

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

*На правах рукописи*

Иванова Анастасия Сергеевна

## **Геометрия методов внутренней точки и приложения**

Резюме диссертации  
на соискание ученой степени  
кандидата математических наук

Научные руководители:  
д.ф.-м.н., Роланд Хильдебранд  
и д.ф.-м.н., Владимир Протасов

Москва - 2024

# 1 Введение

Методы внутренней точки изначально были разработаны как альтернатива симплекс-методу для решения задач линейного программирования. В отличие от последних, они генерируют последовательность точек, для которых строго выполняются все ограничения неравенства. Собственно, методы, генерирующие последовательность внутренних точек допустимого множества, уже давно используются для решения нелинейных задач. Под методами внутренних точек мы будем понимать методы, явно или неявно использующие барьер на допустимом множестве или на конусе, определенном в условии задачи. В случае линейного программирования таким конусом является неотрицательный ортант.

Первым такой метод предложил [Dikin, 1967]. В принципе, этот метод определял следующую точку как аргумент минимума линейной функции цены на эллипсоиде Дикина с центром на предыдущей итерации. Однако этот метод не давал гарантий на скорость сходимости и требовал строго допустимой начальной точки. Позже [Karmarkar, 1984] построил первый метод внутренней точки для линейного программирования, который, как было доказано, имеет полиномиальную сложность. Этот метод использовал проективное преобразование выполнимого множества на каждом шаге перед построением эллипсоида, вписанного в это множество. Поскольку класс линейных функций не инвариантен относительно проективных преобразований, пришлось расширить этот класс до дробно-линейных функций, которые минимизировались на построенных эллипсоидах. Этот недостаток метода Кармаркара побудил к разработке вариантов методов, использующих аффинные преобразования, что в итоге привело к повторному открытию метода Дикина ([Barnes, 1986], [Vanderbei et al., 1986]). Все более поздние версии метода Кармаркара могли конкурировать с симплекс-методом на практике, но не имели теоретических гарантий скорости сходимости. Отметим, что сам Кармаркар уже указывал, что, с одной стороны, его метод можно интерпретировать как барьерный, то есть минимизирующий взвешенную сумму функции начальных затрат и стандартного логарифмического барьера на ортанте, а с другой стороны, как метод редукции потенциала.

В серии работ Д. Байер и Ж. Лагариас подробно изучили связь между методами типа Кармаркара и барьерными методами. В частности, в зависимости от того, какие преобразования применяются к допустимому множеству, методы были классифицированы на проективно- и аффинно-масштабирующие. В дальнейшем были доработаны в основном методы аффинного масштабирования. Также было введено понятие центрального пути. [Renegar, 1988] построил метод следования пути, который давал последовательность точек, близких к центральному пути, и был доказательно полиномиальной сложности. Прямо-двойные методы были предложены в [Kojima et al., 1989] и [Monteiro and Adler, 1989].

Неразрешимые прямо-двойственные методы с итерациями, для которых ограничения типа равенства могут быть не выполнены, были предложены в [Kojima et al., 1993] и [Mizuno et al., 1995]. В [Tanabe, 1988] и [Todd and Ye, 1990] были предложены методы редукции потенциала для линейного программирования. Потенциал Танабе-Тодда-Йе, предложенный в этих работах, лег в основу более современных, продвинутых методов редукции потенциала для полуопределенного программирования.

В конце 1980-х годов Ю. Нестеров и А. Немировский обобщили методы внутренней точки для линейного программирования на задачи оптимизации с произвольными выпуклыми коническими ограничениями и ввели понятия конической программы и самосогласованного барьера. В частности, они предложили методы полиномиальной сложности для решения полуопределенных программ. В [Nesterov and Nemirovsky, 1992] они также построили теорию конической двойственности, которая обобщает двойственность в линейных программах. Полная теория изложена в монографии [Nesterov and Nemirovskii, 1994], где описаны как методы следования по центральному пути, так и методы редукции потенциала. Позже [Nesterov, 1997] обнаружил, что методы редукции потенциала делают шаги, аналогичные длинным шагам в методах следования пути.

Методы решения линейных программ были независимо обобщены на случай полуопределенного программирования в серии работ [Alizadeh, 1995]. Однако его методы использовали масштабирующие автоморфизмы конуса и в принципе не могли быть использованы для решения задач над несимметричными конусами.

Следующим этапом ([Monteiro, 1997, Monteiro and Zhang, 1998, Nesterov and Todd, 1997, Tunçel, 2000])

стало развитие теории автомасштабируемых барьеров и основанных на ней методов длинных шагов, использующих богатую структуру симметричных конусов. Этот класс методов оказался наиболее эффективным на практике и до сих пор используется в решателях [Todd et al., 1998] и [Toh et al., 1999].

Отметим, что особая роль симметричных конусов как наиболее естественного обобщения неотрицательного ортанта в коническом программировании была впервые отмечена Л. Файбусовичем, который явно использовал их алгебраическую структуру для построения алгоритмов ([Faybusovich, 1997a] и [Faybusovich, 1997b]). В то время как свойство автомасштабируемости присуще барьеру, симметрия является свойством конуса. В начале 2000-х годов было обнаружено, что эти два понятия тесно связаны и что автомасштабируемые барьеры существуют на всех симметричных конусах и только на них. Обзор этих исследований представлен в статье [Hauser and Güler, 2002].

