Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет компьютерных наук

На правах рукописи

Зайцева Юлия Ивановна

Локально нильпотентные дифференцирования, аддитивные действия и алгебраические моноиды

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель
доктор физико–математических наук
профессор Аржанцев Иван Владимирович

Москва – 2024

Введение

Описание области исследования. Мы занимаемся изучением аффинных алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль и их регулярных автоморфизмов. Известно, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ аффинного многообразия X не обязана быть (конечномерной) алгебраической группой, и важной задачей является описание алгебраических подгрупп группы $\mathrm{Aut}(X)$. Подгруппа G группы $\mathrm{Aut}(X)$ называется алгебраической, если G наделена такой структурой алгебраической группы, что действие $G \times X \to X$ является морфизмом алгебраических многообразий.

Нормальное алгебраическое многообразие называется торическим, если оно допускает действие алгебраического тора с открытой орбитой. Теория торических многообразий имеет глубокие связи с комбинаторикой, коммутативной алгеброй и выпуклой геометрией; см., например, монографии [Fu93, CLS11]. В частности, любое торическое многообразие задаётся веером, состоящим из рациональных полиэдральных конусов, и на многие геометрические вопросы о торических многообразиях можно дать ответ в комбинаторных терминах.

Любая алгебраическая группа G имеет единственный максимальный тор T с точностью до сопряжённости. Если группа G связна, то она порождается своим максимальным тором T и однопараметрическими унипотентными подгруппами $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$, нормализуемыми тором T и называемыми корневыми подгруппами относительно T; см. [Hu75]. Это можно использовать для описания группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ полного торического многообразия X, которая, как известно, является аффинной алгебраической группой; см. также [Br21]. Демазюр в своей прорывной работе [De70] описывает группу $\mathrm{Aut}(X)$ и вводит специальные элементы в решётке характеров действующего тора, биективно соответствующие корневым подгруппам. Сейчас эти элементы называются корнями Демазюра.

В статье [Cox95] Кокс предлагает другой метод описания группы автоморфизмов полного торического многообразия. Он вводит важный инвариант многообразия, который называется однородным координатным кольцом или кольцом Кокса; см. также [Bat93]. В торическом случае кольцо Кокса является градуированным кольцом многочленов и описание группы автоморфизмов полного торического многообразия может быть сведено к описанию $\mathbb{G}_a$-действий на аффинном пространстве, нормализуемых диагональным действием тора и централизуемых действием определённого квазитора.

Важным инструментом для изучения $\mathbb{G}_a$-действий являются локально нильпотентные дифференцирования. Линейное над $\mathbb{K}$ отображение $\delta\colon R \to R$ называется дифференцированием алгебры R, если $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$ для любых $f, g \in R$. Говорят, что дифференцирование δ локально нильпотентно, если для любого элемента $f \in R$ существует такое число $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, что $\delta^k(f) = 0$. Если алгебра R градуирована некоторой абелевой группой, то дифференцирование алгебры R называется однородным, если оно отображает однородные элементы алгебры R в однородные. В других терминах, действие тора на аффинном многообразии X задаётся градуировкой его алгебры регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ с помощью решётки характеров действующего тора. В свою очередь, регулярные действия однопараметрических унипотентных подгрупп $\mathbb{G}_a$ на X биективно соответствуют локально нильпотентным дифференцированиям на алгебре $\mathbb{K}[X]$. Далее, $\mathbb{G}_a$-действие нормализуется тором тогда и только тогда, когда соответствующее локально нильпотентное дифференцирование однородно относительно градуировки, определяемой этим тором. Эта техника используется во многих работах для описания автоморфизмов и изучения геометрии аффинных многообразий, см., например, [FZ05, AH06, Li10, AKZ12, AG17, Sh17, Ar18, GS19, Ga21, LRU22]. Более того, поднимая автоморфизмы на спектр кольца Кокса, можно свести изучение автоморфизмов определенных проективных многообразий к изучению однородных автоморфизмов аффинных многообразий, снабжённых действием так называемого квазитора Нерона-Севери, см. исходный подход в [Cox95, HK00, BH03] и дальнейшее развитие в [Ga08, AG10, AHHL14, APS14, AK15, ADHL15]. Этот метод находит широкое применение и побуждает к исследованию градуированных аффинных алгебр и однородных локально нильпотентных дифференцирований.

Напомним, что сложностью действия тора называется коразмерность его типичной орбиты. Торические многообразия — это в точности многообразия с действием тора сложности нуль. Их естественным обобщением являются многообразия с действием тора сложности один. Любое аффинное торическое многообразие задаётся биномами, см., например, [St96, Chapter 4]. В то же время изучение многообразий с действием тора сложности один связано со специальными соотношениями, называемыми триномами.

Трином — это многочлен вида $g = T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2}$, в котором каждая переменная входит не более чем в один одночлен $T_i^{l_i}$. В то время как кольцо Кокса торического многообразия является кольцом многочленов, кольцо Кокса многообразия с действием тора сложности один является фактор-алгеброй алгебры многочленов по идеалу, порождённому триномами; см. [HS10, HHS11, HH13, AHHL14, HW17]. Это мотивирует изучение однородных локально нильпотентных дифференцирований на триномиальных алгебрах; см. раздел 1.

