Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

На правах рукописи

Рыков Юрий Германович

Нестандартные модели математической физики, связанные с системами квазилинейных законов сохранения

РЕЗЮМЕ диссертации
на соискание ученой степени доктора математических наук

Москва – 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1. Общее описание области исследований 3
2. Список основных результатов диссертации, выносимых на защиту 10
3. Подробное изложение полученных результатов 13
3.1 Вариационное представление для обобщенных решений систем квазилинейных законов сохранения 14
3.1.1 Об обобщении результатов Э. Хопфа на системы квазилинейных законов сохранения в случае одной пространственной переменной 16
3.1.2 Вариационное представление для обобщенных решений систем квазилинейных законов сохранения в случае одной и двух пространственных переменных 19
3.1.3 Представление обобщенного решения системы квазилинейных законов сохранения в случае одной пространственной переменной как минимума некоторого функционала 21
3.2 Сингулярные решения системы уравнений газовой динамики без давления в случае одной и двух пространственных переменных 22
3.2.1 Случай одной пространственной переменной 22
3.2.2 Случай двух пространственных переменных 25
3.3 Существование сильных решений квазигазодинамической системы уравнений в случае двух пространственных переменных 33
3.4 Вырожденные параболические системы уравнений, описывающие процессы сжимаемой двухфазной многокомпонентной фильтрации с точки зрения теории законов сохранения 35
3.5 Уравнение с насыщаемым (ограниченным) потоком диссипации 40
СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ К ЗАЩИТЕ 43
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 44

ВВЕДЕНИЕ

1. Общее описание области исследований

В предлагаемой диссертации рассматривается ряд нестандартных математических моделей, которые могут быть выражены в форме системы законов сохранения при наличии, как членов диссипативного характера, так и членов в виде источника. А именно, соответствующие системы уравнений в частных производных имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{T}\big(\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})\big)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\boldsymbol{F}_j\big(\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})\big)\Big)=\boldsymbol{D}^2\big(\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})\big)+\boldsymbol{R}\big(\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})\big), \tag{1.1}$$

где $(t,\boldsymbol{x})\equiv(t,x_1,\dots,x_m)$, $\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x}):\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{U}(t,x)=\big(u_1(t,\boldsymbol{x}),\dots,u_n(t,\boldsymbol{x})\big)$; $(t,\boldsymbol{x})\in\Pi_T\equiv\big\{(t,\boldsymbol{x}):(t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times\Omega,\Omega\subseteq\mathbb{R}^m\big\}$, а $\mathbf{T}=(\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_n),\boldsymbol{F}_j=(f_{1j},\dots,f_{nj})$ – достаточно гладкие (по крайней мере, $\mathbf{T},\boldsymbol{F}_j\in C^1\big(\mathbb{R}^n\big)$) вектор-функции переменных $(u_1,\dots,u_n)$. Далее, $\boldsymbol{D}^2\big(\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})\big)$ является, вообще говоря, нелинейным оператором второго порядка, а $\boldsymbol{R}\big(\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})\big)$ – нелинейной правой частью. При этом входящие в эти выражения нелинейности также предполагаются гладкими. Конкретный вид рассматриваемых выражений типа (1.1) и соответствующие условия на составляющие их функции будут приведены в соответствующих разделах работы. Здесь и далее жирным шрифтом в формулах будут обозначаться векторные величины.

Общая проблематика, рассматриваемая в диссертации, связана по большей части с системами законов сохранения типа (1.1), где оператор $\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{U}$, функция $\mathbf{T}$ и правая часть $\boldsymbol{R}$ отсутствуют или имеют вспомогательный характер, меняя конкретную форму решений, но сохраняя их особенности, характерные для традиционных систем законов сохранения вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\boldsymbol{F}_j\big(\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})\big)\Big)=0\,. \tag{1.2}$$

Основным свойством решений (1.2) является то, что даже при гладких начальных/краевых данных эти решения, в случае общего положения, оказываются имеющими особенности разного вида. Наиболее характерными являются разрывные решения. Это обстоятельство обуславливает сложность в выборе основных функциональных пространств и, соответственно, необходимость достаточно подробного рассмотрения частных решений. Изучение квазилинейных гиперболических систем вида (1.2) имеет давнюю историю, однако построение общей теории столкнулось с трудностями, о которых более подробно будет сказано ниже и которые пока не удается преодолеть. Поэтому рассмотрение систем вида (1.2) требует поиска нестандартных подходов. Так же ряд физических процессов приводит к рассмотрению не стандартных систем и уравнений вида (1.1), решения которых обнаруживают специфическое поведение, требующее теоретического осмысления. Однако оказывается, что данные решения не стандартных систем и уравнений вида (1.1) обладают свойствами, характерными для систем законов сохранения типа (1.2) и могут быть естественным образом рассмотрены с позиций теории систем законов сохранения. Предлагаемая диссертация содержит более конкретное и подробное изучение указанных проблем в случае одной ($m=1$) или двух ($m=2$) пространственных переменных.

Теория квазилинейных систем законов сохранения в современном варианте начала развиваться со второй половины прошлого века. Однако, несмотря на ряд впечатляющих достижений, достаточно полная теория, включая многомерный случай, была построена лишь для одного закона сохранения, см., например, [Vo], [Kr]. В случае систем достаточно общие результаты получены лишь для одной пространственной переменной и, как правило, в предположении малости области изменения, по крайней мере, неизвестных функций, см., например, основополагающие работы [L1, G, Gl] и более завершенное изложение в [B]. С промежуточными итогами работ в области теории законов сохранения можно ознакомиться, например, по книгам [S1], [S2], [BGS]. Современное изложение основ теории законов сохранения, включая физические приложения и численные методы, можно найти, например, в монографиях [Da], [He], [LTP]. Необходимость работы с, вообще говоря, разрывными функциями при построении теории систем законов сохранения обусловила использование понятия обобщенного решения, т.е. решения, понимаемого в смысле удовлетворения заданного интегрального тождества для (1.2) (подробнее об этом будет сказано в последующих разделах). Однако при попытках перейти к случаю не малой, а произвольной ограниченной, области изменения неизвестных функций возникла необходимость расширения понятия решения и рассмотрения более сильных особенностей, чем разрывы. Появилось новое понятие мерозначных решений [DP], и на этом пути удалось найти доказательство достаточно общих теорем существования обобщенных решений систем двух законов сохранения (одна пространственная переменная) с использованием принципа компенсированной компактности на основе метода малой вязкости. Однако развитую технику в целом не удалось распространить даже на системы из трех законов сохранения с одной пространственной переменной. Тем не менее, интерес к понятию мерозначных решений сохраняется в связи с вычислительными аспектами для многомерных систем законов сохранения, см., например, [FST], а также получением некоторых дополнительных априорных оценок [S3].

В конце 80-х годов прошлого века было также обнаружено, что при определенных условиях (а именно, если адиабата Гюгонио оказывается компактным множеством) даже у строго гиперболических, истинно нелинейных систем двух уравнений с одной пространственной переменной традиционного решения задачи Римана (в виде, вообще говоря, разрывной функции) не существует, а решение, определяемое на основе метода малой вязкости, в пределе содержит дельтаобразную особенность, [KK]. При этом возникают трудности в определении того, в каком смысле объект типа дельта-функции может удовлетворять нелинейному уравнению. Концентрированное изложение всего упомянутого круга вопросов можно найти, например, в [K], [Se], см. также, например, [DS]. Кроме того, в отечественной литературе появились и другие расширения понятия обобщенного решения на основе введения специально сконструированных интегральных тождеств и других близких подходов, см., например, [PSh], [Sh1]. В относительно недавно появившихся работах [MY1], [MY2] предложена концепция слабого со звездочкой решения, которая ослабляет требование измеримости и трактует решения систем законов сохранения как траектории в пространстве, сопряженном к подходящему основному пространству, что требует обобщения процедуры интегрирования. Ожидалось, что это понятие будет полезно при изучении систем со многими пространственными переменными.

