Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет математики

на правах рукописи

Ненашева Марина Сергеевна

Геометрия и динамика на пространстве модулей мероморфных дифференциалов

Резюме диссертации

на соискание учёной степени

кандидата математических наук

Научный руководитель

Доктор физико-математических наук, профессор

Ландо Сергей Константинович

Москва–2024

Содержание

Введение

Работа посвящена изучению пространств модулей мероморфных дифференциалов на алгебраических кривых. В первой части мы исследуем пространства голоморфных дифференциалов. Используя методы, разработанные в этой части, мы распространяем их на изучение пространств дифференциалов с полюсами.

Пространства модулей голоморфных диференциалов. Элементы пространства H_g голоморфных дифференциалов на римановых поверхностях рода g называют поверхностями переноса или плоскими поверхностями. Они естественным образом возникают при изучении различных динамических систем.

Выбор голоморфной 1-формы ω на компактной римановой поверхности X эквивалентен заданию набора карт на X таких, что отображения перехода являются переносами; карты могут иметь ветвления в конечном числе точек, соответствующих нулям ω, и задаются локально, в окрестности точки $z_0 \in X$, как $z \mapsto \int_{z_0}^{z} \omega$.

Эти специальные карты (X, ω) имеют отражение в стратах пространства модулей $H_g(\kappa)$, состоящего из римановых поверхностей рода g с голоморфными 1-формами, имеющими нули заданной кратности $\kappa = (k_1, \ldots, k_n)$. Страты сами по себе локально моделируются комплексными векторными пространствами, с отображениями перехода между картами, являющимися линейными функциями, называемыми "координатами периодов". Локальные координаты атласа периодов представляют собой набор интегралов дифференциала вдоль замкнутых петель на поверхности с проколами в полюсах (абсолютных периодов) вместе с интегралами дифференциала вдоль путей, соединяющих различные нули (относительными периодовми).

Слоение периодов. Фиксируя абсолютные периоды мы определяем на каждом слое $H_g(\kappa)$ слоение периодов, также известное в литературе как *Rel*-слоение или *Kernel* слоение. Слоение периодов изучалось, например, в [17], [7], [29].

Действие $GL_2^+(\mathbb{R})$. Группа $GL_2^+(\mathbb{R})$ действует на пространстве дифференциалов. Это действие сохраняет стратификацию пространства дифференциалов по порядкам их нулей. Действие $GL_2^+(\mathbb{R})$ локально задается в координатах периодов диагональным действием на произведение копий $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, или явно в терминах действительной и мнимой частей голоморфной 1-формы как

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Re(\omega) \\ Im(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aRe(\omega) + bIm(\omega) \\ cRe(\omega) + dIm(\omega) \end{pmatrix}.$$

Орбиты и замыкания орбит. Задачи классификации замкнутых орбит, замыканий орбит и классификации конечных мер относительно действия $GL_2^+(\mathbb{R})$ приводят к множеству интересных результатов. Мазур [26] и Вич [40] независимо доказали, что существует естественная конечная вероятностная мера класса Лебега на подмножестве плоских поверхностей единичной площади, известная сегодня как мера Мазура-Вича. Действие подгруппы $SL_2(\mathbb{R})$ сохраняет эту меру. Следуя аргументу Хопфа в эргодической теории, Мазур и Вич доказали, что действие диагональной подгруппы $SL_2(\mathbb{R})$ эргодично относительно этой меры. Следовательно, большинство орбит плотно.

Первые $SL_2(\mathbb{R})$-замкнутые орбиты были обнаружены Вичем [42]. такие орбиты соответствовали поверхностям, чей стабилизатор является решеткой в $SL_2(\mathbb{R})$, для доказательства см., например, [41]. Для получения дополнительных результатов, связывающих свойства $SL_2(\mathbb{R})$-орбит и геометрию заданной плоской поверхности, см., например, Мазур [25], Минский и Вайс [31], Смайли и Вайс [36].

Тот факт, что стабилизатор замкнутой орбиты является решеткой, означает, что проекция замкнутой орбиты в $H_g(\kappa)$ на пространство модулей римановых поверхностей M_g является алгебраической кривой. Фактически, все кривые изометричечно вложенные в M_g (известные как кривые Тейхмюллера) являются проекциями замкнутых орбит с точностью до двойного накрытия, связывающего квадратичные дифференциалы с абелевыми дифференциалами.

Одно из семейств замкнутых орбит соответствует орбитам квадратно-замощенных поверхностей, представляющих собой конечные листовые накрытия тора. Проблема построения других семейств замкнутых орбит оказалась очень сложной, поскольку явное вычисление стабилизатора для заданной поверхности переноса обычно затруднительно, для примера алгоритма вычисления см. работу Мукамеля [35]. Другой известный набор таких орбит был обнаружен при изучении замыканий $GL_2^+(\mathbb{R})$-орбит.

Аффинно-инвариантные подмногообразия. Из работы Эскина, Мирзахани и Мухаммади [11] известно, что $GL_2^+(\mathbb{R})$-инвариантные подмножества представляют собой конечные объединения аффинно-инвариантных подмногообразий. Последнее - это образ собственного вложения открытого связного многообразия в страт $H_g(\kappa)$ такой, что образ каждой точки вместе с небольшой окрестностью задается линейными уравнениями в координатах периодов с действительными коэффициентами и нулевым константным членом.

С другой стороны, любое аффинно-инвариантное подмногообразие $GL_2^+(\mathbb{R})$-инвариантно, это намного более простое наблюдение, для доказательства см. i.e. [44]. Существует только счетное число аффинно-инвариантных подмногообразий [11], [43].

Из вышесказанного следует, что замкнутые $GL_2^+(\mathbb{R})$-орбиты совпадают с 2-мерными аффинно-инвариантными подмногообразиями.

Собственные формы Прима. Мёллер доказал, что в случае 2-мерных замыканий орбит, нули голоморфных 1-форм должны отображаться в точки кручения на (факторе) якобиана [32], [33]. Филипп обобщил этот результат на старшие размерности в [13], [14], показав, что аффинно-инвариантные подмногообразия являются квазипроективными многообразиями. В частности, это означает, что любое замыкание $GL_2^+(\mathbb{R})$-орбиты может быть полностью определено с помощью алгебраических условий на якобиан.

Первые примеры аффинно-инвариантных подмногообразий были даны МакМалленом в [28], где он описал замыкания орбит для некоторых плоских поверхностей рода 2. Полная классификация в роде 2 была получена тем же автором в [30]. Он доказал, что если орбита не замкнута и не плотна, то она является собственной формой Прима. Последние - это поверхности, допускающие особый вид инволюции, такой, что подмногообразие Прима якобиана, определенное относительно этой инволюции, допускает действительное умножение на некоторый квадратичный порядок (см. раздел 1.4 для точных определений).

