Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет"
"Высшая школа экономики"

Факультет математики

На правах рукописи

Греков Андрей Михайлович

# Эллиптические интегрируемые системы: собственные функции и дуальности

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н.
Зотов Андрей Владимирович

Москва - 2024

# Содержание

**1 R-матричнозначные пары Лакса** **4**

**2 Суперсимметричная версия соответсвия между квантовым уравнением Книжника-Замолодчикова и системой Руженаарса** **8**

**3 Оператор Лакса и детерминант Секигучи для Дважды эллиптической системы** **10**

**4 К вопросу о конструкции Чередника и Назарова-Склянина для дважды эллиптической системы** **11**

**5 Список обозначений эллиптических функций** **14**

**6 Формулировка основных результатов** **16**

6.1 Первая часть . . . . . 16

6.2 Вторая часть . . . . . 17

6.3 Третья часть . . . . . 19

6.4 Четвёртая часть . . . . . 20

**Список литературы** **22**

Результаты этой диссертации опубликованы в четырёх статьях:

A. Grekov, A. Zotov, “On R-matrix valued Lax pairs for Calogero–Moser models”, J. Phys. A, 51 (2018), 315202 , 26 pp.,

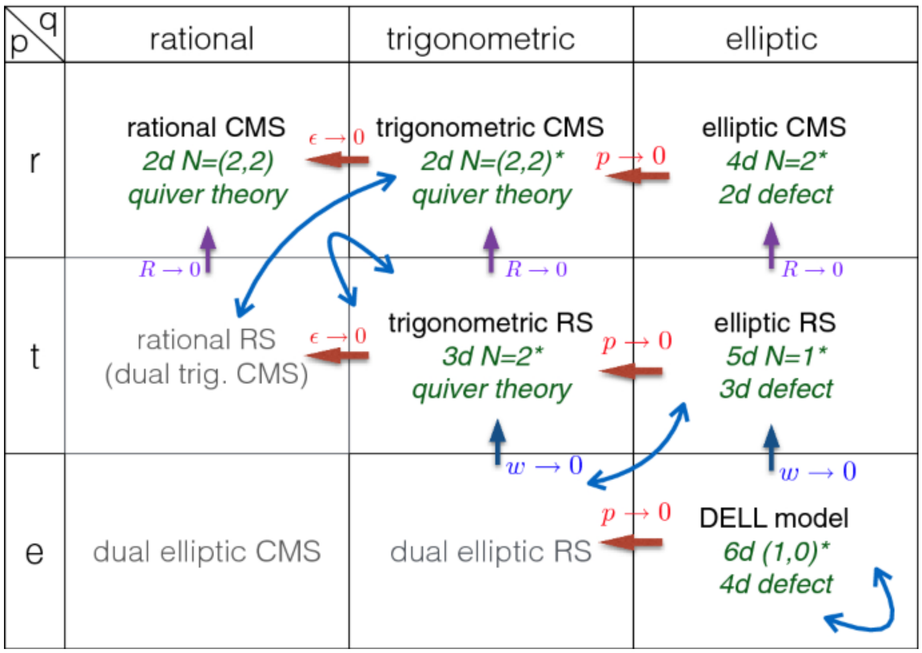
A. Grekov, A. Zabrodin, A. Zotov, "Supersymmetric extension of qKZ-Ruijsenaars correspondence”, Nuclear Physics B, 2018 ,

Grekov, A. Zotov, "Characteristic determinant and Manakov triple for the double elliptic integrable system SciPost Phys. 10, 055 (2021) • published 4 March 2021

A. Grekov, A. Zotov, "On Cherednik and Nazarov-Sklyanin large N limit construction for double elliptic integrable system J. High Energ. Phys. 2021, 62 (2021)

# Введение

Эта диссертация посвящена теме дуальностей в многочастичных интегрируемых системах. Центральным игроком в ней выступает серия систем Калоджеро-Мозера-Сазерлэнда / Руженаарса – Шнайдера и их вырождений/обобщений. В канонических координатах эти системы характеризуются зависимостью Гамильтонианов от положений и импульсов частиц. Обе эти зависимости могут быть рациональными, тригонометрическими или эллиптическими, соответственно. Таким образом, мы получаем 3x3 таблицу из 9 систем.([119])




Эти системы связаны дуальностями как друг с другом, так и с моделями типа спиновых цепочек и систем Годена. Мы рассмотрим только некоторые из них. Первая часть диссертации посвящена системам с рациональной зависимостью от импульса – системам Калоджеро-Мозера (первая строка таблицы). Они нумеруются выбором простой алгебры Ли. Их классическая интегрируемость гарантируется существованием пары Лакса. В своём минимальном варианте этот подход приводит к вложению динамики системы в коприсоединённую орбиту соответствующей простой группы Ли. Однако, в недавней работе А. Левин, М. Ольшанецкий и А. Зотов ([96]) для системы ассоциированной с алгеброй sl(N) построили матрицу Лакса нового типа. Её конструкция использует понятие квантовой R-матрицы, возникающей как базовый строительный блок в системах спиновых цепочек. В диссертации мы изучаем её обобщения на случай других систем корней, а также её применение к построению новой системы класса спиновой цепочки Халдейна-Шастри. Вторая часть касается систем с тригонометрической зависимостью от импульса, а именно систем Руженаарса-Шнайдера (вторая строка таблицы). Она посвящена обобщению недавней работы А. Зотова и А. Забродина ([3]) о связи этих систем с квантовым уравнением Книжника Замолодчикова, которая в свою очередь обобщает ещё более ранние результаты в этой теме, начиная с работ А. Матцуо ([4]). Дуальность устроена следующим образом. Решения квантового уравнения Книжника-Замолодчикова нумеруются значением полного спина. Суммируя, компоненты решения в секторе с фиксированным спином, мы получаем волновую функцию системы Руженаарса-Шнайдера. Это соответствие является деформацией квантово-классической дуальности между лагранжевыми подмногообразиями в фазовом пространстве классической системы Руженаарса-Шнайдера и решениями уравнений Бете соответствующей спиновой цепочки. В диссертации рассматривается обобщение этой дуальности на спиновые цепочки, построенные по R-матрицам, ассоциированным с суперсимметричными алгебрами.

В третьей части диссертации изучаются системы с эллиптической зависимостью от импульсов (последняя строка таблицы). Две из этих систем связаны гипотетической p-q дуальностью с эллиптической моделью Калоджеро и Руженаарса соответственно. Третья – дважды эллиптическая система является самой общей из всей изучаемой серии. Для её рассмотрения даже на классическом уровне было разработано несколько независимых подходов: Первый – А. Мироновым, А. Морозовым и Г. Аминовым, второй – Г. Браденым и Т. Холловудом. Недавно П. Коротеев и Ш. Шакиров предложили квантовую версию дважды эллиптической интегрируемой системы. Их модель является квантованием подхода Брадена и Холловуда. В пределе с тригонометрической зависимостью от координат собственные функции гипотетически выглядят как обобщение полиномов Макдональда с коэффициентами, эллиптически зависящими от q и t. В этой диссертации я представлю обобщение определителя Секигучи-Дебьярда-Макдональда для этих функций. Я покажу, как с его помощью можно доказать формулу для собственных значений гамильтониана в этом пределе. Также достигнут частичный прогресс в построении операторов Чередника для этой системы. К сожалению, этого прогресса оказалось недостаточно для доказательства коммутативности гамильтонианов, однако он все же был полезен для конструкции предела бесконечного числа частиц, который оказался связан с теорией представлений эллиптической квантовой тороидальной алгебры. Некоторые из вышеперечисленных результатов верны и в полностью невырожденном дважды эллиптическом случае.

# 1 R-матричнозначные пары Лакса

В этой части диссертации мы рассматриваем модели Калоджеро-Мозера [15] и их различные обобщения. Гамильтониан эллиптической классической модели $\mathrm{sl}_N$

$$H=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2}-\nu^2\sum_{i>j}^{N}\wp(q_i-q_j) \tag{1}$$

вместе с каноническими скобками Пуассона

$$\{p_i,q_j\}=\delta_{ij}\,,\quad \{p_i,p_j\}=\{q_i,q_j\}=0\,. \tag{2}$$

дает уравнения движения для динамики $N$-частиц:

$$\dot q_i=p_i\,,\quad \ddot q_i=\nu^2\sum_{k:k\neq i}^{N}\wp'(q_{ik})\,. \tag{3}$$

Все переменные и константа связи $\nu$ предполагаются комплексными числами. Уравнения (3) можно записать в форме уравнений Лакса. Пара Лакса со спектральным параметром, полученная Кричевером, [34] имеет следующий вид [1]:

$$L(z)=\sum_{i,j=1}^{N}E_{ij}\,L_{ij}(z)\,,\quad L_{ij}(z)=\delta_{ij}p_i+\nu(1-\delta_{ij})\phi(z,q_{ij})\,,\ q_{ij}=q_i-q_j\,, \tag{4}$$

$$M_{ij}(z)=\nu d_i\delta_{ij}+\nu(1-\delta_{ij})f(z,q_{ij})\,,\quad d_i=\sum_{k:k\neq i}^{N}E_2(q_{ik})=-\sum_{k:k\neq i}^{N}f(0,q_{ik})\,, \tag{5}$$

т. е. уравнения Лакса

$$\dot L(z)\equiv\{H,L(z)\}=[L(z),M(z)] \tag{6}$$

[1] $\{E_{ij}\in\mathrm{Mat}(N),\ i,j=1...N\}$ – стандартный базисом в $\mathrm{Mat}(N)$: $(E_{ij})_{kl}=\delta_{ik}\delta_{jl}$.

эквивалентны (3) тождественно по $z$. Определения и свойства эллиптических функций, входящих (1)-(5) приведены в Приложении. Доказательство основано на тождестве

$$\phi(z,q_{ab})f(z,q_{bc}) - f(z,q_{ab})\phi(z,q_{bc}) = \phi(z,q_{ac})(f(0,q_{bc}) - f(0,q_{ab}))\,. \tag{7}$$

и

$$\phi(z,q_{ab})f(z,q_{ba}) - f(z,q_{ab})\phi(z,q_{ba}) = \wp'(q_{ab})\,. \tag{8}$$

Это частные случаи тождества Фэя в роде один.

$$\phi(z,q_{ab})\phi(w,q_{bc}) = \phi(w,q_{ac})\phi(z-w,q_{ab}) + \phi(w-z,q_{bc})\phi(z,q_{ac})\,. \tag{9}$$

Модель (1)-(3) входит в широкий класс Моделей Калоджеро-Мозера, связанных с корневыми системами (классических) алгебр Ли [42]. Соответствующие пары Лакса со спектральным параметром были найдены в [19, 13]. В частности, для BC$_N$-случая системы, описываемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} p_a^2 - \nu^2\sum_{a<b}^{N}(\wp(q_a-q_b)+\wp(q_a+q_b)) - \mu^2\sum_{a=1}^{N}\wp(2q_a) - g^2\sum_{a=1}^{N}\wp(q_a) \tag{10}$$

существует пара Лакса со спектральным параметром размера $(2N+1)\times(2N+1)$ если (как в [42])

$$g(g^2 - 2\nu^2 + \nu\mu) = 0\,. \tag{11}$$

Заметим, что пары Лакса размером $3N\times 3N$ [30] или $2N\times 2N$ [20], соответствующий общему случаю (все константы произвольны) в данной диссертации не рассматриваются.

Пара Лакса (4)-(5) модели $\mathrm{sl}_N$ (1)-(3) имеет следующее обобщение [96] (пара Лакса со значениями в $R$-матрицах):[2]

$$\mathcal{L}(z) = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij}\otimes\mathcal{L}_{ij}(z)\,, \qquad \mathcal{L}_{ij}(z) = 1_{\tilde N}^{\otimes N}\,\delta_{ij}p_i + \nu(1-\delta_{ij})R^z_{ij}(q_{ij}) \tag{12}$$

$$\mathcal{M}_{ij}(z) = \nu d_i\delta_{ij} + \nu(1-\delta_{ij})F^z_{ij}(q_{ij}) + \nu\delta_{ij}\,\mathcal{F}^0\,, \quad d_i = -\sum_{k:k\neq i}^{N} F^0_{ik}(q_{ik})\,, \tag{13}$$

где $F^z_{ij}(q) = \partial_q R^z_{ij}(q)$, $F^0_{ij}(q) = F^z_{ij}(q)|_{z=0} = F^0_{ji}(-q)$ и

$$\mathcal{F}^0 = \sum_{k>m}^{N} F^0_{km}(q_{km}) = \frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{N} F^0_{km}(q_{km})\,. \tag{14}$$

Она имеет блочно-матричную структуру[3]. Блоки нумеруются числами $i,j = 1...N$ как матричные элементы в (4). Каждый блок $\mathcal{L}(z)$ представляет собой некоторую $\mathrm{GL}(\tilde N)$-значную $R$-матрицу в фундаментальном представлении, действующую на $N$-ой тензорной степени $\tilde N$-мерного векторное пространство $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^{\tilde N})^{\otimes N}$. Таким образом, размер каждого блока равен $\mathrm{dim}\mathcal{H}\times\mathrm{dim}\mathcal{H}$ и $\mathrm{dim}\mathcal{H} = \tilde N^N$, т. е. $\mathcal{L}(z)\in\mathrm{Mat}_N\otimes\mathrm{Mat}^{\otimes}_{\tilde N}$. $\mathrm{Mat}_N$-часть мы будем называть вспомогательным пространством, а $\mathrm{Mat}^{\otimes N}_{\tilde N}\cong\mathcal{H}^{\otimes 2}$ -"квантовым"пространством, поскольку $\mathcal{H}$ является гильбертовым пространством $\mathrm{GL}(\tilde N)$ спиновой цепочки (в фундаментальном представлении) на $N$ узлах.