Однако, судя по всему, указанные подходы так и не привели к какому-либо удовлетворительному решению накопившихся проблем в теории систем законов сохранения. Сложившуюся ситуацию отмечал и известный специалист по системам законов сохранения Питер Лакс в своей книге [L2, стр. 165]. По-видимому, основные инструменты теории систем законов сохранения – построение последовательности приближенных решений и осуществление предельного перехода; метод малой вязкости – не достаточны для преодоления сложившихся трудностей, особенно в случае нескольких пространственных переменных. Кроме того, попытки включить в основное пространство решений нелинейных систем дельтаобразные особенности на основе конструирования тех или иных специальных интегральных тождеств создают достаточно громоздкие конструкции с ограниченными возможностями применения математического анализа. В более широком контексте попытку построения новой (нелинейной) теории обобщенных функций была предпринята в [Co]. В этой связи является важным замечание Я. Г. Синая о том, что изучение случаев вырожденных квазилинейных систем уравнений может натолкнуть на новые методологические подходы. С точки зрения изложенного выше, в диссертации представлен новый взгляд на структуру обобщенных решений квазилинейных систем законов сохранения на основе специального представления для разрывных обобщенных решений.

Интерес к рассмотрению нестандартных систем типа (1.2), к которым с изложенной точки зрения можно отнести и системы вида (1.1), возник как со стороны физически приложений, так и со стороны теоретических исследований. Как мы увидим ниже, возмущения или вырождения системы (1.2) могут привести к использованию новых методов построения решения, а также к лучшему пониманию природы возникающих особенностей. Для большей ясности изложения введем ряд определений, а затем укажем на рассматриваемые в диссертации нестандартные модели.

Определение 1.1. Пусть $m=1$ и индекс j у соответствующих переменных и функций опущен. Система (1.2) называется *строго гиперболической*, если матрица $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{U})$ имеет ровно n различных действительных собственных чисел $\lambda_1(\boldsymbol{U})<\ldots<\lambda_n(\boldsymbol{U})$ и, соответственно, полный набор правых $\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{U}),\ldots,\boldsymbol{r}_n(\boldsymbol{U})$ (и левых $\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{U}),\ldots,\boldsymbol{l}_n(\boldsymbol{U})$) собственных векторов. Система (1.2) называется *истинно нелинейной*, если $\boldsymbol{r}_i\cdot\nabla\lambda_i\neq 0$, $i=1,\ldots,n$. В случае, если какие-то λ_i совпадают при некоторых значениях $\boldsymbol{U}$, но система собственных векторов остается полной, то система (1.2) называется *нестрого гиперболической*.

Определение 1.2. Пусть $m=1$ и индекс j у соответствующих переменных и функций опущен. Назовем систему (1.2) *вырожденной нестрого гиперболической*, если матрица $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{U})$ не обладает полной системой собственных векторов, но имеет одну и ту же Жорданову форму для всех рассматриваемых значений $\boldsymbol{U}$.

Для систем из определения 1.1 можно получить характеристическую форму системы (1.2), $m=1$, умножая (1.2) слева на какой-либо левый собственный вектор

$$\boldsymbol{l}_i\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}(t,x)+\lambda_i(\boldsymbol{U})\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(t,x)\right)=0\,. \tag{1.3}$$

Существует большой объем литературы, посвященной изучению различных отклонений от структуры строго гиперболических, истинно нелинейных (в смысле определения 1.1) систем типа (1.2). Не вдаваясь в подробности, приведем для иллюстрации только книгу [LF] и далее остановимся только на конкретных нестандартных моделях.

Первая модель, которую мы рассмотрим, является моделью так называемой газовой динамики без давления. Соответствующая система законов сохранения в случае одной пространственной переменной ($m=1$) имеет вид

$$\begin{cases} \partial\rho / \partial t + \partial\left(\rho u\right) / \partial x = 0 \\ \partial\left(\rho u\right) / \partial t + \partial\left(\rho u^2\right) / \partial x = 0 \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ . \tag{1.4}$$

Здесь $\rho > 0$ – плотность, u – скорость. Система (1.4) формально может быть получена из системы уравнений изоэнтропической газовой динамики, полагая давление P равным нулю. Эта система обладает единственным собственным числом $\lambda = u$ и единственным правым собственным вектором $\boldsymbol{r} = \left(1, u\right)$. В соответствии с определением 1.2 система (1.4) является вырожденной нестрого гиперболической.

Изучение движения сред, в которых можно пренебречь собственным перепадом давления в данный момент времени (кратко: среды без давления), представляет, как математический, так и прикладной интерес. С точки зрения приложений среды без давления возникают при описании различных физических явлений, таких как эволюция многофазных потоков, движение дисперсных сред, в частности пылевых частиц или капель, явление кумуляции, взаимодействие гиперзвуковых потоков в некоторых предельных случаях, движение гранулированных сред и т.п., см., например, [Che], [Se], [St]. С математической точки зрения отсутствие давления приводит к возникновению неклассических ударных волн, законы эволюции которых кардинально отличаются от, например, газодинамических ударных волн. Наиболее интересные эффекты получены для двумерной системы уравнений газовой динамики без давления

$$\begin{cases} \partial\rho / \partial t + \nabla \cdot \rho \boldsymbol{U} = 0 \\ \partial\left(\rho \boldsymbol{U}\right) / \partial t + \nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{U}\right) = 0 \end{cases}, \ \boldsymbol{x} \equiv \left(x, y\right), \left(t, \boldsymbol{x}\right) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \nabla = \left(\partial / \partial x, \partial / \partial y\right), \tag{1.5}$$

где $\rho > 0$ имеет смысл плотности вещества, $\boldsymbol{U}$ – вектор скорости, а $\otimes$ обозначает тензорное произведение. Система (1.5) также может быть получена из уравнений традиционной газовой динамики, полагая давление равным нулю. Здесь же отметим, что, вообще говоря, полная система уравнений газовой динамики включает в себя еще и уравнение сохранения полной энергии, поэтому к системе (1.5), положив в традиционном законе сохранения давление равным нулю, следовало бы добавить уравнение

$$\partial E / \partial t + \nabla \cdot E \boldsymbol{U} = 0, \tag{1.6}$$

где $E \equiv \rho\left(e + \left|\boldsymbol{U}\right|^2 / 2\right)$, e – удельная внутренняя энергия. Однако уравнение (1.6) в отличие от обычной газовой динамики оказывается независимым от системы (1.5) в том смысле, что эволюция особенностей определяется только (1.5), а (1.6) определяет закон изменения дополнительной величины e – удельной внутренней энергии – «вдоль» уже известных особенностей.

В настоящей диссертации показано, что неклассические ударные волны представляют собой меры, вообще говоря, на многообразиях разной размерности, получены законы эволюции этих мер, которые существенным образом отличаются от соотношений Ренкина-Гюгонио для газовой динамики, и законы формирования иерархии особенностей (совокупность особенностей на многообразиях разной размерности) в двумерном случае (1.5).

Следующей моделью является двумерная система несжимаемых уравнений Навье-Стокса, в которую добавлен член второй производной по времени с малым параметром. Эта система вида (1.1) записывается следующим образом, $\boldsymbol{x} = (x, y)$,

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2} + \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{U}) + \nabla P = \Delta \boldsymbol{U} + g, \operatorname{div}\boldsymbol{U} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.7}$$

здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, P – давление, Δ – оператор Лапласа, g – внешняя сила. Система (1.7) может быть получена из кинетического уравнения Больцмана при учете дополнительных членов после операции осреднения и определяется в [El1], [El2] как квазигазодинамическая система уравнений. Эта же система уравнений может быть получена с помощью введения механизма релаксации в уравнения Эйлера, см., например, [BNP], фактически (1.7) представляет собой так называемую гиперболизацию системы уравнений Навье-Стокса. Система (1.7) используется для альтернативного описания газодинамических течений, в частности, течений разреженных сред также ее модификации возникают при описании вязкопластических явлений [CK]. В диссертации для системы уравнений вида (1.7) показано, что сильное решение начально-краевой задачи в ограниченной области существует при достаточно малых ε и ограниченной энергии начальных данных. Для одномерной версии системы (1.7) приведен пример того, что если даже при малых ε начальная энергия достаточно велика, то решение взрывается за конечное время.