В [27] строятся бесконечные семейства собственных форм Прима, называемые локусами собственных форм Прима, в роде не превышающем 5. Показано, что они не могут существовать для более высоких родов. Доказано, что каждый локус является $GL_2^+(\mathbb{R})$-инвариантным подмножеством. Построение зависит от дискриминанта квадратичного порядка и позволяет строить только локусы, чьи связные компоненты являются замыканиями орбит. В случае рода 2 число связных компонент локусов для в обоих стратах было вычислено в [30].

Вопрос о подсчете отдельных замыканий орбит в локусах собственных форм Прима в родах $3, 4$ был решен для некоторых страт в серии статей Ланно и Нгуена [21], [23], [24], [22].

В этой работе мы решаем эту проблему для максимально возможного рода 5, для страта $H_5(4,4)$, где 1-форма имеет два нуля порядка 4. Мы показываем, что каждый локус собственных форм Прима является замыканием единственной орбиты, см. 1.9.

Методы, используемые в нашей работе, продолжают подход, разработанный Ланно и Нгуеном. Основным инструментом, который мы используем, являются изопериодические преобразования собственных форм Прима.

Изопериодная деформация поверхности переноса $(X, \omega) \in H_g(\kappa)$ - это путь $(X_t, \omega_t), t \in [a, b]$, внутри страта $H_g(\kappa)$ такой, что для любого класса абсолютных гомологий γ значение $\int_\gamma \omega_t$ является постоянным. Поверхности, полученные в результате изопериодических преобразований из собственных форм Прима, также принадлежат локусам собственных форм Прима.

Пространства модулей мероморфных дифференциалов. Понятие поверхности переноса можно обобщить на случай мероморфных 1-форм. Риманова поверхность X, снабженная ненулевой мероморфной 1-формой ζ, называется *плоской поверхностью с полюсами* или *некомпактной поверхностью переноса.*

Пусть $h = (h_1, \cdots, h_n)$ - набор положительных целых чисел, таких что $\sum h_i > 1$, и пусть $M_{g,n}(h)$ обозначает пространство модулей пар (X, ζ), где X - компактная риманова поверхность рода g, а ζ - мероморфный дифференциал с полюсами порядка h_i в отмеченных точках $P_1, \ldots, P_n$.

Пространство стратифицировано по кратностям нулей. Координаты периодов на слоях могут быть определены с помощью относительной группы когомологий проколотой поверхности $X \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$.

Компоненты связности слоев были классифицированы Буасси [5]. На этом пространстве модулей существует естественное $GL_2^+(\mathbb{R})$-действие, и оно может быть снабжено аналогом меры Мазура–Вича; однако его общий объем бесконечен. $GL_2^+(\mathbb{R})$-действие может иметь стабилизаторы положительной размерности в этом случае. Можно определить понятие кривых Тейхмюллера , и классификация таких объектов приведена в [34]. В [37], [38] изучается геометрия компонент связности этих пространств модулей. Слои разбиваются на камеры, которые разделяются локусом, называемым дискриминантом. Известно, что дискриминант является $GL_2^+(\mathbb{R})$-инвариантной гиперповерхностью коразмерности 1.

Слоение страт, определенное фиксированными вычетами в полюсах 1-форм, изучается в [15].

Существование локальных координат периодов позволяет определить изопериодическое слоение на стратах аналогично случаю голоморфных дифференциалов. Свойства этого слоения были недавно изучены в [12] для случая поверхностей рода 1, где мероморфная 1-форма имеет единственный полюс второго порядка и два простых нуля.

Изопериодическое слоение на подпространстве пространства модулей мероморфных дифференциалов состоящим из дифференциалов, чьи периоды строго вещественные, изучалось в [20]. Такие мероморфные 1-формы называются вещественно нормированными дифференциалами. Они являются центральными объектами в теории возмущений Виттема алгебро-геометрических решений интегрируемых систем. В [16] было показано, что некоторые структуры и построения теории Виттема могут быть полезны для понимания геометрии пространств модулей римановых поверхностей с отмеченными точками. В частности, было получено новое доказательство границы Диаса на размерность полных подмногообразий пространств модулей. В [19] вещественно нормированные дифференциалы использовались для доказательства гипотезы Арбарелло [10]. Другим контекстом, в котором возникают нормированные дифференциалы, является асимптотический анализ комплексных ортогональных многочленов, см., например, [9], [3], [2]. Совсем недавно вещественно нормированные дифференциалы использовались как инструмент при изучении пространств решений заданной степени для уравнений комплексного Пелля-Абеля в [4].

В этой работе мы продолжаем исследовать свойства изопериодического слоения на пространстве вещественно нормированных дифференциалов с единственным полюсом второго порядка для кривых рода g. Это пространство (обозначенное R_g) стратифицировано кратностями нулей, слои обозначаются $R_g(\kappa)$.

Комбинаторная модель. Комбинаторная модель главного страта (все нули дифференциала имеют порядок 1) пространства вещественно нормированных дифференциалов с одним полюсом второго порядка, предложенная в [20], описывает изопериодические преобразования с помощью инструментов из теории инвариантов узлов Васильева. В этой работе мы используем это описание для характеристики листов изопериодического слоения на этом страте.

Аддитивная группа, изоморфная $\mathbb{Z}^{2g}$, вместе с ее гомоморфизмом в $\mathbb{C}$, наделенная симплектической формой, называется поляризованным модулем [29].

Мы доказываем, что для заданной группы ранга $2g$ соответствующие поляризованные модули перечисляют листы изопериодического слоения на главном страте, см. 2.2.

В следующих разделах содержится необходимая теоретическая информация и формулируются полученные результаты. Второй раздел посвящен объяснению понятия поверхностей переноса, пространств модулей поверхностей переноса и локусов собственных форм Прима. Третий раздел посвящен пространствам модулей мероморфных дифференциалов и вещественно нормированных дифференциалов.

Личный вклад

Все результаты, представленные в этой диссертации, были получены автором.

Опубликованные работы

Результаты, изложенные в этой диссертации, были опубликованы в 3 статьях:

Ненашева М., *Об изопериодическом слоении в страте коразмерности один в пространстве вещественно-нормированных дифференциалов*, 2024, Алгебра и анализ, 36:2, стр. 93-107

Ненашева М., *Главный страт в пространстве модулей вещественно нормированных дифференциалов с одним полюсом,* 2024, принят к публикации в Функциональный анализ и его приложеня

Ненашева М., *Связность локусов Прима в роде 5* 2023, Докл. Мат., 108, стр. 486–489

Аппробация результатов диссертации

Результаты, изложенные в этой диссертации, были представлены на следующих конференциях:

Международная конференция “Инвариантность и интегрируемость 2”, Пушкин, сентябрь 2024 .

