для этих критериев вычислена логарифмическая асимптотика вероятностей больших уклонений и вычислена локальная бахадуровская эффективность для рассмотренных близких альтернатив.

4. Построены 5 критериев согласия для семейства распределений Рэлея, два из них основаны на трансформированной характеризации Дезу, два основаны на некотором специальном свойстве и один основан на разности эмпирических преобразований Лапласа для этого свойства. Доказана формула для информации Кульбака-Лейблера для сложной нулевой гипотезы о принадлежности семейству распределений Рэлея. Для всех критериев выполнено асимптотическое сравнение на основе значений локальной бахадуровской эффективности для рассмотренных близких альтернатив и при альтернативе Райса. В случае интегральных критериев, основанных на специальном свойстве и разности пре-

образований Лапласа, найдена максимально возможная локальная бахадуровская эффективность. Для всех критериев на основе статистического моделирования вычислена мощность относительно альтернативных распределений из статьи [10] и распределения Райса.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. В ней впервые для построения критериев согласия адаптированы характеризации с использованием случайных сдвигов и случайных растяжений/сжатий.

Теоретическая значимость. В диссертации для всех построенных критериев найдена логарифмическая асимптотика вероятностей больших уклонений и вычислена локальная бахадуровская эффективность для всех рассмотренных близких альтернатив. В этой работе построены и впервые асимптотически исследованы критерии согласия для логистического семейства распределений с произвольным параметром сдвига и для семейства распределений Рэлея. Кроме того, проведено асимптотическое исследование различия распределений Рэлея и Райса, что является важной проблемой в статистической радиофизике. Критерии согласия для экспоненциального семейства и семейства распределений Парето I типа для некоторых альтернатив превосходят по эффективности ранее известные критерии и оказываются наилучшими в бахадуровском смысле. В работе доказана формула для информации Кульбака-Лейблера в случае сложной гипотезы согласия для распределения Рэлея.

Практическая значимость. Все построенные критерии могут быть использованы в практических задачах математической статистики, в том числе для проверки реальных данных на соответствие конкретному распределению или отклонения соответствующей гипотезы согласия.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования были представлены на международных конференциях: «Stochastic models II» (Санкт-Петербург, 6-8 мая 2019 г.), «The 21st European Young Statisticians Meeting» (Белград, 29 июля-2 августа, 2019 г.), «XXXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models» (онлайн, 22-26 июня 2020 г.), «XXXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models» (Петрозаводск, 21-25 июня 2021 г.), «New trends in mathematical stochastics» (Санкт-Петербург, 30 августа–3 сентября 2021 г.), «Предельные теоремы теории вероятностей и Математической статистики» (Ташкент, 26—28 сентября 2022 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 статьях [29–36].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из Введения, 5 глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации 101 страниц. Список литературы содержит 96 наименований (включая 8 ссылок на статьи, опубликованные автором).

Содержание работы

Во **введении** описывается история направления, выбор метода асимптотического исследования и общий подход к построению критериев. Излагается структура и содержание диссертации.

В **первой главе** приводятся основные определения и формулы, необходимые вспомогательные сведения из теории U-статистик и бахадуровской теории, теоремы о логарифмической асимптотике вероятностей больших уклонений, вводятся близкие альтернативы и вычисляется для них информация Кульбака-Лейблера.

Во **второй главе** строятся и исследуются критерии согласия для логистического семейства распределений с произвольным параметром сдвига, основанные на характериазации Ху и Лина [9] и характеризации Ахсануллаха-Невзорова-Янева [6]. Для каждой характеризации строятся две тестовые статистики – интегрального типа и типа Колмогорова (супремальная).
Для первой характеризации:

$$LU_n^L = \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_n(t) - U_n^+(t)\right) dF_n(t), \qquad KU_n^L = \sup_t |F_n(t) - U_n^+(t)|,$$

для второй характеризации:

$$IU_n^L = \int_{-\infty}^{\infty} \left(U_n^+(t) - U_n^-(t)\right) dF_n(t), \qquad QU_n^L = \sup_t |U_n^+(t) - U_n^-(t)|,$$

где $F_n(t)$-стандартная эмпирическая функция распределения, а U_n^+ и U_n^- – U-эмпирические функции распределения, соответствующие левой и правой частям второй характеризации

$$U_n^+(t) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\le i<j\le n} \left(1 - e^{\min(0,\min(X_i,X_j)-t)}\right), \qquad U_n^-(t) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\le i<j\le n} \left(e^{-\max(0,\max(X_i,X_j)-t)}\right),$$

где $X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в) с неизвестной непрерывной функцией распределения (ф.р.).
В конце этой главы приведен пример применения новых критериев к реальным данным из статьи [23]. На основе полученных p-значений данные согласуются с гипотезой принадлежности логистическому распределению, что подтверждает выводы авторов [23] и свидетельствует о работоспособности предлагаемых новых критериев.

Интегральные статистики асимптотически эквивалентны U-статистикам степени 3 со следующими центрированными ядрами:

$$\Phi_L(x,y,z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(g_L(x,y;z) + g_L(y,z;x) + g_L(x,z;y)\right),$$

$$\Phi_I(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(g_I(x,y;z) + g_I(y,z;x) + g_I(x,z;y)\right),$$

где

$$g_L(x,y;z) = \left(1 - e^{(\min(x,y)-z)}\right) 1\left\{\min(x,y) < z\right\},$$

$$g_I(x,y;z) = e^{-\max(0,\max(x,y)-z)} - (1 - e^{\min(0,\min(x,y)-z)}),\ x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Проекции этих ядер и дисперсии проекций равны:

$$\Psi_L(t) = -\frac{2}{3}\left(Li_2(-e^t) + t\ln(e^t+1) - \frac{1}{2}\ln^2(e^t+1) + \frac{7e^t+1}{4(e^t+1)}\right),\ \Delta_L^2 = \mathbb{E}\Psi_L^2(X) \approx 0.001899.$$

$$\Psi_I(t) = \frac{2}{3}\left(\ln^2(e^t+1) - t\ln(e^t+1) + \frac{\pi^2}{6} - 2\right),\ \Delta_I^2 = \mathbb{E}\Psi_I^2(X) \approx 0.00697.$$

Из вычислений, проведенных в гл. 2, следует, что ядра Φ_L и Φ_I невырождены, следовательно по теореме Хёфдинга [8] имеем

$$\sqrt{n}\, LU_n^L \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 9\Delta_L^2\right), \quad \sqrt{n}\, IU_n^L \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 9\Delta_I^2\right), \quad \text{при } n \to \infty.$$

В гл. 2 показано, что ядра не только невырождены и центрированы, но и ограничены, вследствие чего с применением теоремы о больших уклонениях U-статистик из работы [19] получены следующие результаты.

Теорема 1. *Для любого $t > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbb{P}(LU_n^L > t) = h_L(t) \sim -\frac{t^2}{18\Delta_L^2},$$

где h_L – некоторая непрерывная функция, у которой особенно важна асимптотика в нуле.

Теорема 2.

Для любого $t > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbb{P}(IU_n^L > t) = h_I(t)$, где h_I некоторая непрерывная функция такая что $h_I(t) \sim -\frac{t^2}{18\Delta_I^2}$ при $t \to 0$.