Еще одной моделью является одномерная система уравнений сжимаемой двухфазной многокомпонентной фильтрации, $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\phi\big(x_{iG}\rho_G s + x_{iL}\rho_L(1-s)\big)\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\big(x_{iG}\rho_G V_G + x_{iL}\rho_L V_L\big) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.8}$$

где N – число компонент в смеси, $\phi > 0$ представляет собой пористость, $x_{iG} > 0$, $x_{iL} > 0$ являются термодинамическими константами равновесия (т.е. представляют собой молярные концентрации компонента i) для газовой (G) и жидкой (L) фазы соответственно, $\rho_G > 0$, $\rho_L > 0$ – плотности газовой и жидкой фаз соответственно, $0 < s < 1$ – насыщенность газовой фазы. При этом скорости фильтрации газовой и жидкой фаз V_G и V_L имеют вид

$$V_G = -\frac{Kk_{rG}}{\mu_G}\frac{\partial P}{\partial x} \quad , \quad V_L = -\frac{Kk_{rL}}{\mu_L}\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{1.9}$$

где $K > 0$ – так называемая абсолютная проницаемость породы, $k_{rG} \geq 0$, $k_{rL} \geq 0$, $k_{rG} + k_{rL} > 0$ – относительные проницаемости газовой и жидкой фаз, $\mu_G > 0$, $\mu_L > 0$ представляют собой вязкости газовой и жидкой фаз соответственно, $P > 0$ обозначает давление. Учитывая соотношения термодинамики многокомпонентных смесей, систему уравнений (1.8), (1.9) можно записать в виде (1.1), но без операторов второго порядка, и может быть рассмотрена как система законов сохранения. Математические модели фильтрации хорошо изучены в случае одного компонента и одной фазы, когда неизвестной функцией является только давление (или плотность), см., например, книгу [BER]. В этом случае ситуация моделируется с помощью вырождающихся уравнений параболического типа, см., например, обзор [Ka]. В случае многих компонент имеется обширная литература, посвященная несжимаемому случаю. В этой ситуации система уравнений многокомпонентной фильтрации (в случае одной пространственной переменной и при предположении о постоянстве скорости фильтрации) может быть преобразована в нестрого гиперболическую систему законов сохранения, см. [Or]. Стоит подчеркнуть, что свойство нестрогой гиперболичности существенно усложняет исследование, см. статью [KM], посвященную модельным системам уравнений (но часть из которых имеет физическое происхождение, в частности, происходит из описания процессов фильтрации) и иллюстрирующую разные стороны математического понятия нестрогой гиперболичности. При учете свойства сжимаемости, как в системе (1.8), (1.9), свойство гиперболичности, вообще говоря, теряется, параболической она также не является, и возникает вопрос, с каких позиций рассматривать эту систему уравнений. В диссертации показано, что если подойти к указанной системе уравнений как к вырожденной системе законов сохранения, то можно прийти к естественному понятию характеристик, сформулировать понятие обобщенного решения и применять методы, развитые в теории законов сохранения, например, рассматривать задачу Римана. Однако все эти понятия приобретают специфические черты, которые не характерны для систем уравнений гиперболического типа.

Наконец, заключительной моделью является уравнение вида (1.1) с нелинейной вязкостью и так называемом ограниченным потоком диссипации

$$\partial u / \partial t + \partial f(u) / \partial x = \partial Q(\partial u / \partial x) / \partial x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.10}$$

здесь $f \in C^1(\mathbb{R})$, $Q \in C^2(\mathbb{R})$, $f(0) = Q(0) = 0$, $Q' > 0$ и $Q(\pm\infty) = \mathrm{const}$. Вследствие указанных свойств при больших $\partial u / \partial x$ уравнение (1.10), имеющее вид (1.1), становится близким к закону сохранения вида (1.2) при $m = n = 1$. Уравнение (1.10) представляет собой модификацию уравнения Бюргерса и является сильно вырождающимися параболическим уравнением, которое допускает разрывные решения особого вида. В контексте вырождающихся параболических уравнений, как правило, исследовались только непрерывные решения, см., например, [Ka]. С физической точки зрения появление уравнений типа (1.10) описано, например, в [Ro] и связано со специальной регуляризацией разложения Чепмена-Энскога, а также в [BBP] в отношении теории специальных турбулентных течений. Уравнение (1.10) является простейшей моделью, описывающей взаимодействие между нелинейным переносом и нелинейными диссипативными процессами. В диссертации изучаются вопросы формулировки понятия обобщенного решения, условия его существования и единственности.

2. Список основных результатов диссертации, выносимых на защиту

Основные результаты, выносимые на защиту, заключаются в пунктах, представленных ниже. Полное и математически строгое описание результатов, включая все необходимые понятия и определения, будет изложено в разделе 3.

1) Найден ряд новых представлений обобщенных решений систем квазилинейных законов сохранения, которые будем определять термином *вариационное представление*, а именно:

а) в случае одной пространственной переменной $m = 1$ и системы n законов сохранения найден ассоциированный с обобщенным решением $\boldsymbol{U}(t, x)$ функционал $\boldsymbol{J}$ на траекториях $\boldsymbol{w} \equiv (w, x) = (\omega(t), \chi(t))$ в пространстве $(t, \boldsymbol{w})$, w – один из инвариантов Римана, такой, что из выполнения равенства $\delta \boldsymbol{J} = 0$ вдоль некоторого пути $\boldsymbol{w} = (\bar{\omega}(t), \bar{\chi}(t))$ следует выполнение характеристических соотношений в точках гладкости $(\varpi(t), \bar{\chi}(t))$ и соотношений Ренкина-Гюгонио на изломах; кроме того, если на некоторую кривую $x = X(t)$ приходят две траектории $x = \bar{\chi}_1(t)$, $x = \bar{\chi}_2(t)$, такие что $\delta \boldsymbol{J}_{x=\bar{\chi}_1(t)} = \delta \boldsymbol{J}_{x=\bar{\chi}_2(t)} = 0$ и $\boldsymbol{J}_{x=\bar{\chi}_1(t)} = \boldsymbol{J}_{x=\bar{\chi}_2(t)}$, то на кривой $x = X(t)$ также выполняются соотношения Ренкина-Гюгонио; этот результат является обобщением результатов, полученных Э. Хопфом для одного уравнения, см. [H];

б) в случае одной и двух пространственных переменных $m = 1, 2$ и системы n законов сохранения найден ассоциированный с обобщенным решением $\boldsymbol{U}(t, \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x, y)$ для $m = 2$ и $\boldsymbol{x} = x$ для $m = 1$, функционал $\boldsymbol{J}$ на траекториях/поверхностях в пространстве $(t, \boldsymbol{x})$ такой, что выполнение соотношения $\delta \boldsymbol{J} = 0$ вдоль какой-либо траектории/поверхности $\boldsymbol{x} = (\bar{\chi}(t, s), \bar{\gamma}(t, s))$, в случае поверхности s – параметр вдоль нее, влечет справедливость системы (1.2) в классическом смысле, если $\boldsymbol{U}(t, \boldsymbol{x})$ гладкая функция и соотношений Ренкина-Гюгонио, если имеет место разрыв;

в) в случае одной пространственной переменной $m = 1$ и системы n законов сохранения найден ассоциированный с обобщенным решением $\boldsymbol{U}(t, x)$ функционал $\mathcal{L}$ такой, что обобщенное решение $\boldsymbol{U}(t, x)$ выражается через минимум $\mathcal{L}$ в некотором банаховом пространстве; свойство минимизировать некоторый функционал можно использовать в качестве альтернативного определения понятия обобщенного решения системы (1.2).

2) Для системы уравнений газовой динамики без давления:

а) в случае одной пространственной переменной для системы (1.4), а также для ее обобщения, включающего внешнюю силу, предложено определение понятия обобщенного решения в пространстве мер Радона, доказана теорема существования обобщенного решения для либо непрерывного, либо полностью дискретного распределения вещества; также найдено вариационное представление обобщенного решения, которое выглядит как признак непрерывности обобщенных решений. А именно, в случае системы (1.4) имеем: точка (t, x), $x = a + tu_0(a)$ является точкой абсолютной непрерывности меры массы вещества $P_t(dx)$ и непрерывности скорости $u(t, x)$ тогда и только тогда, когда для любых $a^+, a^-, a^- < a < a^+$ выполнено соотношение

$$\frac{\int\limits_{\left[a^-,a\right)} \left(s+tu_0\left(s\right)\right)P_0\left(ds\right)}{\int\limits_{\left[a^-,a\right)} P_0\left(ds\right)} < \frac{\int\limits_{\left[a,a^+\right)} \left(s+tu_0\left(s\right)\right)P_0\left(ds\right)}{\int\limits_{\left[a^-,a\right)} P_0\left(ds\right)},$$

где $P_0\left(da\right), u_0\left(a\right)$ представляют собой начальное распределение вещества и начальную скорость;

б) в случае двух пространственных переменных найдена система уравнений, описывающая эволюцию сильных особенностей вдоль поверхностей $\Gamma \equiv \left(t, \chi\left(t,l\right), \gamma\left(t,l\right)\right)$, которая отличается по типу от традиционных соотношений Ренкина-Гюгонио