Доклад: “Изопериодическое слоение на пространстве вещественно нормированных дифференциалов”

Международная конференция “Конструктивные методы теории римановых поверхностей и приложения”, университет Сириус, Сочи, Ноябрь 2023.

Доклад: “Изопериодическое слоение на пространстве вещественно нормированных дифференциалов”

Международная школа и конференция “Инвариантность и интегрируемость”, Репино, Октябрь-Ноябрь 2023.

Доклад: “Изопериодическое слоение на пространстве вещественно нормированных дифференциалов”

Международная конференция “Эргодическая теория и смежные вопросы”, МИАН, Москва, Ноябрь 2022.

Доклад: “О компонентах связности в локусах Прима в роде 5”

Вторая конференция Математических центров России,МГУ, МИАН, Москва, Ноябрь 2022.

Доклад: “О компонентах связности в локусах Прима в роде 5”

Надежность результатов

Все результаты диссертации обоснованы строгими математическими доказательствами. Результаты диссертации были представлены на нескольких конференциях и научных семинарах.

1 Поверхности переноса

Абелев дифференциал ω на римановой поверхности X - это глобальное голоморфное сечение кокасательного расслоения на X. Комплексное векторное пространство абелевых дифференциалов на римановой поверхности X обозначается $H^{1,0}(X)$. Для X, поверхности рода g, $\dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(X) = g$. Поскольку каждый ненулевой абелев дифференциал на X является замкнутой, но не точной 1-формой на X, пространство $H^{1,0}(X)$ естественным образом отождествляется с подпространством $H^1(X, \mathbb{C})$, первой группы когомологий X.

Голоморфный абелев дифференциал ω на поверхности рода $g \geq 1$ имеет $2g-2$ нулей, с учетом кратностей. Пусть Σ обозначает множество нулей ω. Тогда существует атлас карт на $X \backslash \Sigma$ такой, что все отображения перехода являются переносами. В любой регулярной точке $p_0 \in X \backslash \Sigma$ существует локальная координата z такая, что $\omega = dz$. Этот выбор единственен с точностью до переноса, потому что для любой голоморфной функции f, если $df = dz$, то $z = f + C$ для некоторой константы C. В точке, где ω имеет нуль порядка k, существует локальная координата z такая, что $\omega = z^k dz$. Действительно, пусть w - локальная координата на X и предположим, что ω обращается в нуль порядка k в $w = 0$. Тогда локально $\omega = w^k g(w) dw$, где g - голоморфная функция, не обращающаяся в нуль в $w = 0$. Определим новую локальную координату z, взяв $(k+1)$-ый корень из следующего: $z^{k+1} = (k+1)\int_0^w g(t) t^k dt$.

Пара (X, ω) называется *поверхностью переноса*. Ее также называют *плоской поверхностью*, поскольку 1-форма ω индуцирует плоскую метрику на $X \backslash \Sigma$. В выбранной координате z такой, что $\omega = dz$, если положить $z = x + iy$, метрика записывается как $\omega \otimes \bar{\omega} = dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2}$. Метрика не распространяется на множество нулей Σ, предполагается, что она имеет *особенности* в этих точках. Точки, в которых ω обращается в нуль порядка k, также называются особенностями порядка k.

1.1 Пространства модулей поверхностей переноса

Если (X, ω) и (X', ω') таковы, что существует биголоморфизм $f : X \to X'$ с $f_* \omega' = \omega$, то f является изометрией для метрик, определенных ω и ω'. Более того, в локальных координатах, определенных ω, ω', отображение f записывается как сдвиг.

Рассмотрим пространство модулей пар (X, ω), где X - риманова поверхность рода g, а ω - голоморфная 1-форма на X (абелев дифференциал). Две пары эквивалентны, $(X, \omega) \sim (X', \omega')$, если существует биголоморфизм $f : X \to X'$ такой, что $f_* \omega' = \omega$. Обозначим это пространство как H_g. Оно является $\mathbb{C}^g$-векторным расслоением над пространством модулей римановых поверхностей M_g.

Пространство H_g стратифицировано, страты, обозначающиеся $H_g(\kappa)$, соответствуют неупорядоченным разбиениям $\kappa \vdash 2g-2$, $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$, Известно, что $H_g(\kappa)$ является алгебраическим многообразием и комплексным орбифолдом размерности $2g+n-1$. В общем случае это не расслоение над M_g. Не все $H_g(\kappa)$ оказываются связанными, что впервые было замечено В. Вичем, см. [39].

1.2 Действие $GL_2^+(\mathbb{R})$

Группа $GL_2^+(\mathbb{R})$, состоящая из вещественных 2×2 матриц с положительными определителями, естественным образом действует на комплексной прямой $\mathbb{C}$, если представить последнюю как вещественную плоскость $\mathbb{C}=\mathbb{R}\oplus i\mathbb{R}$. Это действие индуцирует действие $GL_2^+(\mathbb{R})$ на пространство $\widetilde{H}_g(\kappa)$, определяемое следующим образом:

$$\forall G\in GL_2^+(\mathbb{R}) \qquad \Phi(G\circ(X,\omega,f))=G\circ\Phi(X,\omega,f).$$

Здесь Φ — это периодическая отображение, определённое в 1.5. Действие продолжается на $H_g(\kappa)$ таким образом, что каноническая проекция становится $GL_2^+(\mathbb{R})$-эквивариантной.

1.3 Аффинно инвариантные орбифолды

аффинно инвариантный орбифолд — это замкнутое связное подмножество $M\subset H_g(\kappa)$, которое является образом некоторого орбифолда $\mathfrak{M}$ при собственной иммерсии f таким, что для любой точки $x\in\mathfrak{M}$ существует окрестность $U(x)$, где $f(U)$ для $f(x)$ задается однородными линейными уравнениями в координатах периодов. Аффинно инвариантные орбифолды инвариантны относительно действия $GL_2^+(\mathbb{R})$ на $H_g(\kappa)$, и обратное также верно [11].

Объединения аффинно инвариантных орбифолдов называются *аффинно инвариантными локусами*.