В [Güler, 1997] методы, основанные на свойстве автомасштабирования, были обобщены на класс гиперболических конусов, а в [Chua, 2009] - на класс однородных конусов. В [Nesterov, 2012] понятие точки масштабирования было также определено для произвольных самосогласованных барьеров.

За последнее десятилетие было опубликовано несколько новых универсальных конструкций самосогласованных барьеров для конусов и выпуклых множеств ([Bubeck and Eldan, 2019, Hildebrand, 2014, Lee and Yue, 2021]), а также для линейного программирования ([Lee, 2016][раздел 6.3]). Связь между методами следования пути с использованием энтропийного барьера и алгоритмом имитационного отжига была найдена в [Abernethy and Hazan, 2016]. В [Nesterov and Tunçel, 2016] для построения алгоритмов вместо свойства автомасштабируемости использовалось более слабое свойство отрицательной кривизны, которое выполняется, в частности, для стандартных барьеров на гиперболических конусах. В последние годы растет интерес к барьерам на асимметричных конусах, например, на экспоненциальном конусе ([Dahl and Andersen, 2022]).

Отметим, что наряду с методами внутренней точки были разработаны обобщения симплекс-метода на полубесконечное программирование, в частности, в серии работ В. Жадана.

**Результаты данной диссертации опубликованы в двух статьях:**

1. Ivanova, A. and Hildebrand, R. (2023). Optimal step length for the maximal decrease of a self-concordant function by the newton method. *Optimization Letters*, pages 1–8
2. Hildebrand, R. and Ivanova, A. (2022). Extremal cubics on the circle and the 2-sphere. *Results in Mathematics*, 77(3):1–33

Мы изложим остальную часть рукописи и выделим основной вклад.

- Глава 2, описанная в разделе 2 данного резюме, посвящена применению теории оптимального управления для нахождения оптимальной длины шага для метода Ньютона и метода следования центрального пути на классе самосогласованных функций. Для метода Ньютона наша цель - найти оптимальную длину шага с точки зрения функционального значения, т.е. этот оптимальный размер шага должен максимизировать уменьшение функционального значения. Для метода следования по пути качество текущей точки  $x_0$  измеряется расстоянием в локальной метрике до прямой, аппроксимирующей центральный путь. Наша цель - продвинуться как можно дальше вдоль прямой, не потеряв в качестве с точки зрения расстояния до центрального пути. Это приводит к проблеме: насколько большим может быть это расстояние, если мы переходим из точки  $x_0$  в другую точку  $x_1$ . В обеих задачах мы рассматриваем эволюцию значений (функции и ее производных) на всем отрезке между начальной и конечной точками. Таким образом, мы рассматриваем бесконечно-мерный объект, и подходящим инструментом для решения этой задачи является теория оптимального управления. Поэтому мы ставим эти задачи как задачи оптимального управления и используем для их решения теорию оптимального управления.
- В главе 3, которая описана в разделе 3 данного резюме, мы рассматриваем однородные кубические полиномы на единичной сфере. Мы рассматриваем множество кубиков, ограниченных 1 на единичной сфере, как 10-мерное выпуклое тело, поскольку каждый кубик имеет 10

коэффициентов. Наша основная цель - дать полную классификацию экстремальных точек этого тела. Поскольку однородные кубические многочлены от 3 переменных имеют 10 независимых коэффициентов, мы можем определить все эти коэффициенты, если зафиксируем 4 максимума этого многочлена на сфере. Каждая точка максимума соответствует 3 условиям оптимальности, поэтому 4 максимума определяют систему из 12 линейных уравнений. Заметим, что  $P$  инвариантна относительно вращения в  $\mathbb{R}^3$ . То есть, если мы вращаем сферу, то 4 точки на сфере тоже вращаются, и эта новая точка также соответствует некоторому экстремальному полиному. Получается, что вместо значений векторов максимумов нужно рассматривать углы между этими векторами, так как они инвариантны относительно вращения. Решив эту задачу, мы получаем представление кубического полинома как функции от грамиана точек максимума, то есть в общем случае экстремальный полином более элегантно описывается максимумами или их грамианом, чем самими коэффициентами. Кроме того, мы рассмотрим некоторые частные случаи и дадим полную классификацию экстремальных многочленов. Мотивация данного исследования состоит в том, что шар единичной нормы, определяемый условием  $\sum_{r,s,t=1}^n P_{rst}x_r x_t x_s \leq 1$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1$  в пространстве полиномов, используется как множество допустимых управлений в задаче управления, сформулированной для нахождения оптимального шага в методах центрального пути, а его экстремальные точки определяют возможные оптимальные управления.

- В главе 4, которая описана в разделе 4 данного резюме, мы обсуждаем некоторые будущие направления этой работы.

## 2 Оптимальное управление для поиска оптимальной длины шага

Эта глава посвящена применению метода оптимального управления для поиска оптимального шага для метода Ньютона и метода центрального пути. Идея использования методов оптимального управления для анализа наихудших случаев методов первого порядка была развита Лораном Лессаром и соавторами в [Lessard et al., 2016], где они используют методы робастного управления, связанные с поиском квадратичных функций Ляпунова, для получения численных верхних границ на скорости сходимости для градиентного метода, метода тяжелых шаров, ускоренного метода Нестерова и связанных с ними вариантов путем решения небольших простых задач полубесконечного программирования. Эта же техника была рассмотрена в [Taylor et al., 2018, Hu and Lessard, 2017]. В отличие от этого конечно-размерного подхода мы будем использовать теорию оптимального управления в бесконечно-размерной постановке принципа максимума Понтрягина.

