Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Резбаев Айрат Владимирович

Нелинейные транспортные задачи Канторовича

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор В.И. Богачев

Москва — 2024

ВВЕДЕНИЕ

Центральными объектами диссертации являются появившиеся в последнее десятилетие несколько новых модификаций классической транспортной задачи Канторовича:

- нелинейная транспортная задача Канторовича и в частности транспортная задача Канторовича с условными мерами,
- нелинейная траснпортная задача Канторовича с ограничениями на плотность,
- транспортная задача Канторовича с фиксированным барицентром.

Апробация результатов диссертационного исследования. Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях:

1. 6-я Санкт-Петербургская молодёжная конференция по теории вероятностей и математической физике

2. III Международная конференция «Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ», посвященная 100-летию В.С. Владимирова, 100-летию Л.Д. Кудрявцева и 85-летию О.Г. Смолянова.

Публикации. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно и опубликованы в двух работах в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science:

- V.I. Bogachev, A.V. Rezbaev, Existence of solutions to the nonlinear Kantorovich problem of optimal transportation, Mathematical Notes 112:3 (2022), 369–377.
- V. I. Bogachev, S. N. Popova, A. V. Rezbaev, On nonlinear Kantorovich problems with density constraints, Moscow Mathematical Journal 23:3 (2023), 285–307.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 58 наименований. Общий объем диссертации составляет 76 страниц.

Транспортная задача Канторовича

Напомним современную постановку классической транспортной задачи Канторовича (изначальную постановку и некоторые экономические предпосылки задачи см., например, в оригинальных работах Л.В. Канторовича и Л.В. Канторовича в соавторстве с Г.Ш. Рубинштейном [1], [2], [3], [4], [5], [6]). Пусть даны вероятностные пространства $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ и $(X, \mathcal{B}_Y, \nu)$ и неотрицательная $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$-измеримая функция h, которая называется функцией стоимости. Обозначим через $\Pi(\mu, \nu)$ множество всех вероятностных мер на пространстве $(X \times Y, \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y)$, имеющих проекции μ и ν на сомножители (такие меры называются *транспортными планами*), т.е. мер σ, для которых

$$\sigma(A \times Y) = \mu(A), A \in \mathcal{B}_X, \quad \sigma(X \times B) = \nu(B), B \in \mathcal{B}_Y.$$

Меры μ и ν называются *маргинальными распределениями.* Задача Канторовича состоит в минимизации интеграла

$$\int\limits_{X \times Y} h(x, y)\sigma(dx\, dy)$$

по мерам $\sigma \in \Pi(\mu, \nu)$. Если существует мера, на которой достигается минимум, то говорят, что задача Канторовича имеет решение, а саму эту меру называют *оптимальным планом.* Известно, что задача Канторовича имеет решение при достаточно широких условиях. Например, решение существует, если X и Y — вполне регулярные топологические пространства, маргинальные распределения являются радоновскими мерами, а функция стоимости h ограничена и полунепрерывна снизу (см. [10]). В общем же случае имеется инфимум

$$K_h(\mu, \nu) = \inf_{\sigma \in \Pi(\mu, \nu)} \int\limits_{X \times Y} h(x, y)\sigma(dx\, dy).$$

1 Нелинейная транспортная задача Канторовича

Эта глава диссертации посвящена нелинейной транспортной задаче

Канторовича, и задаче Канторовича с условными мерами в частности. В первом параграфе дается постановка нелинейной транспортной задачи, во втором доказывается теорема, дающая достаточные условия существования решения такой задачи. Центральным объектом третьего параграфа является задача Канторовича с условными мерами, специфика которой заключается в особом виде зависимости функции стоимости от транспортного плана (через условные меры). Там же нами доказывается теорема существования для такой задачи. Обе теоремы доказываются для достаточно широкого класса функций стоимости и пространств X и Y. Случай польских пространств рассмотрен в работе [8].