$R$-матрица $R_{ij}$ действует тривиально во всех тензорных компонентах кроме $i,j$. Она нормирована таким образом, что для $\tilde N = 1$ она сводится к функции Кронекера $\phi(z,q_{ij})$ [112]. Например, в одном из простейших примеров $R_{ij}$ — $R$-матрица Янга [74]:

$$R^\eta_{12}(q) = \frac{1\otimes 1}{\eta} + \frac{\tilde N P_{12}}{q}\,, \tag{15}$$

[2]Уравнения движения следующие из (12)-(13) содержат константу связи $\tilde N\nu$ вместо $\nu$ в (1), (3).

[3]Операторно-значные пары Лакса с подобной структурой известны [31, 27, 28, 10, 32]. Мы обсудим это ниже.

где $P_{12}$ — оператор перестановки. В общем (и по умолчанию) случаt $R_{ij}$ — это [81, 9] эллиптическая $R$-матрица Бакстера-Белавина. Свойства этой $R$-матрицы очень похожи на свойства функции $\phi(z,q)$. Ключевое уравнение для $R_{ij}$ (которое необходимо для существования пары Лакса со значениями в $R$-матрицах) это ассоциативное Уравнение Янга-Бакстера [23]

$$R^z_{ab}R^w_{bc} = R^w_{ac}R^{z-w}_{ab} + R^{w-z}_{bc}R^z_{ac}\,, \quad R^z_{ab} = R^z_{ab}(q_a - q_b)\,. \tag{16}$$

Это матричное обобщение тождества Фэя (9), и $R$-матрица Бакстера-Белавина ему удовлетворяет[44]. Вырождение (16), аналогичное (7), имеет вид:

$$R^z_{ab}F^z_{bc} - F^z_{ab}R^z_{bc} = F^0_{bc}R^z_{ac} - R^z_{ac}F^0_{ab}\,. \tag{17}$$

Он лежит в основе уравнений Лакса для пары Лакса (12)-(13). Последний член $\mathcal{F}^0$ в (13) не нужен в (5), поскольку при $\tilde{N}=1$ он пропорционален тождественной Матрице $N\times N$. Но он важен для $\tilde{N}>1$, поскольку меняет порядок $R$ и $F^0$ в правой части (17). А именно,

$$[R^z_{ac}, \mathcal{F}^0] + \sum_{b\neq a,c} R^z_{ab}F^z_{bc} - F^z_{ab}R^z_{bc} = \sum_{b\neq c} R^z_{ac}F^0_{bc} - \sum_{b\neq a} F^0_{ab}R^z_{ac}\,, \quad \forall\; a\neq c. \tag{18}$$

Это тождество обеспечивает сокращение недиагональных блоков в уравнениях Лакса.

См. [44, 45, 37, 38, 56] для справки о различных свойствах и приложениях $R$-матриц описанного типа. Нам также потребуются два более важных свойства. Унитарность

$$R^z_{12}(q_{12})R^z_{21}(q_{21}) = 1\otimes 1\,\tilde{N}^2(\wp(\tilde{N}z) - \wp(q_{12})) \tag{19}$$

и антисимметричность

$$R^z_{ab}(q) = -R^{-z}_{ba}(-q)\,. \tag{20}$$

С одной стороны, эти свойства необходимы для уравнений Лакса поскольку они приводят к

$$F^0_{ab}(q) = F^0_{ba}(-q) \tag{21}$$

и к аналогу (8) (полученному дифференцированием тождества (19))

$$R^z_{ab}F^z_{ba} - F^z_{ab}R^z_{ba} = \tilde{N}^2\wp'(q_{ab})\,, \tag{22}$$

который дает уравнения движения в каждом диагональном блоке уравнений Лакса.

С другой стороны, вместе с (19) и (20) ассоциативным Уравнением Янга-Бакстера они влекут квантовое уравнение Янга-Бакстера.

$$R^\eta_{ab}R^\eta_{ac}R^\eta_{bc} = R^\eta_{bc}R^\eta_{ac}R^\eta_{ab}. \tag{23}$$

В этом отношении мы имеем дело с квантовыми $R$-матрицами, удовлетворяющими (16), (19), (20) и постоянная Планка $R$-матрицы играет роль спектрального параметра для пары Лакса (12)-(13). В тригонометрическом случае $R$-матрицы удовлетворяющие этим требованиям, включают стандартную $\mathrm{GL}(\tilde{N})$ XXZ $R$-матрицу [35] и ее деформацию [122, 5] ($\mathrm{GL}(\tilde{N})$ расширение 7-вершинной $R$-матрицы). в В рациональном случае множество $R$-матриц включает в себя янговскую (15) и её деформации [122, 50] ($\mathrm{GL}(\tilde{N})$-расширение 11-вершинной $R$-матрицы).

**Целью данной части диссертации** является выяснение происхождения пары Лакса со значениями в $R$-матрицах и рассмотрение некоторых известных конструкций которые работают для обычных пар Лакса.

Сначала мы изучаем обобщения (12)-(13) на другие системы корней. Точнее, мы предлагаем $R$-матричные расширения пары Лакса Д'Хокера-Фонга для моделей Калоджеро-Мозера связанный с классическими системами корней и $\mathrm{BC}_N$ (10). Вспомогательное пространство в этих случаях задается $\mathrm{Mat}_{2N}$ или $\mathrm{Mat}_{2N+1}$, поскольку такие корневые системы получаются из $\mathrm{sl}_{2N}$ или $\mathrm{sl}_{2N+1}$ случаев дискретной редукцией. Для квантового пространства - есть два естественных выбора. Первый — сохранить $2N+1$ (или $2N$) компонент квантовых пространств в приведенной корневой системе. Второй - это оставить только $N$ (или $N+1$) компонент. Мы изучим оба случая.

Далее мы переходим к квантовым моделям Калоджеро-Мозера. [15, 43, 16]. В некоторой степени они описываются квантовыми аналогом уравнений Лакса (6) [51, 14]:

$$[\hat{H}, \hat{L}(z)] = \hbar\,[\hat{L}(z), M(z)]\,, \tag{24}$$

где $\hat{H}$ — квантовый гамильтониан (он скаляр во вспомогательном пространстве), $\hat{L}(z)$ — квантовая матрица Лакса и $\hbar$ — постоянная Планка. Операторы $\hat{H}$ и $\hat{L}(z)$ получены из классических (1) и (4), заменой импульсов $p_i$ на $\hbar\,\partial_{q_i}$, а константа связи в гамильтониане приобретает квантовую поправку. Мы проверяем, обобщаются ли полученные пары Лакса со значениями $R$-матрицах аналогичным образом на квантовый случай. Оказывается, (кроме случая $\mathrm{sl}_N$) только модели, связанные с Корневыми системами типа SO допускают обобщение.

В результате мы покажем[4]

**Proposition 1.1.** *Пары Лакса Д'Хокер-Фонг для классической модели Калоджеро-Мозера , связанные с классическими системами корней и* $\mathrm{BC}_N$*, допускают обобщения до* $R$*-матричнозначных с дополнительными ограничениями:*

*– на константы связи в случаях* $\mathrm{C}_N$ *и* $\mathrm{BC}_N$*;*

*– на* $R$*-матриц (*$\tilde{N}=2$*) в* $\mathrm{B}_N$ *и* $\mathrm{D}_N$ *случаях.*

*Последние случаи непосредственно обобщаются до квантового уравнения Лакса а случаи* $\mathrm{C}_N$ *и* $\mathrm{BC}_N$ *— нет.* $\mathrm{A}_N$ *Пара Лакса обобщена на квантовый случай напрямую, без каких-либо ограничений.*

Модели Калоджеро-Мозера [15, 43] также обладают спиновым обобщением [24]. Его описание Лакса известно и на классическом [12] и на квантовом уровне [31, 27, 28, 10, 32]. Важно отметить, что для квантовых моделей Калоджеро-Мозера со спином квантовые пары Лакса имеют такую же тензорную структуру, как в (12)-(13). Член, аналогичный $\mathcal{F}^0$ (14) рассматривается как часть квантового Гамильтониана, описывающий взаимодействие спинов. Мы объясняем, как пары Лакса со значениями в $R$-матрицах обобщают (и воспроизводят) ранее известные результаты.

Наконец, мы обсудим происхождение пар Лакса со значениями в $R$-матрицах. (для случая $\mathrm{sl}_N$ (12)-(13) с $\mathrm{GL}_{\tilde{N}}$ $R$-матрицой), связав их с системами Хитчина на $\mathrm{SL}(N\tilde{N})$-расслоениях над эллиптической кривой. Первоначально системы этого типа были получены А. Полихронакосом на основе матричных моделей [47] и позднее были описаны как системы Хитчина с нетривиальными характеристическими классами [55, 39]. Они также известны как модели взаимодействующих волчков, поскольку их Гамильтониан (или уравнения движения) трактуются как взаимодействие $N$ $\mathrm{SL}(\tilde{N})$-значных эллиптических волчков.

Связь между парами Лакса со значениями в $R$-матрицах и взаимодействующими волчками возникает в результате переписывания уравнение Лакса для (12)-(13) в виде

$$\{H, \mathcal{L}\} + [\nu\mathcal{F}^0, \mathcal{L}(z)] = [\mathcal{L}(z), \bar{\mathcal{M}}(z)]\,, \tag{25}$$

где в отличие от (13) $\bar{\mathcal{M}}$ не включает член $\mathcal{F}^0$ (14). В этом отношении пара Лакса со значениями в $R$-матрицах является «полуквантовой»: спиновые переменные квантованы в фундаментальном представлении, при этом положения и импульсы частиц остаются классическими. Член $\mathcal{F}^0$ в этой трактовке — это (анизотропный) оператор спинового обмена. Покажем, что классический аналог такого оператора обмена спинами появляется в вышеупомянутых системах Хитчина. Альтернативно, результат формулируется следующим образом.

**Proposition 1.2.** *Квантовый гамильтониан* $\hat{H}^{\mathrm{tops}}$ *модели* $N$ *взаимодействующих* $\mathrm{SL}(\tilde{N})$ *эллиптических волчков (со спиновыми переменными квантованными в фундаментальном представлении) совпадает с суммой квантового гамильтониана Калоджеро-Мозера (24) и* $\mathcal{F}^0$*-члена (14)*

$$\hat{H}^{\mathrm{tops}} = \hat{H}^{\mathrm{CM}} + \hbar\nu\mathcal{F}^0 + 1_{\tilde{N}}^{\otimes N}\,const \tag{26}$$

[4] Некоторые подробности приведены в Заключение.

*с точностью до константы, пропорциональной единичной матрице в* $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ *и переопределения констант связи.*

## 2 Суперсимметричная версия соответсвия между квантовым уравнением Книжника-Замолодчикова и системой Руженаарса

КЗ-Калоджеро и qКЗ-Руженаарс соответсвие [69, 67, 75, 76] - это конструкции вида Мацуо Чередника для волновых функций систем Калоджеро [121] и Руженаарса [135] при помощи решений уравнений Книжника-Замолодчикова [65] и квантовых уравнений Книжника-Замолодчикова [68] соответственно. Рассмотрим, например, уравнения qKZ[5], связанный с группой Ли $GL(K)$:

$$e^{\eta\hbar\partial_{x_i}}\Big|\Phi\Big\rangle = \mathbf{K}_i^{(\hbar)}\Big|\Phi\Big\rangle, \qquad i=1,\ldots,n, \tag{27}$$

$$\mathbf{K}_i^{(\hbar)} = \mathbf{R}_{i\,i\text{-}1}(x_i-x_{i-1}+\eta\hbar)\ldots\mathbf{R}_{i1}(x_i-x_1+\eta\hbar)\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{R}_{in}(x_i-x_n)\ldots\mathbf{R}_{i\,i+1}(x_i-x_{i+1})\,, \tag{28}$$

где $\mathbf{g}=\mathrm{diag}(g_1,\ldots,g_K)$ — диагональная $K\times K$ матрица твиста, а $\mathbf{g}^{(i)}$ действует умножением на $\mathbf{g}$ в $i$-й тензорной компоненте гильбертова пространства $\mathcal{V}=(\mathbb{C}^K)^{\otimes n}$. Квантовые $R$-матрицы $\mathbf{R}_{ij}$ находятся в фундаментальном представлении $GL(K)$. Они действуют в $i$-й и $j$-й тензорных компонентах $\mathcal{V}$ и удовлетворяют квантовому уравнению Янга-Бакстера, что гарантирует совместимость уравнений (27). Матрица твиста $\mathbf{g}$ коммутирует с $\mathbf{R}_{ij}$: $\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{g}^{(j)}\mathbf{R}_{ij}=\mathbf{R}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{g}^{(j)}$. В рациональном случае мы имеем дело с $R$-матрицей Янга [74]:

$$\mathbf{R}_{ij}(x) = \frac{x\mathbf{I}+\eta\mathbf{P}_{ij}}{x+\eta}, \tag{29}$$

где $\mathbf{I}$ — тождественный оператор в $\mathrm{End}(\mathcal{V})$, и $\mathbf{P}_{ij}$ — оператор перестановки, меняющий местами $i$-ую и $j$-ую тензорные компоненты в $\mathcal{V}$. операторы[6]

$$\mathbf{M}_a = \sum_{l=1}^n e_{aa}^{(l)} \tag{30}$$

коммутируют с $\mathbf{K}_i^{(\hbar)}$ и дают весовое разложение гильбертова пространства $\mathcal{V}$ в прямую сумму

$$\mathcal{V} = V^{\otimes n} \;=\; \bigoplus_{M_1,\ldots,M_K}\mathcal{V}(\{M_a\}) \tag{31}$$

собственных пространств операторов $\mathbf{M}_a$ с собственными значениями $M_a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $a=1,\ldots,K$: $M_1+\ldots+M_K=n$. Используя стандартный базис $\{e_a\}$ в $\mathbb{C}^K$ введём базисные векторы в $\mathcal{V}(\{M_a\})$

$$\Big|J\Big\rangle = e_{j_1}\otimes e_{j_2}\otimes\ldots\otimes e_{j_n}, \tag{32}$$

где количество индексов $j_k$ таких, что $j_k=a$ равно $M_a$ для всех $a=1,\ldots,$. Двойственные векторы $\Big\langle J\Big|$ определены так, что $\Big\langle J\Big|J'\Big\rangle=\delta_{J,J'}$.