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} = \dfrac{\partial \chi}{\partial l}\left\{V\left[\rho\right]-\left[\rho v\right]\right\} - \dfrac{\partial \gamma}{\partial l}\left\{U\left[\rho\right]-\left[\rho u\right]\right\} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{I}}{\partial t} = \dfrac{\partial \chi}{\partial l}\left\{V\left[\rho \boldsymbol{u}\right]-\left[\rho v \boldsymbol{u}\right]\right\} - \dfrac{\partial \gamma}{\partial l}\left\{U\left[\rho \boldsymbol{u}\right]-\left[\rho u \boldsymbol{u}\right]\right\}, \\ \dfrac{\partial\left(\chi,\gamma\right)}{\partial t} = \boldsymbol{U} \equiv \left(U,V\right) \end{cases}$$

где $\boldsymbol{I} = P\boldsymbol{U}$ и для любой величины f обозначено: $f^{\pm}$ – значение величины f с двух сторон Γ и $\left[f\right] \equiv f^+ - f^-$;

доказано возникновение иерархии сильных особенностей, т.е. системы сильных особенностей, возникающих на многообразиях разной размерности, в том числе, получено соотношение Ренкина-Гюгонио для сильных особенностей вдоль кривых;

построена приближенная динамика прилипания в двумерном случае и получены оценки степени отклонения от слабого решения для дискретной системы частиц;

получено вариационное описание обобщенных решений, которое существенно отличается от одномерного варианта и связано с использованием вектор функционалов от областей G

$$\boldsymbol{F}\left(t,\boldsymbol{x};G\right) \equiv \iint\limits_G \left[\boldsymbol{u}_0\left(\boldsymbol{a}\right) - \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}{t}\right]\rho_0\left(\boldsymbol{a}\right)d\boldsymbol{a}.$$

3) Для гиперболизованного уравнения Навье-Стокса (1.7) в случае двух пространственных переменных получена теорема существования сильного решения при малом параметре гиперболизации и ограниченной начальной энергии в пространстве

$$\mathrm{E}_\varepsilon^1 \equiv \left\{\left\{\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\right\} \in \left[H^2\left(\Omega\right) \cap H_0^1\left(\Omega\right)\right]^2 \times \left[H_0^1\left(\Omega\right)\right]^2, \nabla\cdot\boldsymbol{U}=0, \nabla\cdot\boldsymbol{V}=0\right\}$$

с нормой

$$\left\|\mathfrak{A}\right\|_{\mathrm{E}_{\varepsilon}^{1}}^{2} \equiv \varepsilon\left\|\partial \boldsymbol{U}(t)/\partial t\right\|_{H^{1}}^{2}+\left\|\partial \boldsymbol{U}(t)/\partial t\right\|_{L^{2}}^{2}+\left\|\boldsymbol{U}(t)\right\|_{H^{2}}^{2},$$

где $\mathfrak{A}(t)=\left\{\boldsymbol{U}(t),\partial \boldsymbol{U}(t)/\partial t\right\}$; приведен пример разрушения сильного решения за конечное время при нарушении указанных условий даже в одномерном случае.

4) Для одномерной системы уравнений, сжимаемой двухфазной многокомпонентной фильтрации (1.8), (1.9) приведена такая переформулировка основных уравнений, которая позволяет использовать методы теории систем законов сохранения. Получившаяся при этом система уравнений определена как почти гиперболическая, обладающая свойствами как гиперболических, так и параболических систем уравнений. Для этой системы уравнений выведено соотношение Ренкина-Гюгонио и доказана теорема о структуре множества скачков. В случае двух компонент получена структура решения задачи Римана, свойства которой существенно отличаются от традиционных систем законов сохранения. Так, например, оказывается, что решение задачи Римана всегда разрывно и, кроме того, имеет место бесконечная скорость распространения возмущений. В несжимаемом случае найдено выражение для всех пар энтропия-поток, которое оказывается существенно богаче, чем для одного скалярного закона сохранения.

5) Для уравнения с ограниченным потоком диссипации (1.10) сформулировано понятие обобщенного решения с учетом возможности возникновения разрывов в, вообще говоря, параболическом уравнении. Для начальных функций из пространства $W^{2,1}(\mathbb{R})$, которые являются кусочно-гладкими на компактном множестве с конечным множеством точек разрыва, доказана теорема существования обобщенного решения. Теорема единственности обобщенного решения, удовлетворяющего условию Олейник E и условию непрерывности потока диссипации, доказана для достаточно узкого, хотя и отражающего все особенности задачи, класса функций, являющихся кусочно $C^{2}((0,T)\times\mathbb{R})$ с конечным числом $C^{1}(0,T)$ линий разрыва.

3. Подробное изложение полученных результатов

В данном разделе на математическом уровне строгости будут изложены результаты, анонсированные в разделе 2, включая все определения и формулировки. Также будет приведена дополнительная литература, характеризующая тот вклад в проблему, который сделал диссертант.

3.1 Вариационное представление для обобщенных решений систем квазилинейных законов сохранения

Введем вначале необходимые понятия и определения. Рассмотрим задачу Коши для системы квазилинейных уравнений общего вида, см. также (1.2),

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\boldsymbol{F}_j\big(\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})\big)\Big)=0 \quad , \quad \boldsymbol{U}(0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{x}), \qquad (3.1.1)$$

где $(t,\boldsymbol{x})\in\Pi_T\equiv\left\{(t,\boldsymbol{x}):(t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times\mathbb{R}^m\right\}$, $\boldsymbol{U}(t,x)=\big(u_1(t,\boldsymbol{x}),...,u_n(t,\boldsymbol{x})\big)$, $(t,\boldsymbol{x})\equiv(t,x_1,...,x_m)$, $\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x}):\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, а $\boldsymbol{F}_j=\left(f_{1j},...,f_{nj}\right)$ – достаточно гладкие (по крайней мере, $\boldsymbol{F}_j\in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$) вектор-функции переменных $(u_1,...,u_n)$. Многомерные интегралы по пространствам многих переменных и по поверхностям в этих пространствах будут записываться в виде одинарных или двойных интегралов для сокращения записи, если это не будет приводить к двусмысленности. Например, запись $\iint\limits_{\Pi_T}[...]dxdt$ будет означать интегрирование по Лебеговой мере $dxdt$ в пространстве $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^m$. Отдельные исключения будут специально оговариваться.

Решения системы (3.1.1), принимающие заданные начальные значения, понимаются в обобщенном смысле в соответствии со следующим определением 3.1.1.

Определение 3.1.1. Пусть $\boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^n$ является локально ограниченной измеримой функцией. Тогда назовем локально ограниченную измеримую в Π_T функцию $\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})$ *обобщенным решением* задачи (3.1.1), если для любой пробной функции $\varphi\in C^\infty\left([0,T)\times\mathbb{R}^m\right)$, $\varphi(t,\cdot)\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^m\right)$ при фиксированном $t\in[0,T]$, $\varphi\equiv0$ при $T_1\le t\le T$, $T_1<T$, выполнено интегральное тождество

$$\iint\limits_{\Pi_T}\left[\boldsymbol{U}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{U})\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right]d\boldsymbol{x}dt+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\boldsymbol{U}_0\varphi(0,\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=0. \qquad (3.1.2)$$

Если $\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})$ является непрерывно-дифференцируемой функцией, то легко видеть эквивалентность формулировок (3.1.1) и (3.1.2). Пусть $\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})$ является непрерывно-дифференцируемой функцией вне некоторой гиперповерхности $\Omega\subset\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m$ коразмерности 1, имеющей непрерывный вектор нормали $(n_0,n_1,...,n_m)$. Пусть на этой гиперповерхности $\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})$ испытывает разрыв, и вдоль Ω определены значения $\boldsymbol{U}^{\pm}=\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x}\pm 0)$. Тогда (3.1.2) будет выполнено, если в областях гладкости $\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})$ справедливо соотношение (3.1.1), а вдоль Ω выполняется так называемое соотношение Ренкина-Гюгонио

$$\left(\boldsymbol{U}^{-}-\boldsymbol{U}^{+}\right)n_0+\sum_{j=1}^{m}\left(\boldsymbol{F}_j\left(\boldsymbol{U}^{-}\right)-\boldsymbol{F}_j\left(\boldsymbol{U}^{+}\right)\right)n_j=0. \tag{3.1.3}$$

С другой стороны, хорошо известно, что в рамках определения 3.1.1 обобщенное решение задачи (3.1.1) не является единственным. Поэтому для системы (3.1.1) вводятся дополнительные понятия энтропии и энтропийного решения следующим образом.