1.1 Нелинейная задача Канторовича

В самом общем виде нелинейная транспортная задача Канторовича ставится следующим образом. Даны два вероятностных пространства $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. Пусть $\Pi(\mu, \nu)$ — множество всех вероятностных мер на $X \times Y$, заданных на $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ и имеющих проекции μ и ν на сомножители, т.е. для каждой меры $\sigma \in \Pi(\mu, \nu)$ выполнены соотношения

$$\sigma(A \times Y) = \mu(A), A \in \mathcal{A}, \quad \sigma(X \times B) = \nu(B), B \in \mathcal{B}.$$

Множество $\Pi(\mu, \nu)$ не пусто, поскольку всегда содержит меру $\mu \otimes \nu$. Пусть также задана неотрицательная функция $h : X \times Y \times \Pi(\mu, \nu) \to \mathbb{R}$, называемая функцией стоимости, которая при каждом фиксированном $\sigma \in \Pi(\mu, \nu)$ измерима относительно σ-алгебр $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда **нелинейная транспортная задача Канторовича** записывается в следующем виде:

$$\int\limits_{X \times Y} h(x, y, \sigma)\sigma(dx\, dy) \to \min, \quad \sigma \in \Pi(\mu, \nu).$$

Меры μ и ν называются *маргиналами или маргинальными распределениями*, а меры из $\Pi(\mu, \nu)$ — *допустимыми планами*. Если существует мера σ_0, на которой достигается минимум в нелинейной задаче Канторовича, то говорят, что эта задача имеет решение, а саму меру называют *оптимальным планом.* В общем же случае имеется инфимум

$$K_h(\mu,\nu) = \inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int\limits_{X\times Y} h(x,y,\sigma)\sigma(dx\,dy).$$

Для вполне регулярного топологического пространства X через $\mathcal{P}_r(X)$ будем обозначать пространство радоновских вероятностных мер на X, т. е. таких борелевских мер μ, что для всякого борелевского множества B и всякого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset B$ с $\mu(B\backslash K) \le \varepsilon$. Через $\mathcal{B}(X)$ будем обозначать σ-алгебру борелевских множеств топологического пространства X, а через $\mathcal{B}a(X)$ его бэровскую σ-алгебру, которая порождается всеми непрерывными функциями на X. В случае вполне регулярного суслинского пространства имеет место равенство $\mathcal{B}a(X) = \mathcal{B}(X)$ (см. [9], теорема 6.7.7). Пространство $\mathcal{P}_r(X)$ наделяется слабой топологией, которая на всем пространстве знакопеременных радоновских мер порождается семейством всех полунорм вида

$$p_f(\mu) = \left|\int_X f\,d\mu\right|,$$

где f — ограниченная непрерывная функция на X.

Множество мер $M \subset \mathcal{P}_r(X)$ называется равномерно плотным, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset B$ с $\mu(B\backslash K) \le \varepsilon$ для всех $\mu \in M$.

1.2 Существование решения нелинейной задачи Канторовича

Этот параграф посвящен доказательству теоремы о существовании решения нелинейной транспортной задачи Канторовича для достаточно широких классов вероятностных пространств и функций стоимостей. Доказательство основной теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма 1. Пусть X — вполне регулярное пространство, Π — равномерно плотное компактное подмножество $\mathcal{P}_r(X)$, функция

$$h\colon X\times\Pi \to [0,+\infty)$$

полунепрерывна снизу на множествах вида $K \times \Pi$, где K — компакт в X. Тогда полунепрерывна снизу функция

$$J_h(\sigma) = \int_X h\,d\sigma, \quad \Pi \to [0, +\infty].$$

Теорема 1. Пусть X и Y — вполне регулярные пространства, μ и ν — радоновские меры на X и Y соотвественно и h полунепрерывна снизу на множествах вида $K \times \Pi(\mu, \nu)$, где K — компакт в $X \times Y$. Тогда существует оптимальный план.

1.3 Задача Канторовича с условными мерами

В третьем параграфе мы продолжаем рассматривать нелинейные транспортные задачи Канторовича, но все внимание будет сконцентрировано на случае функций стоймости специального вида

$$h : X \times Y \times \mathcal{P}(X \times Y) \to \mathbb{R}, \quad h(x, y, \sigma) = h(x, \sigma^x).$$

Нелинейные транспортные задачи с функциями стоимости такого вида мы будем называть **транспортными задачами Канторовича с условными мерами**. Поскольку теперь функция стоимости h зависит от транспортных планов σ через условные меры, что может нарушать ее непрерывность на множествах вида $K \times \Pi(\mu, \nu)$, где K — компакт в $X \times Y$, то для доказательства существования решений таких задач нам придется накладывать на функцию h более ограничительные условия.