Тогда формулировка соответствия qKZ-Руйсенаарса имеет следующий вид [76]. Для любого решения уравнений qKZ (27) $\Big|\Phi\Big\rangle=\sum_J\Phi_J\Big|J\Big\rangle$ из весового подпространства $\mathcal{V}(\{M_a\})$ функция

$$\Psi = \sum_J \Phi_J\,, \quad \Phi_J=\Phi_J(x_1,\ldots,x_n) \tag{33}$$

[5]Квантовые $R$-матрицы входящие в (28) предполагаются унитарными: $\mathbf{R}_{ij}(x)\mathbf{R}_{ji}(-x)=\mathrm{id}$.

[6]Набор $\{e_{ab}\,|\,a,b=1\ldots K\}$ - стандартный базис в $\mathrm{Mat}(K,\mathbb{C})$: $(e_{ab})_{ij}=\delta_{ia}\delta_{jb}$.

или

$$\Psi = \Big\langle \Omega \Big| \Phi \Big\rangle \,, \qquad \Big\langle \Omega \Big| = \sum_{J:\, \big| J \big\rangle \in \mathcal{V}(\{M_a\})} \Big\langle J \Big| \tag{34}$$

со свойством

$$\Big\langle \Omega \Big| \mathbf{P}_{ij} = \Big\langle \Omega \Big| \tag{35}$$

является собственной функцией разностного оператора Макдональда:

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i}^{n} \frac{x_i - x_j + \eta}{x_i - x_j} \, \Psi(x_1, \ldots, x_i + \eta\hbar, \ldots, x_n) = E\Psi(x_1, \ldots, x_n) \,, \quad E = \sum_{a=1}^{K} M_a g_a \,. \tag{36}$$

Собственные значения старших рациональных Гамильтонианов Макдональда-Рейсенаарса

$$\hat{\mathcal{H}}_d = \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}, |I|=d} \Big( \prod_{s\in I, r\notin I} \frac{x_s - x_r + \eta}{x_s - x_r} \Big) \prod_{i\in I} e^{\eta\hbar\partial_{x_i}} \tag{37}$$

задаются элементарными симметрическими полиномами $n$ переменных $e_d(\underbrace{g_1, \ldots, g_1}_{M_1}, \ldots \underbrace{g_N, \ldots, g_K}_{M_K})$.

*QC-двойственность.* Используя асимптотику решений задачи (q)KZ уравнений [72], в [75, 76] также утверждалось, что Соответствие qKZ-Рейсенарса можно рассматривать как квантование квантово-классической двойственности [58, 64, 59] (см. также [70, 62]), связывающей обобщенную неоднородную квантовую спиновую цепочку и классическую модель Рейсенарса-Шнайдера. Рассмотрим классическую модель $K$-частичного Руйсенаарса-Шнайдера, где положения частиц $\{x_i\}$ отождествляются с параметрами неоднородности спиновой цепочки, которая описывается ее трансфер-матрицей

$$\mathbf{T}(x) = \mathrm{tr}_0 \Big( \widetilde{\mathbf{R}}_{0n}(x - x_n) \ldots \widetilde{\mathbf{R}}_{02}(x - x_2) \widetilde{\mathbf{R}}_{01}(x - x_1)(\mathbf{g} \otimes \mathbf{I}) \Big) \tag{38}$$

с $R$-матрицей

$$\widetilde{\mathbf{R}}(x) = \frac{x + \eta}{x} \mathbf{R}(x) = \mathbf{I} + \frac{\eta}{x} \mathbf{P}. \tag{39}$$

Гамильтонианы квантовой спиновой цепочки определяются следующим образом:

$$\mathbf{H}_i = \operatorname*{Res}_{x=x_i} \mathbf{T}(x) = \widetilde{\mathbf{R}}_{i\, i-1}(x_i - x_{i-1}) \ldots \widetilde{\mathbf{R}}_{i1}(x_i - x_1) \mathbf{g}^{(i)} \widetilde{\mathbf{R}}_{in}(x_i - x_n) \ldots \widetilde{\mathbf{R}}_{i\, i+1}(x_i - x_{i+1}). \tag{40}$$

Поэтому,

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{K}_i^{(0)} \prod_{j\neq i}^{n} \frac{x_i - x_j + \eta}{x_i - x_j} \,, \quad \mathbf{K}_i^{(0)} = \mathbf{K}_i^{(\hbar)} \mid_{\hbar=0} \,. \tag{41}$$

Отождествим также обобщенные скорости $\{\dot{x}_i\}$ с собственными значениями (40). Тогда переменные действия $\{I_i |\, i = 1, ..., K\}$ классической модели (собственные значения матрицы Лакса) задаются значениями из $g_1, ..., g_K$ с кратностями $M_1, ..., M_K$:

$$\{I_i |\, i = 1, ..., K\} = \Big\{ \underbrace{g_1, \ldots, g_1}_{M_1}, \ldots \underbrace{g_N, \ldots, g_K}_{M_K} \Big\}. \tag{42}$$

Подробности см. в [64], где это утверждение было доказано с помощью техники алгебраического анзаца Бете.

*QC-соответствие.* С другой стороны, квантово-классическая двойственность имеет обобщение до так называемого квантово-классического соответствия [73], где классическая Модель Руйсенарса-Шнайдера связана не с одной спиновой цепочкой, а с множеством $K+1$ суперсимметричных спиновых цепочек [66] связанной с супергруппами

$$GL(K|\, 0) \,, \; GL(K-1|\, 1) \,, \quad \ldots \quad , GL(1|\, K-1) \,, \; GL(0|\, K) \,. \tag{43}$$

Точнее, в [73] было показано, что предыдущее утверждение (42) справедливо для всех суперсимметричных цепочек с супергруппами (43).

*Целью, которую мы преследуем в этой диссертации* , является квантование (суперсимметричного) квантово-классическое соответствиz, то есть установление суперсимметричной версии соответствия qKZ-Рейсенаарса для qKZ уравнения, связанныого с супергруппами $GL(N|M)$. Мы построим обобщения вектора $\Big\langle\Omega\Big|$ (34) и покажем, что квантовая $K$-частичная Модель Руйсенаарса-Шнайдера выводится из всех $K+1$ qKZ-систем уравнений, связанных с супергруппами $GL(N|M)$ с $N+M=K$ (43). Кососимметричные векторы $\Big\langle\Omega_-\Big|$ со свойством $\Big\langle\Omega_-\Big|\mathbf{P}_{ij}=-\Big\langle\Omega_-\Big|$ (вместо симметричного вектора (35)) описываются аналогично. Они приводят к модели Руйсенарса-Шнайдера с обраьным знаком констант связи $\eta$ и $\hbar$.

Данная часть диссертации построена следующим образом. Для простоты мы начинаем с рациональной К.З.-Калоджеро двойственности. Затем переходим к рациональному и тригонометрическому соответсвию qKZ-Рейсенаарса. Большинство обозначений заимствовано из [75, 76, 73]. В Приложении кратко описаны обозначения и определения, связанные с градуированными алгебрами (группами) Ли.

# 3 Оператор Лакса и детерминант Секигучи для Дважды эллиптической системы

Дважды эллиптическая модель (Делл) [119] представляет собой интегрируемую систему с эллиптической зависимостью как от положения частиц, так и от их импульсов. Она расширяет широко известное Семейство многочастичных интегрируемых системых Калоджеро-Мозера-Сазерленда [**?**, **?**] и Руйсенаарса-Шнайдера [135]. Исторически модель была впервые получена как эллиптическая самодуальная система относительно p-q двойственности, меняющей местами положения частиц и переменных действия [134]. На классическом уровне исходная теоретико-групповая конструкция Руйсенаарса неприменима к эллиптическому случаю. Вместо этого использовался геометрический подход, основанный на исследовании спектральных кривых и дифференциалов Зайберга-Виттена [90]. Таким образом, гамильтонианы Делла были описаны в терминах тета-функции высшего рода с динамическими матрицами периодов. По этой причине построение стандартного набора алгебраических инструментов для интегрируемых систем (включая пары Лакса, $R$-матричные структуры, RTT - отношения и т. д.) оказалось сложной задачей. Классические структуры Пуассона, лежащие в основе модели Делла. изучались в [83, 78].

Альтернативная версия гамильтонианов Делла была недавно предложена в [128]. Авторы использовали явный вид 6d-суперсимметричных статистических сумм теории Янга-Миллса, компактифицированных на тор с поверхностными дефектами, которые, предположительно, служат волновыми функциями для соответствующих систем Зайберга-Виттена [101, 102, 103, 77]. Точная связь их результатов с предыдущими исследованиями представляет собой интересную открытую проблему, хотя соответствие уже проверено в нескольких простых случаях. В данной диссертации мы имеем дело с производящей функцией Коротеева-Шакирова для коммутирующих гамильтонианов. А именно, для системы $N$-частиц рассмотрим оператор в комплексных переменных:

$$\hat{\mathcal{O}}(\lambda)=\sum_{n_1,\dots,n_N\in\mathbb{Z}}\omega^{\sum_i\frac{n_i^2-n_i}{2}}(-\lambda)^{\sum_i n_i}\prod_{i<j}^{N}\frac{\theta_p(t^{n_i-n_j}\frac{x_i}{x_j})}{\theta_p(\frac{x_i}{x_j})}\prod_i^N q^{n_i x_i\partial_i}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^n\hat{\mathcal{O}}_n\,. \tag{44}$$

Это определение бесконечного множества (некоммутирующих) операторов $\hat{\mathcal{O}}_k$. Позиции частиц $q_i$ входят через $x_i=e^{q_i}$; $t=e^{\eta}$ – экспонента константы связи $\eta$; $q=e^{\hbar}$ – экспонента постоянной Планка $\hbar$; и $\partial_i=\partial_{x_i}$, так что $\partial_{q_i}=x_i\partial_i$. Константа $\omega$ — это второй модулярный параметр (управляющий эллиптичностью по импульсам), а $\lambda$ — (спектральный) параметр производящей функции. Определение тета-функции $\theta_p(x)$ с модульным параметром $\tau$ ($p=e^{2\pi i\tau}$) (управляющий эллиптичностью в координатах) приведен в (аппендиксе основного текста). В работе Шакирова и Коротеева Было высказано предположение, что коммутирующие гамильтонианы системы Делла имеют вид:

$$\hat{H}_n = \hat{\mathcal{O}}_0^{-1}\hat{\mathcal{O}}_n\,, \qquad\qquad n = 1, ..., N. \tag{45}$$

Решение проблемы нахождения собственных значений для $\hat{H}_n$ было предложено в [114, 116] путём обощения функций Шираиси [108] — решений нестационарной квантовой проблемы Макдональда-Руйсенаарса.

Наш подход, напротив, не апеллирует к явному виду волновых функций и в основном сосредоточен на самой производящей функции. Он основан на использовании сплетающей матрицы $\Xi(z)$ IRF-Vertex соответствия (явный вид см. в основной части) и Формулу факторизации Хасегавы [92, 93].

$$\hat{L}^{\mathrm{RS}}(z, q, t) = g^{-1}(z)g(z - N\eta)\, q^{\mathrm{diag}(\partial_{q_1},\ldots,\partial_{q_N})} \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C}) \tag{46}$$

для эллиптического оператора Лакса $\mathrm{gl}_N$ со спектральным параметром $z$ [135]

$$\hat{L}^{RS}_{ij}(z, \eta, \hbar) = \frac{\vartheta(-\eta)\vartheta(z + q_{ij} - \eta)}{\vartheta(z)\vartheta(q_{ij} - \eta)} \prod_{k\neq j} \frac{\vartheta(q_{jk} + \eta)}{\vartheta(q_{jk})}\, e^{\hbar\partial_{q_j}}\,. \quad q_{ij} = q_i - q_j\,. \tag{47}$$

матрица $\Xi(z) = \Xi(z, x_1, ..., x_N|p)$ входит в нормализованную матрицу сплетения $g(z, \tau) = \Xi(z)D^{-1}$ из (46), где $D(x_1, ..., x_N)$ — диагональная матрица использование которой обусловлено только удобной нормализацией см. (приложение к основному тексту). Ключевое свойство этих матриц, которое мы будем использовать, состоит в том, что $\det\Xi$ пропорционален определителю Вандермонда. Эти сплетающие матрицы известны из IRF-Vertex соответствия на квантовом и классическом уровнях [82, 96, 97, 111]. IRF-Vertex соответствие обеспечивает связь между динамическими и нединамическими квантовыми (или классическими) $R$-матрицами как специальное твистованное калибровочное преобразование с матрицей $g(z)$, связывая тем самым оператор Лакса (47) с оператором типа Склянина [109].

# 4 К вопросу о конструкции Чередника и Назарова-Склянина для дважды эллиптической системы

В предыдущей главе мы начали обсуждать двойную эллиптическую интегрируемую модель (Делл), являющуюся обобщением семейства систем многих тел Калоджеро-Руйсенарса [121, 135] на эллиптическую зависимость от импульсов частиц. Существует две версии данного типа моделей. Первая из них была предложеан и подробно изучена А. Мироновым и А. Морозовым [119]. Её вывод был основан на требовании самодвойственности модели относительно двойственности Рейсенаарса (или p-q двойственности) [134]. Гамильтонианы довольно сложны. Они выражаются в терминах тэта-функций высшего рода, а матрица периодов зависит от динамических переменных. Другой вариант модели Делл предложили П. Коротеев и Ш. Шакиров в [128]. Она близка к классической модели, предложенной ранее Х.В. Брейденем и Т.Дж. Холловудом [118], однако точная связь между ними требует дальнейшего выяснения. Производящая функция квантовых гамильтонианов в этой версии даётся относительно простым выражением, где оба модульных параметра (для эллиптической зависимости от импульса и координаты) являются свободными константами. Другой особенностью формулировки Коротеева-Шакирова является то, что она допускает некоторые алгебраические конструкции, широко известные для семейства интегрируемых систем Калоджеро-Руйсенарса. В частности, в предыдущей главе было показано, что производящая функция гамильтонианов имеет детерминантное представление, а классический $L$-оператор удовлетворяет уравнению Манакова вместо стандартного представления Лакса. Для обеих формулировок коммутативность гамильтонианов еще не доказана, но проверена численно. Найти возможную связь между двумя формулировками модели Делл — интересная открытая проблема.