Первая часть главы посвящена задаче нахождения оптимальной длины шага метода Ньютона на классе самосогласованных функций, мотивированной появлением этого класса в барьерных методах конического программирования, в частности, при решении линейных программ, конических программ второго порядка и полуопределённых программ.

**Определение 2.1.** Выпуклая  $C^3$  функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  на выпуклом множестве  $D$  называется само-согласованной, если она удовлетворяет неравенству

$$|f'''(x)[h, h, h]| \leq 2(f''(x)[h, h])^{3/2} \quad (1)$$

для любого  $x \in D$  и всех касательных векторов  $h$ .

Длина шага для демпфированного метода Ньютона также рассматривалась в [Burdakov, 1980, Ralph, 1994, Nesterov, 2018]. В [Renegar, 2001, Раздел 2.2] было изучено поведение декремента Ньютона и значения функции при определенных размерах шага. В [De Klerk et al., 2020a, Corollary 6.1] для самосогласованных функций, в случае если начальная точка достаточно близка к минимуму, ограничено уменьшение расстояния от оптимума и нормы градиента, как в локальной метрике начальной точки. Такое же ограничение было получено в [De Klerk et al., 2020a, Corollary 6.3] для локальной метрики минимума. Ограничение на уменьшение значения функции

может быть получено из [De Klerk et al., 2020a, Теорема 5.3], однако оно зависит от разности между текущим и оптимальным значениями функции. В этой работе может быть использован неточный шаг Ньютона, а граница зависит от ошибки. Методы, используемые в [De Klerk et al., 2020a], основаны на полуопределенном программировании (см. также [Drori and Teboulle, 2014]) и полностью отличаются от тех, которые используются здесь.

В этой главе мы находим оптимальную длину шага метода Ньютона относительно убывания значения функции. Этот критерий был рассмотрен в [Nesterov and Nemirovskii, 1994, Теорема 2.2.1], где убывание было ограничено явной функцией длины шага  $\gamma_k$  и декремента Ньютона  $\rho_k$ . Эта же граница была получена в [Gao and Goldfarb, 2019] в более общем контексте. В последней работе показано, что длина шага  $\gamma_k = \frac{1}{1+\rho_k}$  максимизирует эту нижнюю границу. Это же выражение для длины шага предложено в [Nesterov and Nemirovskii, 1994, Теорема 2.2.3] для больших значений декремента. Хотя в [Gao and Goldfarb, 2019] и неявно в [Nesterov and Nemirovskii, 1994] длина шага была получена как максимизатор ограничения, в настоящей работе мы показываем с помощью теории оптимального управления, что эта длина шага на самом деле является оптимумом самого значения функции. Оказывается, однако, что несмотря на использование точного критерия, дальнейшего улучшения по сравнению с результатами, полученными в упомянутых работах, не происходит.

Теория оптимального управления уже использовалась в [Hildebrand, 2021] для нахождения оптимальной длины шага  $\gamma^*$  для метода Ньютона на самосогласованных функциях. Однако здесь была принята другая стратегия. Вместо наихудшего значения функции, как в настоящей работе, минимизируется наихудший декремент Ньютона на следующей итерации. Этот критерий больше соответствует философии методов внутренних точек, представленной в [Nesterov and Nemirovskii, 1994], но он имеет тот недостаток, что если декремент больше 1, то прогресс вообще не может быть гарантирован. Кроме того, оптимальное значение длины шага оказывается невыразимым в замкнутой форме в общем случае. Критерий, используемый в данной работе, напротив, может быть строго улучшен на каждом шаге, независимо от того, насколько далеко мы находимся от оптимума на текущей итерации, а значение оптимальной длины шага является простой аналитической функцией от данных, доступных на текущей итерации.

Вторая часть главы посвящена задаче нахождения оптимального шага для метода следования по пути на классе самосогласованных функций. Расстояние до центрального пути также рассматривалось в [Nesterov and Todd, 1998]. В качестве критерия было выбрано расстояние до центрального пути в локальной метрике.

## 2.1 Оптимальная длина шага для максимального убывания самосогласованной функции методом Ньютона

В этой главе мы рассматриваем метод Ньютона с демпфированным шагом, делая итерации следующим образом

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k (F''(x_k))^{-1} F'(x_k), \quad (2)$$

где  $\gamma_k \in (0, 1]$  - размер шага, а  $\gamma_k = 1$  соответствует полному шагу.

Авторы [Nesterov and Nemirovskii, 1994] описывают состояние на итерации  $k$  единственным скаляром, *Ньютоновским декрементом*

$$\rho_k = \|F'(x_k)\|_{F''(x_k)} := \sqrt{(F'(x_k))^\top (F''(x_k))^{-1} F'(x_k)}. \quad (3)$$

В этом разделе рассматривается задача нахождения длины шага  $\gamma_k$ , которая максимизирует убывание  $F(x_k) - F(x_{k+1})$  значения функции в наихудшей реализации функции  $F(\cdot)$ . Таким образом, сначала нужно для заданной длины шага и заданного декремента найти наихудшую реализацию функции, дающую минимальное уменьшение, а затем максимизировать этот прогресс по значению длины шага, получая оптимальную длину шага как функцию декремента. Это приводит к следующей оптимизационной задаче:

$$\max_{\gamma_k} \min_{F \in \mathcal{S}} (F(x_k) - F(x_{k+1})), \quad (4)$$

где  $\gamma_k$  - длина шага,  $x_{k+1}$  задается (2), декремент  $\|F'(x_k)\|_{F''(x_k)}$  фиксирован на некотором значении  $\rho_k$ , а  $\mathcal{S}$  - класс функций, удовлетворяющих (1).