Статистики типа Колмогорова можно рассматривать как супремум по t модуля семейства U-статистик с ядрами:

$$\Phi_K(X,Y;t) = \big(1 - e^{(\min(X,Y)-t)}\big)1\{\min(X,Y) < t\}, \quad \Phi_Q(X,Y;t) = e^{-\max(0,\max(X,Y)-t)} - (1 - e^{\min(0,\min(X,Y)-t)}).$$

В гл. 2 вычислены проекции для каждого ядра, функции дисперсии проекций и их супремум. Они имеют вид

$$\Psi_K(s,t) = \frac{e^{\min(s,t)}(1+e^{-t})}{1+e^{\min(s,t)}} - e^{-t}\ln(e^{\min(s,t)}+1) + \frac{1\{s<t\}(1-e^s(1+2e^{-t}))}{2(1+e^s)} - \frac{e^t}{2(1+e^t)},$$

$$\Delta_K^2(t) := \mathbb{E}_x \Psi_K^2(X,t) = \frac{e^{3t} + 8e^{2t} + 8e^t - 4(e^t+1)(e^t+2)\ln(e^t+1)}{4e^{2t}(e^t+1)^2}, \ \Delta_K^2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Delta_K^2(t) \overset{t_0=0.3255}{=} 0.02322.$$

Для статистики QU_n^L

$$\Psi_Q(s,t) = e^t\left(\ln(1+e^{\max(s,t)}) - \frac{1}{1+e^{\max(s,t)}} - \max(s,t)\right)$$

$$-e^{-t}\left(\frac{(1+e^t)e^{\min(s,t)}}{1+e^{\min(s,t)}} - \ln(1+e^{\min(s,t)})\right) + \frac{e^{3t}+e^{2t}+1\{s<t\}(e^{2t}+e^t+1)(e^s-e^t)}{e^t(1+e^t)(1+e^s)},$$

$$\Delta_Q^2(t) = e^{-t}\left(2te^{3t} - 2(t-1)e^{2t} - 3e^t + 2\right) - 2e^{-2t}\left(e^{4t} - e^{3t} - te^{2t} - e^t + 1\right)\ln(1+e^t) - 2\ln^2(1+e^t),$$

ее супремум равен $1 - 2\ln^2(2) \approx 0.00393$ и достигается в точке $t = 0$.

Из вычислений следует, что ядра невырождены, а поскольку семейства ядер центрированы и ограничены, применяя при справедливости H_0 теорему из [21] о больших уклонениях для U-эмпирических статистик Колмогорова, в гл. 2 мы получаем следующие результаты.

Теорема 3. *При $z > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbb{P}\left\{KU_n^L > z\right\} = w_K(z) \sim -\frac{z^2}{8\Delta_K^2},$$

где w_K – непрерывная функция, у которой для нас важна асимптотика в нуле.

Теорема 4. *При $z > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbb{P}\left\{QU_n^L > z\right\} = h_Q(z) \sim -\frac{z^2}{8\Delta_Q^2},$$

где h_Q – непрерывная функция, у которой для нас важна асимптотика в нуле.

Затем в гл. 2 для каждой из статистик вычислен точный бахадуровский наклон $c(\theta)$ [13, 14] и в гл. 1 найдена удвоенная информация Кульбака-Лейблера, являющаяся верхней границей для $c(\theta)$, для следующих альтернатив.

1. Альтернатива масштаба с плотностью

$$f_1(x,\theta) = \frac{e^{\theta + xe^{\theta}}}{(1+e^{xe^{\theta}})^2};$$

2. Альтернатива гиперболического косинуса с плотностью

$$f_2(x,\theta) = \frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma^2(\frac{\theta}{2}+1)} \frac{e^{\left(x+\frac{\theta x}{2}\right)}}{(1+e^x)^{\theta+2}};$$

3. Синус-альтернатива с плотностью при малых θ

$$f_3(x,\theta) = l(x) - 2\pi\theta\cos(2\pi L(x)) l(x),$$

где $L(x) = (1+\exp(-x))^{-1}$, $l(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ $x \in \mathbb{R}$.

Таблица 1. Информация Кульбака-Лейблера для альтернатив $f_i(x,\theta)$, $i{=}\overline{1,3}$ при $\theta \to 0$

	Альтернатива		
Информация Кульбака-Лейблера	f_1	f_2	f_3
$2K(\theta)$	$1.4300 \cdot \theta^2$	$0.1775 \cdot \theta^2$	$19.7392 \cdot \theta^2$

Далее в гл. 2 вычислена локальная бахадуровская эффективность по формуле, значения которой собраны в табл. 2 ниже:

Таблица 2. Сравнение локальных бахадуровских эффективностей для тестовых статистик

	LU_n^L		IU_n^L		KU_n^L		QU_n^L	
Альтернатива	$c(\theta)$	eff	$c(\theta)$	eff	$c(\theta)$	eff	$c(\theta)$	eff
f_1	$1.229 \cdot \theta^2$	0.860	$1.339 \cdot \theta^2$	**0.937**	$0.505 \cdot \theta^2$	0.353	$0.954 \cdot \theta^2$	0.667
f_2	$0.141 \cdot \theta^2$	0.791	$0.153 \cdot \theta^2$	**0.864**	$0.051 \cdot \theta^2$	0.288	$0.101 \cdot \theta^2$	0.566
f_3	$15.384 \cdot \theta^2$	0.779	$16.76 \cdot \theta^2$	0.849	$15.791 \cdot \theta^2$	0.800	$19.253 \cdot \theta^2$	**0.975**

Следующим шагом в гл. 2 методом статистического моделирования вычислена мощность для стандартного нормального распределения и логистического распределения с параметром масштаба вида $exp(\theta)$ для выборок объема n=20 и n=50, для уровней значимости 0.05 и 0.01.

Таблица 3. Мощность для статистик IU_n^L, QU_n^L, LU_n^L и KU_n^L

			IU_n^L		QU_n^L		LU_n^L		KU_n^L	
$Logist(0, e^{\theta})$	θ	n	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%
	$\theta = 0.75$	n=20	**0.963**	**0.839**	0.953	0.806	0.911	0.696	0.883	0.668
		n=50	1	1	1	0.999	1	0.999	1	0.993
	$\theta = 0.5$	n=20	0.621	0.286	**0.673**	**0.400**	0.506	0.264	0.542	0.277
		n=50	**0.980**	**0.917**	0.966	0.892	0.962	0.84	0.911	0.706
	$\theta = 0.25$	n=20	0.203	**0.09**	**0.24**	0.089	0.156	0.055	0.202	0.067
		n=50	**0.484**	**0.252**	0.463	0.244	0.423	0.188	0.372	0.149
Norm(0,1)		20	**0.758**	0.415	0.602	0.319	0.749	**0.461**	0.589	0.294
		50	**0.997**	**0.974**	0.995	0.935	0.992	0.949	0.960	0.813

В завершении гл. 2 критерии, основанные на статистиках IU_n^L и QU_n^L, применены к реальным данным из статьи [23] и сгенерированным данным из стандартного распределения Коши. Полученные p-значения говорят о том, что вышеуказанные данные из первого набора уверенно подтверждают гипотезу H_0, и это соответствует выводу из статьи [23], в то время как наши тесты уверенно отвергают нулевую гипотезу для второго набора данных, и p-значения убедительно низкие.

Таблица 4. Значение тестовых статистик IU_n^L, QU_n^L для наборов данных

	первый набор данных		второй набор данных	
Критерий	Значение тестовой статистики	p-значение	Значение тестовой статистики	p-значение
IU	0.002	p=0.864	-0.028	p=0.002
QU	0.119	p=0.209	0.146	$p < 0.002$

В третьей главе рассматриваются 4 критерия согласия для экспоненциального семейства распределений, два из которых основаны на характеризации Ахсануллаха-Аниса из работы [4] и два других построены на идее рассмотрения разности U-эмпирических преобразований Лапласа для левой и правой частей специального свойства из статьи [12], заключающегося в том, что распределение частного двух независимых экспоненциальных случайных величин является распределением Фишера с параметром (2,2). В случае характеризации строятся статистики интегрального типа и типа Колмогорова (супремальная):

$$IU_n^E = \int_0^{\infty} (LU_n(t) - RU_n(t))\, dF_n(t), \quad KU_n^E = \sup_t |LU_n(t) - RU_n(t)|,$$

где $F_n(t)$- стандартная эмпирическая ф.р., а $LU_n(t)$ и $RU_n(t)$ – U-эмпирические функции распределения для левой и правой частей характеризации:

$$LU_n(t) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \le i < j \le n} 1\left\{\max(X_i, X_j) < t\right\},$$

$$RU_n(t) = \binom{n}{3}^{-1} \sum_{1\le i<j<k\le n} 1\left\{\min(X_i, X_j) + X_k < t\right\},$$

где $X_1, \ldots, X_n$ – н.о.р.с.в. с неизвестной ф. р.