Теория алгебраических моноидов развивалась параллельно с теорией алгебраических групп. Алгебраическое многообразие X с ассоциативным умножением $X \times X \to X$ называется алгебраическим моноидом, если умножение является морфизмом алгебраических многообразий и обладает нейтральным элементом. Группа обратимых элементов алгебраического моноида X — это алгебраическая группа, открытая по Зарисскому в X, см. [Ri98, Theorem 1] и [Ri07, Theorem 5].

Назовём групповым вложением такое неприводимое аффинное многообразие X с открытым вложением $G \hookrightarrow X$ аффинной алгебраической группы G, что действие группы $G \times G$ левыми и правыми умножениями на G может быть продолжено до действия группы $G \times G$ на X. Оказывается, что для аффинной алгебраической группы G существует естественное соответствие между групповыми вложениями группы G и структурами моноида с группой обратимых элементов G; см. [Vi95, Theorem 1] для случая характеристики нуль и [Ri98, Proposition 1] для общего случая. Теория аффинных алгебраических моноидов и групповых вложений — это богатая область математики, лежащая на пересечении алгебры, алгебраической геометрии, комбинаторики и теории представлений; см. [Pu88, Vi95, Ri98, Re05].

Аффинный алгебраический моноид называется редуктивным, если его группа обратимых элементов является редуктивной аффинной алгебраической группой. Теория редуктивных моноидов наиболее развита; см., например, комбинаторную классификацию редуктивных моноидов в [Vi95, Ri98]. Она основана на теории представлений редуктивных групп, то есть теории старшего веса.

Следующая возможная цель — классификация других классов моноидов, например, разрешимых или коммутативных. Моноид одновременно редуктивен и коммутативен тогда и только тогда, когда он является торическим многообразием с каноническим умножением. Важная задача — поиск всех структур моноида на данном многообразии, например, на аффинном пространстве. Также интересно получать явные формулы для умножения в моноидах; см. раздел 2.

Рассмотрим теперь аффинные многообразия с большой группой автоморфизмов. Наиболее интересен транзитивный случай. Здесь классическим примером являются однородные пространства аффинных алгебраических групп. Естественно спросить, есть ли другие многообразия, на которых группа их автоморфизмов действует транзитивно. Такие примеры могут быть найдены среди поверхностей Данилевского и поверхностей Гизатуллина-Данилова, см. [Gi70, GD77, ML01, Du04]. Интересной задачей является построение таких примеров в произвольной размерности; см. раздел 3.

Напомним понятие гибкости, близкое к понятию однородности. Подгруппа группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ многообразия X, порождённая всеми $\mathbb{G}_a$-подгруппами в $\mathrm{Aut}(X)$, называется специальной группой автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$. Гладкая точка x многообразия X называется гибкой, если касательное пространство к X в точке x порождено касательными векторами к орбитам $\mathbb{G}_a$-подгрупп, проходящим через точку x. Многообразие X называется гибким, если каждая его гладкая точка является гибкой. В [AFKKZ13, Theorem 0.1] доказано, что для неприводимого аффинного многообразия X следующие условия эквивалентны:

(a) многообразие X гибкое;
(b) группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует на множестве гладких точек в X транзитивно.

Более того, если многообразие X имеет размерность не меньше 2, то эти условия равносильны следующему:

(c) группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует на множестве гладких точек в X бесконечно транзитивно.

Имеется много интересных примеров гибких многообразий. Одной из полезных конструкций здесь является надстройка $\mathrm{Susp}(X, f) = \{uv = f(x)\} \subseteq \mathbb{A}^2 \times X$ над аффинным многообразием X. Если X — гибкое неприводимое аффинное многообразие положительной размерности, то любая надстройка над X также гибкая; см. [AKZ12] для алгебраически замкнутого поля характеристики нуль и [KM12] для случая основного поля $\mathbb{R}$. В контексте групп автоморфизмов надстройки впервые были рассмотрены в [KZ99].

Наконец, ещё один сюжет, которым мы интересуемся — аддитивный аналог торических многообразий. Идея состоит в замене мультипликативной группы основного поля на аддитивную и рассмотрении коммутативной унипотентной группы $\mathbb{G}_a^n$. Аддитивным действием на многообразии мы называем действие группы $\mathbb{G}_a^n$ с открытой орбитой. Другими словами, мы рассматриваем открытые эквивариантные вложения векторной группы в алгебраические многообразия. Здесь аффинный случай тривиален, так как любая орбита унипотентной группы на аффинном многообразии замкнута. Для проективных многообразий теория нетривиальна даже для проективного пространства. В статье [HT99] Хассетт и Чинкель устанавливают соответствие между конечномерными коммутативными локальными алгебрами с единицей и аддитивными действиями на проективных пространствах; см. также [KL84]. Оказывается, что существуют бесконечные семейства попарно неэквивалентных аддитивных действий на $\mathbb{P}^n$ начиная с $n = 6$.

Похожий подход может быть применён для изучения аддитивных действий на проективных гиперповерхностях. На этот раз нужны дополнительные данные: гиперплоскость U в максимальном идеале $\mathfrak{m}$ алгебры A. Известно, что степень гиперповерхности X, соответствующей паре (A, U), равна такому максимальному числу d, что $\mathfrak{m}^d \nsubseteq U$, см. [AS11]. Аддитивное действие на невырожденной квадрике единственно [AS11], и (бесконечно много) индуцированных аддитивных действий на вырожденных квадриках коранга один описаны в [AP14]. В препринте [Baz13] изучен случай кубических гиперповерхностей; в частности, оказывается, что индуцированное аддитивное действие на невырожденной кубике также единственно. Следующий шаг — изучение как невырожденных, так и вырожденных гиперповерхностей произвольной размерности; см. раздел 4.