В этой главе мы имеем дело с формулировкой Коротеева-Шакирова, и наше исследование основано на предположении, что следующие гамильтонианы действительно коммутируют:

$$\hat{H}_n = \hat{\mathcal{O}}_0^{-1}\hat{\mathcal{O}}_n\,, \tag{48}$$

где $\hat{\mathcal{O}}_n$ определены через[7]

$$\hat{\mathcal{O}}(u) = \sum_{n_1,\dots,n_N\in\mathbb{Z}} \omega^{\sum_i \frac{n_i^2-n_i}{2}}(-u)^{\sum_i n_i}\prod_{i<j}^N \frac{\theta_p(t^{n_i-n_j}\frac{x_i}{x_j})}{\theta_p(\frac{x_i}{x_j})}\prod_i^N q^{n_i x_i\partial_i} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u^n\hat{\mathcal{O}}_n\,. \tag{49}$$

В основном мы изучаем вырождение $p\to 0$ системы (49), которая представляет собой систему, аналогичную (в подходе Миронова-Морозова) модели, двойственной к эллиптической системе Рейсенарса-Шнайдера, так что она является эллиптической по импульсам и тригонометрической по координатам (для простоты мы будем чаще всего называть этот случай Делла ($p=0$) просто (ell, trig)-моделью). Вместе с заменой $t$ на $t^{-1}$, $q\leftrightarrow q^{-1}$ и сопряжением функцией $\prod_{i<j}x_ix_j$, предел $p\to 0$ в (49) дает

$$D_N(u) = D_N(u|x_1,\dots,x_N) = \sum_{n_1,\dots,n_N\in\mathbb{Z}} \omega^{\sum_i \frac{n_i^2-n_i}{2}}(-u)^{\sum_i n_i}\prod_{i<j}^N \frac{t^{n_j}x_i - t^{n_i}x_j}{x_i-x_j}\prod_i^N \gamma^{n_i}\,. \tag{50}$$

где мы ввели обозначение

$$\gamma_i = q^{-x_i\partial_i}\,. \tag{51}$$

Еще один тригонометрический предел $\omega\to 0$, примененный к (50), дает (тригонометрические) операторы Макдональда-Рейсенаарса [129]. Тогда производящая функция (50) принимает следующий вид:

$$D_N(u)\Big|_{\omega=0} = \left(\det\left[x_i^{N-j}\right]_{i,j=1}^N\right)^{-1}\det\left[x_i^{N-j}(1-ut^{j-1}\gamma_i)\right]_{i,j=1}^N\,. \tag{52}$$

В предыдущей главе были предложены различные варианты детерминантных представлений для (48)-(49). Здесь мы обощаем другой набор алгебраических конструкций на дважды эллиптический случай (48). Наша конечная цель – описать предел больших $N$ для (ell, trig)-модели. Этот предел широко известен по моделям Калоджеро-Мозера и Руйсенарса-Шнайдера. [113, 131, 137, 132, 133, 125], включая их спиновые обобщения [115]. Пределы бесконечного числа частиц интегрируемых систем интересны для изучения, поскольку они могут быть связаны с теорией представлений бесконечномерных алгебр. Гамильтонианы интегрируемой системы образуют ее подалгебру Картана. Таким образом, их изучение может дать некоторые подсказки о том, как выглядит вся алгебра. Подробности описаны в разделе Обсуждение.

**Цель этой главы** — описать $N\to\infty$ предел (ell, trig)-модели путем построения двухэллиптической версии подхода Данкля-Чередника [**?**] и применение конструкции Назарова-Склянина для $N\to\infty$ предела, который изначально был разработан для тригонометрической модели Рейсенарса-Шнайдера [131]. Для последней модели существует набор $N$ коммутирующих операторов (операторов Чередника)

$$C_i(t,q) = t^{i-1}R_{i,i+1}(t)\dots R_{iN}(t)\gamma_i R_{1,i}(t)^{-1}\dots R_{i-1,i}(t)^{-1}\,, \tag{53}$$

действующих на $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]$, где $R$-операторы имеют вид:

$$R_{ij}(t) = \frac{x_i - tx_j}{x_i-x_j} + \frac{(t-1)x_j}{x_i-x_j}\,\sigma_{ij}\,, \tag{54}$$

а $\sigma_{ij}$ переставляет переменные $x_i$ и $x_j$. Коммутативность операторов Макдональда-Рейсенарса (52) для разных значений спектрального параметра $u$ следует из коммутативности (53) и следующего соотношения между $D_N(u)\Big|_{\omega=0}$ (52) и операторами Чередника (53):

$$D_N(u)\Big|_{\omega=0} = \prod_{i=1}^N(1-uC_i)\,\Big|_{\Lambda_N}\,, \tag{55}$$

[7]Обозначения в (49) стандартны. Они приведены в списке обозначений. В частности, $\omega$ и $p$ — два свободных модулярных параметра, отвечающих за эллиптическую зависимость от импульсов $q^{x_i\partial_i} = \exp(\hbar\partial_{q_i})$ и координат $x_i = e^{q_i}$ соответственно.

где $\Lambda_N \subset \mathbb{C}[x_1, ..., x_N]$ — пространство симметрических функций от переменных $x_1, ..., x_N$.

Производящая функция (52) — та же, что [8] и рассматривалась в [131], где авторы получили $N \to \infty$ предел квантовых гамильтонианов Рейсенарса-Шнайдера (или Макдональда-Рейсенарса). Напомним основные этапы конструкции Назарова-Склянина, поскольку эта глава построена как прямое обобщение их результатов на (ell, trig)-случай (50). Сначала необходимо выразить производящую функцию (52) через ковариантные операторы Чередника, действующие на $\mathbb{C}(x_1, ..., x_N)$:

$$Z_i = \prod_{k \neq i}^{N} \frac{x_i - t x_k}{x_i - x_k} \gamma_i + \sum_{j \neq i}^{N} \frac{(t-1)x_i}{x_i - x_j} \prod_{k \neq i,j}^{N} \frac{x_j - t x_k}{x_j - x_k} \gamma_j \sigma_{ij} \,, \tag{56}$$

$$U_i = (t-1) \prod_{j \neq i} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \gamma_i \,, \tag{57}$$

которые удовлетворяют свойству

$$\sigma Z_i \sigma^{-1} = Z_{\sigma(i)}, \qquad \sigma U_i \sigma^{-1} = U_{\sigma(i)}, \qquad \sigma \in S_N, \tag{58}$$

где в левой части $\sigma$ действует перестановкой переменных $\{x_1, ..., x_N\}$. Тогда производящая функция гамильтонианов Макдональда-Рейсенарса (52) представляется в виде

$$D_N(tu) D_N(u)^{-1}\Big|_{\omega=0} = 1 - u \sum_{i=1}^{N} U_i \, \frac{1}{1 - u Z_i}\Big|_{\Lambda_N} \,, \tag{59}$$

Следующим шагом будет построение обратных пределов для операторов $U_i$ и $Z_i$, где обратный предел равен пределу последовательности

$$\Lambda_1 \leftarrow \Lambda_2 \leftarrow ... \tag{60}$$

с естественным гомоморфизмом (ниже $\Lambda$ — пространство симметрических функций от бесконечного числа переменных)

$$\pi_N : \Lambda \to \Lambda_N \,, \tag{61}$$

отправляющий стандартные базисные элементы $p_n$ из $\Lambda$ в симметричные полиномы Ньютона:

$$\pi_N(p_n) = \sum_{i=1}^{N} x_i^n \,. \tag{62}$$

Наконец, используя (59), можно получить обратный предел для $D_N(tu) D_N(u)^{-1}\Big|_{\omega=0}$.

Наша стратегия состоит в том, чтобы распространить приведенные выше формулы на (ell, trig)-случай. На протяжении всей главы мы будем использовать следующие удобные обозначения. Для любого оператора $A(q,t)$ положим

$$\mathrm{P}\theta_\omega(uA)(q,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \omega^{\frac{n^2-n}{2}} (-u)^n A(q^n, t^n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \omega^{\frac{n^2-n}{2}} (-u)^n A^{[n]}(q,t) \,, \tag{63}$$

хотя бы формально[9]. Также используется обозначение $A^{[n]}(q,t) = A(q^n, t^n)$. В частности, $A^{[1]} = A$.

[8] Чтобы соответствовать обозначениям [131], нужно изменить $u$ на $-u$.

[9] Сходимость таких рядов в этом тексте понимается так же, как в определении тэта-функции, т.е. мы предполагаем $\omega = e^{2\pi\imath\tilde{\tau}}$ и $rmIm(\tilde{\tau}) > 0$.

## 5 Список обозначений эллиптических функций

В дополнение к стандартоному базису в $\mathrm{Mat}_{\tilde N}$ мы также используем [9]

$$T_a = T_{a_1 a_2} = \exp\left(\frac{\pi\imath}{\tilde N}\, a_1 a_2\right) Q^{a_1}\Lambda^{a_2}\,, \quad a=(a_1,a_2)\in \mathbb{Z}_{\tilde N}\times\mathbb{Z}_{\tilde N} \tag{64}$$

построенный с помощью конечномерного представления Группы Гейзенберга

$$Q_{kl}=\delta_{kl}\exp(\frac{2\pi\imath}{\tilde N}k)\,,\quad \Lambda_{kl}=\delta_{k-l+1=0\,\mathrm{mod}\tilde N}\,,\quad Q^{\tilde N}=\Lambda^{\tilde N}=1_{\tilde N\times\tilde N}\,. \tag{65}$$

Имеют место следующие соотношения

$$T_\alpha T_\beta=\kappa_{\alpha,\beta}T_{\alpha+\beta}\,,\quad \kappa_{\alpha,\beta}=\exp\left(\frac{\pi\imath}{\tilde N}(\beta_1\alpha_2-\beta_2\alpha_1)\right)\,, \tag{66}$$

$$\mathrm{tr}(T_\alpha T_\beta)=\tilde N\delta_{\alpha,-\beta}\,, \tag{67}$$

где $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2)$. Оператор перестановки принимает вид

$$P_{12}=\sum_{i,j=1}^{\tilde N}\tilde E_{ij}\otimes\tilde E_{ji}=\frac{1}{\tilde N}\sum_{\alpha\in\,\mathbb{Z}_{\tilde N}\times\mathbb{Z}_{\tilde N}}T_\alpha\otimes T_{-\alpha}\,, \tag{68}$$

где $\tilde E_{ij}$ стандартный базис в $\mathrm{Mat}_{\tilde N}$.

Функция Кронекера определяется в рациональном, тригонометрическом (гиперболическом) и эллиптическом случае следующим образом:

$$\phi(\eta,z)=\left\{\begin{array}{l} 1/\eta+1/z \quad - \quad \text{rational case}\,,\\ \coth(\eta)+\coth(z) \quad - \quad \text{trigonometric case}\,,\\ \frac{\vartheta'(0)\vartheta(\eta+z)}{\vartheta(\eta)\vartheta(z)} \quad - \quad \text{elliptic case}\,. \end{array}\right. \tag{69}$$

В последнем случае тэта-функция является нечетной.

$$\vartheta(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\exp\left(\pi\imath\tau(k+\frac{1}{2})^2+2\pi\imath(z+\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})\right)\,. \tag{70}$$

Аналогично первая (нечетная) функция Эйзенштейна и функция Вейерштрасса $\wp$-function:

$$E_1(z)=\left\{\begin{array}{l} 1/z\,,\\ \coth(z)\,,\\ \vartheta'(z)/\vartheta(z)\,, \end{array}\right. \qquad \wp(z)=\left\{\begin{array}{l} 1/z^2\,,\\ 1/\sinh^2(z)\,,\\ -\partial_z E_1(z)+\frac{1}{3}\frac{\vartheta'''(0)}{\vartheta'(0)}\,. \end{array}\right. \tag{71}$$

Производная

$$E_2(z)=-\partial_z E_1(z) \tag{72}$$

- вторая функция Эйзенштейна. Производная функции Кронекера:

$$f(z,q)\equiv\partial_q\phi(z,q)=\phi(z,q)(E_1(z+q)-E_1(q))\,. \tag{73}$$

Ввиду следующего поведения $\phi(z,q)$ вблизи $z=0$

$$\phi(z,q)=z^{-1}+E_1(q)+z\,(E_1^2(q)-\wp(q))/2+O(z^2)\,. \tag{74}$$

мы также имеем

$$f(0,q) = -E_2(q)\,. \tag{75}$$

Тройное тождество Фэя:

$$\phi(z,q)\phi(w,u) = \phi(z-w,q)\phi(w,q+u) + \phi(w-z,u)\phi(z,q+u). \tag{76}$$

Для уравнений Лакса необходимы следующие вырождения (76)

$$\phi(z,x)f(z,y) - \phi(z,y)f(z,x) = \phi(z,x+y)(\wp(x)-\wp(y))\,, \tag{77}$$

$$\phi(\eta,z)\phi(\eta,-z) = \wp(\eta)-\wp(z) = E_2(\eta)-E_2(z)\,. \tag{78}$$

А также

$$\begin{gathered}\phi(z,q)\phi(w,q) = \phi(z+w,q)(E_1(z)+E_1(w)+E_1(q)-E_1(z+w+q)) = \\ = \phi(z+w,q)(E_1(z)+E_1(w)) - f(z+w,q)\,.\end{gathered} \tag{79}$$