В качестве критериев, основанных на разности U-эмпирических преобразований Лапласа, рассматриваются интегральная статистика с экспоненциальным весом и статистика типа Колмогорова:

$$L_n^E(a) = \int_0^\infty \left(LL(t) - RL(t)\right) e^{-a\cdot t} dt, \qquad KL_n^E = \sup_{t>0} |LL(t) - RL(t)|,$$

где

$$LL(t) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\le i<j\le n} e^{-t\cdot \frac{X_i}{X_j}}, \qquad RL(t) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2} \cdot e^{-t\cdot x} dx = 1 + t\, e^t\, Ei(-t).$$

Статистика IU_n^E асимптотически эквивалентна U-статистике степени 4 с центрированным ядром $\Phi_I(X, Y, Z, W)$:

$$\Phi_I(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{1}{12}\left(\sum_{\substack{i,j,k\in(1,2,3,4)\\ i\ne j\ne k}} 1\{\max(X_i, X_j) < X_k\}\right) - \frac{1}{12}\Big(1\{\min(X_1, X_2) + X_3 < X_4\}$$
$$+ 1\{\min(X_1, X_2) + X_4 < X_3\} + 1\{\min(X_2, X_3) + X_4 < X_1\} + 1\{\min(X_2, X_3) + X_1 < X_4\}$$
$$+ 1\{\min(X_3, X_4) + X_1 < X_2\} + 1\{\min(X_3, X_4) + X_2 < X_1\} + 1\{\min(X_1, X_3) + X_2 < X_4\}$$
$$+ 1\{\min(X_1, X_3) + X_4 < X_2\} + 1\{\min(X_1, X_4) + X_2 < X_3\} + 1\{\min(X_1, X_4) + X_3 < X_2\}$$
$$+ 1\{\min(X_2, X_4) + X_1 < X_3\} + 1\{\min(X_2, X_4) + X_3 < X_2\}\Big)$$

и следующей проекцией:

$$\Psi_I(t) = -\frac{3e^{-2t}}{8} + \frac{e^{-t}}{3} - \frac{1}{24}.$$

Дисперсия проекции равна

$$\Delta_I^2 = \mathbb{E}\{\Psi_I^2(X)\} = \frac{1}{1080}.$$

Следовательно, ядро Φ_I невырождено, тогда по теореме Хёфдинга [8] при $n \to \infty$ выполняется следующее:

$$\sqrt{n} IU_n^E \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 16\Delta_I^2\right).$$

Так как ядро Φ_I не только невырожденное и центрированное, но и ограниченное, то можно применить результат о больших уклонениях для U-статистик [19]. В результате, в гл. 3 мы приходим к справедливости следующей теоремы.

Теорема 5. *При* $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln\left(\mathbb{P}(IU_n^E > t)\right) = h(t) \sim -\frac{t^2}{32\Delta_I^2},$$

где h *– непрерывная функция, для которой возможно найти асимптотику около нуля.*

Рассмотрим статистику KU_n^E как супремум по t от модуля некоторой U-статистики с центрированным ядром

$$\begin{aligned}\Phi_K(X,Y,Z;t) =& \frac{1}{3}\left(1\{\max(X,Y)<t\}+1\{\max(X,Z)<t\}+1\{\max(Y,Z)<t\}\right)\\ &-\frac{1}{3}\left(1\{\min(X,Y)+Z<t\}+1\{\min(X,Z)+Y<t\}+1\{\min(Y,Z)+X<t\}\right)\end{aligned}$$

и следующей проекцией ядра:

$$\Psi_K(s,t)=\frac{1}{3}\left((1-e^{-t})^2-1\{s<t\}\left(2e^{-s}-1-e^{-2(t-s)}\right)\right)+\frac{2}{3}\left(\min(s,t)\,e^{-t}-1+e^{-\min(s,t)}\right).$$

Дисперсия проекции и ее супремум равны:

$$\Delta_K^2(t)=\mathbb{E}\left\{\Psi_K^2(X,t)\right\}=\frac{4}{27}e^{-4t}(e^t-1)^3,\quad \Delta_K^2=\sum_{t>0}\Delta_K^2(t)\overset{t_0=\ln(4)}{=}\frac{1}{64}.$$

Следовательно, так как семейство ядер невырождено, а еще центрировано и ограничено, то при нулевой гипотезе H_0 в гл. 3 применяется теорема из [21] о логарифмической асимптотике больших уклонений для U-эмпирической статистики типа Колмогорова, чтобы получить следующий результат.

Теорема 6. *При $z>0$*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\mathbb{P}\left\{KU_n^E>z\right\}=w(z)\sim-\frac{z^2}{8\Delta_K^2},$$

где w – некоторая непрерывная функция в окрестности нуля.

Статистика $L_n^E(a)$ асимптотически эквивалентна U-статистики степени 2 с центрированным ядром

$$\Phi_L(x,y;a)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+\frac{x}{y}}+\frac{1}{a+\frac{y}{x}}\right)-\frac{a-1-\ln(a)}{(a-1)^2}.$$

В гл. 3 найдена проекция ядра, которая имеет вид

$$\Psi_L(s;a)=\mathbb{E}\left(\Phi_L(X,Y;a)|Y=s\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+s\,e^{\frac{s}{a}}Ei(-\frac{s}{a})}{a^2}-s\,e^{as}Ei(-as)\right)-\frac{a-1-\ln(a)}{(a-1)^2}.$$

В явном виде функция дисперсии не выражается, но возможно найти ее в конкретных точках:

$$\Delta_L^2(a)=\mathbb{E}(\Psi_L^2(X;a)),\Delta_L^2(2)=0.00014,\ \Delta_L^2(0.5)=0.00228,\ \Delta_L^2(3)=0.00014,\ \Delta_L^2(4)=0.00011,$$

для невырожденности ядра Φ этого достаточно. Тогда применима теорема Хефдинга [8], согласно которой

$$\sqrt{n}\,L_n^E(a)\xrightarrow{d}N(0,4\Delta_L^2(a)),\quad \text{при}\quad n\to\infty.$$

Так как ядро Φ_L не только невырождено и центрировано, но еще и ограничено, то в результате применения теоремы о больших уклонениях U-статистик [19] в гл. 3 был получен следующий результат.

Теорема 7. *При $t>0$*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\left(\mathbb{P}(LE_n>t)\right)=h(t)\sim-\frac{t^2}{4\Delta_L^2},$$

где h – некоторая непрерывная функция, для которой возможно найти асимптотику в нуле.

Статистика KL_n^E рассматривается как супремум по $t > 0$ модуля семейства U-статистик, образованных соответствующими U-эмпирическими преобразованиями Лапласа, с центрированными ядрами:

$$\Phi_{KL}(X,Y;t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t\frac{X}{Y}} + e^{-t\frac{Y}{X}}\right) - (1 + te^t Ei(-t)).$$

В главе найдена проекция семейства ядер:

$$\Psi_{KL}(s;t) = \mathbb{E}\left(\Phi_{KL}(X,Y;t)|Y=s\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s+t} + 2\sqrt{st}\,K_1(2\sqrt{st})\right) - (1 + te^t Ei(-t)),$$

где $K_1(\cdot)$-модифицированная функция Бесселя второго рода. Выражение функции дисперсии проекции в явном виде не представляется возможным, однако был найден ее супремум:

$$\Delta^2_{KL}(t) = \mathbb{E}\left(\Psi_{KL}(X;t)\right), \qquad \Delta^2_{KL} = \sup_{t>0} \Delta^2_{KL}(t) \overset{t_0=0.551}{=} 0.00507.$$

Следовательно, ядро Φ_{KL} невырождено. Так как оно еще центрировано и ограничено, то применяя результат из [21] об асимптотике логарифмической функции вероятностей больших уклонений U-статистик типа Колмогорова при нулевой гипотезе H_0, в гл. 3 мы доказываем справедливость следующего утверждения.

Теорема 8. *Для некоторого $z > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbb{P}\left\{KL_n^E > z\right\} = g(z) \sim -\frac{z^2}{8\Delta^2_{KL}},$$

где w – некоторая непрерывная функция в окрестности нуля.

В гл. 3 рассмотрены следующие близкие альтернативы $f_i(x,\theta)$, $i = 1,...,6$, $x > 0$ нулевой гипотезе о принадлежности выборки экспоненциальному распределению и вычислена информация Кульбака-Лейблера для них.