1.4 Локусы собственных форм Прима

Примеры аффинно инвариантных локусов в родах ≤ 5, состоящих из поверхностей с особой симметрией, сегодня известны как локусы собственных форм Прима. Пусть X — компактная риманова поверхность, допускающая автоморфизм $\rho: X\to X$ порядка два. Действие ρ определяет разбиение пространства абелевых дифференциалов на X на четные и нечетные 1-формы: $\Omega(X) = \Omega(X)^- \oplus \Omega(X)^+$, где $\omega \in \Omega(X)^\pm$, если $\rho^(\omega) = \pm\omega$. Подрешётки $H_1(X,\mathbb{Z})^\pm \subset H_1(X,\mathbb{Z})$, состоящие из четных и нечетных циклов соответственно, определяются аналогичным образом. Пусть $(\Omega(X)^-)$ обозначает $\mathbb{C}$-двойственное векторное пространство к $(\Omega(X)^-)$.

Определение 1. *(многообразие Прима) многообразие Прима $P = Prym(X,\rho) = (\Omega(X)^-)/H_1(X,\mathbb{Z})^-$ — это абелево подмногообразие якобиана $Jac(X) = \Omega(X)^/ H_1(X,\mathbb{Z})$, состоящее из 1-форм, которые нечетны относительно ρ.*

Мы называем $\Omega(X)^-$ пространством форм Прима на (X,ρ). Заметим, что $\Omega(X)^+$ канонически изоморфно $\Omega(Y)$, где $Y = X/\rho$, и таким образом $\dim P = g(X) - g(Y)$. Многообразие P допускает каноническую поляризацию, происходящую из формы пересечения на $H_1(X,\mathbb{Z})^-$. Пусть $End(P)$ обозначает кольцо эндоморфизмов поляризованного абелевого многообразия $P \simeq \mathbb{C}^g/L$. Мы можем рассматривать элементы $End(P)$ как комплексно-линейные отображения $T\colon \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^g$, такие что $T(L) = L$. Эндоморфизм называется *самосопряжённым*, если он удовлетворяет равенству $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ относительно симплектического произведения, где $x, y \in P$. Пусть $D > 0$ — целое число, сравнимое с 0 или 1 mod 4, и пусть $O_D \simeq \mathbb{Z}[t]/(t^2 + bt + c), D = b^2 - 4c$, где b и c — целые числа, является вещественным квадратичным порядком с дискриминантом D. Говорят, что многообразие P допускает *вещественное умножение* на O_D, если $dim_{\mathbb{C}} P = 2$, и существует собственное подкольцо $R \simeq O_D \subset End(L)$, порожденное самосопряжённым эндоморфизмом $T \in End(L)$. (Здесь “собственное” означает, что если $U \in End(L)$, и $nU \neq 0$ принадлежит R, то $U \in R$).

Собственные формы Прима. Теперь предположим, что $P = Prym(X,\rho)$ — это многообразие Прима с вещественным умножением на O_D. Тогда O_D также действует на $\Omega(P) \simeq \Omega(X)^-$, и пространство нечетных форм раскладывается на пару одномерных собственных подпространств этого действия. Мы говорим, что $\omega \in \Omega(X)^-$ — это собственная форма Прима, если $0 \neq O_D \cdot \omega \subset \mathbb{C}\omega$. Следующее утверждение было доказано Макмалленом [27]:

Предложение 1. *Замыкание $GL_2^+(\mathbb{R})$-орбиты любой собственной формы Прима является аффинно инвариантным орбифолдом ранга один.*

Объединение этих замыканий орбит для собственных форм Прима при фиксированном D обозначается как ΩE_D. Оно допускает стратификацию $\Omega E_D(\kappa)$, индексируемую кратностями нулей, что индуцировано стратификацией $H_g(\kappa)$ объемлющего пространства H_g.

1.5 Координаты периодов

Обозначим через $\widetilde{H}_g(\kappa)$ пространство классов эквивалентности *отмеченных поверхностей переноса* (X, ω, f), где $f : S \to X$ — это гомеоморфизм в фиксированную поверхность S рода g, такой что прообраз особенностей ω под действием f является заданным подмножеством $\Sigma \subset S$, а порядки особенностей ω задаются κ. Отображение Φ, определённое для каждого $\gamma \in H_1(S, \Sigma; \mathbb{C})$ как

$$\Phi : \widetilde{H}(\kappa) \to H^1(S, \Sigma; \mathbb{C})$$
$$\Phi : (X, \omega, f) \mapsto \left(\gamma \mapsto \int_{f \circ \gamma} \omega\right)$$

называется *отображением периодов*. На $\widetilde{H}(\kappa)$ существует комплексная структура, для которой Φ локальным биголоморфизмом, и если $MCG(S, \Sigma)$ обозначает относительную группу классов отображений поверхности S, которая глобально фиксирует Σ, тогда $MCG(S, \Sigma)$ действует почти свободно на $\widetilde{H}(\kappa)$ композицией отображений: $\phi : (X, \omega, f) \mapsto (X, \omega, f \circ \phi^{-1})$. Фактор по этому действию изоморфен пространству $H(\kappa)$, наделенному структурой комплексного орбифолда, превращающей каноническую проекцию π: $\widetilde{H}(\kappa) \to H(\kappa)$ в локальный биголоморфизм (в смысле орбифолда).

1.6 Изопериодическое слоение

Пусть $(X, \omega, f) \in \widetilde{H}(\kappa)$ — это отмеченная поверхность переноса. Тогда подмножество пространства модулей $\widetilde{H}(\kappa)$, состоящее из поверхностей, чьи абсолютные периоды совпадают с образом $\Phi(\omega)$ отображения периодов, корректно определено. Для любого выбора базиса гомологий $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g} \subset H_1(X, \mathbb{Z})$ существуют соответствующие $2g$ значений $\Phi(\omega)$. Аддитивная подгруппа множества $\mathbb{C}$, порождаемая этими $2g$ комплексными числами, называется *группой абсолютных* *периодов* ω. Подмножества в $\widetilde{H}(\kappa)$, соответствующие различным группам периодов, не пересекаются, образуя листы слоения на $\widetilde{H}(\kappa)$. Такое слоение называется *слоением абсолютных периодов*, Kernel-слоением или Rel-слоением. Пусть $\rho : H^1(S,\Sigma;\mathbb{C}) \to H^1(S;\mathbb{C})$ обозначает каноническое отображение ограничения. Отображение $\rho\circ\Phi$ является $MCG(S,\Sigma)$-эквивариантной субмерсией. Изопериодическое слоение на пространстве модулей непомеченных поверхностей переноса $H(\kappa)$ определяется как фактор-слоение слоения на $\widetilde{H}(\kappa)$ по компонентам связности множеств уровней $\rho\circ\Phi$. Если у ω есть n нулей $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n$ на X, то есть $n-1$ степеней свободы для возмущения (X,ω) с сохранением положения в том же листе. Значения $t_i(X,\omega) = \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_i}\omega$ для $i = 2,\ldots,n$, называемые *относительными периодами* дают локальные координаты на листе. Мы можем перемещаться вдоль изопериодического листа (X,ω), изменяя t_i. Локальные изменения в t_i можно построить через изопериодические преобразования (см. 1.8). Комплексная размерность листов в главном страте $H_g(1^{2g-2})$ равна $2g-3$ (для $g \geq 2$). Изопериодическое слоение глобально определено на $H_g = \bigcup_\kappa H_g(\kappa)$, где его листы имеют размерность $2g-3$. Для $\kappa = (g-1, g-1)$ листы имеют комплексную размерность 1 и допускают структуру римановой поверхности; это, в частности, верно в случае $g = 5$ для $\kappa = (4,4)$, представляющем интерес для нас.