Набор $\tilde{N}^2$ функций

$$\varphi_a^\eta(z) = \exp(2\pi\imath\frac{a_2}{\tilde{N}}\,z)\,\phi(z,\eta+\frac{a_1+a_2\tau}{\tilde{N}})\,, \quad a=(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}_{\tilde{N}}\times\mathbb{Z}_{\tilde{N}} \tag{80}$$

используется в определении [81, 9] эллиптической $R$-матрицы Белавина-Бакстера.

$$R_{12}^\eta(z) = \sum_\alpha T_\alpha\otimes T_{-\alpha}\varphi_\alpha(z,\omega_\alpha+\eta)\,. \tag{81}$$

Классический предел (поведение вблизи $\eta=0$)

$$R_{12}^\eta(z) = \frac{1\otimes 1}{\eta} + r_{12}(z) + \eta\, m_{12}(z) + O(\eta^2) \tag{82}$$

аналогично (74). Классическая $r$-матрица

$$r_{12}(z) = 1\otimes 1E_1(z) + \sum_{\alpha\neq 0} T_\alpha\otimes T_{-\alpha}\varphi_\alpha(z,\omega_\alpha) \tag{83}$$

является кососимметричной из-за (20) или (19). Благодаря (82) приходим к выводу, что

$$F_{12}^0(q) = \partial_q R_{12}^\eta(q)|_{\eta=0} = \partial_q r_{12}(q) = F_{21}^0(-q)\,. \tag{84}$$

Конечное преобразование Фурье для множества функций (80) выглядит следующим образом (см., например, [57]):

$$\frac{1}{\tilde{N}}\sum_\alpha \kappa_{\alpha,\gamma}^2\,\varphi_\alpha(\tilde{N}\eta,\omega_\alpha+\frac{z}{\tilde{N}}) = \varphi_\gamma(z,\omega_\gamma+\eta)\,, \quad \forall\gamma\,. \tag{85}$$

Оно порождается симметрией аргументов (аналогично $\phi(z,q)=\phi(q,z)$)

$$R_{12}^z(q)P_{12} = R_{12}^{q/\tilde{N}}(\tilde{N}z)\,. \tag{86}$$

В частности, (85) приводит к

$$\sum_\alpha E_2(\omega_\alpha+\eta) = \tilde{N}^2E_2(\tilde{N}\eta) \quad \text{or} \quad \sum_\alpha \wp(\omega_\alpha+\eta) = \tilde{N}^2\wp(\tilde{N}\eta) \tag{87}$$

и для $\gamma\neq 0$

$$\sum_\alpha \kappa_{\alpha,\gamma}^2E_2(\omega_\alpha+\eta) = -\tilde{N}^2\varphi_\gamma(\tilde{N}\eta,\omega_\gamma)(E_1(\tilde{N}\eta+\omega_\gamma)-E_1(\tilde{N}\eta)+2\pi\imath\partial_\tau\omega_\gamma)\,. \tag{88}$$

# 6 Формулировка основных результатов

Результаты этой диссертации опубликованы в четырёх статьях:

A. Grekov, A. Zotov, “On R-matrix valued Lax pairs for Calogero–Moser models”, J. Phys. A, 51 (2018), 315202 , 26 pp.,

A. Grekov, A. Zabrodin, A. Zotov, "Supersymmetric extension of qKZ-Ruijsenaars correspondence”, Nuclear Physics B, 2018 ,

Grekov, A. Zotov, "Characteristic determinant and Manakov triple for the double elliptic integrable system"SciPost Phys. 10, 055 (2021) • published 4 March 2021

A. Grekov, A. Zotov, "On Cherednik and Nazarov-Sklyanin large N limit construction for double elliptic integrable system J. High Energ. Phys. 2021, 62 (2021)

## 6.1 Первая часть

В первой части диссертации (которая является продолжением работы А. Грекова, А. Зотова "О R-матрично оцениваемых парах Лакса для моделей Калоджеро-Мозера") рассматриваются $R$-матрично оцениваемые пары Лакса для $N$-тел. модели Калоджеро-Мозера. Одна из них для корневой системы $\mathrm{A}_{N-1}$ была известна ранее. известная ранее [96]. Мы предложили их расширения на другие корневые системы. А именно, мы изучили обобщения модели пары Д’Хокера-Фонга-Лакса [19] для классических корневых систем в в нераскрученном случае. Эти пары Лакса являются блок-матрицами из $2N \times 2N$ или $(2N+1)\times(2N+1)$, причем каждый блок имеет размер $\tilde{N}^r \times \tilde{N}^r$, где $r$ – число квантовых пространств (спиновых участков). Рассматривались две возможности. Первая состоит в том, чтобы сохранить все $2N$ (или $2N+1$) квантовых пространств в $R$-матрицах. Это приводит к парам Лакса парам для случаев $\mathrm{C}_N$ и $\mathrm{BC}_N$. Вторая возможность оставить только половину ($N$ или $N+1$) квантовых пространств. Это приводит к тому, что построению моделей $\mathrm{B}_N$ и $\mathrm{D}_N$ с $\mathrm{GL}_2$ ($\tilde{N} = 2$) с $R$-матрицей Бакстера. Сумма допустимых значений констант связи и числа квантовых пространств в $R$-матриц представлены в таблице ниже (по горизонтали указаны номера квантовых пространств).

| | N | N+1 | 2N | 2N+1 |
|---|---|---|---|---|
| SO(2N) | $g = 0,\ \mu = 0$<br>$\tilde{N} = 2$ | | | |
| SO(2N+1) | | $g = \pm\sqrt{2}\nu,\ \mu = 0$<br>$\tilde{N} = 2$ | | |
| Sp(2N) | | | $g = 0,\ \mu = \nu$<br>$\tilde{N} = \mathrm{any}$ | |
| BC(N) | | | | $g = \pm\nu,\ \mu = \nu$<br>$\tilde{N} = \mathrm{any}$ |

Число спиновых квантовых пространств и значения констант связи констант связи.

Обычные пары Лакса были определены для следующих значений констант связи:
– $\mathrm{SO}_{2N}$: $\mu = 0,\ g = 0$;
– $\mathrm{SO}_{2N+1}$: $\mu = 0,\ g^2 = 2\nu^2$;
– $\mathrm{Sp}_{2N}$: $g = 0$;
– $\mathrm{BC}_N$: $g(g^2 - 2\nu^2 + \nu\mu) = 0$.

В этом отношении наши результаты таковы: матрично-значная $R$ ансац, обобщающий результаты Д'Хокера-Фонга, работает с дополнительными ограничениями. Для случая SO дополнительным условием является $\tilde{N} = 2$, в то время как для случаев $\mathrm{C}_N$ и $\mathrm{BC}_N$ нет никаких ограничения на $\tilde{N}$, но константы должны удовлетворять $\mu = \nu$ вместе с $g = 0$ или $g = \pm\nu$ для $\mathrm{C}_N$ или $\mathrm{BC}_N$ корневых систем соответственно.

Затем мы переходим к квантовым парам Лакса. Краткое резюме состоит в том, что классические $R$-матрично-значные пары Лакса обобщаются на квантовые только для случаев SO из приведенной выше таблицы.

Квантовые пары Лакса естественным образом связаны со спиновыми моделями Калоджеро-Мозера. Соответствующие спиновые обменные операторы $\mathcal{F}^0$ появляются как скалярные части $R$-матрицы-значения $M$-матриц. С другой стороны, эти же операторы могут быть получены из уравнений KZ или KZB. Мы демонстрируем эти соотношения для $\mathrm{sl}_N$ $R$-матрично-значной пары Лакса. Связь между операторно-значными парами Лакса и уравнениями KZ вытекает из дуальности Мацуо-Чередника. Ее квазиклассическая версия обеспечивает так называемую квантово-классическую дуальность между квантовыми спиновыми цепочками (модели Гаудина) и классическими системами многих тел Ruijsenaars-Schneider (Calogero-Moser) типа [64]. В этой главе мы рассмотрим еще один пример квантово-классической связи.

Мы рассматриваем уравнения Лакса для классической модели Калоджеро-Мозера (12)-(14) с $R$-матрично-значными парами Лакса как полуквантовая модель (25), квантовая часть которой описывается оператором спинового обмена, известным ранее как "некоммутативное спиновыми взаимодействиями"[47]. Спиновые переменные квантованы в фундаментальном представлении, в то время как степени свободы частиц свободы остаются классическими. Мы показываем, что классический аналог эллиптического анизотропного оператора спинового обмена происходит из системы типа система типа Хитчина на $\mathrm{SL}_{N\tilde{N}}$-пучке с нетривиальным характеристическим классом на эллиптической кривой. См. предложение 1.2.

В [48] было показано, что оператор спинового обмена $\mathcal{F}^0$ для $\tilde{N} = 2$ сводится к положению равновесия $q_j = j/N$ дает гамильтониан для анизотропного расширения эллипса Иноземцева эллиптической дальнодействующей цепи Иноземцева. Ввиду связи $R$-матрично-значных пар Лакса и систем Хитчина на $\mathrm{SL}(N\tilde{N})$-пучках, мы ожидаем, что эти типы дальнодействующих интегрируемых спиновых цепочек допускают представления Лакса размера размером $N\tilde{N} \times N\tilde{N}$ как на классическом, так и на квантовом уровнях. Они получаются из представлений для взаимодействующих вершин путем заменой $p_j = 0$, $q_j = j/N$. Такая пара Лакса позволяет вычислить высшие гамильтонианы. Эти вопросы обсуждаются в [25].

## 6.2 Вторая часть

Во второй части диссертации (которая следует за работой А. Грекова, А. Забродина, А. Зотова "Суперсимметричное расширение соответствия qKZ-Ruijsenaars") мы доказали суперсимметричную версию соответствия $qKZ$-Ruijsenaars. Рассмотрим супергруппу $GL(N|M)$, с $N + M = K$. Обозначим $\mathbb{C}^{N|M}$ ее фундаментальное представление. И пусть: $\mathcal{V} := (\mathbb{C}^{N|M})^n$. Уравнения qKZ, принимающие значения в $\mathcal{V}$, имеют вид

$$e^{\eta\hbar\partial_{x_i}}\Big|\Phi\Big\rangle = \mathbf{K}_i^{(\hbar)}\Big|\Phi\Big\rangle, \qquad i = 1, \ldots, n\,, \tag{89}$$

где операторы в r.h.s.

$$\mathbf{K}_i^{(\hbar)} = \mathbf{R}_{i\,i-1}(x_i - x_{i-1} + \eta\hbar) \ldots \mathbf{R}_{i1}(x_i - x_1 + \eta\hbar)\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{R}_{in}(x_i - x_n) \ldots \mathbf{R}_{i\,i+1}(x_i - x_{i+1}) \tag{90}$$

построены с помощью квантовой $R$-матрицы $\mathbf{R}$, которая является (унитарным) решением градуированного уравнения Янга-Бакстера.

Операторы $\mathbf{K}_i^{(\hbar)}$ коммутируют с набором операторов:

$$\mathbf{M}_a = \sum_{i=1}^{n} e_{aa}^{(i)} \tag{91}$$

где $e_{ab}$ - стандартный базис в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{N|M})$. Поэтому с этого момента мы будем ограничивать наше qKZ-уравнение подпространством $\mathcal{V}(\{M_a\})$ с фиксированными собственными значениями $M_a$ операторов $\mathbf{M}_a$.

Мы начнем с рационального случая:

**Theorem 6.1.** *Пусть*

$$\mathbf{R}_{ij}(x) = \frac{x\mathbf{I} + \eta \mathbf{P}_{ij}}{x+\eta}, \tag{92}$$

*где* $\mathbf{P}_{ij}$ *- оператор градуированной перестановки:*

$$P_{12}(e_a \otimes e_b) = (-1)^{p(a)p(b)}(e_b \otimes e_a) \tag{93}$$

*для 2 векторов* $e_a$, $e_b$ *с соотношениями* $\mathsf{p}(a), \mathsf{p}(b)$.
*Рассмотрим ковектор* $\Big\langle \Omega \Big| \in \mathcal{V}^*$, *такой, что:*

$$\Big\langle \Omega \Big| P_{ij} = \Big\langle \Omega \Big| \qquad \forall\, i,j = 1,...,n \tag{94}$$

*И определите:*

$$\Psi = \Big\langle \Omega \Big| \Phi \Big\rangle \tag{95}$$

*Тогда:*

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \prod_{j\neq i}^{n} \frac{x_i - x_j + \eta}{x_i - x_j} \right) e^{\eta \hbar \partial_{x_i}} \Psi = \left( \sum_{a=1}^{N+M} g_a M_a \right) \Psi \,,$$

*где:*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)} = \sum_{a=1}^{N+M} g_a \mathbf{M}_a, \tag{96}$$

В тригонометрическом случае мы имеем следующее:

**Theorem 6.2.** *Пусть:*

$$\mathbf{R}_{12}(x) = \mathbf{P}_{12} + \frac{\sinh x}{\sinh(x+\eta)} \Big( \mathbf{I} - \mathbf{P}_{12}^q \Big) + \mathbf{G}_{12}^+ \,, \tag{97}$$

*где* $q = e^{\eta}$, *а* $\mathbf{P}_{12}^q$ *- квантовый градуированный оператор перестановки:*

$$\mathbf{P}_{12}^q = \sum_{a=1}^{N+M} (-1)^{\mathsf{p}(a)} e_{aa} \otimes e_{aa} + q \sum_{a>b}^{N+M} (-1)^{\mathsf{p}(b)} e_{ab} \otimes e_{ba} + q^{-1} \sum_{a<b}^{N+M} (-1)^{\mathsf{p}(b)} e_{ab} \otimes e_{ba} \tag{98}$$

*и*

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{12}^+ = \sum_{a=1}^{N+M} \Big( & \frac{\sinh(x+\eta - 2\eta \mathsf{p}(a))}{\sinh(x+\eta)} - (-1)^{\mathsf{p}(a)} + \\ & + \frac{\sinh(x)}{\sinh(x+\eta)} ((-1)^{\mathsf{p}(a)} - 1) \Big) e_{aa} \otimes e_{aa} \\ & = 2 \sum_{a \in \mathfrak{F}} \frac{(\cosh \eta - 1) \sinh x}{\sinh(x+\eta)} \, e_{aa} \otimes e_{aa} \end{aligned} \tag{99}$$

*или*

$$\mathbf{G}_{12}^{+} = \sum_{a=1}^{N+M} \mathbf{G}_a^{+}\, e_{aa} \otimes e_{aa}\,, \qquad \mathbf{G}_a^{+} = \frac{(1-(-1)^{\mathsf{p}(a)})(\cosh\eta - 1)\sinh x}{\sinh(x+\eta)}\,. \tag{100}$$

*Определим ковектор* $\Big\langle \Omega_q \Big| \in \mathcal{V}^*$*, такой, что:*

$$\Big\langle \Omega_q \Big| \mathbf{P}_{i,i-1}^{q} = \Big\langle \Omega_q \Big| \tag{101}$$

*тогда для:*

$$\Psi = \Big\langle \Omega_q \Big| \Phi \Big\rangle \tag{102}$$

*имеем:*

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \prod_{j\neq i}^{n} \frac{\sinh(x_i - x_j + \eta)}{\sinh(x_i - x_j)} \right) e^{\eta\hbar\partial_{x_i}} \Psi \;=\; \left( \sum_{a=1}^{N+M} g_a \frac{\sinh(\eta M_a)}{\sinh\eta} \right) \Psi\,. \tag{103}$$

## 6.3 Третья часть

В третьей части диссертации (которая следует работе Grekov, A. Zotov, "Characteristic determinant and Manakov triple for the double elliptic integrable system"), используя гамильтонианы (49), мы строим обобщение детерминантного оператора Макдональда для системы Делла и изучаем его приложения.