1. Альтернатива Вейбулла с плотностью

$$f_1(x,\theta) = (1+\theta)x^\theta e^{-x^{1+\theta}},\ \theta \ge 0,\ x \ge 0;$$

2. Альтернатива Макегама с плотностью

$$f_2(x,\theta) = (1 + \theta(1-e^{-x}))e^{(-x-\theta(e^{-x}-1+x))},\ \theta \ge 0,\ x \ge 0;$$

3. Альтернатива линейной интенсивности отказов с плотностью

$$f_3(x,\theta) = (1+\theta x)e^{-x-\frac{\theta x^2}{2}},\ \theta \ge 0,\ x \ge 0;$$

4. Гамма-альтернатива с плотностью

$$f_4(x,\theta) = \frac{x^\theta e^{-x}}{\Gamma(\theta+1)},\ \theta \ge 0,\ x \ge 0;$$

5. Альтернатива Верхюльста с плотностью

$$f_5(x,\theta) = (1+\theta)e^{-x}(1-e^{-x})^{\theta},\ \theta \geq 0,\ x \geq 0;$$

6. Альтернатива экспоненциальной смеси с отрицательным весом с плотностью

$$f_6(x,\theta) = (1+\theta)e^{-x} - \theta\beta e^{-\beta x},\ \theta \in [0, \frac{1}{\beta-1}],\ \beta \geq 1,\ x \geq 0.$$

Для таких альтернатив справедлива следующая формула для информации Кульбака-Лейблера [16]:

$$2K(\theta) \sim \left(\int\limits_0^\infty e^x f'_\theta(x,0)^2 dx - \left(\int\limits_0^\infty x f'_\theta(x,0) dx \right)^2 \right) \cdot \theta^2,\ \theta \to 0.$$

В табл. 5 приведена вычисленная асимптотика согласно формуле выше.

Таблица 5. Информация Кульбака-Лейблера при $\theta \to 0$

	Альтернативы					
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
$2K(\theta)$	$\frac{\pi^2\theta^2}{6}$	$\frac{\theta^2}{12}$	θ^2	$\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)\theta^2$	$\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^4}{36}\right)\theta^2$	$\frac{(\beta-1)^4}{\beta^2(2\beta-1)} \cdot \theta^2$

Используя теоремы 4–8 и улучшенные формулы для точного бахадуровского наклона из статей [12] и [20], мы вычислили локальную бахадуровскую эффективность для наших статистик по формулам представленным ниже.

Для интегральных статистик:

$$eff_{IU,j} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\left(\int\limits_0^\infty \Psi_I(x) f'_{\theta,j}(x,0)dx \right)^2}{\Delta_I^2 \cdot 2K_j(\theta)}, \quad eff_{L,j}(a) = \lim_{\theta\to 0} \frac{\left(\int\limits_0^\infty \Psi_L(x;a) f'_{\theta,j}(x,0)dx \right)^2}{\Delta_L^2(a) \cdot 2K_j(\theta)},$$

для статистик типа Колмогорова:

$$eff_{KU,j} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sup\limits_{t\geq 0}\left(\int\limits_0^\infty \Psi_{KU}(x;t) f'_{\theta,j}(x,0)dx \right)^2}{\Delta_{KU}^2 \cdot 2K_j(\theta)}, \quad eff_{KL,j} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sup\limits_{t\geq 0}\left(\int\limits_0^\infty \Psi_{KL}(x;t) f'_{\theta,j}(x,0)dx \right)^2}{\Delta_I^2 \cdot 2K_j(\theta)}.$$

Все вычисленные значения локальной бахадуровской эффективности приведены в табл. 6 (ниже).

В четвертой главе предложены и исследуются 2 критерия согласия для семейства распределений Парето первого типа с произвольным параметром формы, основанные на характеризации,

Таблица 6. Локальная бахадуровская эффективность

Альтернативы	IU_n^E	KU_n^E	$\max(L_n^E)$	KL_n^E
f_1	0.750	0.277	0.812	0.795
f_2	**0.625**	0.342	0.56	0.53
f_3	0.208	0.155	**0.214**	0.202
f_4	0.796	0.267	**0.923**	0.92
f_5	0.803	0.268	**0.941**	0.938
f_6, b=3	**0.844**	0.396	0.761	0.727
f_6, b=4	**0.933**	0.397	0.875	0.842
f_6, b=5	**0.957**	0.377	0.938	0.911
f_6, b=6	0.947	0.355	**0.972**	0.952
f_6, b=7	0.922	0.331	**0.986**	0.974
f_6, b=8	0.889	0.307	**0.989**	0.985

которая получена из характеризации Ахсануллаха-Аниса для экспоненциального распределения и использует идею случайных сжатий и растяжений. Формулируется эта характеризация следующим образом:

Пусть Y_1, Y_2, Y – н.о.р.с.в. с непрерывной функцией распределения G, такой что $G(1) = 0$, $G(x) > 0$ для всех $x > 1$, бесконечно дифференцируема и $g(x)$ – соответствующая плотность. $\max(Y_1, Y_2)$ *и* $\min(Y_1, Y_2) \cdot Y$ *одинаково распределены тогда и только тогда, когда*

$$G(x) = 1 - x^{-\lambda}, \quad x \geq 1, \quad \lambda > 0.$$

В гл. 4 рассматриваются интегральная статистика и статистика типа Колмогорова вида

$$IU_n^P = \int\limits_1^\infty (LU_n(t) - RU_n(t))\, dG_n(t), \qquad KU_n^P = \sup_{t\geq 1} |LU_n(t) - RU_n(t)|,$$

где $Y_1, \ldots, Y_n$ – н. о. р. с. в. с ф. р. G, $G_n(t)$ – обычная эмпирическая ф.р., а именно

$$G_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n 1\{Y_i < t\},$$

а $LU_n(t)$ и $RU_n(t)$ – U-эмпирические ф.р., соответствующие левой и правой частям полученной характеризации:

$$LU_n(t) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\leq i<j\leq n} 1\left\{\max(Y_i, Y_j) < t\right\}, \qquad RU_n(t) = \binom{n}{3}^{-1} \sum_{1\leq i<j<k\leq n} 1\left\{\min(Y_i, Y_j) \cdot Y_k < t\right\}.$$

В диссертации показано, что статистика IU_n^P эквивалентна U-статистике степени 4 с центрированным ядром

$$\Phi_I(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) = \frac{1}{12}\left(\sum_{\substack{i,j,k\in(1,2,3,4)\\ i\neq j\neq k}} 1\{\max(Y_i,Y_j) < Y_k\}\right) -$$

$$\frac{1}{12}(1\{\min(Y_1,Y_2)\cdot Y_3 < Y_4\} + 1\{\min(Y_1,Y_2)\cdot Y_4 < Y_3\} + 1\{\min(Y_2,Y_3)\cdot Y_4 < Y_1\} + 1\{\min(Y_2,Y_3)\cdot Y_1 < Y_4\}$$

$$+ 1\{\min(Y_3,Y_4)\cdot Y_1 < Y_2\} + 1\{\min(Y_3,Y_4)\cdot Y_2 < Y_1\} + 1\{\min(Y_1,Y_3)\cdot Y_2 < Y_4\} + 1\{\min(Y_1,Y_3)\cdot Y_4 < Y_2\}$$

$$+ 1\{\min(Y_1,Y_4)\cdot Y_2 < Y_3\} + 1\{\min(Y_1,Y_4)\cdot Y_3 < Y_2\} + 1\{\min(Y_2,Y_4)\cdot Y_1 < Y_3\} + 1\{\min(Y_2,Y_4)\cdot Y_3 < Y_2\}),$$

и проекцией равной

$$\Psi_I(t) = -\frac{3}{8t^2} + \frac{1}{3t} - \frac{1}{24}.$$

Дисперсия проекции вычислена в гл. 4 и равна

$$\Delta_I^2 = \mathbb{E}\{\Psi_I^2(X)\} = \frac{1}{1080}.$$

Таким образом, статистика IU_n^P невырождена, а тогда по теореме Хёфдинга [8] при $n\to\infty$:

$$\sqrt{n}IU_n^P \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 16\Delta_I^2\right).$$

Так как ядро статистики не только невырождено и центрировано, но и ограничено, с использованием результата о больших уклонениях U-статистик из работы [19] было получено следующее утверждение.