Определение 3.1.2. Назовем выпуклую положительную функцию $\eta(\boldsymbol{U})\in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ *энтропией* для системы (3.1.1), если для классических решений (3.1.1) выполняется дополнительный закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta\left(\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(q_j\left(\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})\right)\right)=0 \tag{3.1.4}$$

с некоторыми достаточно гладкими функциями потока $q_j\left(u_1,...,u_n\right)$.

Определение 3.1.3. Функция $\boldsymbol{U}(t,x)$, являющаяся обобщенным решением задачи (3.1.1) в смысле Определения 3.1.1, называется *энтропийным решением* системы (3.1.1), если для каждой энтропии $\eta(\boldsymbol{U})$ из определения 3.1.2 и пробной функции $\varphi(t,\boldsymbol{x})\geq 0$ из Определения 3.1.1 выполнено неравенство

$$\iint\limits_{\Pi_T}\left[\eta(\boldsymbol{U})\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{j=1}^{m}q_j(\boldsymbol{U})\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right]d\boldsymbol{x}dt+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\eta(\boldsymbol{U}_0)\varphi(0,\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\geq 0. \tag{3.1.5}$$

В случае кусочно-гладкой функции $\boldsymbol{U}(t,x)$, являющейся энтропийным решением задачи (3.1.1), на гиперповерхностях разрыва Ω будет выполнено дополнительное к (3.1.3) соотношение (при соответствующем определении положительной и отрицательной сторон гиперповерхности Ω)

$$\left(\eta\left(\boldsymbol{U}^{-}\right)-\eta\left(\boldsymbol{U}^{+}\right)\right)n_0+\sum_{j=1}^{m}\left(q_j\left(\boldsymbol{U}^{-}\right)-q_j\left(\boldsymbol{U}^{+}\right)\right)n_j\geq 0. \tag{3.1.6}$$

Вопрос о существовании и единственности обобщенных энтропийных решений для (3.1.1) в настоящее время решен только для частных случаев, несмотря на большие приложенные усилия, см. раздел 1. В рамках раздела 3.1 в диссертации представлен новый взгляд на структуру обобщенных решений квазилинейных систем законов сохранения на основе специального представления для разрывных обобщенных решений.

3.1.1 Об обобщении результатов Э. Хопфа на системы квазилинейных законов сохранения в случае одной пространственной переменной

Вариационное представление для обобщенных решений в одномерном случае известно для одного уравнения. В работе [H] для задачи Коши

$$u_t + \left(u^2 / 2\right)_x = 0 \,, \left(t, x\right) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,, u\left(0, x\right) = u_0\left(x\right), \tag{3.1.7}$$

где $u_0\left(x\right)$ предполагалась интегрируемой на каждом конечном интервале с некоторым естественным ограничением роста на бесконечности, было получено следующее представление для обобщенного решения

$$u(t,x) = \left(x - y(t,x)\right)/t; y(t,x) = \min_y F(t,x,y) \equiv \min_y \left[\int_0^y u_0(s)ds + \frac{(x-y)^2}{2t}\right], \tag{3.1.8}$$

где $\min_y$ подразумевает глобальный минимум. Если такой минимум один, то $\left(t, x\right)$ является точкой непрерывности $u\left(t, x\right)$, а если таких точек несколько, то $\left(t, x\right)$ является точкой разрыва. Важно то, что так полученная совокупность точек разрыва автоматически удовлетворяет соотношениям Ренкина-Гюгонио (3.1.3) для уравнения (3.1.7). Далее формулы типа (3.1.8) были обобщены на случай более общего потока $\varphi\left(t, x, u\right)$ вместо $u^2 / 2$, см. [L3], [O]. В работе [1], см. также краткую версию в [ERS], формулы (3.1.8) были обобщены на вырожденную нестрого гиперболическую, см. определение 1.2, систему (1.3). Аналога представления (3.1.8) для общих систем предложено не было, в диссертации этот пробел восполнен, результаты опубликованы в [2].

Рассмотрим систему законов сохранения (3.1.1). Пусть $m = 1$ и индекс j у соответствующих переменных и функций опущен. Пусть эта система является строго гиперболической, определение 1.1.

Определение 3.1.4. *Инвариантом Римана* для системы (3.1.1) в случае $m = 1$ называется функция $w\left(u_1, ..., u_n\right)$ такая, что $\nabla w = \boldsymbol{l}$, где $\boldsymbol{l}$ является каким-либо левым собственным вектором системы (3.1.1).

У системы (3.1.1), $m = 1$, может быть не более n инвариантов Римана. Пусть $IR \in \left\{1, ..., n\right\}, IR \neq \varnothing$ такое множество индексов, что существуют инварианты Римана

$w_k\left(u_1,\dots,u_n\right)$ для (3.1.1), $m=1$, т.е. $\nabla w_k=\boldsymbol{l}_k$, $k\in IR$. Для остального множества индексов $O\in\{1,\dots,n\}$ определим дополнительные функции $p_k\left(u_1,\dots,u_n\right)$ такие, что $\nabla p_k\times\boldsymbol{l}_k\neq 0$, $k\in O$, а совокупность w_k , $k\in IR$ и p_k , $k\in O$ представляет собой невырожденную замену переменных в фазовом пространстве. Для удобства введем обозначение $\omega_k=w_k,k\in IR$ и $\omega_k=p_k,k\in O$.

Теперь рассмотрим специальные классы для функций $\boldsymbol{U}\left(t,x\right)$ и траекторий $\chi\left(t\right)$, которые близки к соответствующим классам в [О].

Определение 3.1.5. Пусть $x=\chi\left(t\right)\subset\Pi_T$, $0<t<T$. Назовем путь $x=\chi\left(t\right)$ *принадлежащим классу* Γ, если выполняются следующие условия. Пусть существует конечный набор точек $\{t_i\}\in\left(0,T\right),i=1,\dots,N$ (набор точек для каждого пути является своим, но максимальное количество точек для всех рассматриваемых путей одинаково) такой, что $\chi\left(t\right)\in C^1\left(\left(t_{i-1},t_i\right)\right);i=1,\dots,N+1;t_0=0,t_{N+1}=T$ и $\chi\left(t\right)\in C\left(\left[0,T\right]\right)$. Кроме того, пусть при малых изменениях $\chi\left(t\right)$ точки $\left\{\left(t_i,\chi\left(t_i\right)\right)\right\}\in\left(0,T\right)\times\mathbb{R},i=1,\dots,N$ образуют кусочно непрерывно дифференцируемые кривые $x=s_i\left(t\right)$ (которые, на самом деле, являются линиями разрыва $\boldsymbol{U}\left(t,x\right)$). Теперь рассмотрим кусочно непрерывно дифференцируемые функции $\boldsymbol{U}\left(t,x\right)$, будем говорить, что $\boldsymbol{U}\left(t,x\right)$ *принадлежит классу* K, если для любого пути $x=\chi\left(t\right)$ из класса Γ выполнено следующее. Существует функция $\boldsymbol{U}\left(t\right)\equiv\boldsymbol{U}\left(t,\chi\left(t\right)\right)$ и $\boldsymbol{U}\left(t\right)\in C^1\left(\left(t_{i-1},t_i\right)\right);i=1,\dots,N+1$, а также существуют односторонние пределы $\boldsymbol{U}\left(t_i\pm 0\right),i=1,\dots,N$.

Далее может быть произведена замена переменных $\left(u_1,\dots,u_n\right)\to\left(\omega_1,\dots,\omega_n\right)$. Выберем некоторое $k_0\in IR$, в следующей теореме при рассмотрении вариации $\delta\boldsymbol{U}$ варьируемыми переменными будут считаться только ω_{k_0} и x, остальные переменные $\omega_k,k\neq k_0$ будут считаться функциями t,x, которые необходимо определить вместе с траекториями $\omega_{k_0}\left(t\right),\chi\left(t\right)$. Соответствующую вариацию обозначим как δ_{k_0}.