Мы используем слегка модифицированную и расширенную версию производящей функции $\hat{\mathcal{O}}'(z,\lambda)$ (49), которая зависит от дополнительного спектрального параметра $z$ и генерирует эквивалентную[10] серию операторов $\hat{\mathcal{O}}'_k$:

$$\begin{gathered} \hat{\mathcal{O}}'(z,\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\vartheta(z-k\eta)}{\vartheta(z)} \lambda^k \hat{\mathcal{O}}'_k = \\ = \sum_{n_1,\dots,n_N\in\mathbb{Z}} \frac{\vartheta(z-\eta\sum_{i=1}^N n_i)}{\vartheta(z)} \omega^{\sum_i \frac{n_i^2-n_i}{2}} (-\lambda)^{\sum_i^N n_i} \prod_{i<j}^{N} \frac{\vartheta(q_i-q_j+\eta(n_i-n_j))}{\vartheta(q_i-q_j)} \prod_{i}^{N} e^{n_i\hbar\partial_{q_i}}\,. \end{gathered} \tag{104}$$

Данная часть диссертации построена следующим образом.

В **Разделе 15** мы выводим выражение для обобщенного определителя Макдональда:

$$\hat{\mathcal{O}}'(z-Nq_0,\lambda) = \frac{1}{\det\Xi(z)} \det_{1\le i,j\le N} \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-\lambda)^n \omega^{\frac{n^2-n}{2}} \Xi_i(q_j+n\eta,z) e^{n\hbar\partial_{q_j}} \Big\}\,, \tag{105}$$

где $q_0$ — координата центра масс. Детерминант хорошо определен так как столбцы матрицы коммутируют. Точный вид матрицы $\Xi_{ij} = \Xi_i(q_j,z)$ см. (в приложение к основному тексту).

В **Разделе 16** мы выражаем производящую функцию (104) через матрицу Лакса модели Рейсенаарса-Шнайдера:

$$\hat{\mathcal{O}}'(z,\lambda) =: \det_{1\le i,j\le N} \Big\{ \hat{\mathcal{L}}^{\mathrm{Dell}}_{ij}(z,\lambda\,|\,q,t\,|\,\tau,\omega) \Big\} :\,, \tag{106}$$

где

$$\hat{\mathcal{L}}^{\mathrm{Dell}}_{ij}(z,\lambda\,|\,q,t\,|\,\tau,\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \omega^{\frac{k^2-k}{2}} (-\lambda)^k \hat{L}^{RS}_{ij}(z\,|k\eta,k\hbar\,|\tau) \tag{107}$$

а нормальное упорядочение определено в основной части рукописи. Также описаны тригонометрический и рациональный пределы (для координатной зависимости) (104)-(107).

[10] Details связи между $\hat{\mathcal{O}}'_k$ и $\hat{\mathcal{O}}_k$ приведены в аппендиксе основного текста.

В **Раздел 17** изучается проблема собственных значений оператора $\hat{\mathcal{O}}(u)$ (49) в (координатном) тригонометрическом пределе $p=0$, что соответствует двойственному эллиптическому пределу Рейсенаарса [11], и сравниваем наши результаты с известными в литературе [?, ?].

Основное утверждение здесь следующее: Операторы $\hat{\mathcal{O}}(u)$ в пределе $p=0$ для разных $u$ могут быть одновременно приведены к верхнетреугольному виду в некотором базисе, их собственные значения обозначены диаграммами Юнга $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_N)$ и равны:

$$E(u)_\lambda=\prod_{i=1}^{N}\theta_\omega(ut^{N-i}q^{\lambda_i})\,. \tag{108}$$

**В разделе 18** мы изучаем классический предел системы Делл. Используя классический аналог $\mathcal{L}(z,\lambda)$ (107) мы покажем, что $L$-матрица

$$L(z,\lambda)=\mathcal{L}(z,1)^{-1}\mathcal{L}(z,\lambda)\in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C}) \tag{109}$$

удовлетворяет уравнению тройки Манакова [?, 124] (вместо уравнения Лакса):

$$\dot{L}=[L,A]+BL\,,\quad \mathrm{tr}B=0\,. \tag{110}$$

Законы сохранения порождаются только функцией $\det L(z,\lambda)$. Она сводится к выражению спектральной кривой модели Рейсенарса-Шнайдера в пределе $\omega\to 0$.

В **Разделе 19** мы описываем факторизованную структуру для $L$-матрицы (109) $L(z,\lambda)$. Вплоть до незначительной модификации она представлена в виде аналогичном эллиптической функции Кронекера[12] (см. приложение к основному тексту):

$$\begin{gathered}\check{L}(z,\lambda|\tau,\tilde{\tau})=\Phi[G(z,\tau),u|\tilde{\tau}]:=\frac{\vartheta'(0|\tilde{\tau})}{\vartheta(u|\tilde{\tau})}\Big[\vartheta(-\,\mathrm{ad}_{N\eta\partial_z}|\tilde{\tau})\,G(z,\tau)\Big]^{-1}\vartheta(u-\,\mathrm{ad}_{N\eta\partial_z}|\tilde{\tau})\,G(z,\tau)\,,\\ u=\log(\lambda)\,,\quad G(z,\tau)=g(z,\tau)\exp\Big(\frac{z}{Nc\eta}\,\mathrm{diag}(p_1,...,p_N)\Big)\in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})\,,\end{gathered} \tag{111}$$

тем самым обобщая классическую версию факторизации (46) на двойной эллиптический случай. Эллиптический модуль $\tilde{\tau}$ входит как $\omega=e^{2\pi\imath\tilde{\tau}}$. Он отвечает за эллиптичность импульсов, а $\tau$ контролирует эллиптичность положений частиц.

Также мы описываем связь $L$-матрицы с операторами Лакса Склянина и предлагаем ее квантование в терминах эллиптической квантовой $R$-матрицы в фундаментальном представлении $\mathrm{GL}_N$.

В конце главы обсуждаются возможные применения полученных результатов и планы на будущее. Приложения содержат определения и свойства эллиптических функций, описание сплетающих матриц $\Xi$, вычисления $\mathrm{GL}_2$-примеров и связи между различными формами производящих функций.

## 6.4 Четвёртая часть

В четвертой части диссертации (следуюя за статье A. Grekov, A. Zotov, "On Cherednik and Nazarov-Sklyanin large N limit construction for double elliptic integrable system") изучается предел бесконечного числа частиц для (ell, trig) члена семейства систем многих тел Калоджеро-Руйсенарса. Глава организована следующим образом.

В **Раздел 26** мы вводим (ell, trig) версию операторов Чередника (53), действующих в пространстве $\mathbb{C}[x_1,...,x_N]$:

$$\mathrm{P}\theta_\omega(uC_i)=\;=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\omega^{\frac{n^2-n}{2}}(-u)^n t^{n(i-1)}R_{i,i+1}(t^n)...R_{iN}(t^n)\gamma_i^n R_{1,i}(t^n)^{-1}\dots R_{i-1,i}(t^n)^{-1}\,, \tag{112}$$

[11]Терминология, подобная двойственной эллиптической модели Руйсенаарса (или Калоджеро), взята из описания Мироновым-Морозовым модели Делла, основанной на p-q дуальности. Здесь и далее мы используем его, подразумевая тригонометрический (или рациональный) $p=0$ предел (49), хотя его связь с p-q-двойственностью требует выяснения.

[12]Она используется в широко известные пары Лакса со спектральным параметром [95, 135] в системах многих тел.

где $R_{ij}(t)$ определяется выражением (54), а $u$ — спектральный параметр. Эти операторы не коммутируют друг с другом. Однако мы доказываем следующую связь между (112) и $D_N(u)$ (50):

$$D_N(u) = \prod_{i=1}^{N} \mathrm{P}\theta_\omega(uC_i)\Big|_{\Lambda_N} = \mathrm{P}\theta_\omega(uC_1)...\mathrm{P}\theta_\omega(uC_N)\Big|_{\Lambda_N}. \tag{113}$$

Это (ell, trig) версия соотношения (55). Порядок операторов в приведенном выше произведении важен. В дальнейшем произведение некоммутирующих операторов понимается так, как оно задано в правой части (113).

В **Разделе 27** используется ковариантная версия операторов Чередника (56)

$$\mathrm{P}\theta_\omega(uZ_i) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega^{\frac{n^2-n}{2}}(-u)^n \left[\prod_{k\neq i} \frac{x_i - t^n x_k}{x_i - x_k}\gamma_i^n + \sum_{j\neq i} \frac{(t^n-1)x_i}{x_i - x_j} \prod_{k\neq i,j} \frac{x_j - t^n x_k}{x_j - x_k}\gamma_j^n \sigma_{ij}\right] \tag{114}$$

и вспомогательные ковариантные операторы

$$\mathrm{P}\theta_\omega(uU_i) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega^{\frac{n^2-n}{2}}(-u)^n (t^n-1) \prod_{k\neq i} \frac{x_i - t^n x_k}{x_i - x_k}\gamma_i^n \tag{115}$$

мы докажем следующий аналог (59):

$$I_N(u) := D_N(ut)D_N(u)^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}\theta_\omega(uU_i)\frac{1}{\mathrm{P}\theta_\omega(uZ_i)}\Big|_{\Lambda_N}. \tag{116}$$

В **Разделе 28** представлена матричная резольвента конструкции. А именно, рассмотрим $N\times N$ матрицу $\mathcal{Z}$ с элементами

$$\mathcal{Z}_{ii} = \Big(\prod_{l\neq i} \frac{x_i - tx_l}{x_i - x_l}\Big)\gamma_i \tag{117}$$

$$\mathcal{Z}_{ij} = \frac{(t-1)x_j}{x_i - x_j}\Big(\prod_{l\neq i,j} \frac{x_i - tx_l}{x_i - x_l}\Big)\gamma_j \qquad \text{for } i\neq j\,. \tag{118}$$

Это матрица Лакса тригонометрической квантовой модели Рейсенарса-Шнайдера. Вместе с вектор-столбцом

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{119}$$

и вектор-строкой

$$\mathrm{P}\theta_\omega(u\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} \mathrm{P}\theta_\omega(uU_1) & \dots & \mathrm{P}\theta_\omega(uU_N) \end{bmatrix} \tag{120}$$

она кодирует производящую функцию гамильтонианов (ell, trig)-модели следующим образом:

$$I_N(u) = D_N(ut)D_N(u)^{-1} = 1 + \mathrm{P}\theta_\omega(u\mathcal{U})\mathrm{P}\theta_\omega(u\mathcal{Z})^{-1}\mathcal{E}\,\Big|_{\Lambda_N}. \tag{121}$$

В **разделах 29** и **30** мы описываем обобщение $N\to\infty$ предельной конструкции Назарова-Склянина для гамильтонианов (ell, trig)-модели и ковариантных операторов Чередника.

Распространим гомоморфизм (61) на пространство $\Lambda[w]$ многочленов формальной переменной $w$ с коэффициентами из $\Lambda$ следующим образом:

$$\begin{gathered} \tau_N(p_n) = \pi_N(p_n)\,, \quad \tau_N:\ \Lambda[w]\to\Lambda_N\,, \\ \tau_N(w) = t^N\,. \end{gathered} \tag{122}$$

Пусть $I(u)$ — оператор $\Lambda \to \Lambda[w]$, удовлетворяющий

$$I_N(u)\pi_N = \tau_N I(u)\,. \tag{123}$$

Подробности см. в (**??**). Тогда основной результат этих двух разделов состоит в следующем. Оператор

$$\mathcal{I}(u) = \frac{\theta_\omega(u)}{\theta_\omega(uw)} I(u)$$

не зависит от $w$, отображая тем самым пространство $\Lambda$ в себя. Он имеет форму:

$$\mathcal{I}(u) = \theta_\omega(u)\Big[\theta_\omega(u) + \mathrm{P}\theta_\omega(uY\beta) - \mathrm{P}\theta_\omega(uY\alpha)\mathrm{P}\theta_\omega(uX\alpha)^{-1}\mathrm{P}\theta_\omega(uX\beta)\Big]^{-1}, \tag{124}$$

где операторы $\alpha^{[n]}, \beta^{[n]}, X^{[n]}, Y^{[n]}$ определяются в основном тексте.