Теорема 9. *При* $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\left(\mathbb{P}(IU_n^P > t)\right) = h(t),$$

где h *– некоторая непрерывная функция такая, что* $h(t) \sim -\frac{t^2}{32\Delta_I^2}$, *при* $t\to 0$.

Статистику KU_n^P можно рассматривать как супремум по t модуля семейства U–статистик с центрированными ядрами и их проекциями равными

$$\Psi_K(s,t) = \frac{1}{3}\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)^2 + 1\{s<t\}\left(1-\frac{2}{s}+\frac{s^2}{t^2}\right)\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{\ln(\min(s,t))}{t} + \frac{1}{\min(s,t)} - 1\right).$$

В гл. 4 найдены функция дисперсии этого семейства ядер и ее супремум:

$$\Delta_K^2(t) = \frac{4(t-1)^3}{27t^4}, \quad \Delta_K^2 = \sup_{t\geq 1}\Delta_K^2(t) \overset{t_0=4}{=} \frac{1}{64}.$$

Учитывая то, что семейство ядер невырождено, а также ограничено и центрировано в силу рассматриваемой характеризации, в гл. 4 мы доказываем следующий результат, применяя теорему о больших уклонениях при справедливости гипотезы H_0 для U-эмпирических статистик типа Колмогорова [21].

Теорема 10. *При* $z > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\mathbb{P}\left\{KU_n^P > z\right\} = k(z),$$

где k – некоторая непрерывная функция такая, что $k(z) \sim -\frac{z^2}{18\Delta_K^2}$, *при* $z \to 0$.

В качестве альтернатив в гл. 4 рассмотрены следующие альтернативные функции распределения. $F_i(x,\theta)$, $x \geq 1$, $i = 1,\ldots,6$.

1. Альтернатива сдвига с плотностью распределения

$$F_1(x,\theta) = 1 - \frac{\theta+1}{x+\theta}, \quad f_1(x,\theta) = \frac{1+\theta}{(x+\theta)^2}, \quad \theta \geq 0, \ \ x \geq 1;$$

2. Альтернатива Log-Weibull с функцией распределения

$$F_2(x,\theta) = 1 - e^{-(\ln(x))^{\theta+1}}, \quad x \geq 1, \ \ \theta \in (0,1);$$

3. Альтернатива Лемана с функцией распределения

$$F_3(x,\theta) = F^{1+\theta}(x) = (1-x^{-1})^{1+\theta}, \quad x \geq 1, \ \ \theta > 0;$$

4. Альтернатива связи с распределением Парето типа 4 с функцией распределения

$$F_4(x,\theta) = P_{IV}\left(1, 1, \frac{1}{1+\theta}, 1\right)(x) = 1 - \frac{1}{1+(x-1)^{1+\theta}}, \quad x \geq 1, \ \ \theta \geq 0;$$

5. Синус-альтернатива с функцией распределения

$$F_5(x,\theta) = F(x) - \theta\sin(\pi F(X)), \quad \theta \in [0, \frac{1}{\pi}], \ \ x \geq 1;$$

6. Альтернатива смеси из двух Парето с функцией распределения

$$F_6(x,\theta) = (1-\theta)\frac{x-1}{x} + \theta(1-x^{-\beta}), \quad x \geq 1, \ \ \beta > 1, \ \ \theta \in (0,1).$$

Так как альтернативные плотности $f_i(x,\theta)$ $i = 1,...,6$ удовлетворяют условиям регулярности (см. [13], §4), в гл. 4 получено следующее выражение для информации Кульбака–Лейблера [18]:

$$2K(\theta) \sim \Big\{ \int_1^\infty x^2 f'_\theta(x,0)^2 dx - \Big[\int_1^\infty \ln(x) f'_\theta(x,0) dx \Big]^2 \Big\} \cdot \theta^2.$$

В табл. 7 ниже приведены значения информации Кульбака-Лейблера:

Таблица 7. Информация Кульбака-Лейблера при $\theta \to 0$

	Альтернативы					
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
$2K(\theta)$	$\frac{\theta^2}{12}$	$\frac{\pi^2}{6}\theta^2$	$\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^4}{36}\right)\theta^2$	$\frac{1}{36}(3+4\pi^2)\cdot\theta^2$	$\left(\frac{\pi^2}{2} - Si^2(\pi)\right)\cdot\theta^2$	$\frac{(\beta-1)^4}{\beta^2(2\beta-1)}\cdot\theta^2$

Таблица 8. Локальные бахадуровские эффективности для IU_n^P и KU_n^P

						f_6			
Статистики	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	$\beta=3$	$\beta=4$	$\beta=5$	$\beta=6$
IU_n^P	0.625	0.750	0.803	0.894	0.505	0.844	0.933	0.957	0.947
KU_n^P	0.342	0.277	0.268	0.311	0.394	0.396	0.397	0.377	0.355

В гл. 4 вычислены локальные бахадуровские эффективности для рассмотренных альтернатив $f_i(x,\theta),\ i=1,...,6$ для наших тестовых статистик по следующим формулам из статей [12], [20]:

$$eff_{IU,j} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\left(\int\limits_0^\infty \Psi_I(x) f'_{\theta,j}(x,0)dx\right)^2}{\Delta_I^2\cdot 2K_j(\theta)},\quad eff_{KU,j} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sup\limits_{t\geq 1}\left(\int\limits_0^\infty \Psi_{KU}(x;t) f'_{\theta,j}(x,0)dx\right)^2}{\Delta_{KU}^2\cdot 2K_j(\theta)},\ j=1,...,6$$

и значения эффективностей собраны в табл. 8.

В пятой главе строятся и исследуются 5 критериев согласия для семейства распределений Рэлея, два из них основаны на трансформированной характеризации Дезу, два – на специальном свойстве и последний – на разности U-эмпирических преобразований Лапласа для этого свойства. Сформулируем характеризацию:

Пусть X и Y – независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины с непрерывной функцией распределения R. Тогда

$$X \stackrel{d}{=} \sqrt{2}\,\min(X,Y),$$

тогда и только тогда, когда R принадлежит семейству распределений Рэлея с произвольным параметром масштаба $\sigma>0$ с плотностью $r(x,\sigma)$, $\sigma>0$, $x\geq 0$, где

$$r(x,\sigma) = \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Теперь сформулируем специальное свойство.

Пусть X, Y – независимые случайные величины, с распределением $Rayleigh(\sigma)$, тогда их частное имеет распределение, определяемое следующими функцией распределения и плотностью:

$$q(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad Q(x) = \frac{x^2}{1+x^2},\quad x\geq 0.$$

Преобразование Лапласа для правой части, т.е. для плотности вычислено в главе 5 и имеет вид:

$$L_2(t) = \int\limits_0^\infty e^{-t\cdot x}q(x)dx = 1 - \frac{\pi\cdot t\cdot\cos(t)}{2} - tCi(t)\cdot\sin(t) + t\cos(t)\cdot Si(t),$$

где $Ci(\cdot), Si(\cdot)$ – интегральные косинус и синус.

Пусть $X_1, ..., X_n$ – н. о. р. наблюдения с ф. р. R. На основе характеризации построены интегральная статистика и статистика типа Колмогорова следующего вида:

$$IU_{1,n}^R = \int\limits_0^\infty (F_n(t) - U_{1,n}(t))\, dF_n(t), \qquad KU_{1,n}^R = \sup_{t\geq 0} |F_n(t) - U_{2,n}(t)|,$$

где $F_n(t)$ – стандартная эмпирическая функция распределения, а $U_{1,n}(t)$ – U-эмпирическая функция, соответствующая правой части характеризации. Имеем

$$U_{1,n}(t) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\leq i<j\leq n} 1\left\{\sqrt{2}\, \min(X_i, X_j) < t\right\}.$$

На основе специального свойства введена интегральная взвешенная статистика и статистика типа Колмогорова:

$$IU_{2,n,\sigma}^R = \int\limits_0^\infty \left(U_{2,n}(t) - \frac{t^2}{1+t^2}\right) \sigma^2\, t\, e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\, dt, \qquad KU_{2,n}^R = \sup_{t\geq 0} \left|U_{2,n}(t) - \frac{t^2}{1+t^2}\right|,$$

где

$$U_{2,n}(t) = \binom{n}{2}^{-1} \left(\sum_{1\leq i<j\leq n} \left(\frac{1\{\frac{X_i}{X_j} < t\} + 1\{\frac{X_j}{X_i} < t\}}{2}\right)\right),$$

а теперь интегральная взвешенная статистика, основанная на разности преобразований Лапласа для этого свойства:

$$L_n(a) = \int\limits_0^\infty (L_1(t) - L_2(t))\, e^{-a\cdot t} dt,$$

где $L_1(t)$ – U-эмпирическое преобразование Лапласа для $\frac{X}{Y}$:

$$L_1(t) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\leq i<l\leq n} e^{-t\cdot \frac{X_i}{X_j}}$$

и $L_2(t)$ получена ранее.