Для решения задачи (4) мы рассмотрим одну итерацию метода Ньютона. Пусть конечная точка  $x_{k+1}$  задана (2) и рассматривается отрезок прямой между  $x_k$  и  $x_{k+1}$ . Мы изучаем эволюцию значений функции и ее производных вдоль этого отрезка. Это отличает наш подход от подхода в [De Klerk et al., 2020a], где рассматривается  $n$  итераций и только значения функции и ее производных в точках  $x_1, \dots, x_n$ , т.е. объект конечной размерности. В отличие от этого мы рассматриваем объект бесконечной размерности. Подходящим инструментом для решения этой задачи является теория оптимального управления. Мы можем решить эту задачу аналитически. В результате получаем, что  $\gamma^* = \frac{1}{1+\rho}$  является оптимальным шагом. Такая же длина шага уже была предложена в [Nesterov and Nemirovskii, 1994], а в [Gao and Goldfarb, 2019] показано, что этот размер шага максимизирует нижнюю границу на уменьшение значения функции. В нашей работе мы доказали, что эта длина шага действительно оптимальна для данного критерия.

## 2.2 Оптимальный шаг для метода центрального пути

Эта глава посвящена задаче условной минимизации линейного функционала на заданном выпуклом множестве. Предположим, что нам нужно решить следующую оптимизационную задачу

$$\min_{x \in X} \langle c, x \rangle,$$

где  $X$  - выпуклое замкнутое множество с непустой внутренней частью  $D$ , не содержащей прямой линии, на котором существует самосогласованный барьер  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Здесь  $c \in \mathbb{R}_n = (\mathbb{R}^n)^*$  - ненулевой линейный функционал на  $D$ . Мы предполагаем существование решения  $x^*$  этой задачи. Вместо исходной задачи можно рассмотреть следующее семейство задач, параметризованное вещественным параметром  $\tau \in \mathbb{R}_+$ :

$$\min_x \tau \langle c, x \rangle + F(x).$$

Таким образом, мы переходим к задаче безусловной минимизации, где целевой функционал является сильно самосогласованным. Поэтому для решения этих вспомогательных задач мы можем использовать метод Ньютона.

Для достаточно больших  $\tau$  минимизаторы  $x^*(\tau)$  вспомогательной задачи существуют и единственны. Более того, они дифференцируемы по параметру  $\tau$  и образуют кривую, называемую *центральный путь*. Аппроксимация центрального пути в точке  $\hat{x}$  задается аффинной прямой

$$x^*(\tau, \hat{x}) = \hat{x} - (F''(\hat{x}))^{-1}(F'(\hat{x}) + \tau c).$$

Аппроксимация лежит на прямой с направлением

$$p(\hat{x}) = -(F''(\hat{x}))^{-1}c$$

и проходит через точку  $\hat{x} + r(\hat{x})$ , где

$$r(\hat{x}) = -(F''(\hat{x}))^{-1}(F'(\hat{x}) + \tau_0 c)$$

и  $\tau_0$  - произвольное.

Качество текущей точки  $\hat{x}$  измеряется расстоянием в локальной метрике до прямой, аппроксимирующей центральный путь. Так, ближайшая к  $\hat{x}$  точка на этой прямой, измеренная в локальной метрике, имеет параметр

$$\begin{aligned} \tau_{\hat{x}}^* &= \arg \min_{\tau \in \mathbb{R}} \|x^*(\tau, \hat{x}) - \hat{x}\|_{\hat{x}} = \arg \min_{\tau \in \mathbb{R}} \|(F''(\hat{x}))^{-1}(F'(\hat{x}) + \tau c)\|_{\hat{x}} \\ &= \arg \min_{\tau \in \mathbb{R}} \sqrt{(F'(\hat{x}) + \tau c)^T (F''(\hat{x}))^{-1} (F'(\hat{x}) + \tau c)} = \frac{c^T (F''(\hat{x}))^{-1} F'(\hat{x})}{c^T (F''(\hat{x}))^{-1} c}. \end{aligned}$$

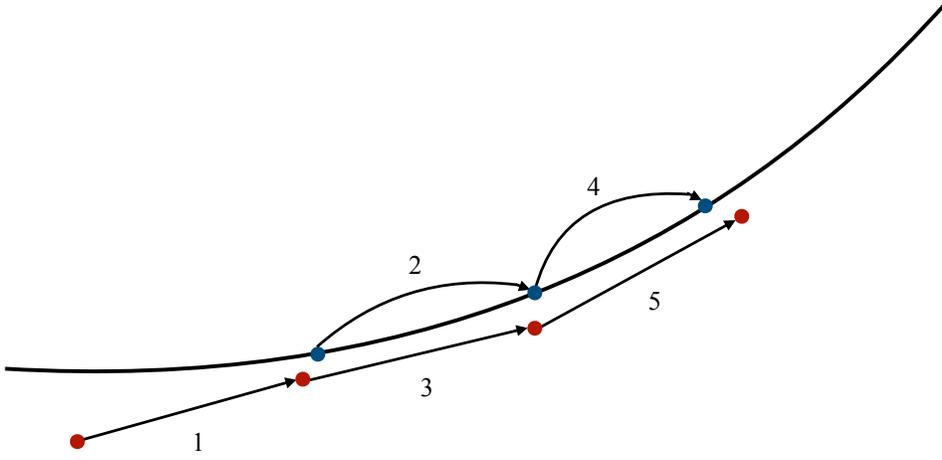


Рис. 1: Аппроксимация центрального пути для различных точек.