Напомним, что наличие фигурирующих в постановке задачи условных мер означает, что мера σ имеет вид

$$\sigma(dx\,dy) = \sigma^x(dy)\mu(dx),$$

функция $x \mapsto \sigma^x(B)$ является μ-измеримой для каждого борелевского множества $B \in X$ и для всякой ограниченной функции f на $X \times Y$, измеримой относительно $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$, выполнено равенство

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\sigma(dx\,dy) = \int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)\sigma^x(dy)\mu(dx).$$

В действительности достаточно, чтобы это равенство выполнялось для функций вида $I_A(x)I_B(y)$, где $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(Y)$. Известно, что условные меры существуют при достаточно широких предположениях, например, в случае суслинских пространств, т.е. хаусдорфовых топологических пространств, которые являются образами полных сепарабельных метрических пространств при непрерывных отображениях.

Поскольку мы будем рассматривать вполне регулярные топологические пространства X и Y (в этом случае нет гарантий, что условные меры существуют), то всегда заранее нужно требовать, чтобы условные меры существовали, иначе сама постановка задачи будет лишена всякого смысла.

Доказательство основного результата опирается на следующие две леммы.

Лемма 2. (i) Пусть E — вполне регулярное пространство, направленность мер $P_\alpha \in \mathcal{P}_r(E)$ слабо сходится к мере $P \in \mathcal{P}_r(E)$ и равномерно плотна, а функция $H\colon E \to [0,1]$ такова, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K_\varepsilon \subset E$, что $P_\alpha(E\backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$ для всех α и сужение H на K_ε полунепрерывно снизу. Тогда

$$\int_E H\,dP \le \liminf_\alpha \int_E H\,dP_\alpha.$$

(ii) Пусть Y — вполне регулярное пространство, мера $Q \in \mathcal{P}_r(\mathcal{P}_r(Y))$ сосредоточена на счетном объединении равномерно плотных множеств, ограниченная функция H на $\mathcal{P}_r(Y)$ выпукла и полунепрерывна снизу на равномерно плотных множествах. Тогда

$$H\Bigl(\int_{\mathcal{P}_r(Y)} p\,Q(dp)\Bigr) \le \int_{\mathcal{P}_r(Y)} H(p)\,Q(dp).$$

Лемма 3. Пусть функция $H\colon X\times\mathcal{P}_r(Y) \to [0,+\infty)$ измерима относительно $\mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}a(\mathcal{P}_r(Y))$, полунепрерывна снизу на множествах вида $K\times S$, где K — компакт в X, а множество $S\subset\mathcal{P}_r(Y)$ равномерно плотно, и выпукла по второму аргументу. Тогда функция

$$J_H(\sigma)=\int_X H(x,\sigma^x)\,\mu(dx)$$

полунепрерывна снизу на $\Pi(\mu,\nu)$.

Непосредственно из предыдущих двух лемм и слабой компактности множества планов $\Pi(\mu,\nu)$ вытекает следующий основной результат.

Теорема 2. Пусть X и Y — вполне регулярные топологические пространства, μ и ν — радоновские вероятностные меры на X и Y соответственно и пусть функция стоимости $h\colon X\times\mathcal{P}_r(Y)\to[0,+\infty)$ измерима относительно $\mathcal{B}a(X)\otimes\mathcal{B}a(\mathcal{P}_r(Y))$, полунепрерывна снизу на всех множествах вида $K\times S$, где K — компакт в X, а $S\subset\mathcal{P}_r(Y)$ равномерно плотно, и выпукла по второму аргументу. Тогда

$$\inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)}\int_X h(x,\sigma^x)\,\mu(dx)$$

достигается, т. е. существует оптимальный план.

Замечание 2. (i) Полученные выше утверждения сохраняют силу и в ситуации, когда функции H и h принимают значения в $[0,+\infty]$. Для этого надо применить доказанное для функций $\min(h,N)$ и $\min(H,N)$.