Интегральная статистика $IU_{1,n}$ асимптотически эквивалентна U-статистике степени 3 со следующим центрированным ядром:

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{1}{3}\left(g(x, y; z) + g(y, z; x) + g(x, z; y)\right),$$

где $g(x, y; z) = \frac{1}{2} - 1\left\{\sqrt{2}\, \min(x, y) < z\right\}$. Проекция этого ядра найдена в гл. 5 и имеет вид

$$\Psi_1(t) = -\frac{1}{18} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{4}{9}e^{-\frac{3t^2}{2}}, \quad t\geq 0.$$

Дисперсия проекции равна

$$\Delta_1^2 = \mathbf{E}\Psi_1^2(X) \approx 0.00291.$$

Так как из вычислений в гл. 5 следует, что ядро Φ_1 невырождено, по теореме Хёфдинга [8]:

$$\sqrt{n}\, IU_{1,n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 9\Delta_1^2\right), \quad n\to\infty.$$

Так как ядро Φ_1 центрировано и ограничено, то в связи с использованием результатов о больших уклонениях U-статистик из работы [19] мы получили следующее утверждение.

Теорема 11. *При* $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(IU_{1,n} > t) = h_1(t),$$

где h *– некоторая непрерывная функция, у которой важна асимптотика к нуле и равна* $h_1(t) \sim -\frac{t^2}{18\,\Delta_1^2}$, *при* $t \to 0$.

Статистика $IU_{2,n}^R$ эквивалентна U-статистике степени 2 с центрированным ядром

$$\Phi_I(x,y;\sigma) = \frac{e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2y^2}} + e^{-\frac{\sigma^2 y^2}{2x^2}}}{2} - \left(1 + \frac{1}{2} e^{\frac{\sigma^2}{2}} \sigma^2\, Ei\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right) = \frac{e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2y^2}} + e^{-\frac{\sigma^2 y^2}{2x^2}}}{2} - c(\sigma),$$

где $Ei(\cdot)$ – интегральная показательная функция.

Проекция ядра равна

$$\Psi_I(t;\sigma) = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{\sigma^2 + t^2} + \sigma\, t\, K_1(\sigma \cdot t)\right) - c(\sigma), \quad t \geq 0,$$

где $K_1(t)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода.

Функция дисперсии проекции в явном виде не выражается. Она имеет вид

$$\Delta_I^2(\sigma) = \mathbf{E}\Psi_I^2(X;\sigma) = \int_0^\infty \Psi_I^2(x;\sigma)\, x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx > 0,$$

однако для каждого $\sigma > 0$ можно вычислить значение дисперсии с помощью численных методов. Например, дисперсия проекции ядра статистики $IU_{2,n} := IU_{2,n}(1)$: $\Delta_I^2 = \Delta_I^2(1) \approx 0.000314$, тогда ядро Φ_I невырождено, а тогда по теореме Хёфдинга [8] при $n \to \infty$:

$$\sqrt{n}\, IU_{n,\sigma^2}^R \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 4\Delta_I^2(\sigma)\right).$$

Полученный в гл. 5 диссертации результат говорит о том, что ядро Φ_I не только невырождено и центрировано, но и ограничено, а следствием применения результатов о больших уклонениях U-статистик из работы [19] является следующая теорема.

Теорема 12. *При* $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln\left(\mathbf{P}(IU_{n,\sigma^2}^R > t)\right) = h_I(t,\sigma) \sim -\frac{t^2}{8\Delta_I^2(\sigma)} = -h_I(t,\sigma),$$

где h_I *– некоторая непрерывная функция, у которой особенно важна асимптотика в нуле.*

Статистики типа Колмогорова $KU_{1,n}$ и $KU_{2,n}$ рассматрены как супремум по t модуля семейства U-статистик с ядрами:

$$\Phi_1(x,y;t) = \frac{1}{2}\left(1\{x < t\} + 1\{y < t\}\right) - 1\left\{\sqrt{2} \cdot \min(x,y) < t\right\}$$

и

$$\Phi_2(x,y;t) = \frac{1}{2}\left(1\left\{\frac{x}{y} < t\right\} + 1\left\{\frac{y}{x} < t\right\}\right) - \frac{t^2}{1+t^2}$$

соответственно. В гл. 5 вычислены проекции каждого ядра, равные

$$\Psi_1(s;t) = \mathbf{E}\left(\Phi_1(X,Y;t)|Y=s\right) = \frac{1}{2}\left(1\{s<t\} - e^{-\frac{t^2}{2}} - 1\right) + 1\left\{s > \frac{t}{\sqrt{2}}\right\} e^{-\frac{t^2}{4}},$$

$$\Psi_2(s;t) = \mathbf{E}\left(\Phi_2(X,Y;t)|Y=s\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{s^2}{2t^2}} + 1 - e^{-\frac{t^2s^2}{2}}\right) - \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Для дисперсии и ее супремума в гл. 5 найдены следующие выражения

$$\Delta^2_{i,KU} = \sup_{t\geq 0} \Delta^2_{i,KU}(t) = \sup_{t\geq 0} \mathbf{E}\,\Psi_i^2(X;t), \quad i=1,2;$$

$$i=1, \quad \Delta^2_{1,KU} = \sup_{t\geq 0}\left(\frac{1}{4}e^{-t^2}\left(e^{\frac{t^2}{2}}-1\right)\right) = \frac{1}{16}; \text{ в точке } t=\sqrt{2\ln(2)};$$

$$i=2, \quad \Delta^2_{2,KU} = \sup_{t\geq 0}\left(\frac{(t-1)^2\,t^2\,(t+1)^2\,(t^4+3t^2+1)}{4\,(t^2+1)^2\,(t^2+2)\,(t^2-t+1)\,(t^2+t+1)\,(2t^2+1)}\right)$$
$$= 0.00954; \text{ в точках } t=0.445 \quad \text{и} \quad t=2.257.$$

Из вычислений гл. 5 следует, что ядра невырождены. Поскольку дополнительно семейство ядер центрировано и ограничено, при справедливости H_0, применив теорему [21] о логарифмической асимптотике вероятностей больших уклонений для U-эмпирических статистик Колмогорова, получен следующий результат.

Теорема 13. *При* $z>0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln \mathbf{P}\left\{KU_{i,n} > z\right\} = h_i(z) \sim -\frac{z^2}{8\Delta^2_{i,KU}} = -w_i(z), \quad i=1,2,$$

где w_i *– некоторая непрерывная функция, у которой важна асимптотика в нуле.*

В гл. 5 рассмотрены следующие альтернативы $f_i(x,\theta)$, $x\geq 0$, $i=1,\ldots,4$:

1. Альтернатива Вейбулла с плотностью
$$f_1(x,\theta) = \frac{(1+\theta)}{2^\theta}\,x^{2\theta+1}\,\exp\left(-\frac{x^{2\,(1+\theta)}}{2^{1+\theta}}\right);$$

2. Альтернатива Лемана с плотностью
$$f_2(x,\theta) = (1+\theta)\,f(x)\,F^\theta(x) = (1+\theta)x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^\theta;$$

3. Гамма альтернатива с плотностью
$$f_3(x,\theta) = \frac{x^{\theta+1}\,e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{\theta}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\theta}{2}+1\right)};$$

4. Альтернатива Райса с плотностью
$$f_4(x,\theta) = x\,\exp\left(-\frac{(x^2+\theta^2)}{2}\right)\,I_0(x\cdot\theta),$$

   где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого типа порядка 0.