В **Разделе 31** выражения для операторов $\alpha^{[n]}, \beta^{[n]}, X^{[n]}, Y^{[n]}$ представлены в более явной форме. Эти операторы определяют производящую функцию гамильтонианов $N \to \infty$. Мы доказываем, что эти гамильтонианы коммутируют, если коммутируют гамильтонианы Шакирова-Коротеева[13].

В **Раздел 32** мы записываем явный вид первых нескольких нетривиальных $N \to \infty$ гамильтонианов до первого порядка по $\omega$. Производящая функция равна:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1 - u + \omega(u^2 - u^{-1})}{1 - u - uJ(u) + \omega K(u)} + O(\omega^2)\,, \tag{125}$$

где $J(u)$ и $K(u)$ введены в основном тексте. Также как и формулы для первого и второго гамильтонианов до первого порядка по $\omega$. В пределе $\omega = 0$ наш ответ (125) воспроизводит результат Назарова-Склянина [131]:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1 - u}{1 - u - uJ(u)}\,. \tag{126}$$

В **Раздел 33** мы также непосредственно проверяем, что первый и второй гамильтонианы коммутируют друг с другом вплоть до первого порядка по $\omega$.

# Список литературы


[1] Mironov, A., and A. Morozov. "Double elliptic systems: Problems and perspectives."arXiv preprint hep-th/0001168 (2000).

[2] Levin, A., M. Olshanetsky, and A. Zotov. "Planck constant as spectral parameter in integrable systems and KZB equations."Journal of High Energy Physics 2014.10 (2014): 1-29.

[3] Zabrodin, A., and A. Zotov. "QKZ–Ruijsenaars correspondence revisited."Nuclear Physics B 922 (2017): 113-125.

[4] Matsuo, Atsushi. "Integrable connections related to zonal spherical functions."Inventiones mathematicae 110.1 (1992): 95-121.

[5] A. Antonov, K. Hasegawa, A. Zabrodin, Nucl. Phys. B503 (1997) 747–770; hep-th/9704074.

[6] M.F. Atiyah, Proceedings of the London Mathematical Society, s3-7 (1957) 414-452.

[7] J. Avan, O. Babelon, E. Billey, Commun. Math. Phys. 178 (1996) 281–300; hep-th/9505091.

[8] R.J. Baxter, Ann. Phys. 70 (1972) 193–228.


[13] Еще раз подчеркнем, что коммутативность гамильтонианов Делла (48) является гипотезой, проверенной численно.

[9] A.A. Belavin, Nucl. Phys. B, 180 (1981) 189–200.

[10] D. Bernard, M. Gaudin, F.D.M. Haldane, V. Pasquier, J. Phys. A: Math. Gen. 26 (1993) 5219–5236.

[11] D. Bernard, V. Pasquier, D. Serban, EPL 30 (1995) 301; hep-th/9501044.

[12] E. Billey, J. Avan, O. Babelon, Physics Letters A, 186 (1994) 114–118; hep-th/9312042.
E. Billey, J. Avan, O. Babelon, Physics Letters A, 188 (1994) 263–271; hep-th/9401117.

[13] A.J. Bordner, E. Corrigan, R. Sasaki, Prog. Theor. Phys. 100 (1998) 1107-1129; hep-th/9805106.
A.J. Bordner, E. Corrigan, R. Sasaki, Prog. Theor. Phys. 102 (1999) 499-529; hep-th/9905011.

[14] A.J. Bordner, N.S. Manton, R. Sasaki, Prog. Theor. Phys. 103 (2000) 463–487; hep-th/9910033.

[15] F. Calogero, J. Math. Phys. 10 (1969) 2191–2196.
F. Calogero, J. Math. Phys. 12 (1971) 419–436.
B. Sutherland, Physical Review A, 4:5 (1971) 2019–2021.
B. Sutherland, Physical Review A, 5:3 (1972) 1372–1376.
J. Moser, Advances in mathematics 16 (1975) 197–220.

[16] I. Cherednik, Advances in Mathematics, 106 (1994) 65–95.

[17] I.V.Cherednik, Theoret. and Math. Phys. 43 (1980) 356-358.

[18] I. Cherednik, Mathematical Society of Japan Memoirs, 1, (1998) 1-96.

[19] E. D' Hoker, D.H. Phong, Nuclear Physycs B 530 (1998) 537–610; hep-th/9804124.

[20] L. Feher, B.G. Pusztai Lett. Math. Phys. 79 (2007) 263–277; arXiv:math-ph/0609085.
L. Fehér, C. Klimcik, Lett. Math. Phys. 87 (2009) 125–138; arXiv:0809.1509 [math-ph].
O. Chalykh, arXiv:1804.01766 [math.QA].

[21] G. Felder, A. Veselov, Commun. Math. Phys. 160 (1994) 259–273.
A. Zabrodin, A. Zotov, J. Phys. A: Math. Theor. 50 (2017) 205202; arXiv:1701.06074 [math-ph].

[22] F. Finkel, D. Gomez-Ullate, A. Gonzalez-Lopez, M.A. Rodriguez, R. Zhdanov, Commun. Math. Phys. 221 (2001) 477-497; hep-th/0102039.
F. Finkel, D. Gomez-Ullate, A. Gonzalez-Lopez, M.A. Rodriguez, R. Zhdanov, Nucl. Phys. B613 (2001) 472–496; hep-th/0103190.
J.C. Barba, F. Finkel, A. Gonzalez-Lopez, M.A. Rodriguez, Phys. Rev. B 77 (2008) 214422(10).

[23] S. Fomin, A.N. Kirillov, Advances in geometry; Progress in Mathematics book series, Vol. 172 (1999) 147–182.
M. Aguiar, Contemporary Mathematics 267 (2000) 1-29.

[24] J. Gibbons, T. Hermsen, Physica D: Nonlinear Phenomena, 11 (1984) 337–348;
S. Wojciechowski, Physics Letters A, 111 (1985) 101–103.

[25] A. Grekov, I. Sechin, A. Zotov, *Interacting integrable tops and long-range spin chains*, to appear.

[26] A. Gorsky, A. Zabrodin, A. Zotov, JHEP 01 (2014) 070; arXiv:1310.6958 [hep-th].
Z. Tsuboi, A. Zabrodin, A. Zotov, JHEP 05 (2015) 086; arXiv:1412.2586 [math-ph].
M. Beketov, A. Liashyk, A. Zabrodin, A. Zotov, Nuclear Physics B, 903 (2016) 150–163; arXiv:1510.07509 [math-ph].

[27] K. Hikami, M. Wadati, J. Phys. Soc. Jpn. 62 (1993) 469–472.

[28] K. Hikami, M. Wadati, Physics Letters A, 173 (1993) 263–266.

[29] N. Hitchin, Duke Math. J., 54:1 (1987), 91–114.

[30] V.I. Inozemtsev, Lett. Math. Phys. 17 (1989) 11–17.

[31] V.I. Inozemtsev, Journal of Statistical Physics, 59 (1990) 1143-1155.

[32] V.I. Inozemtsev, R. Sasaki, J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001) 7621–7632; arXiv:hep-th/0105164.

[33] V. Knizhnik, A. Zamolodchikov, Nuclear Physics B 247 (1984) 83–103.
D. Bernard, Nucl. Phys. B303 (1988) 77–93.

[34] I. Krichever, Funct. Anal. Appl., 14:4 (1980) 282–290.

[35] P.P. Kulish, E.K. Sklyanin, Journal of Soviet Mathematics, 19 (1982) 1596-1620.

[36] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, JHEP 10 (2014) 109; arXiv:1408.6246 [hep-th].

[37] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, Theoret. and Math. Phys. 184:1 (2015) 924–939; arXiv:1501.07351 [math-ph].

[38] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, J. Phys. A: Math. Theor. 49:39 (2016) 395202; arXiv:1603.06101 [math-ph].

[39] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Smirnov, A. Zotov, Commun. Math. Phys., 316 (2012) 1–44; arXiv:1006.0702 [math-ph].
A. Levin, M. Olshanetsky, A. Smirnov, A. Zotov, J. Geom. Phys., 62:8 (2012) 1810–1850; arXiv:1007.4127 [math-ph].
A. Levin, M. Olshanetsky, A. Smirnov, A. Zotov, J. Phys. A: Math. Theor. 46:3 (2013) 035201; arXiv:1208.5750 [math-ph]

[40] A. Matsuo, Inventiones Mathematicae, 110 (1992) 95–121.

[41] N. Nekrasov, Commun. Math. Phys., 180 (1996), 587–603; hep-th/9503157.
A. Gorsky, N. Nekrasov, Nucl. Phys. B414 (1994) 213–238; hep-th/9304047.
A. Levin, M. Olshanetsky, Commun. Math. Phys. 188 (1997) 449–466.

[42] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, Inventiones mathematicae, 37:2 (1976) 93-108.
M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, Physics Reports, 71 (1981) 313–400.

[43] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, Lett. Math. Phys., 2 (1977) 7–13.
M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, Physics Reports, 94 (1983) 313–404.

[44] A. Polishchuk, Advances in Mathematics 168:1 (2002) 56 -95.

[45] A. Polishchuk, Commun. Math. Phys. 247 (2004) 527 -551; arXiv:math/0001048 [math.AG].

[46] A.P. Polychronakos, Phys.Rev.Lett. 69 (1992) 703–705; hep-th/9202057.
J.A. Minahan, A.P. Polychronakos, Phys. Lett. B302 (1993) 265–270; hep-th/9206046.

[47] A.P. Polychronakos, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 126403; hep-th/0112141.
A.P. Polychronakos, Nucl. Phys. B543 (1999) 485–498; hep-th/9810211.
A.P. Polychronakos, J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006) 12793; hep-th/0607033.

[48] I. Sechin, A. Zotov, Physics Letters B, 781 (2018) 1–7; arXiv:1801.08908 [math-ph].

[49] E.K. Sklyanin, J. Phys. A: Math. Gen. 21 (1988) 2375.

[50] A. Smirnov, Cent. Eur. J. Phys. 8 (4) (2010) 542554; arXiv:0903.1466 [math-ph].
A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, JHEP 07 (2014) 012; arXiv:1405.7523 [hep-th].

[51] H. Ujino, M. Wadati, K. Hikami, J. Phys. Soc. Jpn. 62, (1993) 3035–3043.

[52] A. Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag, (1976).

[53] T. Yamamoto, Physics Letters A 208 (1995) 293–302; cond-mat/9508012.

[54] C.N. Yang, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1312–1315.

[55] A.V. Zotov, A.M. Levin, Theoret. and Math. Phys. 146:1 (2006) 45-52.
A.V. Zotov, A.V. Smirnov, Theoret. and Math. Phys., 177:1 (2013), 1281-1338.

[56] A. Zotov, Theoret. and Math. Phys. 189:2 (2016) 1554–1562; arXiv:1511.02468 [math-ph].

[57] A. Zotov, Modern Physics Letters A, 32 (2017) 1750169; arXiv:1706.05601 [math-ph].

[58] A. Alexandrov, V. Kazakov, S. Leurent, Z. Tsuboi, A. Zabrodin, JHEP 09 (2013) 064; arXiv:1112.3310.

[59] M. Beketov, A. Liashyk, A. Zabrodin, A. Zotov, Nucl. Phys. B, B903 (2016) 150-163; arXiv:1510.07509.

[60] V.V Bazhanov, A.G. Shadrikov, Theoret. and Math. Phys., 73:3 (1987) 1302-1312.
S. Belliard, E. Ragoucy, J. Phys. A 41 (2008) 295202, arXiv:0804.2822.

[61] F. Calogero, J. Math. Phys. 12 (1971) 419–436.
B. Sutherland, Physical Review A, 4:5 (1971) 2019–2021.
B. Sutherland, Physical Review A, 5:3 (1972) 1372–1376.

[62] D. Gaiotto, P. Koroteev, JHEP 05 (2013) 126; arXiv:1304.0779.
P. Koroteev, A.M. Zeitlin, arXiv:1802.04463.

[63] M. Gaudin, J. de Phys. 37:10 (1976) 1087–1098.

[64] A. Gorsky, A. Zabrodin, A. Zotov, JHEP 01 (2014) 070; arXiv:1310.6958.

[65] V. Knizhnik, A. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B247 (1984) 83–103.

[66] P. Kulish, E. Sklyanin, Zap. Nauchn. Sem. LOMI 95 (1980) 129–160; Engl. transl.: J. Soviet Math. 19 (1982) 1956.
P. Kulish, Zap. Nauchn. Sem. LOMI 145 (1985), 140–163.
J. H. H. Perk, C. L. Schultz, Phys. Lett. A 84 (1981) 407–410.

[67] G. Felder, A. Veselov, Commun. Math. Phys. 160 (1994) 259–273.
A. Veselov, Theoret. and Math. Phys., 98:3 (1994) 368-376.

[68] I. Frenkel, N. Reshetikhin, Commun. Math. Phys. 146 (1992) 1–60.

[69] A. Matsuo, Inventiones Mathematicae, 110 (1992) 95–121.
I. Cherednik, Advances in Mathematics, 106 (1994) 65–95.

[70] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, SIGMA 8 (2012) 072 (11 pages), arXiv:1201.3990.

[71] S.N.M. Ruijsenaars, H. Schneider, Ann. Phys. 146 (1986) 1–34.
S.N.M. Ruijsenaars, Commun. Math. Phys. 110 (1987) 191–213.

[72] V. Tarasov, A. Varchenko, St.Petersburg Math. J. 6 (1994) 275–313, arXiv:hep-th/9311040.
V. Tarasov, A. Varchenko, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 174 (1996) 235–273, arXiv:hep-th/9406060.

[73] Z. Tsuboi, A. Zabrodin, A. Zotov, JHEP 05 (2015) 086; arXiv:1412.2586.

[74] C.N. Yang, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1312–1315.

[75] A. Zabrodin, A. Zotov, J. Phys. A: Math. Theor. 50 (2017) 205202; arXiv:1701.06074.

[76] A. Zabrodin, A. Zotov, Nucl. Phys. B 922 (2017) 113–125; arXiv:1704.04527.