Основные результаты. Основными результатами диссертации являются следующие.

1. Все однородные локально нильпотентные дифференцирования на триномиальных алгебрах элементарны.
2. Классификации структур коммутативных моноидов на $\mathbb{A}^3$ и структур моноидов коранга один на произвольном нормальном аффинном многообразии.
3. Классификация поверхностей Данилевского, являющихся однородными многообразиями, но не являющихся однородными пространствами.
4. Единственность индуцированного аддитивного действия на невырожденной проективной гиперповерхности.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 7 статьях:

[Z19] Ю.И. Зайцева. Однородные локально нильпотентные дифференцирования нефакториальных триномиальных алгебр. Математические заметки, 105:6 (2019), 824-838

[GZ19] Sergey Gaifullin and Yulia Zaitseva. On homogeneous locally nilpotent derivations of trinomial algebras. Journal of Algebra and Its Applications 18 (2019), no. 10, article 1950196, 1-19

[ABZ20] Ivan Arzhantsev, Sergey Bragin, and Yulia Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine spaces. Communications in Contemporary Mathematics 22 (2020), no. 8, article 1950064

[DZ21] Sergey Dzhunusov and Yulia Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine surfaces. Forum Mathematicum 33 (2021), no. 1, 177-191

[Z24] Yulia Zaitseva. Affine monoids of corank one. `https://arxiv.org/abs/2312.08316`, 15 pages, принято в Results in Mathematics

[AZ22] И.В. Аржанцев и Ю.И. Зайцева. Эквивариантные пополнения аффинных пространств. Успехи математических наук 77:4 (466) (2022), 3-90

[AZ24] Ivan Arzhantsev and Yulia Zaitseva. Affine homogeneous varieties and suspensions. Research in the Mathematical Sciences 11 (2024), no. 2, article 27, 1-13

Апробация. Результаты диссертации были представлены на следующих докладах.

- Семинар факультета математики и компьютерных наук, 11 апреля 2024 г., Санкт-Петербург
- Третья конференция математических центров России, 10-15 октября 2023 г., Майкоп
- Конференция «Математика в современном мире», 19-23 сентября 2023 г., Вологда
- Конференция малых научных групп, 26-30 июня 2023 г., Санкт-Петербург

- Весенняя школа-конференция по алгебре в институте Эйлера, 29 апреля - 3 мая 2023 г., Санкт-Петербург
- Воркшоп «Аффинные пространства, действия алгебраических групп и ЛНД», 13-17 марта 2023 г., Калькутта, Индия
- Семинар И.Р. Шафаревича, Математический институт им. В.А. Стеклова, 21 февраля 2023 г., Москва
- Десятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», 28 января - 2 февраля 2023 г., Москва
- Вторая конференция математических центров России, 7-11 ноября 2022 г., Москва
- Конференция «Алгебраические группы: сезон белых ночей - II», 4-8 июля 2022 г., Санкт-Петербург
- Девятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», 21-26 августа 2021 г., Самара
- Первая конференция математических центров России, 9-13 августа 2021 г., Сочи
- Мини-воркшоп «Алгебраические группы: сезон белых ночей», 12-16 июля 2021 г., Санкт-Петербург
- Семинар В.А. Исковских, Математический институт им. В.А. Стеклова, 12 марта 2020 г., Москва
- Конференция «Algebraic Transformation Groups: the Mathematical Legacy of Domingo Luna», 28-30 октября 2019 г., Рим, Италия, постер
- Конференция «Кафедре высшей алгебры — 90 лет», 28-31 мая 2019 г., Москва
- Семинар «Группы Ли и теория инвариантов», 31 октября 2018 г., Москва
- Седьмая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», 18-26 августа 2018 г., Самара

Основные определения и результаты диссертации сформулированы в дальнейших разделах. Все результаты являются новыми и соответствуют теме диссертации. Они могут быть использованы в дальнейшем изучении алгебраических групп преобразований и автоморфизмов многообразий.

Я хотела бы выразить искренную признательность И.В. Аржанцеву за неоценимую помощь, советы и постоянную поддержку.

1. Локально нильпотентные дифференцирования на триномиальных алгебрах

Триномом называется многочлен $g = T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2} \in \mathbb{K}[T_{ij},\, 0 \leqslant i \leqslant 2,\, 1 \leqslant j \leqslant n_i]$, где $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$, $n = n_0 + n_1 + n_2$ и $T_i^{l_i} = T_{i1}^{l_{i1}} \ldots T_{in_i}^{l_{in_i}}$ для $0 \leqslant i \leqslant 2$. Рассмотрим триномиальную алгебру $R(g) = \mathbb{K}[T_{ij}]/(g)$. Обозначим через K факторгруппу $K = \mathbb{Z}^n / \operatorname{Im} L^*$, где

$$L^* = \begin{pmatrix} -l_0 & -l_0 \\ l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix}$$

является $(n \times 2)$-матрицей L^*, соответствующей триному g, а через $Q\colon \mathbb{Z}^n \to K$ — каноническую проекцию. Тогда равенства $\deg T_{ij} = Q(e_{ij})$ определяют K-градуировку на алгебре $R(g)$.