Соответствующее расстояние до аппроксимации центрального пути задается

$$\begin{aligned} \delta(\hat{x}) &= \|(F''(\hat{x}))^{-1} (F'(\hat{x}) + \tau_{\hat{x}}^* c)\|_{\hat{x}} \\ &= \sqrt{(F'(\hat{x}))^T (F''(\hat{x}))^{-1} F'(\hat{x}) - \frac{c^T (F''(\hat{x}))^{-1} F'(\hat{x})}{c^T (F''(\hat{x}))^{-1} c}}. \end{aligned}$$

Заметим, что общим критерием является измерение расстояния до целевой точки на центральном пути, но в нашей работе мы измеряем расстояние до центрального пути, то есть мы не фиксируем целевую точку.

Наша цель - продвинуться как можно дальше по прямой, не теряя качества в плане расстояния до центральной траектории. Это приводит к задаче: **как велико может быть это расстояние, если мы перейдем из точки  $x_0$  в другую точку  $x_1$** . Аппроксимация центрального пути для различных точек представлена на рисунке 1. На этом рисунке черная точка соответствует начальной точке, а черная линия - аппроксимации центрального пути в этой точке. Мы начинаем движение из текущей точки, но сама линия движется вместе с точкой. Например, если мы сделаем шаг к синей точке, которая находится достаточно близко к начальному приближению центрального пути, то в этой новой точке появится собственное приближение центрального пути - синяя линия. Расстояние до этой линии от синей точки больше. Но для нас важно, чтобы это расстояние не было хуже, чем расстояние от начальной точки до начального приближения. Если мы отойдем слишком далеко, то аппроксимация сильно изменится и расстояние может сильно увеличиться. Если мы подойдем слишком близко, то будем двигаться медленнее, чем могли бы, то есть сходиться к решению будем медленнее. Поэтому задача состоит в том, чтобы определить, насколько далеко мы можем продвинуться по центральному пути, не потеряв в качестве в новой точке.

В [De Klerk et al., 2020b] авторы также изучают качество итераций метода следования по пути, но они рассматривают текущую и следующую точку, а также значения функции и ее производных в этих точках. Кроме того, они рассматривают несколько итераций, в то время как мы рассматриваем только одну итерацию. Мы рассматриваем не только значения в конечных точках, но и эволюцию значений (функции и ее производных) на всем отрезке между начальной и конечной точками. Таким образом, мы рассматриваем бесконечно-мерный объект, тогда как в [De Klerk et al., 2020b] исследовался конечно-мерный объект. Поэтому мы используем больше информации, которая может помочь нам более точно оценить оптимальную длину шага. Для

этого мы будем исследовать эволюцию производных  $f$  вдоль отрезка между  $x_0$  и  $x_1$ , что приводит к бесконечно-мерной задаче, подходящим аппаратом для решения которой является теория оптимального управления. Мы формулируем эту задачу как задачу оптимального управления и далее решаем ее численно.

### 3 Экстремальные кубические полиномы на круге и 2-сфере

Задача максимизации однородного кубического полинома на единичной сфере является NP-трудной и возникает в различных приложениях в невыпуклой и комбинаторной оптимизации, например, в задаче о устойчивом множестве, которая была рассмотрена в [Nesterov et al., 2003]. Несколько подходов к решению этой задачи были предложены в [So, 2011, Nie, 2012, Zhang et al., 2012, Ahmed and Still, 2019, Buchheim et al., 2019, de Klerk and Laurent, 2020, Fang and Fawzi, 2021]. Задача эквивалентна определению пересечения заданного луча в пространстве однородных кубических полиномов с границей шара единичной нормы в этом пространстве

$$B_1(S^{n-1}) := \{p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]_3 \mid \|p\| \leq 1\},$$

где норма определяется

$$\|p\| = \max_{\|x\|_2=1} p(x), \quad (5)$$

а  $\|\cdot\|_2$  - обычная евклидова норма в  $\mathbb{R}^n$ . Полубесконечное описание этого нормального шара для  $n = 3$  следует из предложений 4.8 и 5.1 в [Saunderson, 2019], для  $n = 2$  такое описание легко построить из полуопределенного описания конуса неотрицательных одномерных тригонометрических полиномов [Nesterov, 2000, раздел 3.4]. Неэквивалентные полуопределенные описания, которые можно обобщить на шары неоднородных кубиков, можно найти в [Hildebrand, 2022].

В данной работе мы анализируем соответствующие полуопределенные представимые нормальные шары в пространстве однородных кубиков, которые имеют размерность 10 и 4 соответственно. В частности, мы определяем все их экстремальные точки и изучаем их граневую структуру.

Экстремальные неотрицательные полиномы изучались, в частности, в [Choi and Lam, 1977, Reznick, 1978, Reznick, 2000, Naldi, 2014]. Экстремальные однородные кубики в трех переменных, неотрицательные на ортанте, изучались в [Ando, 2021]. В [Kunert, 2014, Blekherman et al., 2015] изучена лицевая структура конусов неотрицательных полиномов. В частности, открытые грани конуса неотрицательных многочленов характеризуются как множество неотрицательных многочленов, которые исчезают на некотором подмножестве точек [Blekherman et al., 2013, Section 4.4.5], [Kunert, 2014, Prop. 1.69].