(ii) Условие измеримости функции H достаточно накладывать на множествах вида $K\times S$ с компактными сомножителями. Для широкого класса пространств полунепрерывность снизу на таких множествах влечет $\mathcal{B}(K)\otimes\mathcal{B}a(S)$-измеримость. Например, это верно, если Y суслинское и на компактах в X борелевская и бэровская σ-алгебры совпадают. В случае общих пространств (даже суслинских) условие полунепрерывности снизу на компактах слабее глобальной полунепрерывности снизу (в теореме условие еще чуть слабее, так как речь идет о равномерно плотных компактах). В суслинских пространствах компакты метризуемы, поэтому это условие можно проверять по счетным последовательностям. Кроме того, для таких пространств полунепрерывность снизу на компактах влечет борелевость на компактах, совпадающую с $\mathcal{B}a(X) \otimes \mathcal{B}a(\mathcal{P}_r(Y))$-измеримостью, поэтому ее можно не требовать отдельно.

Мы возвращаемся к задачам Канторовича с условными мерами в главе 4, где за счет специального вида функций стоимости мы сможем несколько ослабить условие выпуклости, а в одном случае и вовсе от него отказаться.

2 Нелинейная задача Канторовича с ограничениями на плотность

В этой главе речь идет об еще одной новой модификации транспортной задачи Канторовича. Если в предыдущей главе новизна задачи заключалась в изменении вида функции стоимости (появилась зависимость от транспортных планов), то на этот раз изменение коснется как самой функции стоимости, так и области задания целевого функционала. Основными результатами этой главы являются две теоремы существования, относящиеся к нелинейным задачам Канторовича с ограничениями на плотность и к задачам Канторовича с условными мерами и ограничениями на плотность. Обе теоремы дают достаточные условия существования решений таких задач. Впервые задачи с ограничениями на плотность были рассмотрены в работах [11], [12], [13], [14].

2.1 Нелинейная задача Канторовича с ограничениями на плотность

Пусть заданы два абстрактных вероятностных пространства $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ и некоторая вероятностная мера λ на измеримом пространстве $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Пусть также $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ — неотрицательная $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-измеримая функция, интегрируемая относительно λ. Множество $\Pi_\Phi(\mu, \nu)$ состоит из всех вероятностных мер σ на $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ с проекциями μ и ν на множители, причем σ абсолютно непрерывна относительно λ и для соответствующей плотности Радона–Никодима имеем

$$\varrho_\sigma = \frac{d\sigma}{d\lambda} \le \Phi \quad \lambda\text{-a.e.}$$

Предположим, что $\Pi_\Phi(\mu,\nu)$ непусто. Это предположение выполняется, если, например, $\lambda=\mu\otimes\nu$ и $\Phi\geq 1$ (в данном случае $\lambda\in\Pi_\Phi(\mu,\nu)$).

Множество мер $\Pi_\Phi(\mu,\nu)$ можно отождествить с множеством их плотностей по λ и рассматривать как подмножество $L^1(\lambda)$.

Пусть $\mathcal{P}_\lambda$ — множество всех плотностей вероятности в $L^1(\lambda)$. Снабдим пространство $L^1(\lambda)$ топологией, порожденной стандартной L^1-нормой. Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{P}_\lambda)$ — борелевская σ-алгебра относительно этой топологии.

Предположим также, что задана $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}(\mathcal{P}_\lambda)$-измеримая функция

$$h\colon X\times Y\times\mathcal{P}_\lambda\to[0,+\infty).$$

Определение. Задачу

$$J_h(p):=\int\limits_{X\times Y} h(x,y,p)p(x,y)\,\lambda(dx\,dy)\to\min,\quad p\in\Pi_\Phi(\mu,\nu)$$

будем называть **нелинейной транспортной задачей Канторовича с ограничениями на плотность**. Если существует $p\in\Pi_\Phi(\mu,\nu)$, на которой минимум достигается, то будем говорить, что задача имеет решение.

Теорема 3. Пусть для λ-п.в. $(x,y)\in X\times Y$ функция $p\mapsto h(x,y,p)$ полунепрерывна снизу на $\Pi_\Phi(\mu,\nu)$ по L^1-норме и функция J_h выпукла. Тогда нелинейная транспортная задача Канторовича с ограничениями на плотность

$$\int\limits_{X\times Y} h(x,y,p)p(x,y)\,\lambda(dx\,dy)\to\min,\quad p\in\Pi_\Phi(\mu,\nu)$$

имеет решение.

Заметим, что условие непрерывности h по p относительно нормы значительно слабее, чем условие непрерывности относительно слабой топологии.

Условие выпуклости J_h имеет очевидный недостаток: оно не следует из выпуклости h по p.