Фиксируем некоторое $0<t<T$. Определим вектор функционал $\boldsymbol{J}$, построенный на множестве траекторий $\chi(\tau),\boldsymbol{U}(\tau)$

$$\boldsymbol{J} \equiv \int_0^y \boldsymbol{U}_0(s)ds + \int_0^t \boldsymbol{L}(\dot{\chi},\boldsymbol{U})d\tau\,;\, \boldsymbol{L}(\dot{\chi},\boldsymbol{U}) \equiv \boldsymbol{U}\dot{\chi} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\,;\, \chi(0)=y, \chi(t)=x. \qquad (3.1.9)$$

Теорема 3.1.1. Фиксируем произвольное $k_0 \in IR$. Пусть функции $\omega_k, k \in O$ удовлетворяют уравнению Лиувилля $\boldsymbol{r}_{k_0} \cdot \nabla\omega_k = 0$. Тогда для функций $\boldsymbol{U}(t,x)$ из класса K выполнение равенства $\delta_{k_0}\boldsymbol{J} = 0$ вдоль некоторого пути $x=\chi(\tau)\in\Gamma$ влечет за собой выполнение характеристических соотношений (1.3) в точках гладкости $\chi(\tau)$, где кривая $x=\chi(\tau)$ оказывается характеристикой, и соотношений Ренкина-Гюгонио (3.1.3) на изломах.

Будем теперь считать, что $\omega_k, k \neq k_0$ фиксированы и выполнены характеристические соотношения (1.3). Построим траекторию, соединяющую точки $(0,y)$ и (t,x), используя соотношения $\dot{\omega}_{k_0}=0$, $\dot{\chi}=\lambda_{k_0}(\boldsymbol{U})$. При этом траектория может иметь изломы в точках $(\tau_i,\chi(\tau_i)), i=1,\ldots,N$, которые мы будем считать лежащими на фиксированных линиях разрыва $\chi = s_i(\tau)$. Тогда $\boldsymbol{J}$ из (3.1.9) превращается из функционала в функцию от переменных $\{y,\tau_i\}, i=1,\ldots,N$. Будем писать $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(y,\tau_1,\ldots,\tau_N;t,x)\equiv\boldsymbol{J}(y,\tau_i;t,x)$.

Теорема 3.1.2. Для функций $\boldsymbol{U}(t,x)$, принадлежащих классу K, построенная выше вектор функция $\boldsymbol{J}$ удовлетворяет равенствам $\partial\boldsymbol{J}/\partial\tau_i = 0, i \neq 0$ и $\partial\boldsymbol{J}/\partial y = \boldsymbol{U}_0(y) - \boldsymbol{U}(0,y)$. Кроме того, если для каждой точки некоторой кривой $x = X(t)$ для какого-либо k_0 существуют две траектории, соединяющие точки $(0,y_1)$, $(0,y_2)$ и $(t,X(t))$, и, кроме того, $\boldsymbol{J}\left(y_1,\tau_i^{(1)};t,X(t)\right)=\boldsymbol{J}\left(y_2,\tau_i^{(2)};t,X(t)\right)$, то кривая $x=X(t)$ удовлетворяет соотношениям Ренкина-Гюгонио (3.1.3).

3.1.2 Вариационное представление для обобщенных решений систем квазилинейных законов сохранения в случае одной и двух пространственных переменных

Насколько известно автору, представленные ниже результаты имеют оригинальный характер. В отличие от уравнений второго порядка вариационный подход для уравнений первого порядка не формулировался. Некоторые мысли в этом направлении высказывал Э. Тадмор (E. Tadmor), [Ta]. Полученные результаты опубликованы в [2], см. также дополнительную работу [R1].

Рассмотрим последовательно одномерный, $m=1$, и двумерный, $m=2$, случай.

Пусть $G=\left[0,T\right]\times\left[-X,X\right]\subset\Pi_T$, где X – некоторое положительное число. В G рассмотрим класс $\bar{K}$ функций $\boldsymbol{U}\left(t,x\right)$, являющихся кусочно дважды непрерывно-дифференцируемыми с конечным числом кусочно непрерывно дифференцируемых линий разрыва, см. также [O]. Рассмотрим также пространство траекторий $\chi\left(t\right)\in C_X^1\equiv C^1\left(\left[0,T\right],\left[-X,X\right]\right)$.

Определение 3.1.6. Назовем некоторое множество траекторий $\Gamma\subset C_X^1$ *допустимым* для $\boldsymbol{U}\left(t,x\right)\in\bar{K}$, если для любой точки $\left(t,x\right)\in\left[0,T\right]\times\left[-X,X\right]$ существует единственная траектория $\chi\left(\tau\right)\in\Gamma$ такая, что $\chi\left(t\right)=x$, а также для всякой $\chi\left(\tau\right)\in\Gamma$ и всякой линии разрыва $s\left(\tau\right)$ функции $\boldsymbol{U}\left(t,x\right)$ существует лишь конечное число точек их пересечения, и при $\chi\left(\tau_0\right)=s\left(\tau_0\right)$ выполнено $\dot{\chi}\left(\tau_0\right)\neq\dot{s}\left(\tau_0\right)$.

Рассмотрим вектор функционал $\bar{\boldsymbol{J}}$, аналогичный (3.1.9), такой, что $\bar{\boldsymbol{J}}:\chi\left(\tau\right)\in C_X^1\to\mathbb{R}^n$,

$$\bar{\boldsymbol{J}}\equiv\int_0^t\boldsymbol{L}\left(\dot{\chi},\boldsymbol{U}\right)d\tau\,;\,\boldsymbol{L}\left(\dot{\chi},\boldsymbol{U}\right)\equiv\boldsymbol{U}\dot{\chi}-\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{U}\right);\,\chi\left(0\right)=y,\chi\left(t\right)=x. \qquad (3.1.10)$$

Теорема 3.1.3. Пусть $\boldsymbol{U}\left(t,x\right)\in\bar{K}$, и пусть для некоторой допустимой траектории $x=\bar{\chi}\left(\tau\right)$ выполнено $\delta\bar{\boldsymbol{J}}=0$. Тогда в тех точках $\bar{\chi}$, где $\boldsymbol{U}\left(t,x\right)$ является гладкой, выполняется уравнение (3.1.1) в классическом смысле, а в точках пересечения $\bar{\chi}$ и линии разрыва функции $\boldsymbol{U}\left(t,x\right)$ выполняются соотношения Ренкина-Гюгонио (3.1.3). Кроме того, выражение для $\delta^2\bar{\boldsymbol{J}}$ на траектории $x=\bar{\chi}\left(\tau\right)$, где $\delta\bar{\boldsymbol{J}}=0$, содержит только выражения от $\left(\delta\chi\right)^2$.

Пусть теперь $m=2$, обозначим $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{U})\equiv\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}),\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{U})\equiv\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})$. Пусть $G=[0,T]\times[-X,X]\times[-Y,Y]\subset\Pi_T$, где X,Y – некоторые положительные числа. В G рассмотрим класс $\bar{K}$ функций $\boldsymbol{U}(t,x,y)$, являющихся кусочно дважды непрерывно-дифференцируемыми, с одной (для простоты) непрерывно дифференцируемой поверхностью разрыва Ω. Рассмотрим множество поверхностей $\boldsymbol{S}\equiv\{\tau,\chi(\tau,s),\gamma(\tau,s)\}$, s – внутренний параметр поверхности, τ – параметр времени, $\chi(\tau,s),\gamma(\tau,s)\in C^1_{X,Y}\equiv C^1([0,T]\times[0,1],[-X,X]\times[-Y,Y])$. Пусть поверхность разрыва Ω функции $\boldsymbol{U}(t,x,y)$ задается уравнениями $t=\tau,x=\varphi(\tau,s),y=\psi(\tau,s)$.

Определение 3.1.7. Назовем некоторое множество поверхностей $\Gamma\subset C^1_{X,Y}$ *допустимым* для $\boldsymbol{U}(t,x,y)\in\bar{K}$, если для любой точки $(t,x,y)\in[0,T]\times[-X,X]\times[-Y,Y]$ существует единственная поверхность $S\in\Gamma$ и значение s_0 такие, что $\chi(t,s_0)=x,\gamma(t,s_0)=y$, а множество $S\cap\Omega$ состоит из конечного числа достаточно гладких линий, и на этом множестве выполнено $\psi_s(\varphi_\tau-\chi_\tau)-\varphi_s(\psi_\tau-\gamma_\tau)\neq 0$.

Рассмотрим аналог $\bar{\boldsymbol{J}}$ вектор функционала (3.1.10) такой, что $\bar{\boldsymbol{J}}:S(\tau,s)\in C^1_{X,Y}\to\mathbb{R}^n$,

$$\bar{\boldsymbol{J}}\equiv\iint_S \boldsymbol{U}dx\wedge dy+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})dy\wedge dt+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})dt\wedge dx, \tag{3.1.11}$$

здесь знак $\wedge$ обозначает внешнее произведение.