В статье [AHHL14] приведена конструкция элементарных дифференцирований; ниже она описана в случае триномиальной гиперповерхности. Определим дифференцирование $\delta_{C,\beta}$ алгебры $R(g)$, где входными данными являются последовательность

$C = (c_0, c_1, c_2)$, $c_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant c_i \leqslant n_i$, и вектор $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$, $\beta_i \in \mathbb{K}$, $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0$. Если $\beta_i \neq 0$ для каждого $i = 0, 1, 2$ и существует не более одного такого i_1, что $l_{i_1 c_{i_1}} > 1$, то мы полагаем

$$\delta_{C,\beta}(T_{ij}) = \begin{cases} \beta_i \prod\limits_{k \neq i} \frac{\partial T_k^{l_k}}{\partial T_{kc_k}}, & j = c_i, \\ 0, & j \neq c_i. \end{cases}$$

Если $\beta_{i_0} = 0$ для единственного i_0 и существует не более одного такого i_1, что $i_1 \neq i_0$ и $l_{i_1 c_{i_1}} > 1$, то

$$\delta_{C,\beta}(T_{ij}) = \begin{cases} \beta_i \prod\limits_{k \neq i, i_0} \frac{\partial T_k^{l_k}}{\partial T_{kc_k}}, & j = c_i, \\ 0, & j \neq c_i. \end{cases}$$

Эти равенства определяют дифференцирование $\delta_{C,\beta}$ на алгебре $R(g)$, которое является однородным и локально нильпотентным. Если $h \in R(g)$ — однородный элемент в ядре дифференцирования $\delta_{C,\beta}$, то $h\delta_{C,\beta}$ также является однородным локально нильпотентным дифференцированием. Такие дифференцирования называются элементарными.

В работе [Z19] описаны однородные локально нильпотентные дифференцирования на классе триномиальных алгебр $R(g)$. Этот класс включает в себя все нефакториальные триномиальные алгебры. Более точно, мы предполагаем, что в g есть не более одного одночлена, в который входит переменная в степени 1. Оставшийся случай закончен в [GZ19]. Результат получен в неразрывном сотрудничестве с С.А. Гайфуллиным. Объединяя два случая, мы получаем следующую теорему.

Теорема 1 ([GZ19, Theorem 1], [Z19, Теорема 1])**.** *Каждое однородное локально нильпотентное дифференцирование триномиальной алгебры $R(g)$ элементарно.*

2. Аффинные алгебраические моноиды

Неприводимое алгебраическое многообразие X с ассоциативным умножением $\mu\colon X \times X \to X$ называется алгебраическим моноидом, если μ является морфизмом и обладает нейтральным элементом. Ранг моноида — это размерность максимального тора в группе обратимых элементов. В статье [ABZ20] мы изучаем структуры коммутативных алгебраических моноидов на $\mathbb{A}^n$. Существуют единственные структуры коммутативных моноидов рангов 0 и n на $\mathbb{A}^n$; операция в этих случаях изоморфна покоординатным сложению и умножению. Используя результаты [AK15], мы получаем классификацию структур коммутативных моноидов ранга $n-1$ на $\mathbb{A}^n$ [ABZ20, Proposition 1]. Это покрывает все структуры коммутативных моноидов на $\mathbb{A}^1$ и $\mathbb{A}^2$ [ABZ20, Proposition 2].

Сформулируем результат для $\mathbb{A}^3$. Для $b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$, $b \leqslant c$, обозначим через $Q_{b,c}$ многочлен

$$Q_{b,c}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sum_{k=1}^{d} \binom{d+1}{k} x_1^{e+b(k-1)} y_1^{e+b(d-k)} x_2^{d-k+1} y_2^{k},$$

где $c = bd + e,\ d, e \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant e < b$.

Теорема 2 ([ABZ20, Theorem 1]). *Любой коммутативный моноид на* $\mathbb{A}^3$ *изоморфен одному из следующих моноидов:*

rk	*Обозначение*	$(x_1, x_2, x_3) * (y_1, y_2, y_3)$
0	$3A$	$(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3)$
1	$M \underset{b}{+} A \underset{c}{+} A$	$\big(x_1y_1,\ x_1^b y_2 + y_1^b x_2,\ x_1^c y_3 + y_1^c x_3\big),\ b, c \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ b \leqslant c$
1	$M \underset{b}{+} A \underset{b,c}{+} A$	$\big(x_1y_1,\ x_1^b y_2 + y_1^b x_2,\ x_1^c y_3 + y_1^c x_3 + Q_{b,c}(x_1, y_1, x_2, y_2)\big), b, c \in \mathbb{Z}_{>0}, b \leqslant c$
2	$M + M \underset{b,c}{+} A$	$(x_1y_1,\ x_2y_2,\ x_1^b x_2^c y_3 + y_1^b y_2^c x_3),\ b, c \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ b \leqslant c$
3	$3M$	$(x_1y_1,\ x_2y_2,\ x_3y_3)$

Более того, два моноида различных типов или одинаковых типов с различными значениями параметров из этого списка неизоморфны.

Наиболее сложным является случай с группой обратимых элементов $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a^2$, где $\mathbb{G}_m = (\mathbb{K}^\times, \times)$ — мультипликативная группа основного поля. Здесь мы сводим задачу к классификации пар коммутирующих локально нильпотентных дифференцирований δ_1, δ_2 на алгебре многочленов $\mathbb{K}[x, y, z]$, которые являются однородными степени нуль относительно градуировки, происходящей из $\mathbb{G}_m$-действия.