2.2 Задача Канторовича с условными мерами и ограничениями на плотность

Обратимся теперь к случаю, когда выпуклость J_h следует из выпуклости h по p, но может иметь место и без последней. Пусть функция стоимости имеет вид

$$h\colon X \times Y \times \mathcal{P}_\lambda \to [0, +\infty), \quad h(x, y, p) = h(x, p^x),$$

где p^x — условные меры p относительно меры μ. Нелинейные транспортные задачи с ограничениями на плотность и с функциями стоимости такого вида мы будем называть **транспортными задачами Канторовича с условными мерами и ограничениями на плотность**.

Разумеется, для определения таких функций необходимо предположить, что каждая мера $p \in \Pi_\Phi(\mu, \nu)$ имеет условные меры на Y относительно своей проекции на X. Это выполняется автоматически для всех борелевских мер на суслинских пространствах (см. [9, Chapter 10]).

Если $\lambda = \mu \otimes \nu$ и мы отождествим меры в $\Pi_\Phi(\mu, \nu)$ с их плотностями по λ, то условные меры для таких мер $p \cdot \lambda$, где p — $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$-измеримая версия плотности, определяются по формуле

$$p^x = p(x, \cdot) \cdot \nu.$$

Поскольку мы имеем дело с условными мерами на $\mathcal{B}_Y$, имеет смысл снабдить пространство $\mathcal{M}(Y)$ всех ограниченных мер на $\mathcal{B}_Y$ σ-алгеброй $\mathcal{E}(\mathcal{M}(Y))$, порожденной всеми функциями $\nu \mapsto \nu(B)$, $B \in \mathcal{B}_Y$. Можно показать, что эта σ-алгебра счетно порождена, если Y суслинское.

В следующей теореме предполагается, что функция h измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{E}(\mathcal{M}(Y))$. Тогда функция

$$x \mapsto h(x, p^x)$$

является $\mathcal{B}_X$-измеримой при условии, что отображение $x \mapsto p^x$ является $(\mathcal{B}_X, \mathcal{E}(\mathcal{M}(Y)))$- измеримым, поскольку отображение $x \mapsto (x, p^x)$ измеримо относительно пары σ-алгебр $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{E}(\mathcal{M}(Y))$.

Транспортные задачи этого типа можно записать в виде

$$\int_X h(x, p^x)\, \mu(dx) \to \min, \quad p \in \Pi_\Phi(\mu, \nu),\ p(dx\, dy) = p^x(dy)\mu(dx).$$

Из-за особой формы функции h ее выпуклость влечет выпуклость J_h. Следовательно, следующая теорема охватывает некоторые случаи, не охватываемые предыдущей теоремой, хотя предположения остаются теми же (конечно, функционал J_h не тот и содержит условные меры).

Теорема 4. Предположим, что для μ-почти каждого x функция $p \mapsto h(x, p)$ полунепрерывна снизу относительно нормы полной вариации на $\mathcal{M}(Y)$. Если, кроме того, функция

$$C_h(p) = \int_X h(x, p^x)\, \mu(dx)$$

выпукла (в частности, это верно, если h выпукла по второму аргументу), то она достигает своего минимума на $\Pi_\Phi(\mu, \nu)$, т.е. задача Канторовича с условными мерами и ограничением на плотности имеет решение.

3 Транспортные задачи с фиксированным барицентром

Эта глава посвящена рассмотрению еще одного нового вида транспортных задач Канторовича. Специфика этой задачи, заключается в том, что теперь маргинальное распределение ν начинает играть несколько иную роль. Если в классической задаче Канторовича сама логика постановки требовала оба маргинальных распределения рассматривать как соответствующие проекции допустимых транспортных планов, то в задаче Канторовича с фиксированным барицентром мера μ по-прежнему рассматривается как проекция, а мера ν теперь выполняет роль лишь барицентра (среднего) мер из множества $\mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$, то есть мы не знаем в точности второе маргинальное распределение, а знаем лишь его среднее (барицентр).

Напомним, что для всякой вероятностной радоновской меры Q на пространстве мер $\mathcal{P}(Y)$ со слабой топологией барицентр определяется формулой

$$\beta_Q := \int_{\mathcal{P}(Y)} p\, Q(dp),$$

где этот векторный интеграл со значениями в пространстве мер понимается как равенство

$$\beta_Q(A) = \int_{\mathcal{P}(Y)} p(A)\, Q(dp)$$

для всех борелевских множеств $A \subset Y$. Хорошо известно, что функция $p \mapsto p(A)$ измерима по Борелю на $\mathcal{P}(Y)$, а мера β_Q является τ-аддитивной (см. [9, Предложение 8.9.8 и следствие 8.9.9]).