Мотивация изучения структуры шаров норм  $B_1(S^{n-1})$  для  $n = 2, 3$  состоит в том, что при анализе алгоритмов оптимизации самосогласованных функций методами оптимального управления эти шары выступают в качестве множеств управления, а оптимальные управления являются экстремальными точками этих шаров [Hildebrand, 2021].

В данной работе мы определяем некоторые основные понятия, в частности, грани выпуклого множества, и исследуем связь между гранями нормального шара  $B_1(S^{n-1})$  и максимумами кубиков на  $S^{n-1}$ , после чего рассматриваем нормальные шары  $B_1(S^1)$  и  $B_1(S^2)$ . Для  $n = 2$  мы полностью описываем граневую структуру этого нормального шара, а для  $n = 3$  классифицируем все экстремальные точки и описываем некоторые семейства граней.

### 4 Заключение

Методы внутренней точки имеют более чем 35-летнюю историю, и их появление стало серьезным прорывом в выпуклой оптимизации. Эти методы до сих пор активно используются для решения многомерных задач оптимизации и остаются вне конкуренции.

Одним из важных практических аспектов реализации любого алгоритма является правильный выбор длины шага. Этой задаче для методов внутренней точки и посвящена данная диссертация. В данной работе мы предлагаем использовать подход, при котором задача нахождения оптимального шага метода формулируется как задача оптимального управления, а затем для ее решения применяется теория оптимального управления.

В главе 2 мы рассмотрели проблему поиска оптимального шага или итерации для методов оптимизации при использовании теории оптимального управления. В первой части главы рассматривается задача нахождения оптимальной длины шага для метода Ньютона на классе самосогласованных функций, при этом критерием является уменьшение значения функции. Вторая часть посвящена нахождению оптимального шага метода центрального пути при минимизации линейной функции с использованием самосогласованного барьера. Качество текущей точки  $x_0$  измеряется расстоянием в локальной метрике до прямой, аппроксимирующей центральный путь. Наша цель - продвинуться как можно дальше вдоль прямой, не потеряв в качестве с точки зрения расстояния до центрального пути. Это приводит к задаче: насколько большим может быть это расстояние, если мы переходим из точки  $x_0$  в другую точку  $x_1$ . Мы формулируем обе задачи как задачи оптимального управления и используем теорию оптимального управления для их решения.

В главе 3 мы изучаем шары однородных кубиков на  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , которые ограничены единицей на единичной сфере. Для  $n = 2$  мы полностью описываем структуру граней этого нормального шара, а для  $n = 3$  мы классифицируем все экстремальные точки и описываем некоторые семейства граней. Мотивацией для изучения данной задачи послужило то, что шары многочленов являются множествами управления в вышеупомянутых задачах оптимального управления, а их экстремальные точки - кандидатами на оптимальное управление.

## 4.1 Будущие направления

В данной диссертации мы решили задачу нахождения оптимального шага для метода центрального пути в двумерном случае. Если пространство, в котором решается исходная задача оптимизации, имеет размерность  $n \geq 3$ , то задача оптимального управления, возникающая для соответствующей задачи нахождения оптимального шага, имеет аналогичную структуру, но переменные  $u, q$  являются 3-мерными векторами. Таким образом, общая размерность  $n$  сводится к размерности 3.

Одним из основных направлений развития данной работы является, следовательно, решение задачи нахождения оптимального шага метода центрального пути с использованием самосогласованных барьеров в трехмерном случае. В отличие от двумерного случая, в трехмерном случае множеством оптимального управления является множество однородных кубических полиномов, ограниченных единицей на сфере. В качестве первого шага к решению этой задачи мы решили проблему классификации экстремальных точек этого множества; полная классификация представлена в главе 3. Сама задача оптимального управления, которая также может быть решена только численно, не могла быть рассмотрена в рамках данной диссертации и является предметом будущих исследований.