Теорема 3.1.4. Пусть $\boldsymbol{U}(t,x,y)\in\bar{K}$, и пусть на некоторой допустимой поверхности $\bar{S}$ выполнено $\delta\bar{\boldsymbol{J}}=0$. Тогда в тех точках $\bar{S}$, где $\boldsymbol{U}(t,x,y)$ является гладкой, выполняется уравнение (3.1.1) в классическом смысле, а в точках пересечения $\bar{S}$ и поверхности разрыва функции $\boldsymbol{U}(t,x,y)$ выполняются соотношения Ренкина-Гюгонио (3.1.3).

Выражение (3.1.11) по существу является дифференциальной формой, поэтому, вообще говоря, обобщение этой записи на многомерный случай не представляет затруднений.

3.1.3 Представление обобщенного решения системы квазилинейных законов сохранения в случае одной пространственной переменной как минимума некоторого функционала

Содержание данного пункта является развитием предыдущего. Опять же, насколько известно автору, представленные ниже результаты имеют оригинальный характер. Они опубликованы в [3], см. также дополнительную работу [R1].

В случае одной пространственной переменной, $m=1$, можно получить другую форму представления обобщенных решений с использованием процедуры минимизации функционала. В рамках данного пункта будем пользоваться понятиями и обозначениями, введенными в пункте 3.1.2. Обозначим $\boldsymbol{V}(t,x) \equiv \int \boldsymbol{U}(t,p)dp$. Введем вектор функционал вида (3.1.10)

$$\mathbf{J}_{\alpha} \equiv \int_0^T \left[\mathbf{U}(\tau,\chi+\alpha\Delta\chi)(\dot{\chi}+\alpha\Delta\dot{\chi}) - \mathbf{F}\circ\mathbf{U}(\tau,\chi+\alpha\Delta\chi)\right]d\tau\,, \tag{3.1.12}$$

где $\Delta\chi(\tau)$ относится к тому же классу, что и $\chi(\tau)$.

Теорема 3.1.5. Пусть $\boldsymbol{U}(t,x) \in \bar{K}$ и удовлетворяет системе (3.1.1) в слабом смысле, т.е. в смысле определения 3.1.1. Тогда справедливо соотношение

$$\frac{d}{d\alpha}\mathbf{J}_{\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_0^T \frac{d}{d\tau}\mathbf{V}(\tau,\chi+\alpha\Delta\chi)d\tau\text{, а} \tag{3.1.13}$$

функция

$$\mathbf{M}_V(t,x) \equiv \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{F}\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\right) \tag{3.1.14}$$

является непрерывной и не зависит от x .

Равенства (3.1.12), (3.1.13) связаны с преобразованиями, используемыми в работе [R1], и вводимыми там функционалами. На основании теоремы 3.1.5 можно предложить следующее определение для обобщенного решения системы (3.1.1), не опирающееся на выполнение интегрального тождества (3.1.2).

Определение 3.1.8. Рассмотрим функцию $\mathbf{V}(t,x) \in W^{1,\infty}(\Pi_T) \equiv B$ и начальное условие $\mathbf{V}_0(x) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}), \mathbf{V}_0'(x) = \mathbf{U}_0(x)$. Обозначим через $\mathcal{V}$ подмножество B такое, что $\mathbf{V}(+0,x) = \mathbf{V}_0(x)$. Также на пространстве B рассмотрим функционал

$$\mathcal{L}(\mathbf{V}) \equiv \underset{t}{esssup}\sum_{i=1}^{n}\underset{x}{Var}\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + f_i\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\right)\right), \tag{3.1.15}$$

где $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_n)$, а $\underset{x}{Var}$ обозначает вариацию выражения по переменной x. Тогда функцию $\mathbf{U} = \partial \mathbf{V} / \partial x$ назовем *обобщенным решением* задачи (3.1.1), $m=1$, если функция $\mathbf{V}$ реализует минимум функционала $\mathcal{L}$ на множестве $\mathcal{V}$.

Связь обобщенного решения в смысле определения 3.1.8 со слабым решением, т.е. решением в смысле определения 3.1.1, иллюстрирует следующее утверждение.

Теорема 3.1.6. Пусть $\mathcal{W} \subset B$ обозначает множество таких $\mathbf{V}$, что функции $\mathbf{M}_V(t,x)$ из (3.1.14) имеют ограниченную вариацию по x для почти всех t. Тогда функционал $\mathcal{L}$ из (3.1.15) является полунепрерывным снизу на множестве $\mathcal{W}$. Пусть минимум функционала $\mathcal{L}$ достигается. Обозначим $\bar{m} \equiv \min\limits_{\mathbf{V} \in \mathcal{V}} \mathcal{L}(\mathbf{V})$, тогда если $\bar{m} = 0$, то $\mathbf{U} = \partial \mathbf{V} / \partial x$ удовлетворяет системе (3.1.1) в смысле определения 3.1.1.

Смысл введения определения 3.1.8 состоит в том, что, во-первых, оно указывает естественный путь для построения обобщенного решения и, во-вторых, может служит обобщением понятия обобщенного решения в случае необходимости рассмотрения в качестве решений нелинейного уравнения дельта-функций, например, системы типа Кейфитц-Кранзера, см. [KK]. Определение 3.1.8 позволяет избежать непосредственного рассмотрения дельта-функций в квазилинейных системах законов сохранения.

3.2 Сингулярные решения системы уравнений газовой динамики без давления в случае одной и двух пространственных переменных

3.2.1 Случай одной пространственной переменной

Исследование законов концентрации вещества, исходя из физических соображений, содержалось уже в статье [Z1] и книге [Z2]. В работе [Kra] также на физическом уровне строгости было показано, что в решении уравнений для сред без давления возникают особенности, однако эти уравнения имеют смысл и после возникновения особенностей. При этом возникает новый тип разрывных решений, в которых происходит образование сильных особенностей плотности на гиперповерхностях разной коразмерности. В частности, в [Kra], также на физическом уровне строгости, были получены законы эволюции подобных гиперповерхностей. В трехмерном случае автор назвал такие особенности «пеленами» и «шнурами», чтобы отличать их от газодинамических ударных волн. Появление статьи [Bou] стимулировало изучение сред без давления с математической точки зрения. Например, в работах [Ov], [Chu] изучались классические решения многомерной системы уравнений газовой динамики без давления вплоть до момента возникновения особенностей на основе техники теоретико-группового анализа. В работах диссертанта с соавторами [1], [ERS] впервые, параллельно со статьей [Gr], на математическом уровне строгости доказано существование обобщенных решений для системы (1.4) в пространстве мер и предложен вариационный принцип, позволяющий находить обобщенные решения при помощи процедуры минимизации некоторой функции, построенной по начальным данным. В дальнейшем это подход получил развитие в работах других авторов в случае одной пространственной переменной, см., например, [HW], [LiW], [Hy1], [Hy2]. Дополнительно отметим, что, несмотря на видимую простоту системы (1.4), она допускает достаточно богатое множество решений, в частности, может описывать процессы не только концентрации, но и распада вещества [KlR].

Наряду с системой (1.4) будем рассматривать также ее более общий вариант с внешней силой

$$\begin{cases} \partial\rho / \partial t + \partial\left(\rho u\right) / \partial x = 0 \\ \partial\left(\rho u\right) / \partial t + \partial\left(\rho u^2\right) / \partial x = -\rho g , \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ . \\ \partial g / \partial x = 2\rho \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Определение понятия обобщенного решения задачи Коши дадим лишь для (3.2.1), т.к. система (1.4) получается из (3.2.1), полагая $g = 0$ и исключая третье уравнение. Вследствие вырожденности систем (1.4), (3.2.1) естественно считать, что они задают динамику в пространстве пар мер $\left(P_t, I_t\right)$, где $P_t \geq 0$ отвечает за распределение массы, а, вообще говоря, знакопеременная I_t – за распределение импульса.

Определение 3.2.1. Пусть $\left(P_t, I_t\right)$ – семейства мер Радона, определенные на борелевских подмножествах $\mathbb{R}$, слабо непрерывные по t, и, кроме того, $P_t \geq 0$, а мера I_t абсолютно непрерывна относительно P_t для почти всех положительных t. Определим функцию $u\left(t,x\right)$ как производную Радона-Никодима $u\left(t,x\right) = dI_t / dP_t$. Тогда назовем пару $\wp_t \equiv \left(P_t, I_t\right)$ *обобщенным решением* задачи Коши для (3.2.1), если

1) для любой вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\varphi} = \left(\varphi_1, \varphi_2\right) \in C_0^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ и любых $0 < t_1 < t_2 < +\infty$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\varphi}(x) \odot \wp_{t_2}(dx) - \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\varphi}(x) \odot \wp_{t_1}(dx) = \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} u \odot \wp_\tau(dx) - (0,1) \cdot \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(x) \big(P_\tau(-\infty, x) - P_\tau(x, +\infty)\big) P_\tau(dx), \tag{3.2.2}$$

где $\odot$ обозначает покомпонентное произведение (произведение Адамара);

2) в слабом смысле при $t \to +0 \quad P_t \to P_0, \quad I_t \to I_0$.