В статье [Bi22] приведена классификация структур некоммутативных моноидов на нормальных аффинных поверхностях. В [DZ21] и [Z24] мы получаем классификацию структур соответственно коммутативных и некоммутативных моноидов ранга $n-1$ на нормальных аффинных многообразиях размерности n. Пусть X_σ — аффинное торическое многообразие, заданное конусом σ в векторном пространстве $N_\mathbb{Q} = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$, где N — решётка однопараметрических подгрупп действующего тора $\mathbb{T}$. Обозначим через M решётку характеров тора $\mathbb{T}$. Существует естественное спаривание $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\colon N_\mathbb{Q} \times M_\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, где $M_\mathbb{Q} = M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$. Рассмотрим полиэдральный конус $\sigma^\vee$, двойственный к конусу σ относительно этого спаривания:

$$\sigma^\vee = \{u \in M_\mathbb{Q} \mid \langle v, u\rangle \geqslant 0 \ \text{ для всех } v \in \sigma\}.$$

Множество $S_\sigma = M \cap \sigma^\vee$ является конечно порождённой полугруппой, и $\mathbb{K}[S_\sigma] \cong \mathbb{K}[X_\sigma]$. Для элемента решётки $u \in M$ обозначим через $\chi^u\colon \mathbb{T} \to \mathbb{K}^\times$ соответствующий характер. Так как тор $\mathbb{T}$ отождествляется с открытой орбитой, то любой характер χ^u отождествляется с рациональной функцией на X_σ. Тогда алгебра регулярных функций на X_σ допускает разложение $\mathbb{K}[X_\sigma] = \bigoplus\limits_{u \in S_\sigma} \mathbb{K}\chi^u$.

Пусть $p_i \in N,\ 1 \leqslant i \leqslant m,$ — примитивные векторы на лучах конуса σ. Для любого $1 \leqslant i \leqslant m$ обозначим

$$\mathfrak{R}_i = \{e \in M \mid \langle p_i, e\rangle = -1,\ \langle p_j, e\rangle \geqslant 0 \ \text{ для всех } j \neq i,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}.$$

Элементы множества $\mathfrak{R} = \bigsqcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \mathfrak{R}_i$ называются корнями Демазюра торического многообразия X_σ.

Теорема 3 ([Z24, Theorem 1]). *Пусть* X *— аффинный моноид коранга один. Тогда многообразие* $X = X_\sigma$ *торическое и коумножение* $\mathbb{K}[X_\sigma] \to \mathbb{K}[X_\sigma] \otimes \mathbb{K}[X_\sigma]$ *имеет вид*

$$\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u \,(1 \otimes \chi^{e_1} + \chi^{e_2} \otimes 1)^{\langle p, u\rangle}, \tag{1}$$

где p *— примитивный вектор на луче конуса* σ *и* e_1, e_2 *— корни Демазюра, отвечающие вектору* p*. Обратно, для любого аффинного торического многообразия* X_σ*, любого* *примитивного вектора p на луче конуса σ и любых корней Демазюра e_1, e_2, отвечающих выбранному вектору p, формула* (1) *определяет структуру моноида коранга один на X_σ.*

Также мы описываем множества обратимых элементов и идемпотентов таких моноидов X_σ. Они зависят от взаимного расположения корней Демазюра e_1, e_2 и конуса σ. А именно, обозначим через $O_\gamma \subseteq X_\sigma$ торическую орбиту, соответствующую грани γ конуса σ, и через x_γ — выделенную точку, заданную в O_γ уравнениями $\chi^u(x_\gamma) = 1$ для всех $u \in \gamma^\perp$. Множество обратимых элементов оказывается равным объединению $O_\rho \cup O_0$, где ρ — луч конуса σ с примитивным вектором p [Z24, Theorem 1]. Пусть $E(X_\sigma)$ — множество идемпотентов в X_σ и $E_\gamma = E(X_\sigma) \cap O_\gamma$. Тогда выполнено следующее [Z24, Theorem 3]:

(a) $E_\gamma = \{x_\gamma\}$, если ρ — луч конуса γ;
(b) $E_\gamma = \varnothing$, если ρ — не луч конуса γ и $e_1, e_2 \notin \gamma^\perp$;
(c) $E_\gamma = \varnothing$, если ρ — не луч конуса γ и $e_1, e_2 \in \gamma^\perp$;
(d) $E_\gamma = O_\gamma \cap \{\chi^u = 1 \ \ \forall u \in \operatorname{cone}(\gamma, \rho)^\perp \cap S_\sigma\}$ иначе.

Геометрически неприводимые компоненты подмногообразия идемпотентов не пересекаются, каждая из них либо является точкой, либо изоморфна аффинной прямой [Z24, Proposition 3(b)]. Аффинная прямая здесь появляется как замыкание множества E_γ из пункта (d); это замыкание является объединением E_γ и одной точки — идемпотента из пункта (a) [Z24, Proposition 3(a)]. Идемпотенты также связаны с действием группы $G \times G$ левыми и правыми умножениями, где G — группа обратимых элементов в моноиде. Более точно, любая неприводимая компонента многообразия $E(X_\sigma)$ является подмножеством некоторой $(G\times G)$-орбиты, и любая $(G\times G)$-орбита содержит не более одной неприводимой компоненты многообразия $E(X_\sigma)$ [Z24, Proposition 3(c)]. Одним из возможно существующих идемпотентов является нулевой элемент, то есть такой элемент $\mathbf{0} \in X_\sigma$, что $\mathbf{0} * x = x * \mathbf{0} = \mathbf{0}$ для любого $x \in X_\sigma$. Мы показываем, что моноид X_σ имеет нуль тогда и только тогда, когда $\sigma^\perp = 0$ и $-e_1, -e_2 \notin \sigma^\vee$; в этом случае $\mathbf{0} = x_\sigma$ [Z24, Proposition 4].