## Список литературы

- [Abernethy and Hazan, 2016] Abernethy, J. and Hazan, E. (2016). Faster convex optimization: Simulated annealing with an efficient universal barrier. In *International Conference on Machine Learning*, pages 2520–2528. PMLR.
- [Ahmed and Still, 2019] Ahmed, F. and Still, G. (2019). Maximization of homogeneous polynomials over the simplex and the sphere: Structure, stability, and generic behavior. *J. Optimiz. Theory App.*, 181:972–996.
- [Alizadeh, 1995] Alizadeh, F. (1995). Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization. *SIAM journal on Optimization*, 5(1):13–51.
- [Ando, 2021] Ando, T. (2021). On extremal positive semidefinite forms of cubic homogeneous polynomials of three variables. *arXiv preprint arXiv:2109.01319*.
- [Barnes, 1986] Barnes, E. R. (1986). A variation on karmarkar’s algorithm for solving linear programming problems. *Mathematical programming*, 36:174–182.
- [Blekherman et al., 2015] Blekherman, G., Ilman, S., and Kubitze, M. (2015). Dimensional differences between faces of the cones of nonnegative polynomials and sums of squares. *Int. Math. Res. Not.*, 2015:8437–8470.
- [Blekherman et al., 2013] Blekherman, G., Parrilo, P. A., and Thomas, R. R., editors (2013). *Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry*. MOS-SIAM series on Optimization. SIAM.
- [Bubeck and Eldan, 2019] Bubeck, S. and Eldan, R. (2019). The entropic barrier: Exponential families, log-concave geometry, and self-concordance. *Mathematics of Operations Research*, 44(1):264–276.
- [Buchheim et al., 2019] Buchheim, C., Fampa, M., and Sarmiento, O. (2019). Tractable relaxations for the cubic one-spherical optimization problem. In *Optimization of Complex Systems: Theory, Models, Algorithms and Applications*, volume 991 of *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pages 267–276. Springer.
- [Burdakov, 1980] Burdakov, O. P. (1980). Some globally convergent modifications of Newton’s method for solving systems of nonlinear equations. *Doklady Akademii Nauk*, 254(3):521–523.
- [Choi and Lam, 1977] Choi, M.-D. and Lam, T.-Y. (1977). Extremal positive semidefinite forms. *Math. Ann.*, 231:1–18.
- [Chua, 2009] Chua, C. B. (2009). At-algebraic approach to primal-dual interior-point algorithms. *SIAM Journal on Optimization*, 20(1):503–523.
- [Dahl and Andersen, 2022] Dahl, J. and Andersen, E. D. (2022). A primal-dual interior-point algorithm for nonsymmetric exponential-cone optimization. *Mathematical Programming*, 194(1):341–370.
- [De Klerk et al., 2020a] De Klerk, E., Glineur, F., and Taylor, A. B. (2020a). Worst-case convergence analysis of inexact gradient and Newton methods through semidefinite programming performance estimation. *SIAM Journal on Optimization*, 30(3):2053–2082.
- [De Klerk et al., 2020b] De Klerk, E., Glineur, F., and Taylor, A. B. (2020b). Worst-case convergence analysis of inexact gradient and newton methods through semidefinite programming performance estimation. *SIAM Journal on Optimization*, 30(3):2053–2082.
- [de Klerk and Laurent, 2020] de Klerk, E. and Laurent, M. (2020). Convergence analysis of a Lasserre hierarchy of upper bounds for polynomial minimization on the sphere. Published online in Math. Program.
- [Dikin, 1967] Dikin, I. (1967). Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. *Doklady Akademii Nauk*, 174(4):747–748.

- [Drori and Teboulle, 2014] Drori, Y. and Teboulle, M. (2014). Performance of first-order methods for smooth convex minimization: a novel approach. *Math. Program.*, 145(1–2):451–482.
- [Fang and Fawzi, 2021] Fang, K. and Fawzi, H. (2021). The sum-of-squares hierarchy on the sphere and applications in quantum information theory. *Math. Program.*, 190:331–360.
- [Faybusovich, 1997a] Faybusovich, L. (1997a). Euclidean jordan algebras and interior-point algorithms. *Positivity*, 1:331–357.
- [Faybusovich, 1997b] Faybusovich, L. (1997b). Linear systems in jordan algebras and primal-dual interior-point algorithms. *Journal of computational and applied mathematics*, 86(1):149–175.
- [Gao and Goldfarb, 2019] Gao, W. and Goldfarb, D. (2019). Quasi-Newton methods: superlinear convergence without line searches for self-concordant functions. *Optimization Methods and Software*, 34(1):194–217.
- [Güler, 1997] Güler, O. (1997). Hyperbolic polynomials and interior point methods for convex programming. *Mathematics of Operations Research*, 22(2):350–377.
- [Hauser and Güler, 2002] Hauser, R. A. and Güler, O. (2002). Self-scaled barrier functions on symmetric cones and their classification. *Foundations of Computational Mathematics*, 2:121–143.
- [Hildebrand, 2014] Hildebrand, R. (2014). Canonical barriers on convex cones. *Mathematics of operations research*, 39(3):841–850.
- [Hildebrand, 2021] Hildebrand, R. (2021). Optimal step length for the Newton method: Case of self-concordant functions. *Math. Methods. Oper. Res.*, 94:253–279.
- [Hildebrand, 2022] Hildebrand, R. (2022). Semi-definite representations for sets of cubics on the 2-sphere. *J. Optim. Theory Appl.*, 195:666–675.
- [Hu and Lessard, 2017] Hu, B. and Lessard, L. (2017). Control interpretations for first-order optimization methods. In *2017 American Control Conference (ACC)*, pages 3114–3119. IEEE.
- [Karmarkar, 1984] Karmarkar, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 302–311.
- [Kojima et al., 1993] Kojima, M., Megiddo, N., and Mizuno, S. (1993). A primal–dual infeasible-interior-point algorithm for linear programming. *Mathematical programming*, 61(1):263–280.
- [Kojima et al., 1989] Kojima, M., Mizuno, S., and Yoshise, A. (1989). *A primal-dual interior point algorithm for linear programming*. Springer.
- [Kunert, 2014] Kunert, A. (2014). *Facial structure of cones of nonnegative forms*. PhD thesis, University Konstanz, Konstanz.
- [Lee, 2016] Lee, Y. T. (2016). *Faster algorithms for convex and combinatorial optimization*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [Lee and Yue, 2021] Lee, Y. T. and Yue, M.-C. (2021). Universal barrier is n-self-concordant. *Mathematics of Operations Research*, 46(3):1129–1148.
- [Lessard et al., 2016] Lessard, L., Recht, B., and Packard, A. (2016). Analysis and design of optimization algorithms via integral quadratic constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 26(1):57–95.
- [Mizuno et al., 1995] Mizuno, S., Kojima, M., and Todd, M. J. (1995). Infeasible-interior-point primal-dual potential-reduction algorithms for linear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 5(1):52–67.
- [Monteiro, 1997] Monteiro, R. D. (1997). Primal–dual path-following algorithms for semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, 7(3):663–678.