Если P — радоновская мера на $X \times \mathcal{P}(Y)$, μ — ее проекция на X и существуют условные меры P^x на $\mathcal{P}(Y)$ относительно μ, то барицентр проекции $P_{\mathcal{P}}$ меры P на $\mathcal{P}(Y)$ задается выражением

$$\beta_{P_{\mathcal{P}}}(B) = \int_X \int_{\mathcal{P}(Y)} p(B)\, P^x(dp)\, \mu(dx).$$

Пусть $\Pi^\beta(\mu)$ — множество всех вероятностных радоновских мер π на $X \times \mathcal{P}(Y)$ такое, что проекция π_X меры π на X равна μ, а барицентр проекции $\pi_{\mathcal{P}}$ меры π на $\mathcal{P}(Y)$ есть заданная мера $\beta \in \mathcal{P}(Y)$:

$$\Pi^\beta(\mu) := \{\pi \in \mathcal{P}(X \times \mathcal{P}(Y))\colon \pi_X = \mu, \quad \beta_{\pi_{\mathcal{P}}} = \beta\}.$$

Определение. Для заданной неотрицательной измеримой относительно $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{P}(Y))$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ функции $h : X \times \mathcal{P}(Y) \to \mathbb{R}$ задачу

$$\int_{X \times \mathcal{P}(Y)} h(x,p)\, \pi(dx\, dp) \to \min, \quad \pi \in \Pi^\beta(\mu)$$

будем называть **задачей Канторовича с фиксированным барицентром**.

Напомним, что множество $\Gamma \subset X \times Z$ называется h-циклически монотонным для функции h на $X \times Z$, если для всех n выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} h(x_i, z_i) \leq \sum_{i=1}^{n} h(x_{i+1}, z_i)$$

для всех пар $(x_1, z_1), \ldots, (x_n, z_n) \in \Gamma$, где $x_{n+1} := x_1$.

Теорема 5. (i) Пусть h — ограниченная полунепрерывная снизу функция на произведении $X \times \mathcal{P}(Y)$. Для всех $\mu \in \mathcal{P}(X)$ и $\beta \in \mathcal{P}(Y)$ задача Канторовича

$$J_h(\pi) = \int_{X \times \mathcal{P}(Y)} h(x, p)\, \pi(dx\, dp) \to \min, \quad \pi \in \Pi^{\beta}(\mu) \tag{1}$$

с фиксированным барицентром имеет решение. Более того, это верно для h со значениями в $[0, +\infty]$, если J_h не тождественно $+\infty$.

(ii) Каждая оптимальная мера P для этой задачи оптимальна и для классической линейной задачи с той же функцией стоимости и маргиналами μ и $P_{\mathcal{P}}$, где $P_{\mathcal{P}}$ — проекция P на $\mathcal{P}(Y)$.

(iii) Наконец, если X и Y — суслинские пространства, то P сосредоточена на h-циклически монотонном множестве.

Результаты этой главы использованы в главе 4 для доказательства теорем существования для задач Канторовича с условными мерами при менее ограничительных предположениях, чем в главе 1, но за счет специального вида функций стоимости h.

4 Задача Канторовича с условными мерами. Продолжение

В этом параграфе мы продолжаем изучение задачи Канторовича с условными мерами, начатое нами в первой главе. В пункте 3 главы 1 мы видели, что важным достаточным условием существования решения таких задач является наличие выпуклости по второму аргументу функции стоимости h, причем в главе 5 показано, что при отсутствии таковой выпуклости задача может не иметь решения. В этой главе мы показываем, что для функций стоимости некоторого специального вида условие выпуклости можно несколько ослабить (или вовсе отказаться от него), сохранив при этом разрешимость задачи. Основными результатами этой главы являются две теоремы существования для задач Канторовича с условными мерами.

Поскольку на суслинских пространствах все борелевские меры радоновы, то вместо обозначения $\mathcal{P}_r(T)$ будем использовать более короткое $\mathcal{P}(T)$.

Первый результат посвящен случаю, когда функции стоимости распадается на произведение двух функций одного переменного.