Также описан центр моноида X_σ. А именно, он равен

$$\overline{O_\rho} \cap \{\chi^{u+e_1} = \chi^{u+e_2} \quad \forall u \in S_\sigma : \langle p, u\rangle = 1\},$$

если $e_1 \neq e_2$, то есть если X_σ некоммутативен [Z24, Proposition 5]. Отсюда следует, что размерность центра равна $\dim X_\sigma - 2$ [Z24, Corollary 3]. Более того, неприводимые компоненты многообразия $E(X_\sigma)$, изоморфные аффинной прямой, не пересекают центр, а изолированные точки в $E(X_\sigma)$ лежат в центре [Z24, Proposition 6].

3. Аффинные однородные пространства

Назовём алгебраическое многообразие X однородным, если группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}(X)$ действует на X транзитивно. Напомним, что X — однородное пространство, если существует транзитивное действие алгебраической группы G на X; в этом случае X отождествляется с многообразием левых смежных классов G/H, где H — стабилизатор в G некоторой точки в X.

Дадим определение надстройки.

Определение 1. Пусть Y — аффинное многообразие и $f \in \mathbb{K}[Y]$ — непостоянная регулярная функция на Y. Тогда гиперповерхность $\operatorname{Susp}(Y, f)$, заданная в прямом произведении $\mathbb{A}^2 \times Y$ уравнением $uv = f(y)$, где $y \in Y$ и $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[u, v]$, называется надстройкой над Y.

В работе [AZ24] мы находим критерий гладкости надстройки. А именно, надстройка $\operatorname{Susp}(Y, f)$ над аффинным многообразием Y с непостоянной функцией $f \in \mathbb{K}[Y]$ гладкая тогда и только тогда, когда многообразие Y и схема $\operatorname{Spec} \mathbb{K}[Y]/(f)$ гладкие [AZ24, Corollary 1]. Это даёт критерий гладкости для итерированных надстроек и позволяет построить много однородных многообразий [AZ24, Corollaries 1–4].

Чтобы получить конкретный класс примеров, мы приводим критерии, когда поверхности Данилевского являются однородными многообразиями и однородными пространствами. Пусть x, y, z — координаты в $\mathbb{A}^3$. Поверхность Данилевского — это поверхность, заданная в $\mathbb{A}^3$ уравнением $xz^n = f(y)$, где $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $f \in \mathbb{K}[y]$. Две поверхности Данилевского с параметрами $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ и многочленами $f_1(y), f_2(y)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $n_1 = n_2$ и $f_1(y) = af_2(by + c)$ для некоторых $a, b \in \mathbb{K}^\times$, $c \in \mathbb{K}$, см. [Da04, Lemma 2.10].

Известно, что при $n \neq 1$ поверхность Данилевского $xz^n = f(y)$ не является однородной; например, это следует из описания её группы автоморфизмов, найденного в [ML01]. Легко проверить, что поверхность X гладкая тогда и только тогда, когда многочлен f не имеет кратных корней. Пусть X задана уравнением $xz = f(y)$, где f не имеет кратных корней. Заметим, что X — однородное многообразие. Действительно, поверхность X является надстройкой над аффинной прямой, поэтому она гибкая [AKZ12]. В соответствии с [AFKKZ13], действие группы $\operatorname{SAut}(X)$ транзитивно на множестве гладких точек в X, которое совпадает с X, так как X гладкая.

Теорема 4 ([AZ24, Theorem 3])**.** *Пусть X — аффинная поверхность, заданная в $\mathbb{A}^3$ уравнением $xz = f(y)$, где f — непостоянный многочлен без кратных корней. Тогда X является однородным многообразием, но не является однородным пространством тогда и только тогда, когда* $\deg f \geqslant 3$.

Для доказательства этой теоремы мы используем классификацию поверхностей, допускающих такое действие алгебраической группы с открытой орбитой, что дополнение к этой орбите конечно; см. [Gi71, Po73]. Для $\deg f = 1$ и $\deg f = 2$ поверхность X изоморфна аффинному пространству $\mathbb{A}^2$ и однородному пространству SL_2/T соответственно, где T — максимальный тор в SL_2.

Также мы строим аффинные надстройки произвольной размерности, которые являются однородными многообразиями, но не являются однородными пространствами [AZ24, Theorem 4]. Эти гиперповерхности заданы уравнениями вида $uv = p_0(\mathbf{y}) \dots p_d(\mathbf{y})$, где u, v и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$ обозначают координаты в $\mathbb{A}^{n+1}$, $p_i \in \mathbb{K}[\mathbf{y}]$ — неприводимые многочлены и p_0 — переменная в $\mathbb{K}[\mathbf{y}]$. В доказательстве мы используем, что ранг группы Пикара многообразия X не превосходит размерности X, если X — однородное пространство [AZ24, Lemma 2].

4. Аддитивные действия на проективных гиперповерхностях

В работе [AZ22] мы изучаем аддитивные действия, то есть эффективные регулярные действия группы $\mathbb{G}_a^n$ с открытой орбитой. Мы применяем соответствие Хассетта-Чинкеля для изучения индуцированных аддитивных действий на проективных гиперповерхностях, то есть аддитивных действий, которые могут быть продолжены до действия на объемлющем проективном пространстве. Более точно, существует биекция между индуцированными аддитивными действиями на гиперповерхностях в $\mathbb{P}^{n+1}$, не являющихся гиперплоскостями, и парами (A, U), где A — локальная коммутативная ассоциативная алгебра с единицей размерности $n+2$ с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и $U \subseteq \mathfrak{m}$ — подпространство размерности n, порождающее алгебру A.