1.7 Связность $\Omega E_D(\kappa)$

Пусть F — это изопериодическое слоение на $H_g(\kappa)$, определённое в 1.6, и пусть F_ω — это лист, содержащий (X,ω). Пусть $M \subset H(\kappa)$ — это аффинно инвариантный орбифолд, и пусть $(X,\omega)\in M$. Обозначим через F_ω^M связанную компоненту $F_\omega \cap M$, содержащую (X,ω). Следующее утверждение было доказано Флораном Игуфом (Утверждение 2.3 в [45]):

Предложение 2. *Пусть* $i : \mathfrak{M} \to H(\kappa)$ *— это погружение, такое что* $i(\mathfrak{M}) = M$*, как в Определении 1. Существует фолиация* $\mathfrak{F}$ *на* $\mathfrak{M}$ *такая, что для любого* $(X,\omega)\in M$ *и любого* $x \in \mathfrak{M}$*, такого что* $i(x) = (X,\omega)$*, существует окрестность* U *точки* x *в* $\mathfrak{M}$*, такая что*

$$i(U \cap \mathfrak{F}x) = i(U) \cap F\omega^M. \tag{1}$$

Вышеупомянутое утверждение позволяет определить фолиацию абсолютных периодов, ограниченную аффинным инвариантным множеством, следующим образом. Как и ранее, F_ω^M — это листы погруженной фолиации, которая будет называться *M-изопериодической фолиацией*. Другими словами, мы рассматриваем подмножество $H_g(\kappa)$, точки которого имеют одинаковые абсолютные периоды, с варьирующимися относительными периодовми, и дополнительным условием, что эти точки принадлежат данному аффинному инвариантному многообразию. Заметим, что для случая локусов собственных форм Прима относительные периоды не влияют на принадлежность поверхности к локусу: если $(X, \omega) \in \Omega E_D(\kappa)$, то $F_\omega \subset \Omega E_D(\kappa)$. Поскольку листы связны, каждый лист содержится в одной компоненте связности $\Omega E_D(\kappa)$. Важным числовым инвариантом аффинных многообразий является их ранг (rk), который определяется как половина размерности образа касательного пространства при проекции в группу абсолютных когомологий. Назовём аффинно инвариантный орбифолд M *неабсолютным*, если $\dim_{\mathbb{C}}(M) > 2 \cdot \mathrm{rk}(M)$. Неабсолютное M-изопериодическое слоение сохраняет действие $GL_2^+(\mathbb{R})$, как показано в Утверждении 2.4 из [45]:

Предложение 3. *Пусть M — неабсолютный аффинно инвариантный орбифолд, (X, ω) — поверхность переноса в M, и $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$. Тогда верны следующие утверждения:*

$$g \cdot F_\omega^M = F_{g\cdot(X,\omega)}^M \; GL_2^+(\mathbb{R}) \cdot F_\omega^M = M. \tag{2}$$

Следующее утверждение было доказано Ланно и Нгуеном в ([22], Следствие 3.2) для следующих разбиений: $\kappa = (1,1), (3,3), (2,2,1,1), (2,2), (1,1,2), (1,1,4), (4,4), (2,2,2)$:

Предложение 4. *Пусть $(X', \omega') \in \Omega E_D(\kappa)$ — точка, достаточно близкая к $(X, \omega) \in \Omega E_D(\kappa)$. Тогда существует единственная пара (g, ω), (где $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$ задает преобразование близкое к тождественному, и $w \in \mathbb{C}$, при этом $|\omega|$ мало), такая, что $(X', \omega') = g \cdot (X, \omega) + w$.*

Это утверждение означает, что малая окрестность точки в $\Omega E_D(\kappa)$ может быть полностью описана с использованием действия $GL_2^+(\mathbb{R})$ и однопараметрической деформации $(X, \omega) + w$. В случае страт с двумя нулями деформация является изопериодической, которая сохраняет абсолютные периоды и изменяет все относительные периоды, добавляя одно и то же комплексное число к каждому из них.

1.8 Изопериодические деформации

Шиффер описал бесконечно малые преобразования римановых поверхностей. Эти преобразования формируют однопараметрические семейства, зависящие от ϵ. Поверхность, полученная в результате вариации Шиффера из данной плоской поверхности (X, ω), допускает голоморфную 1-форму ω^*, которая является образом ω при локально обратимом отображении, соответствующему вариации. После вариации интегралы индуцированной 1-формы ω^* вдоль новых циклов, представляющих абсолютные периоды, не изменяются, то есть преобразование является изопериодическим.

Мы опишем четыре изопериодические деформации и исследуем их свойства. Сначала мы опишем классические преобразования, такие как смещение нуля, разделение нуля и схлопывание нуля с использованием локальных хирургический. Затем мы введём преобразование, называемое *соединением* ("plumbing"). Если существует голоморфная 1-форма ω на кривой, полученной нормализацией сингулярной комплексной кривой, то соединение приводит к несингулярной кривой более высокого рода с индуцированной голоморфной 1-формой ω^* на ней, при этом интегралы ω^* вдоль добавленных абсолютных циклов равны нулю, а ненулевые абсолютные периоды совпадают с периодами формы ω.

1.9 Результаты

Изучая свойства описанных изопериодических преобразований, мы получаем следующие утверждения: Мы решаем задачу описания компонент связности локусов собственных форм Прима в страте $H_5(4, 4)$, состоящем из римановых поверхностей максимально возможного рода 5, снабжённых 1-формами, имеющими два нуля порядка 4.

Теорема 1. *Локусы собственных форм Прима $\Omega E_D(4, 4)$ непусты и имеют одну компоненту связности при $D \geq 4$.*

В случае страта $H_5(8)$ мы показываем, что $\Omega E_D(8)$ пуст.