Информация Кульбака–Лейблера вычислена в гл. 1, а так как в нашем случае гипотеза H_0 сложная, то $K(\theta)$ определяется следующим образом для альтернативной плотности $f(x,\theta)$:

$$K(\theta) = \inf_{\sigma>0} \int\limits_0^\infty \ln \frac{f(x,\theta)}{r(x,\sigma)} \, f(x,\theta)\, dx,$$

где в нашем случае функция $r(x,\sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$. В гл. 5 доказано следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Для некоторой альтернативной плотности $f(x,\theta)$ при $\theta \to 0$ имеет место следующее выражение для информации Кульбака–Лейблера:*

$$2K(\theta) = \theta^2 \left(I(0) - \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 f'_\theta(x,0)\, dx \right)^2 \right),$$

где I(0) – информация Фишера.

Отметим, что асимптотики θ^2 недостаточно для альтернативы Райса, так как $f'_{4,\theta}(x,0) \equiv 0$. В случае этой альтернативы получено следующее: $K_4(\theta) = \frac{1}{128}\,\theta^8 + o(\theta^8)$. Выражения для информации Кульбака–Лейблера, найденные в гл. 1 диссертации, приведены в табл. 9 ниже. Полученные локальные бахадуровские эффективности для тестовых статистик собраны в табл. 10 ниже. Отметим, что под $IU^R_{2,\sigma}$ в табл. 10 приведены максимально достигаемые значения бахадуровской эффективности.

Таблица 9. Информация Кульбака–Лейблера при $\theta \to 0$

	f_1	f_2	f_3	f_4
$2K(\theta)$	$\frac{\pi^2}{6}\,\theta^2$	$\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^4}{36}\right)\theta^2$	$\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)\theta^2$	$\frac{1}{128}\,\theta^8$

Таблица 10. Локальная бахадуровская эффективность тестовых статистик

	Альтернативы			
	f_1	f_2	f_3	f_4
IU^R_1	0.697	0.807	0.198	0.149
IU^R_2	0.802	0.805	0.202	0.288
$IU^R_{2,\sigma}$	**0.825**	**0.938**	0.23	0.314
KU^R_1	0.158	0.194	0.043	**0.697**
KU^R_2	0.798	0.886	**0.875**	0.243
$L^R(1)$	0.735	0.935	0.227	0.151
$L^R(2)$	0.725	0.931	0.226	0.146
$L^R(3)$	0.711	0.923	0.224	0.139

В качестве альтернативных распределений для вычисления мощности на основе статистического моделирования, рассмотрены распределения из статьи [10] и альтернатива Райса для статистик

KU_2^R, $IU_2^R(\sigma)$, $\sigma = 1, 2, 4, 8$ и $L^R(a)$, $a = 1, 2, 5$ при объеме выборки 20 для трех уровней значимости $\alpha = 0.1, 0.05$ и 0.01. Для удобства представление результатов табл. 11 и 12 введены следующие краткие обозначения: W – распределение Вейбулла, G – Гамма-распределение, IG – обратное гауссовское распределение, LN – Лог-нормальное распределение, GO – закон Гомперца, PL – степенной закон распреления, LFL – закон распределения линейных потерь, EP – экспоненциальный степенной закон, PE – Пуассоновский экспоненциальный закон, RL – распределение Райса (Rice(1,t)).

Таблица 11. Мощности для $IU_2^R(\cdot)$ и для KU_2^R в случае уровня значимости α=0.1, 0.05 и 0.01

	IU_2^R, $\sigma = 1$			IU_2^R, $\sigma = 2$			IU_2^R, $\sigma = 4$			IU_2^R, $\sigma = 8$			KU_2^R		
Альтернатива	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
Exp	94	91	81	96	94	87	96	93	85	94	90	78	96	92	80
W(2,1)	10	5	1	10	5	1	10	5	1	10	5	1	10	5	1
W(3,1)	60	46	22	62	48	22	57	44	21	51	39	18	64	51	28
G(1.5,1)	73	64	44	75	66	45	73	63	42	63	51	30	71	59	33
G(2,1)	44	33	16	43	31	14	38	27	12	28	18	6	27	25	8
IG(1,0.5)	94	91	80	95	92	81	94	90	77	87	81	62	94	89	72
IG(1,1)	70	60	38	66	54	30	60	47	24	40	26	9	62	47	20
IG(1,1.5)	38	26	10	30	19	6	23	13	3	9	4	1	27	16	3
IG(2,0.5)	99	98	94	99	99	96	99	99	96	98	97	92	99	98	93
IG(2,1)	94	91	80	95	92	81	94	90	77	89	81	61	94	90	73
IG(2,1.5)	85	77	59	84	76	54	81	71	48	66	52	28	80	70	43
LN(0,0.8)	57	45	25	52	40	19	45	33	14	28	17	5	47	33	12
LN(0,1.2)	97	96	89	98	97	91	98	96	90	96	92	81	97	95	86
LN(0,1.5)	*	99	98	*	*	99	*	*	99	*	99	98	*	*	98
GO(0.5)	80	72	52	85	79	63	85	79	62	82	74	56	83	74	51
GO(1)	62	52	32	71	62	43	73	64	44	71	61	42	69	57	35
GO(1.5)	48	38	20	59	49	30	62	52	33	62	52	33	56	44	23
PL(1)	27	18	8	43	33	18	52	41	24	57	47	29	49	37	18
PL(1.5)	77	70	53	91	86	75	93	90	80	94	90	81	91	86	71
PL(2)	95	92	84	99	98	95	99	99	97	99	99	97	99	98	94
LFL(1)	76	67	47	82	74	57	82	74	56	78	69	51	78	68	45
LFL(2)	64	54	33	71	62	43	72	62	43	68	58	39	67	56	32
LFL(3)	56	46	26	64	53	34	65	54	35	62	51	33	60	47	25
LFL(4)	50	40	22	58	48	29	59	49	29	57	47	28	54	42	21
EP(0.5)	*	99	98	*	*	*	*	*	*	*	*	99	*	*	99
EP(1)	62	52	32	71	62	42	73	64	44	71	61	42	68	57	34
EP(2)	34	23	8	30	20	8	26	17	6	24	16	6	34	25	11
EP(3)	92	85	62	90	83	61	81	72	50	71	62	43	92	86	68
PE(1)	92	88	77	95	92	82	95	91	81	92	87	73	93	88	73
PE(2)	85	78	62	89	83	68	88	82	66	84	76	59	86	78	57
PE(3)	68	58	40	73	64	45	73	64	44	68	58	38	69	58	33
PE(4)	46	36	19	51	40	23	51	40	22	47	36	19	45	33	15
RL(2)	40	27	10	38	26	10	35	24	10	31	22	8	42	31	14
RL(3)	91	83	59	91	83	59	86	78	55	78	69	48	92	86	67
RL(4)	*	*	96	*	*	96	99	98	93	97	95	87	*	*	98

Таблица 12. Мощность для статистик L(20,s) для уровней значимости α=0.1, 0.05 и 0.01

	$L,\ a=1$			$L,\ a=2$			$L,\ a=5$		
Альтернатива	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
Exp	96	93	84	96	93	87	95	92	81
W(2,1)	10	5	1	10	5	1	10	5	1
W(3,1)	59	46	22	58	44	20	58	45	21
G(1.5,1)	71	60	38	71	60	38	68	57	34
G(2,1)	36	25	9	36	25	10	32	21	8
IG(1,0.5)	93	88	72	93	88	72	91	85	66
IG(1,1)	55	41	17	54	40	17	48	34	12
IG(1,1.5)	18	9	2	18	9	1	13	6	1
IG(2,0.5)	99	98	95	99	98	95	99	98	93
IG(2,1)	93	88	72	93	88	71	91	85	66
IG(2,1.5)	78	66	41	76	65	39	73	60	33
LN(0,0.8)	40	27	10	39	27	10	34	22	6
LN(0,1.2)	97	95	87	98	95	87	97	94	84
LN(0,1.5)	*	*	99	*	*	99	*	*	98
GO(0.5)	85	78	62	85	78	62	84	77	60
GO(1)	74	65	46	74	65	46	73	64	45
GO(1.5)	64	54	34	64	55	36	64	54	36
PL(1)	55	45	27	56	46	29	57	47	29
PL(1.5)	94	91	83	95	92	83	94	91	83
PL(2)	99	99	97	99	99	98	99	98	97
LFL(1)	82	75	57	82	74	56	80	73	54
LFL(2)	72	63	43	72	63	44	71	62	42
LFL(3)	66	56	36	65	55	36	66	55	36
LFL(4)	61	51	31	61	51	32	60	50	31
EP(0.5)	*	*	*	*	*	*	*	*	*
EP(1)	74	65	46	74	66	47	74	65	46
EP(2)	27	18	7	27	18	7	26	18	7
EP(3)	83	75	53	83	74	53	82	73	52
PE(1)	94	91	80	94	91	80	93	89	77
PE(2)	88	82	66	87	82	66	86	80	63
PE(3)	73	63	44	73	64	44	71	62	42
PE(4)	52	41	23	51	41	23	50	40	22
RL(2)	36	25	10	36	25	10	35	24	9
RL(3)	87	79	57	87	79	56	86	78	56
RL(4)	*	99	94	99	99	94	99	99	94

В заключении подведены итоги диссертационного исследования и перечислены главные результаты.