Теорема 6. Пусть X и Y — суслинские пространства. Предположим, что функция h имеет вид

$$h(x, \sigma) = f(x)g(\sigma),$$

где $f\colon X \to \mathbb{R}$ и $g\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathbb{R}$ — ограниченные непрерывные функции, а множества $\{p \in \mathcal{P}(Y)\colon g(p) \leq c\}$ выпуклы для всех $c \in \mathbb{R}$. Тогда для каждой безатомической меры $\mu \in \mathcal{P}(X)$ и каждой меры $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ значение

$$\inf_{\sigma \in \Pi(\mu,\nu)} \int_X h(x, \sigma^x)\, \mu(dx)$$

достигается, т.е. существует оптимальный план.

Следующая теорема показывает, что, в случае когда функция стоимости не зависит от x, от требования выпуклости в теореме существования можно полностью отказаться.

Теорема 7. Пусть X и Y — пространства Суслина, а h — ограниченная непрерывная функция на $\mathcal{P}(Y)$ со слабой топологией. Тогда для произвольных мер $\mu \in \mathcal{P}(X)$ и $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, где μ не имеет атомов, задача

$$\int_X h(\sigma^x)\, \mu(dx) \to \min, \quad \sigma \in \Pi(\mu, \nu)$$

имеет решение.

5 Контрпримеры

В этой главе мы приводим различные контрпримеры к некоторым доказанным в предыдущих главах утверждениям. В частности, пример 1 показывает, что утверждение теоремы 2 про существование решения в задаче Канторовича с условными мерами теряет свою силу, если в нем отказаться от условия выпуклости функции h по второму аргументу. Аналогично пример 2 демонстрирует, что даже от ослабленного условия выпуклости в теореме 6, которого удалось добиться за счет упрощения вида функции h, нельзя отказаться, если мы требуем, чтобы задача имела решение. Пример 3 касается задачи Канторовича с условными мерами и с ограничениями на плотность. Из него следует, что в теореме 4 условие выпуклости также является существенным и в общем случае не может быть отброшено без потери существования решения такой задачи. В примере 4 показано, во-первых, что поскольку зависимость функции стоимости h от плана σ через условные меры, как в задаче Канторовича с условными мерами, носит более сложную природу (чем, скажем, в просто нелинейной задаче Канторовича), то в таких задачах, вообще говоря, полунепрерывность снизу h не влечет полунепрерывность снизу J_h. Во-вторых, что условие полунепрерывности снизу функции J_h не является необходимым для существования решения задачи Канторовича с условными мерами.

Отметим, что в работе [7] уже были построены примеры (примеры 3.2 и 3.3), которые также демонстрируют, что нелинейная задача Канторовича с условными мерами может не иметь решений. Однако в обоих этих примерах маргинальные распределения не являются абсолютно непрерывными. В наших же примерах оба маргинала совпадают с мерой Лебега на единичном интервале.

Напомним, что норма Канторовича–Рубинштейна радоновских мер на ограниченном метрическом пространстве X, определяется формулой

$$\|\sigma\|_{KR} = \sup_{f \in \mathrm{Lip}_1,\, |f| \leq 1} \int_X f \, d\sigma,$$

где Lip_1 — класс всех 1-липшицевых функций на X. Эта норма порождает слабую топологию на подмножестве неотрицательных мер (см. [9, Theorem 8.3.2]).

Пример 1. Пусть $X = Y = [0,1]$ и пусть $\mu = \nu = \lambda$ — мера Лебега на отрезке $[0,1]$. Существует ограниченная непрерывная функция h на произведении $X \times \mathcal{P}(Y)$, являющаяся липшицевой, когда $\mathcal{P}(Y)$ рассматривается с нормой Канторовича–Рубинштейна, такая, что нелинейная задача

$$\int_X h(x, \sigma^x)\mu(dx) \to \inf, \quad \sigma \in \Pi(\mu,\nu),\ \sigma(dxdy) = \sigma^x(dy)\mu(dx)$$

не имеет решения.

Наш следующий пример аналогичен, но функция стоимости распадается на произведение функций одной переменной.