2 Пространства модулей мероморфных дифференциалов

Риманова поверхность X, снабжённая ненулевой мероморфной 1-формой ζ, называется *плоской поверхностью с полюсами* или *некомпактной поверхностью переноса*. В окрестности полюса порядка один мероморфная 1-форма ζ в локальных координатах, с учетом шкалирования, может быть записана как $\zeta = \frac{1}{z}dz$. Затем мы можем выбрать координату z', такую что $z = e^{z'}$ и $\zeta = dz'$. В этих координатах окрестность полюса порядка один представляет собой бесконечный цилиндр. Для полюса P_0 порядка $k+2 \geq 2$ есть два варианта: либо вычет мероморфной 1-формы ζ равен нулю, либо не равен нулю в этой точке. В первом случае открытая координатная окрестность (U, ζ) точки P_0 биголоморфна евклидому конусу с углом конуса $2(k+1)\pi$ в $z = 0$. Во втором случае пусть $r \neq 0$ — это вычет вокруг P_0. Тогда окрестность P_0 выглядит как цилиндр с голономией r, с k копиями евклидовой плоскости, прикрепленными к нему (см. [8]). Таким образом, для любой мероморфной формы ζ на X можно определить атлас на $X \setminus P(\zeta)$, такой что функции склейки-это переносы, (где $P(\zeta)$ — это множество полюсов). Поверхность переноса с такой метрикой имеет бесконечную площадь. Для набора положительных целых чисел $h = h_1, \ldots, h_n$ пусть $M_{g,n}(h)$ обозначает пространство модулей кривых рода g с n отмеченными точками $P_1, \ldots, P_n$, снабженных мероморфными дифференциалами с полюсами порядка h_i в каждой точке P_i. Если (X, ζ) и (X_0, ζ_0) такие, что существует биоломорфизм $f : X \to X_0$ с условием, что $f(\zeta_0) = \zeta$, то f является изометрией для метрик, определяемых ζ и ζ_0. Как и в случае абелевых дифференциалов, мы рассматриваем пространство модулей мероморфных дифференциалов, где $(X, \zeta) \sim (X_0, \zeta_0)$, если существует биоломорфизм $f : X \to X_0$, такой что $f(\zeta_0) = \zeta$. Это комплексный орбифолд, $\dim_{\mathbb{C}}(M_{g,n}(h)) = 3g - 3 + n + g - 1 + \sum_{i=1}^{n} h_i$.

Аналогично случаю голоморфных дифференциалов, пространства модулей плоских поверхностей с полюсами фиксированного порядка могут быть стратифицированы по кратностям нулей. Стратам соответствуют комплексно-аналитические орбифолды (см. Теорему 2.1 в [1]). Комплексная размерность такого страта равна $2g+n+m-2$, где m — это количество нулей, а n — количество полюсов. Локальные координаты задаются значениями вычетов вместе с абсолютными и относительными периодами. Для поверхностей рода один существуют страты мероморфных дифференциалов с произвольным количеством компонент связности (см. 1.1 в[5]), в то время как для поверхностей более высокого рода пространства могут иметь до трех компонент связности (Теорема 1.2 в [5]). Некоторые специальные случаи плоских поверхностей с полюсами были недавно изучены, см. [5], [6], [12]. Каждый мероморфный дифференциал ζ на римановой поверхности X определяет гомоморфизм $\chi : (X \setminus P(\zeta), \mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$, где $P(\zeta)$ — это множество полюсов ζ. Отображение определяется как интеграл $\chi(\gamma) = \int_\gamma \zeta \in \mathbb{C}$. Если мы обозначим нули ζ как z_i для $i = 1, .., n$ и выберем z_1 в качестве базовой точки, то *относительные периоды* определяются как $\int_{z_1}^{z_i} \omega$ для $i = 1, \ldots, n-1$.

На данном пространстве модулей, аналогично изопериодическому слоению, определенному на пространстве модулей голоморфных дифференциалов, строится следующее слоение (см. [16], [18]). Обозначим $T_{g,n}(h)$ пространство, чьими точками являются точки $M_{g,n}(h)$, вместе с выбранными симплектическими базисами $A_i, B_i \in H_1(X, \mathbb{Z})$. Абсолютные периоды вдоль базисных циклов обозначим как $\alpha_j = \int_{A_j} \zeta$, $\beta_j = \int_{B_j} \zeta$, вычеты мероморфной 1-формы в полюсах обозначим как ρ_i для $i = 1, \ldots, n$. Тогда слоение L на $T_{g,n}(h)$ определяется подмногообразиями $L_{r,a,b}$, заданными фиксированными значениями $\rho_i = r_i, \alpha_j = a_j, \beta_j = b_j, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, g$. Листы L перемешиваются действием группы классов отображений. Следовательно, семейство L подмногообразий $L_{r,a,b}$ для всех значений r, a, b определяет комплексное слоение на пространстве $M_{g,n}(h)$ (см. Лемму 2.4 в [16]). Абсолютные периоды $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ порождают аддитивную группу в $\mathbb{C}$, которая, в случае, если все периоды несоизмеримы имеет ранг $2g$; такая группа называется группой периодов.

2.1 Пространства модулей вещественно нормированных дифференциалов

Мероморфные дифференциалы, все абсолютные периоды которых вещественные, называются *вещественно нормированными.* Отметим, что в этом случае все вычеты дифференциала обязательно чисто мнимые. Обозначим $M_{g,n}^{real}(h)$ пространство модулей кривых рода g с n отмеченными точками, снабженных мероморфным вещественно нормализованным дифференциалом с полюсами фиксированных порядков $h_1, \ldots h_n$ в отмеченных точках. Здесь, как и выше, пространство модулей означает пространство классов эквивалентности пар (X, ψ), комплексной кривой вместе с вещественно нормализованным дифференциалом на ней. Две пары $(X, \psi), (X_0, \psi_0)$ эквивалентны, если существует биголоморфизм $f : X \to X_0$, такой что $f_* \psi_0 = \psi$.

Главная часть мероморфного дифференциала в точке P на римановой поверхности X — это класс эквивалентности мероморфных дифференциалов ζ в окрестности P, с отношением эквивалентности $\zeta \sim \zeta'$, если и только если $\zeta - \zeta'$ голоморфен в P. Интерес вещественной нормализации заключается в уникальности вещественно нормализованного дифференциала с предписанными главными частями в отмеченных точках (записанными в терминах ростков локальных координат в отмеченных точках). Таким образом, вещественно нормированные дифференциалы задают сечение расслоения мероморфных дифференциалов с предписанными порядками полюсов над пространством модулей кривых с отмеченными точками, снабженными ростками локальных координат в этих точках.