Определение 2. Пусть проективная гиперповерхность $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ степени d задана уравнением $f(z_0, \ldots, z_{n+1}) = 0$. Гиперповерхность X называется невырожденной, если не существует такой линейной замены переменных, что количество переменных в f после этой замены не превосходит $n+1$.

Конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра называется горенштейновой, если размерность цоколя $\operatorname{Soc} A = \{x \in A \mid \mathfrak{m}x = 0\}$ равна 1. Оказывается, что случай невырожденных гиперповерхностей соответствует горенштейновым локальным алгебрам. Более точно, индуцированные аддитивные действия на невырожденных гиперповерхностях X степени d в $\mathbb{P}^{n+1}$ находятся в биекции с парами (A, U), где A — горенштейнова алгебра размерности $n+2$ с цоколем $\mathfrak{m}^d$ и $\mathfrak{m} = U \oplus \mathfrak{m}^d$ [AZ22, Теорема 2.30].

Несколько результатов об аддитивных действиях могут быть доказаны с использованием этой техники. В частности, мы доказываем, что индуцированное аддитивное действие на невырожденной проективной гиперповерхности единственно, если оно существует.

Теорема 5 ([AZ22, Теорема 2.32])**.** *Пусть $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ — невырожденная гиперповерхность. Тогда существует не более одного индуцированного аддитивного действия на X с точностью до эквивалентности.*

Чтобы доказать теорему, мы рассматриваем d-линейную форму F, соответствующую уравнению гиперповерхности X. Обозначим

$$\operatorname{Ker} F = \{x \in A \mid F(x, z^{(2)}, \ldots, z^{(d)}) = 0 \ \ \forall z^{(2)}, \ldots, z^{(d)} \in A\}.$$

Мы показываем, что $\operatorname{Ker} F$ — максимальный идеал алгебры A, содержащийся в U, где (A, U) — пара, соответствующая гиперповерхности X; см. [AZ22, Лемма 2.19(b)]. Условие невырожденности X означает, что $\operatorname{Ker} F = 0$, поэтому в A нет ненулевых идеалов, содержащихся в U. Это ключевое наблюдение в доказательстве единственности пары (A, U).

Список литературы

[AH06] Klaus Altmann and Jürgen Hausen. Polyhedral divisors and algebraic torus actions. Math. Ann. 334 (2006), no. 3, 557-607

[Ar18] Ivan Arzhantsev. Infinite transitivity and special automorphisms. Ark. Mat. 56 (2018), no. 1, 1-14

[ADHL15] Ivan Arzhantsev, Ulrich Derenthal, Juergen Hausen, and Antonio Laface. *Cox rings*. Cambridge Stud. Adv. Math., no. 144, Cambridge Univ. Press, 2015, 530 pages

[AFKKZ13] Ivan Arzhantsev, Hubert Flenner, Shulim Kaliman, Frank Kutzschebauch, and Mikhail Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. 162 (2013), no. 4, 767-823

[AHHL14] Ivan Arzhantsev, Jürgen Hausen, Elaine Herppich, and Alvaro Liendo. The automorphism group of a variety with torus action of complexity one. Mosc. Math. J. 14 (2014), no. 3, 429-471

[AG10] Ivan Arzhantsev and Sergey Gaifullin. Cox rings, semigroups, and automorphisms of affine varieties. Sb. Math. 201 (2010), no. 1-2, 1-21

[AG17] Ivan Arzhantsev and Sergey Gaifullin. The automorphism group of a rigid affine variety. Math. Nachr. 290 (2017), no. 5-6, 662-671

[AK15] Ivan Arzhantsev and Polina Kotenkova. Equivariant embeddings of commutative linear algebraic groups of corank one. Doc. Math. 20 (2015), 1039-1053

[AKZ12] Ivan Arzhantsev, Karine Kuyumzhiyan, and Mikhail Zaidenberg. Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity. Sb. Math. 203 (2012), no. 7, 923-949