[77] L.F. Alday, Y. Tachikawa, Lett. Math. Phys. 94 (2010) 87–114; arXiv:1005.4469 [hep-th].

[78] G. Aminov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zotov, Physics Letters B726 (2013) 802-808; arXiv:1307.1465.
G. Aminov, H.W. Braden, A. Mironov, A. Morozov, A. Zotov, JHEP 01 (2015) 033; arXiv:1410.0698.
G. Aminov, A. Mironov, A. Morozov, JHEP 11 (2017) 023; arXiv:1709.04897 [hep-th].

[79] H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, A. Morozov, JHEP 04 (2020) 212; arXiv:1912.12897 [hep-th].

[80] H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, A. Morozov, arXiv:2005.10563 [hep-th].

[81] R.J. Baxter, Ann. Phys. 70 (1972) 193–228.
A.A. Belavin, Nucl. Phys. B, 180 (1981) 189–200.
M.P. Richey, C.A. Tracy, J. Stat. Phys. 42 (1986) 311–348.

[82] R.J. Baxter, Ann. Phys. 76 (1973) 25—47.
M. Jimbo, T. Miwa, M. Okado, Nucl. Phys. B300 [FS22] (1988) 74–108.
V. Pasquier, Commun. Math. Phys., 118 (1988) 355–364.
J. Balog, L. Dabrowski, L. Fehér, Phys. Lett. B, 224:2 (1990) 227-–234.
A. Antonov, K. Hasegawa, A. Zabrodin, Nucl. Phys. B503 (1997) 747–770; hep-th/9704074.
G. Aminov, S. Arthamonov, A. Smirnov, A. Zotov, J. Phys. A: Math. Theor. 47 (2014) 305207; arXiv:1402.3189. [hep-th].

[83] H. Braden, A. Gorsky, A. Odesskii, V. Rubtsov, Nuclear Physics B 633 (2002) 414–442; arXiv:hep-th/0111066.

[84] H.W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, Nuclear Physics B 573 (2000) 553–572; hep-th/9906240.
V. Fock, A. Gorsky, N. Nekrasov, V. Rubtsov, JHEP 0007 (2000) 028; arXiv:hep-th/9906235.
A. Mironov, A. Morozov, Physics Letters B 475 (2000) 71–76; arXiv:hep-th/9912088.
A. Mironov, A. Morozov, arXiv:hep-th/0001168
A. Mironov, arXiv:hep-th/0011093.
A. Gorsky, A. Mironov, arXiv:hep-th/0011197.
A. Mironov, Theoret. and Math. Phys., 129:2 (2001) 1581-–1585; arXiv:hep-th/0104253.
A. Mironov, A. Morozov, Physics Letters B 524 (2002) 217–226; arXiv:hep-th/0107114.
A. Mironov, Theoret. and Math. Phys., 135:3 (2003) 814-–827; arXiv:hep-th/0205202.
H.W. Braden, T.J. Hollowood, JHEP 0312 (2003) 023; arXiv:hep-th/0311024.

[85] F. Calogero, Lett. Nuovo Cim. 13 (1975) 411–416.
F. Calogero, Lett. Nuovo Cim. 16 (1976) 77–80.
J. Moser, Adv. Math. 16 (1975) 1–523.
B. Sutherland, Physical Review A, 4:5 (1971) 2019–2021.
M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, Inventiones mathematicae, 37 (1976) 93–108.

[86] I.V. Cherednik, *Double Affine Hecke Algebras*, Cambridge University Press (2005).

[87] P. Etingof, A. Kirillov Jr., Mathematical Research Letters, 1 (1994) 279-–296; arXiv:hep-th/9312103.

[88] L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Springer-Verlag, (1987).

[89] L. Feher, I. Marshall, Journal of Physics A: Math. and Theor. 50 (2017) 314004; arXiv:1702.06514 [math-ph].

O. Chalykh, Commun. Math. Phys. 369 (2019) 261–316; arXiv:1804.01766 [math.QA].

[90] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, Phys.Lett. B355 (1995) 466–474; arXiv:hep-th/9505035.

[91] A. Grekov, A. Zotov, arXiv:2102.06853 [math-ph].

[92] K. Hasegawa, Commun. Math. Phys. 187 (1997) 289–325; arXiv:q-alg/9512029.

[93] K. Hasegawa, J. Phys. A: Math. Gen. 26 (1993) 3211-–3228.

K. Hasegawa, Journal of Mathematical Physics 35(1994) 6158.

[94] P. Koroteev, Sh. Shakirov, Lett. Math. Phys. 110 (2020) 969–999; arXiv:1906.10354 [hep-th].

[95] I.M. Krichever, Funct. Anal. Appl., 14:4 (1980) 282–290.

[96] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, Commun. Math. Phys. 236 (2003) 93–133; arXiv:nlin/0110045.

Kai Chen, Heng Fan, Bo-yu Hou, Kang-jie Shi, Wen-li Yang, Rui-hongYue, Prog. Theor. Phys. Suppl. 135 (1999) 149–165; hep-th/0201211.

[97] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, JHEP 07 (2014) 012; arXiv:1405.7523 [hep-th].

T. Krasnov, A. Zotov, Annales Henri Poincare 20:8 (2019) 2671–2697; arXiv:1812.04209 [math-ph].

[98] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, (1995).

[99] S.V. Manakov, Uspekhi Mat. Nauk, 31:5(191) (1976) 245—246.

[100] A. Mironov, A. Morozov, Y. Zenkevich, A. Zotov, JETP Lett. 97 (2013) 45–51, arXiv:1204.0913 [hep-th].

A. Mironov, A. Morozov, B. Runov, Y. Zenkevich, A. Zotov, Lett. Math. Phys. 103 (2013) 299–329; arXiv:1206.6349 [hep-th];

A. Mironov, A. Morozov, B. Runov, Y. Zenkevich, A. Zotov, JHEP 1312 (2013) 034; arXiv:1307.1502.

A. Mironov, A. Morozov, Y. Zenkevich, JHEP 05 (2016) 121; arXiv:1603.00304 [hep-th].

[101] N. Nekrasov, Lett. Math. Phys. 109 (2019) 579–622; arXiv:1711.11011 [hep-th].

[102] N. Nekrasov, arXiv:1711.11582 [hep-th].

[103] N.A. Nekrasov, S.L. Shatashvili, XVIth International Congress on Mathematical Physics, (2010) 265–289.

[104] S.N.M. Ruijsenaars, Commun. Math. Phys. 115 (1988) 127–165 .

S.N.M. Ruijsenaars, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 30 (1994) 865–1008.

S.N.M. Ruijsenaars, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 31 (1995) 247–353.

[105] S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, Annals of Physics 146 (1), 1–34 (1986);

S.N.M. Ruijsenaars, Commun. Math. Phys., 110 (2), 191–213 (1987).

[106] J. Sekiguchi, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 12 Suppl. (1977) 455–464.

[107] Sh. Shakirov, talk "*Hamiltonians of SU(N) DELL systems*" at Workshop and School "Topological Field Theories, String theory and Matrix Models - 2018", Moscow, 2018.

[108] J. Shiraishi, Journal of Integrable Systems, 4:1 (2019) xyz010; arXiv:1903.07495 [math.QA].

[109] E.K. Sklyanin, Funct. Anal. Appl. 16:4 (1982) 263–270.
E.K. Sklyanin, Funct. Anal. Appl., 17:4 (1983) 273—284.

[110] D. Rudneva, A. Zabrodin, J. Phys. A: Math. Theor. 53 (2020) 075202; arXiv:1903.00968 [math-ph].
A. Zabrodin, J. Geom. Phys. 146 (2019) 103506; arXiv:1905.11383 [math-ph].

[111] M. Vasilyev, A. Zotov, Reviews in Mathematical Physics, 31:6 (2019) 1930002; arXiv:1804.02777 [math-ph].

[112] A. Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag, (1976).
D. Mumford, *Tata Lectures on Theta I, II*, Birkhäuser, Boston, Mass. (1983, 1984).

[113] I. Andric, A. Jevicki, H. Levine, Nuclear Physics B, 215:2 (1983) 307–315.
H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake, J. Shiraishi, Phys. Lett. B 347 (1995) 49–55; hep-th/9411053.
A.G. Abanov, P.B. Wiegmann, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 076402; arXiv:cond-mat/0504041.

[114] H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, A. Morozov, JHEP 04 (2020) 212; arXiv:1912.12897 [hep-th].

[115] H. Awata, Y. Matsuo, T. Yamamoto, J. Phys. A: Math. Gen. 29 (1996) 3089–3098; arXiv: hep-th/9512065.
S.M. Khoroshkin, M.G. Matushko, E.K. Sklyanin, J. Phys. A: Math. Theor. 50 (2017) 115203; arXiv:1608.00599 [math-ph].

[116] H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, A. Morozov, JHEP 08 (2020) 150; arXiv:2005.10563 [hep-th].
J. Shiraishi, Journal of Integrable Systems, 4:1 (2019) xyz010; arXiv:1903.07495 [math.QA].

[117] H. Awata, B. Feigin, J. Shiraishi, JHEP 03 (2012) 041; arXiv:1112.6074 [hep-th].

[118] H.W. Braden, T.J. Hollowood, JHEP 0312 (2003) 023; arXiv:hep-th/0311024.

[119] H.W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, Nucl. Phys. B 573 (2000) 553–572; hep-th/9906240.
V. Fock, A. Gorsky, N. Nekrasov, V. Rubtsov, JHEP 0007 (2000) 028; arXiv:hep-th/9906235.
A. Mironov, A. Morozov, Physics Letters B 475 (2000) 71–76; arXiv:hep-th/9912088.
A. Mironov, A. Morozov, arXiv:hep-th/0001168
A. Mironov, arXiv:hep-th/0011093.
A. Gorsky, A. Mironov, arXiv:hep-th/0011197.
A. Mironov, Theoret. and Math. Phys., 129:2 (2001) 1581-–1585; arXiv:hep-th/0104253.
A. Mironov, A. Morozov, Physics Letters B 524 (2002) 217–226; arXiv:hep-th/0107114.
H. Braden, A. Gorsky, A. Odesskii, V. Rubtsov, Nucl. Phys. B 633 (2002) 414–442; arXiv:hep-th/0111066.
A. Mironov, Theoret. and Math. Phys., 135:3 (2003) 814-–827; arXiv:hep-th/0205202.
G. Aminov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zotov, Physics Letters B726 (2013) 802-808; arXiv:1307.1465.
G. Aminov, H.W. Braden, A. Mironov, A. Morozov, A. Zotov, JHEP 01 (2015) 033; arXiv:1410.0698.
G. Aminov, A. Mironov, A. Morozov, JHEP 11 (2017) 023; arXiv:1709.04897 [hep-th].

[120] V.M. Buchstaber, G. Felder, A.V. Veselov, Duke Math. J. 76 (1994) 885–911.

[121] F. Calogero, Lett. Nuovo Cim. 13 (1975) 411–416.
F. Calogero, Lett. Nuovo Cim. 16 (1976) 77–80.
J. Moser, Adv. Math. 16 (1975) 1–523.
B. Sutherland, Physical Review A, 4:5 (1971) 2019–2021.
M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, Inventiones mathematicae, 37 (1976) 93–108.

[122] I.V. Cherednik, *Double Affine Hecke Algebras*, Cambridge University Press (2005).

[123] B. Feigin, M. Jimbo, E. Mukhin, J. Phys. A: Math. Theor. 50 (2017) 464001; arXiv: 1705.07984 [math.QA].

[124] B.L. Feigin, A.I. Tsymbaliuk, Kyoto Journal of Mathematics, 51:4 (2011) 831–854; arXiv:0904.1679 [math.RT].

[125] A. Gorsky, O. Koroteeva, P. Koroteev, A. Vainshtein, Journal of Mathematical Physics 61, (2020) 082302;
arXiv:1910.02606 [hep-th].

[126] A. Grekov, A. Zotov, SciPost Phys. 10, 055 (2021); arXiv:2010.08077 [math-ph].

[127] Y. Komori, K. Hikami, J. Phys. A: Math. Gen. 30 (1997) 4341–4364.
Y. Komori, K. Hikami, Eur. Phys. J. B 5 (1998) 583–588.

[128] P. Koroteev, Sh. Shakirov, Lett. Math. Phys. 110 (2020) 969–999; arXiv:1906.10354 [hep-th].

[129] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, (1995).

[130] A. Mironov, A. Morozov, Y. Zenkevich, arXiv:2103.02508 [hep-th].

[131] M. Nazarov, E. Sklyanin, Int. Math. Res. Notices, 8 (2019) 2266—2294; arXiv:1703.02794 [nlin.SI].

[132] M.L. Nazarov, E.K. Sklyanin, Commun. Math. Phys. 324 (2013) 831—849; arXiv:1212.2781 [math.CO].

[133] M. Nazarov, E. Sklyanin, Lett. Math. Phys. 105 (2015) 901–916; arXiv:1411.1315 [nlin.SI].

[134] S.N.M. Ruijsenaars, Commun. Math. Phys. 115 (1988) 127–165 .
S.N.M. Ruijsenaars, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 30 (1994) 865–1008.
S.N.M. Ruijsenaars, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 31 (1995) 247–353.

[135] S.N.M. Ruijsenaars, H. Schneider, Annals of Physics 146:1 (1986) 1–34;
S.N.M. Ruijsenaars, Commun. Math. Phys., 110:2 (1987) 191–213.

[136] O. Schiffmann, E. Vasserot, Compositio Mathematica, 147:1 (2011): 188–234; arXiv:0802.4001 [math.QA].

[137] A.N. Sergeev, A.P. Veselov, Int. Math. Res. Notices, 21 (2015) 10959–10986; arXiv:1311.0853 [math-ph].

[138] B. Sriram Shastry, Bill Sutherland, Phys. Rev. Lett. 70:26 (1993) 4029–4033.

[139] H. Ujino, K. Hikami, M. Wadati, J. Phys. Soc. Jpn. 61 (1992) 3425–3427.