Предложение 5. *Для любых фиксированных главных частей полюсов с чисто мнимыми вычетами, сумма которых равна нулю, существует единственный вещественно нормированный мероморфный дифференциал ζ, имеющий предписанные главные части в отмеченных точках.*

Слоение L индуцирует слоение на $M^{real}_{g,n}(h)$. Пространство $M^{real}_{g,n}(h)$ является вещественно аналитическим орбифолдом, следовательно, слоение L на нем является вещественно аналитическим, однако каждый отдельный лист имеет структуру комплексного орбифолда (см. [16]).

Все результаты данной диссертации относятся к мероморфным вещественно нормированным дифференциалам с единственным полюсом порядка 2 (и, следовательно, с нулевым вычетом в отмеченной точке), мы обозначаем соответствующее пространство $R_g = M^{real}_{g,n}(2)$. Стратификация пространства мероморфных дифференциалов по кратностям нулей индуцирует стратификацию пространства вещественно нормированных дифференциалов R_g по кратностям нулей, страты обозначаются $R(\kappa)$, где κ разбиение числа $2g$. Слоение L ограниченное на $R(\kappa)$ обозначается $L(\kappa)$. Ограничение каждого подмногообразия $L_{0,a,b}$ на $R(\kappa)$ обозначается $L(G)(\kappa)$, где G- группа периодов, порожденная $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$.

Мы описываем слоение L на главном страте в пространстве вещественно нормированных дифференциалов и на страте коразмерности один. Сначала мы рассматриваем комбинаторную модель, описывающую главный страт $R(1^{2g})$ в пространстве вещественно нормализованных дифференциалов R_g, предложенную в [20]. В этой модели набору точек в $R(1^{2g})$ сопоставляется дуговая диаграмма, а изопериодические преобразования над точками в $R(1^{2g})$ определяются преобразованиями над соответствующими дуговыми диаграммами, известными в литературе как вторые движения Васильева. Затем мы строим обобщение данной модели для страта $R(2, 1^{2g-2})$. Для этого мы вводим понятие обобщенной дуговой диаграммы, ассоциированной с набором точек в $R(2, 1^{2g-2})$. Изопериодические преобразования на стратах затем описываются в терминах преобразований над обобщенными дуговыми диаграммами, называемыми обобщенными движениями Васильева.

2.2 Результаты

Для главного страта $R(1^{2g})$, где 1-форма имеет $2g$ нулей порядка один, мы получаем следующий результат.

Теорема 2. *Для группы периодов G ранга $2g$ страт $L(G)(1^{2g})$ в пространстве вещественно нормированных дифференциалов с единственным полюсом порядка 2 на кривых рода $g \geq 1$ имеет одну компоненту связности.*

Для страта коразмерности один в пространстве вещественно нормированных дифференциалов с единственным нулем порядка два, где все остальные нули являются простыми, мы показываем, что выполнено аналогичное утверждение.

Теорема 3. *Для группы периодов G ранга $2g$ страт $L(G)(2, 1^{2g-2})$ в пространстве вещественно нормированных дифференциалов с единственным полюсом порядка 2 на кривых рода $g \geq 2$ имеет единственную компоненту связности.*

3 Основные результаты

Диссертация посвящена изучению геометрии пространств модулей голоморфных и мероморфных дифференциалов на комплексных алгебраических кривых и слоениям на этих пространствах модулей. Основные результаты, полученные в рамках этой диссертации, изложены в следующих теоремах.

Теорема 1. *Локус собственных форм Прима* $\Omega E_D(4,4)$ *непуст и имеет единственную компоненту связности для* $D \geq 4$.

Теорема 2. *Для группы периодов* G *ранга* $2g$ *страт* $L(G)(1^{2g})$ *в пространстве вещественно нормированных дифференциалов с единственным полюсом порядка* 2 *на кривых рода* $g \geq 1$ *имеет одну компоненту связности.*

Теорема 3. *Для группы периодов* L *ранга* $2g$ *страт* $L(G)(2, 1^{2g-2})$ *в пространстве вещественно нормированных дифференциалов с единственным полюсом порядка* 2 *на кривых рода* $g \geq 2$ *имеет единственную компоненту связности.*

Список литературы

[1] Matt Bainbridge и др. "Strata of k-differentials". В: *Algebraic Geometry* (2016). URL: `https://api.semanticscholar.org/CorpusID:5063828`.

[2] M. Bertola. "Boutroux curves with external field: equilibrium measures without a variational problem." В: *Anal. Math. Phys.* 1(2-3) (2011), с. 167—211.

[3] M. Bertola и M. Y. Mo. "Commuting difference operators, spinor bundles and the asymptotics of orthogonal polynomials with respect to varying complex weights." В: *Adv. Math.* 220(1) (2009), с. 154—218.

[4] Andrei Bogatyrev и Quentin Gendron. "The number of components of the Pell-Abel equations with primitive solutions of given degree". В: *Russian Mathematical Surveys* 78 (авг. 2023), с. 208—210. DOI: `10.4213/rm10082e`.

[5] Corentin Boissy. "CONNECTED COMPONENTS OF THE STRATA OF THE MODULI SPACE OF MEROMORPHIC DIFFERENTIALS". В: *Commentarii Mathematici Helvetici* 90 (2012), с. 255—286.

[6] Corentin Boissy. "Moduli space of meromorphic differentials with marked horizontal separatrices". В: *Algebraic and Geometric Topology* 20.5 (2020), с. 2373—2412. DOI: `10.2140/agt.2020.20.2373`.

[7] Gabriel Calsamiglia и Bertrand Deroin. "Isoperiodic meromorphic forms: two simple poles". В: 2021.

[8] Shabarish Chenakkod, Gianluca Faraco и Subhojoy Gupta. "Translation surfaces and periods of meromorphic differentials". В: *Proceedings of the London Mathematical Society* 124.4 (2022), с. 478—557. DOI: `https://doi.org/10.1112/plms.12432`.

[9] P. Deift и X. Zhou. "A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems." В: *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 26(1) (1992), с. 119—123.

[10] Arbarello Enrico. "Weierstrass points and moduli of curves." В: *Compositio Mathematica* 29(3) (1974), с. 325—342.

[11] A. V. Eskin, Maryam Mirzakhani и A. Mohammadi. “Isolation, equidistribution, and orbit closures for the SL(2,R) action on Moduli space”. В: *arXiv: Dynamical Systems* (2013).

[12] Gianluca Faraco, Guillaume Tahar и Yongquan Zhang. “Isoperiodic foliation of the stratum $\mathcal{H}(1,1,-2)$”. В: (май 2023).

[13] Simion Filip. “Semisimplicity and rigidity of the Kontsevich-Zorich cocycle”. В: *Inventiones mathematicae* 205 (сент. 2016). DOI: 10.1007/s00222-015-0643-3.