[APS14] Ivan Arzhantsev, Alexander Perepechko, and Hendrik Suess. Infinite transitivity on universal torsors. J. Lond. Math. Soc. 89 (2014), no. 3, 762-778
[AP14] Ivan Arzhantsev and Andrey Popovskiy. Additive actions on projective hypersurfaces. In: Automorphisms in Birational and Affine Geometry, Springer Proc. Math. Stat., 79, Springer, 2014, 17-33
[AS11] Ivan Arzhantsev and Elena Sharoyko. Hassett-Tschinkel correspondence: Modality and projective hypersurfaces. J. Algebra 348 (2011), no. 1, 217-232
[Bat93] Victor Batyrev. Quantum cohomology rings of toric manifolds. Soc. Math. France, Astérisque 218 (1993), 9-34
[Baz13] Ivan Bazhov. Additive structures on cubic hypersurfaces. arXiv:1307.6085, 8 pages
[BH03] Florian Berchtold and Jürgen Hausen, Homogeneous coordinates for algebraic varieties, J. Algebra 266 (2003), no. 2, 636-670
[Bi22] Boris Bilich. Classification of noncommutative monoid structures on normal affine surfaces. Proc. Amer. Math. Soc. 150 (2022), no. 10, 4129-4144
[Br21] Michel Brion. Some automorphism groups are linear algebraic. Mosc. Math. J. 21 (2021), no. 3, 453-466
[Cox95] David Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. J. Algebraic Geom. 4 (1995), no. 1, 17-50
[CLS11] David Cox, John Little, and Henry Schenck. *Toric Varieties.* Grad. Stud. Math. 124, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011
[Da04] Daniel Daigle. Locally nilpotent derivations and Danielewski surfaces. Osaka J. Math. 41 (2004), no. 1, 37-80
[De70] Michel Demazure. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 3 (1970), 507-588
[Du04] Adrien Dubouloz. Completions of normal affine surfaces with a trivial Makar-Limanov invariant. Michigan Math. J. 52 (2004), no. 2, 289-308
[FZ05] Hubert Flenner and Mikhail Zaidenberg. Locally nilpotent derivations on affine surfaces with a $\mathbb{C}^*$-action. Osaka J. Math. 42 (2005), no. 4, 931-974
[Fu93] William Fulton. *Introduction to toric varieties.* Annales of Math. Studies 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993
[Ga08] Sergey Gaifullin. Affine toric SL(2)-embeddings. Sb. Math. 199 (2008), 319-339
[Ga21] Sergey Gaifullin. Automorphisms of Danielewski varieties. J. Algebra 573 (2021), 364-392
[Gi70] Marat Gizatullin. On affine surfaces that can be completed by a nonsingular rational curve. Math. USSR-Izv. 4 (1970), no. 4, 787-810
[Gi71] Marat Gizatullin. Affine surfaces which are quasihomogeneous with respect to an algebraic group. Math. USSR-Izv. 5 (1971), no. 4, 754-769
[GD77] Marat Gizatullin and Vladimir Danilov. Automorphisms of affine surfaces. II. Math. USSR-Izv. 11 (1977), no. 1, 51-98
[GS19] Neena Gupta and Sourav Sen. On double Danielewski surfaces and the Cancellation Problem. J. Algebra 533 (2019), 25-43
[HT99] Brendan Hassett and Yuri Tschinkel. Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$. Int. Math. Res. Not. IMRN 1999 (1999), no. 22, 1211-1230
[HH13] Jürgen Hausen and Elaine Herppich. Factorially graded rings of complexity one. In: Torsors, étale homotopy and applications to rational points. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 405, 414-428, 2013
[HHS11] Jürgen Hausen, Elaine Herppich, and Hendrik Süß. Multigraded factorial rings and Fano varieties with torus action. Doc. Math. 16 (2011), 71-109
[HS10] Jürgen Hausen and Hendrik Süß. The Cox ring of an algebraic variety with torus action. Adv. Math. 225 (2010), no. 2, 977-1012
[HW17] Jürgen Hausen and Milena Wrobel. Non-complete rational T-varieties of complexity one. Math. Nachr. 290 (2017), no. 5-6, 815-826
[HK00] Yi Hu and Sean Keel. Mori Dream Spaces and GIT. Michigan Math. J. 48 (2000), no. 1, 331-348
[Hu75] James Humphreys. *Linear Algebraic Groups.* Grad. Texts in Math. 21, Springer, New York, 1975
[KZ99] Shulim Kaliman and Mikhail Zaidenberg. Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group. Transform. Groups 4 (1999), no. 1, 53-95

[KL84] Friedrich Knop and Herbert Lange. Commutative algebraic groups and intersections of quadrics. Math. Ann. 267 (1984), no. 4, 555-571

[KM12] Karine Kuyumzhiyan and Frédéric Mangolte. Infinitely transitive actions on real affine suspensions. J. Pure Appl. Algebra 216 (2012), no. 10, 2106-2112

[Li10] Alvaro Liendo. Affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations. Transform. Groups 15 (2010), no. 2, 389-425

[LRU22] Alvaro Liendo, Andriy Regeta and Christian Urech. On the characterization of Danielewski surfaces by their automorphism groups. Transform. Groups 27 (2022), 181-187

[ML01] Leonid Makar-Limanov. On the group of automorphisms of a surface $x^n y = P(z)$. Israel J. Math. 121 (2001), 113-123

[Po73] Vladimir Popov. Classification of affine algebraic surfaces that are quasihomogeneous with respect to an algebraic group. Math. USSR-Izv. 7 (1973), no. 5, 1039-1056

[Pu88] Mohan Putcha. *Linear Algebraic Monoids.* London Math. Soc. Lecture Notes, vol. 133, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988

[Re05] Lex Renner. *Linear Algebraic Monoids*. Encyclopaedia Math. Sci. 134, Springer, Berlin, 2005

[Ri98] Alvaro Rittatore. Algebraic monoids and group embeddings. Transform. Groups 3 (1998), no. 4, 375-396

[Ri07] Alvaro Rittatore. Algebraic monoids with affine unit group are affine. Transform. Groups 12 (2007), no. 3, 601-605

[Sh17] Anton Shafarevich. Flexibility of affine horospherical varieties of semisimple groups. Sb. Math. 208 (2017), no. 2, 285-310

[St96] Bernd Sturmfels. *Gröbner Bases and Convex Polytopes*. Univ. Lecture Ser. 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996

[Vi95] Ernest Vinberg. On reductive algebraic semigroups. In: Lie Groups and Lie Algebras, E.B. Dynkin Seminar, S. Gindikin and E. Vinberg, Editors, AMS Transl. 169, 145-182, Amer. Math. Soc., 1995