Пример 2. Пусть $X = Y = [0,1]$ и пусть $\mu = \nu = \lambda$ — мера Лебега на $[0,1]$. Существуют ограниченные непрерывные функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ и $g\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{P}(Y)$ рассматривается со слабой топологией, для которых в нелинейной задаче Канторовича с условными мерами нет минимума

$$J(\sigma) = \int_X f(x)g(\sigma^x)\,\mu(dx) \to \inf, \quad \sigma \in \Pi(\mu,\nu).$$

Этот пример демонстрирует, что в теореме 6 нельзя отказаться от условия выпуклости множеств $\{p \in \mathcal{P}(Y)\colon g(p) \le c\}$ для всех $c \in \mathbb{R}$.

Пример 3. Пусть $X = Y = [0,1]$ и пусть $\mu = \nu = \lambda$ — стандартная мера Лебега на $[0,1]$. Мы рассматриваем задачу Канторовича с условными мерами и с ограничением на плотности

$$J_h(\varrho) = \int_0^1 h(x, \varrho(x,\cdot))\,dx \to \inf,$$

$$\varrho(x,y) \le 4 \ \ \forall x,y, \quad \int_0^1 \varrho(x,y)\,dy = 1 \ \ \forall x, \quad \int_0^1 \varrho(x,y)\,dx = 1 \ \ \forall y.$$

Существует ограниченная непрерывная функция $h\colon X \times L^1[0,1] \to \mathbb{R}$, где пространство $L^1[0,1]$ снабжено слабой топологией, что данная задача не имеет решения.

Пример 4. Пусть $X = Y = [-1/2, 1/2]$ и пусть $\mu = \nu = \lambda$ — мера Лебега на $[-1/2, 1/2]$. Пусть

$$h(p) = \left(\int_{-1/2}^{1/2} \varphi(y)\, p(dy) \right)^k,$$

где φ непостоянная непрерывная функция, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Можно считать, что интеграл от φ равен нулю, например, подходит $\varphi(y) = y$. Тогда h ограничена и непрерывна на $\mathcal{P}(Y)$, функционал

$$J_h(\sigma) = \int_{-1/2}^{1/2} h(\sigma^x)\, dx, \quad \sigma(dxdy) = \sigma^x(dy)\, dx$$

не является полунепрерывным снизу на $\Pi(\mu, \nu)$, но достигает минимума.

Список литературы

[1] Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Изд-во ЛГУ. 1939.

[2] Канторович Л.В. О перемещении масс. Докл. АН СССР. 1942. Т. 37. С. 227–229.

[3] Канторович Л.В. Об одной проблеме Монжа. Успехи матем. наук. 1948. Т. 3. №2. С. 225–226.

[4] Канторович Л. В. Математико-экономические работы. Избранные труды, Наука, Новосибирск. 2011. С. 760.

[5] Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций множества. Вестн. ЛГУ. 1958. Т. 7. № 2. С. 52–59.

[6] Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах. Докл. АН СССР. 1957. Т. 115. № 6. С. 1058–1061.

[7] J.-J. Alibert, G. Bouchitté, T. Champion, "A new class of costs for optimal transport planning", European J. Appl. Math. 30:6 (2019), 1229–1263.

[8] J. Backhoff-Veraguas, M. Beiglböck, G. Pammer, "Existence, duality, and cyclical monotonicity for weak transport costs", Calc. Var. Partial Differ. Equ. 58:203 (2019), 1–28.

[9] V.I. Bogachev, *Measure theory, v. 1, 2*, Springer, Berlin, 2007.

[10] V.I. Bogachev, A.V. Kolesnikov, "The Monge–Kantorovich problem: achievements, connections, and prospects", Uspekhi Matem. Nauk 67:5 (2012), 3–110 (in Russian); English transl.: Russian Math. Surveys. (2012), 67:5, 785–890.

[11] J. Korman, R. J. McCann, "Insights into capacity constrained optimal transport", Proc. Natl. Acad. Sci. USA 110 (2013), 10064–10067.

[12] J. Korman, R.J. McCann, "Optimal transportation with capacity constraints", Trans. Amer. Math. Soc. 367:3 (2015), 1501–1521.

[13] J.Korman, R.J. McCann, C. Seis, "Dual potentials for capacity constrained optimal transport", Calc. Var. Partial Differ. Equ. 54 (2015), 573–584.

[14] J.Korman, R.J. McCann, C. Seis, "An elementary approach to linear programming duality with application to capacity constrained transport", Convex Anal. 22 (2015), 797–808.