[14] Simion Filip. “Splitting mixed Hodge structures over affine invariant manifolds”. В: *Annals of Mathematics* 183 (нояб. 2013). DOI: 10.4007/annals.2016.183.2.5.

[15] Quentin Gendron и Guillaume Tahar. “Isoresidual fibration and resonance arrangements”. В: *Letters in Mathematical Physics* 112 (апр. 2022). DOI: 10.1007/s11005-022-01528-z.

[16] Samuel Grushevsky и I. Krichever. “The universal Whitham hierarchy and the geometry of the moduli space of pointed Riemann surfaces”. В: *Surveys in Differential Geometry* 14 (нояб. 2008). DOI: 10.4310/SDG.2009.v14.n1.a4.

[17] Ursula Hamenstädt. “Ergodicity of the absolute period foliation”. В: *Israel Journal of Mathematics* 225 (апр. 2018). DOI: 10.1007/s11856-018-1674-4.

[18] I. Krichever и D. Phong. “On The Integrable Geometry Of Soliton Equations And N=2 Supersymmetric Gauge Theories”. В: *Journal of differential geometry* 45 (окт. 1998). DOI: 10.4310/jdg/1214459802.

[19] Igor Krichever. “Real normalized differentials and Arbarello’s conjecture”. В: *Functional Analysis and Its Applications* 46 (2011), с. 110—120. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:85510660.

[20] Igor Krichever, Sergei Lando и Alexandra Skripchenko. “Real-normalized differentials with a single order 2 pole”. В: *Letters in Mathematical Physics* 111 (апр. 2021). DOI: 10.1007/s11005-021-01379-0.

[21] E. Lanneau и D. Nguyen. “$GL^+(2,R)$-orbits in Prym eigenform loci”. В: *arXiv: Geometric Topology* (2013).

[22] E. Lanneau и D. Nguyen. “Complete periodicity of Prym eigenforms”. В: *arXiv: Geometric Topology* (2013).

[23] E. Lanneau и D. Nguyen. “Teichmueller curves generated by Weierstrass Prym eigenforms in genus three and genus four”. В: *arXiv: Geometric Topology* (2011).

[24] E. Lanneau и D. Nguyen. “Weierstrass Prym eigenforms in genus four”. В: *Journal of The Institute of Mathematics of Jussieu* 19 (2018), с. 2045—2085.

[25] Howard Masur. “Hausdorff dimension of the set of nonergodic foliations of a quadratic differential”. В: *Duke Mathematical Journal* 66.3 (1992), с. 387—442. DOI: 10.1215/S0012-7094-92-06613-0. URL: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-92-06613-0.

[26] Howard A. Masur. “Interval Exchange Transformations and Measured Foliations”. В: *Annals of Mathematics* 115 (1982), с. 169. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121259003.

[27] C. McMullen. “Prym Varieties and Teichmüller Curves”. В: *Duke Mathematical Journal* 133 (2006), с. 569—590.

[28] Curtis Mcmullen. “Billiards and Teichmüller curves on Hilbert Modular Surfaces”. В: *Journal of the American Mathematical Society* 16 (авг. 2003). DOI: 10.1090/S0894-0347-03-00432-6.

[29] Curtis Mcmullen. “Moduli spaces of isoperiodic forms on Riemann surfaces”. В: *Duke Mathematical Journal* 163 (сент. 2014). DOI: 10.1215/00127094-2785588.

[30] Curtis T. McMullen. “Dynamics of $SL_2(\mathbb{R})$ Over Moduli Space in Genus Two”. В: *Annals of Mathematics* 165 (2007), с. 397—456.

[31] Yair Minsky и Barak Weiss. “Nondivergence of horocyclic flows on moduli space”. В: *Journal Fur Die Reine Und Angewandte Mathematik - J REINE ANGEW MATH* 2002 (янв. 2002), с. 131—177. DOI: 10.1515/crll.2002.088.

[32] Martin Möller. “Periodic points on Veech surfaces and the Mordell-Weil group over a Teichmüller curve”. В: *Inventiones mathematicae* 165 (2004), с. 633—649. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:15474267.

[33] Martin Möller. “Variations of Hodge Structures of a Teichmüller Curve”. В: *Journal of the American Mathematical Society* 19.2 (2006), с. 327—344. ISSN: 08940347, 10886834. URL: http://www.jstor.org/stable/20161280 (дата обр. 13.04.2024).

[34] Martin Möller и Scott Mullane. *Teichmüller curves in hyperelliptic components of meromorphic strata*. Май 2023.

[35] Ronen E. Mukamel. “Fundamental domains and generators for lattice Veech groups”. В: *Commentarii Mathematici Helvetici* 92 (2017), с. 57—83. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:15457030.

[36] John Smillie и Barak Weiss. “Minimal sets for flows on moduli space”. В: *Israel Journal of Mathematics* 142 (дек. 2004), с. 249—260. DOI: 10.1007/BF02771535.

[37] Guillaume Tahar. “Chamber Structure of Modular Curves $$X_{1}(N)$$X1(N)”. В: *Arnold Mathematical Journal* 4 (2017), с. 459—481. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:73602876.

[38] Guillaume Tahar. “Counting saddle connections in flat surfaces with poles of higher order”. В: *Geometriae Dedicata* 196 (окт. 2018). DOI: 10.1007/s10711-017-0313-2.

[39] W. A. Veech. “Moduli spaces of quadratic differentials”. В: *Journal d’Analyse Math.* 55 (1990), с. 117—171.

[40] William A. Veech. “Gauss Measures for Transformations on the Space of Interval Exchange Maps”. В: *Annals of Mathematics* 115.2 (1982), с. 201—242. ISSN: 0003486X. URL: http://www.jstor.org/stable/1971391 (дата обр. 10.04.2024).

[41] William A. Veech. “Geometric Realizations of Hyperelliptic Curves”. В: 1995. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:96467013.

[42] William A. Veech. “Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards”. В: *Inventiones mathematicae* 97 (1989), с. 553—583. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:189831945.

[43] Alex Wright. "The field of definition of affine invariant submanifolds of the moduli space of abelian differentials". B: *Geometry and Topology* 18.3 (2014), c. 1323—1341. DOI: 10.2140/gt.2014.18.1323. URL: https://doi.org/10.2140/gt.2014.18.1323.

[44] Alex Wright. "Translation surfaces and their orbit closures: An introduction for a broad audience". B: *EMS Surveys in Mathematical Sciences* 2 (нояб. 2014). DOI: 10.4171/EMSS/9.

[45] F. Ygouf. "A criterion for density of the isoperiodic leaves in rank 1 affine invariant orbifolds". B: (февр. 2020).