- [Monteiro and Adler, 1989] Monteiro, R. D. and Adler, I. (1989). Interior path following primal-dual algorithms. part i: Linear programming. *Mathematical programming*, 44(1):27–41.
- [Monteiro and Zhang, 1998] Monteiro, R. D. and Zhang, Y. (1998). A unified analysis for a class of long-step primal-dual path-following interior-point algorithms for semidefinite programming. *Mathematical Programming*, 81(3):281–299.
- [Naldi, 2014] Naldi, S. (2014). Nonnegative polynomials and their Carathéodory number. *Discrete & Computational Geometry*, 51:559–568.
- [Nesterov, 1997] Nesterov, Y. (1997). Long-step strategies in interior-point primal-dual methods. *Mathematical Programming*, 76(1):47–94.
- [Nesterov, 2000] Nesterov, Y. (2000). Squared functional systems and optimization problems. In Frenk, H., Roos, K., Terlaky, T., and Zhang, S., editors, *High Performance Optimization*, chapter 17, pages 405–440. Kluwer Academic Press, Dordrecht.
- [Nesterov, 2012] Nesterov, Y. (2012). Towards non-symmetric conic optimization. *Optimization methods and software*, 27(4-5):893–917.
- [Nesterov, 2018] Nesterov, Y. (2018). *Lectures on Convex Optimization*, volume 137 of *Springer Optimization and its Applications*. Springer.
- [Nesterov et al., 2003] Nesterov, Y. et al. (2003). Random walk in a simplex and quadratic optimization over convex polytopes. Technical report, CORE.
- [Nesterov and Nemirovskii, 1994] Nesterov, Y. and Nemirovskii, A. (1994). *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, volume 13. SIAM.
- [Nesterov and Nemirovsky, 1992] Nesterov, Y. and Nemirovsky, A. (1992). Conic formulation of a convex programming problem and duality. *Optimization Methods and Software*, 1(2):95–115.
- [Nesterov and Tunçel, 2016] Nesterov, Y. and Tunçel, L. (2016). Local superlinear convergence of polynomial-time interior-point methods for hyperbolicity cone optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 26(1):139–170.
- [Nesterov and Todd, 1997] Nesterov, Y. E. and Todd, M. J. (1997). Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming. *Mathematics of Operations research*, 22(1):1–42.
- [Nesterov and Todd, 1998] Nesterov, Y. E. and Todd, M. J. (1998). Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones. *SIAM Journal on optimization*, 8(2):324–364.
- [Nie, 2012] Nie, J. (2012). Sum of squares methods for minimizing polynomial forms over spheres and hypersurfaces. *Front. Math. China*, 7:321–346.
- [Ralph, 1994] Ralph, D. (1994). Global convergence of damped Newton’s method for nonsmooth equations via the path search. *Mathematics of Operations Research*, 19(2):352–389.
- [Renegar, 1988] Renegar, J. (1988). A polynomial-time algorithm, based on newton’s method, for linear programming. *Mathematical programming*, 40(1):59–93.
- [Renegar, 2001] Renegar, J. (2001). *A Mathematical View of Interior-point Methods in Convex Optimization*. MPS-SIAM Series on Optimization. SIAM, MPS.
- [Reznick, 1978] Reznick, B. (1978). Extremal PSD forms with few terms. *Duke Math. J.*, 45(2):363–374.
- [Reznick, 2000] Reznick, B. (2000). Some concrete aspects of Hilbert’s 17th problem. *Contemporary Mathematics*, 253:251–272.
- [Saunderson, 2019] Saunderson, J. (2019). Certifying polynomial nonnegativity via hyperbolic optimization. *SIAM J. Appl. Algebra Geom.*, 3(4):661–690.

- [So, 2011] So, A. M.-C. (2011). Deterministic approximation algorithms for sphere constrained homogeneous polynomial optimization problems. *Math. Program.*, 129:357–382.
- [Tanabe, 1988] Tanabe, K. (1988). Centered newton method for mathematical programming. In *System Modelling and Optimization: Proceedings of the 13th IFIP Conference Tokyo, Japan, August 31–September 4, 1987*, pages 197–206. Springer.
- [Taylor et al., 2018] Taylor, A., Van Scoy, B., and Lessard, L. (2018). Lyapunov functions for first-order methods: Tight automated convergence guarantees. In *International Conference on Machine Learning*, pages 4897–4906. PMLR.
- [Todd et al., 1998] Todd, M. J., Toh, K.-C., and Tütüncü, R. H. (1998). On the nesterov–todd direction in semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, 8(3):769–796.
- [Todd and Ye, 1990] Todd, M. J. and Ye, Y. (1990). A centered projective algorithm for linear programming. *Mathematics of Operations Research*, 15(3):508–529.
- [Toh et al., 1999] Toh, K.-C., Todd, M. J., and Tütüncü, R. H. (1999). Sdpt3—a matlab software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization methods and software*, 11(1-4):545–581.
- [Tunçel, 2000] Tunçel, L. (2000). Potential reduction and primal-dual methods. *Handbook of Semidefinite Programming: Theory, Algorithms, and Applications*, pages 235–265.
- [Vanderbei et al., 1986] Vanderbei, R. J., Meketon, M. S., and Freedman, B. A. (1986). A modification of karmarkar’s linear programming algorithm. *Algorithmica*, 1:395–407.
- [Zhang et al., 2012] Zhang, X., Qi, L., and Ye, Y. (2012). The cubic spherical optimization problems. *Math. Comput.*, 81:1513–1525.