Список литературы

[1] Baringhaus L., Henze N. A class of consistent tests for exponentiality based on the empirical Laplace transform. Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 1991;43(3):551–564.

[2] Baringhaus L., Henze N. Tests of fit for exponentiality based on a characterization via the mean residual life function. Statistical Papers. 2000;41:225–236.

[3] Nikitin, Y.Y. *Tests based on characterizations, and their efficiencies: a survey.* Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica, 21(2017), N 1, 3-24.

[4] Ahsanullah M, Anis MZ. Some characterizations of exponential distribution. International Journal of Statistics and Probability. 2017; 6(5):132–139

[5] Hoeffding W. *A class of statistics with asymptotically normal distribution.* Ann. Math. Statist.– 1948. V. 19.–P. 293-325.

[6] M. Ahsanullah, V.B. Nevzorov, G.P. Yanev, *Characterizations of distributions via order statistics with random exponential shifts*, J. Appl. Statist. Sci., 18(2010), pp. 297-–305.

[7] Линник Ю. В. Линейные формы и статистические критерии. I,II.// Украинский математический журнал, 1953, Т.5, №2, С.207-243; №3, С. 247-290.

[8] V. S. Korolyuk, Yu. V. Borovskikh, *Theory of U-statistics.*, Kluwer, Dordrecht, 1994

[9] Chin-Yuan Hua, Gwo Dong Lin.*Characterizations of the logistic and related distributions*. Journ. of Mathem. Anal. and Appl, 463(2018), N 1, 79–92

[10] Meintanis S., Iliopoulos, G. *Tests of fit for the Rayleigh distribution based on the empirical Laplace transform.* Ann Inst Stat Math 55, 137–151 (2003). https://doi.org/10.1007/BF02530490

[11] Muliere P., Nikitin Ya., Yu. Scale-invariant test of normality based on Polya's characterization. Metron. V. 60 (1-2), pp. 21-33, 2002.

[12] Ya. Yu. Nikitin, K. Yu. Volkova, *Efficiency of Exponentiality Tests Based on a Special Property of Exponential Distribution,* Math. Meth. Stat., 25(2016), pp. 54–66.

[13] Bahadur R.R. Some limit theorems in statistics. SIAM, Philadelphia (1971).

[14] Bahadur R. R. *Stochastic comparison of tests* Ann. Math. Stat. 31(1960), 276–295.

[15] Ya. Nikitin, *Asymptotic efficiency of nonparametric tests,* Cambridge University Press, New York, 1995.

[16] Nikitin YY, Tchirina AV. *Bahadur efficiency and local optimality of a test for the exponential distribution based on the Gini statistic.* Statistical Methods & Applications. 1996;5(1):163–175.

[17] Nikitin Y. Y., Tchirina A. V. Lilliefors test for exponentiality: Large deviations, asymptotic efficiency, and conditions of local optimality. Mathematical Methods of Statistics. 2007;16(1):16–24.

[18] M. Obradović, M. Jovanovic, B. Milošević, *Goodness-of-fit tests for Pareto distribution based on a characterization and their asymptotics.* — J. Theor. Appl. Statist. **49**, No. 5 (2015), 1026–1041.

[19] Nikitin Ya. Yu., Ponikarov E.V. *Rough large deviation asymptotics of Chernoff type for von Mises functionals and U-statistics.* Proc. of St.Petersburg Math. Soc., **7**(1999), 124–167. Engl. transl. in AMS Transl., ser.2, **203**(2001), 107–146.

[20] Nikitin Ya. Yu., Peaucelle I. *Efficiency and local optimality of distribution-free tests based on U- and V- statistics.* Metron, **LXII**(2004),185–200.

[21] Nikitin Ya. Yu. *Large deviations of U-empirical Kolmogorov-Smirnov tests, and their efficiency.* J. Nonpar. Stat., 22(2010), 649–668.

[22] Nikitin Y. Y., Volkova K. Y. Exponentiality tests based on Ahsanullah's characterization and their efficiency. Journ of Mathem Sciences. 2015;204(1):42–54.

[23] A. Asgharzadeh, R. Valiollahi, M. Abdi, *Point and interval estimation for the logistic distribution based on record data.* SORT-Stat. Oper. Res. Trans., 1(2016), pp. 89-112.

[24] Волкова К. Ю. Асимптотическая эффективность критериев согласия, основанных на характеризационных свойствах распределений. Кандидатская диссертация. СПбГУ. 2011

[25] Литвинова В.В. Асимптотические свойства критериев симметрии и согласия, основанных на характеризациях. Кандидатская диссертация. СПбГУ. 2004

[26] Литвинова В. В., Никитин Я.Ю. Два семейства критериев нормальности, основанных на характеризации Пойа, и их асимптотическая эффективность. Зап. научн. семин. ПОМИ, Т. 328, С. 147-159, 2005.

[27] Чирина А. В. Асимптотическая эффективность и локальная оптимальность по Бахадуру критерия экспоненциальности, основанного на статистике Морана. Зап. научн. семин. ПОМИ, Т.294, С. 245-259, 2002

[28] Чирина А. В. Асимпототическая эффективность критериев экспоненциальности, свободных от параметра масштаба. Кандидатская диссертация. СПбГУ. 2005

Публикации автора по теме диссертации

[29] Никитин Я.Ю., Рагозин И.А. *Критерии согласия, основанные на характеризации логистического распределены.* Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия, 2019, Т.6 (64), выпуск 2, С. 241-252.

[30] Y. Y. Nikitin, I. A. Ragozin, *Goodness-of-Fit Tests Based on a Characterization of Logistic Distribution.* Vestnik St. Petersburg Univ., Mathematics, 52(2019), pp. 169-177.

[31] Ya. Yu. Nikitin, I. A. Ragozin. *Goodness-of-fit tests for the logistic location family.* Journal of Applied Statistics, 2020, 47:13-15, 2610-2622,
DOI: 10.1080/02664763.2020.1761952

[32] J. S. Allison, Ya. Yu. Nikitin, I. A. Ragozin, L. Santana. *New tests for exponentiality based on a characterization with random shift.* Journal of Statistical Computation and Simulation, 2020, 90:15, 2840-2857, DOI: 10.1080/00949655.2020.1791865

[33] И. А. Рагозин, *Новые критерии согласия для распределения Парето I типа, основанные на некоторой характеризации.* Записки научных семинаров ПОМИ РАН, 2020, Т. 495, С. 237-249.

[34] И. А. Рагозин *Новые критерии согласия для семейства распределений Рэлея, основанные на некотором специальном свойстве и некоторой характеризации.* Записки научных семинаров ПОМИ РАН, 2021, Т.505, С. 230-243.

[35] Ragozin I. A., *New goodness-of-fit tests for Pareto I type distribution, based on some characterization.* Journal of Mathematical Sciences, 2022, Vol. 268, No. 5, P.684-692, https://doi.org/10.1007/s10958-022-06238-4

[36] Ragozin I. A., *New goodness-of-fit tests for family of Rayleigh distributions, based on a special property and a characterization.* Journal of Mathematical Sciences, Vol. 281, No. 1, 2024. DOI 10.1007/s10958-024-07083-3