Теорема 3.2.1. Пусть начальные меры $\wp_0 \equiv (P_0 \geq 0, I_0)$ являются мерами Радона на $\mathbb{R}$ и пусть выполнены следующие условия: 1) P_0 дискретная или абсолютно непрерывная мера относительно меры Лебега, в случае абсолютной непрерывности ее плотность $\rho_0(x) > 0, x \in \operatorname{supp}(P_0)$, при неограниченном носителе также выполнено $\int_0^x s dP_0(s) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$; 2) мера I_0 абсолютно непрерывна относительно P_0, $u_0 \equiv dI_0 / dP_0$ и в случае абсолютной непрерывности P_0 функция u_0 тоже непрерывна; 3) для любого $s > 0$ выполнено $\sup_{|x| \leq s} |u_0(x)| \leq b_0(s)$, $\lim_{s \to \infty} b_0(s) / s = 0$; 4) $P_0(\mathbb{R}) < \infty$. Тогда обобщенное решение системы (3.2.1) существует. В случае системы (1.4) обобщенное решение существует и без выполнения условия 4).

Теперь опишем вариационный принцип для обобщенных решений системы (3.2.1), для системы (1.4) выражения аналогичны.

Теорема 3.2.2. Точка $(t, x), x = a + tu_0(a) - g_0(a) t^2 / 2$, где $g_0(a) = \int_{-\infty}^{a} dP_0 - \int_{a}^{+\infty} dP_0$, является точкой абсолютной непрерывности меры $P_t(dx)$ и непрерывности функции $u(t, x)$ тогда и только тогда, когда для любых $a^+, a^-, a^- < a < a^+$ выполнено соотношение

$$\frac{\int\limits_{[a^-,a)} \left(s+tu_0(s)\right)P_0(ds)}{\int\limits_{[a^-,a)} P_0(ds)} - \frac{t^2}{2}\left(P_0\left(-\infty,a^-\right) - P_0\left(a,+\infty\right)\right) < \frac{\int\limits_{[a,a^+)} \left(s+tu_0(s)\right)P_0(ds)}{\int\limits_{[a^-,a)} P_0(ds)} - \frac{t^2}{2}\left(P_0\left(-\infty,a\right) - P_0\left(a^+,+\infty\right)\right). \tag{3.2.3}$$

Эта теорема позволяет по начальным данным определить все точки непрерывности обобщенного решения, а, следовательно, и места возникновения особенностей. И таким образом построить обобщенное решение.

3.2.2 Случай двух пространственных переменных

Случай многих, и даже двух, пространственных переменных является гораздо менее изученным. Для случая двух пространственных переменных параллельно в книге [LZY] и работе диссертанта [R2] (более подробное изложение этой работы см. в [4]) были впервые на математическом уровне строгости получены соотношения типа Ренкина-Гюгонио в дифференциальной форме для случая сильных особенностей на поверхностях в пространстве (t,x,y). В [LZY] также изучены решения двумерной задачи Римана, которые такие особенности содержат, это сделано в рамках изучения решений двумерной задачи Римана для системы уравнений традиционной газовой динамики. Полученные соотношения Ренкина-Гюгонио в случае сред без давления представляют собой эволюционную систему уравнений в частных производных, включающую в себя помимо динамики поверхностей особенности еще и динамику плотности концентрации вещества. Поэтому, вообще говоря, они являются более сложными, чем соотношения Ренкина-Гюгонио для обычной газовой динамики и представляют собой новый тип ударных волн. В статье диссертанта [4] соотношения Ренкина-Гюгонио получены оригинальным способом на основе теории новых обобщенных функций [Co], кроме того, там также было получено описание этих соотношений и в интегральной форме. Интегральное описание соотношений Ренкина-Гюгонио фактически предполагает возможность возникновения эволюционирующих особенностей на многообразиях разной размерности и возникновение иерархии ударных волн. Этот факт является новым, не отмеченным другими авторами. Он был конкретизирован в работах диссертанта [R3], [AR1] и соавторов и обоснован диссертантом в [5], [6]. При этом оказывается, что форма соотношений Ренкина-Гюгонио меняется в зависимости от коразмерности поверхности сильной особенности. В зарубежной литературе результаты [LZY] обобщались в сторону рассмотрения полной системы уравнений (1.5), (1.6), см., например, [Pa]. При рассмотрении в двумерном случае дискретных решений системы (1.5), в отличие от одномерной ситуации, возникает ситуация скрещивания траекторий частиц. Оказывается, что так будет для большинства траекторий для полного по некоторой мере набора начальных распределений частиц, см. [BD]. Если же имеется бесконечный начальный набор частиц в ограниченном множестве на плоскости, то возможны ситуации несуществования и неединственности обобщенного решения, см. [BrN]. Тем не менее, диссертантом с соавторами в [7] был впервые предложен численный метод нахождения обобщенных решений системы уравнений двумерной газовой динамики без давления на основе динамики прилипания, а также получены оценки для соответствующей системы взаимодействующих частиц. Численное исследование явления возникновения иерархии особенностей на основе этой методологии содержится в [KRy]. Вследствие сложностей построения решений при помощи системы взаимодействующих частиц диссертантом был предложен подход вариационного описания обобщенных решений в двумерном случае [5] на основе интегрального представления работ [4] и [R3], которое качественным образом отличается от одномерного варианта (3.2.3). Дополнительно отметим, что сделанные в [4] замечания о не гиперболическом характере системы уравнений Ренкина-Гюгонио в двумерном случае нашли продолжение в недавней работе [BCH].

Концентрация вещества в многомерном случае на поверхностях коразмерности один изучалась, например, в работах [LY], [Sh1], [ARS]. Кроме того, тонкие вопросы распространения векторного поля скоростей на точки (t,x,y), находящиеся внутри особенностей разных размерностей, рассмотрены в [KS1], [KS2] в случае, когда система (1.5) может быть представлена как уравнение Гамильтона-Якоби; допустимо и обобщение на произвольный выпуклый гамильтониан. При этом используется вариационная трактовка «вязких решений» данного уравнения. Полученные результаты оказываются полезными, в том числе, в астрофизических приложениях, см., например, [GSS].

Рассмотрим задачу Коши для системы (1.5). Введем обозначения $\boldsymbol{x} \equiv (x,y)$, $(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y), d\boldsymbol{x} \equiv (dx,dy), \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) \equiv (u(t,\boldsymbol{x}), v(t,\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{I}_t(d\boldsymbol{x}) \equiv (I_t(dx,dy), J_t(dx,dy))$. Аналогично случаю одной пространственной переменной обобщенное решение задачи Коши для (1.5) понимается в смысле семейства мер $P_t(d\boldsymbol{x}) \geq 0, \boldsymbol{I}_t(d\boldsymbol{x})$, где индекс t означает переменную времени. Начальные данные

$P_0(d\boldsymbol{x}) \geq 0, \boldsymbol{I}_0(d\boldsymbol{x})$ также являются, вообще говоря, мерами, в случае их абсолютной непрерывности относительно стандартной меры Лебега соответствующие плотности обозначаются как $\rho_0(\boldsymbol{x}) \geq 0, \rho_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$.

Определение 3.2.2. Пусть $\wp_t(d\boldsymbol{x}) \equiv (P_t(d\boldsymbol{x}), \boldsymbol{I}_t(d\boldsymbol{x}))$ – семейство мер Радона, определенное на борелевских подмножествах $\mathbb{R}^2$, слабо непрерывное по t и, кроме того, $P_t \geq 0$ а мера $\boldsymbol{I}_t$ абсолютно непрерывна относительно P_t для почти всех положительных t. Определим вектор функцию $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ как производную Радона-Никодима $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = d\boldsymbol{I}_t / dP_t$. Тогда назовем $\wp_t$ *обобщенным решением* задачи Коши для системы (1.5), если

1) для любой вектор функции $\boldsymbol{\varphi}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\varphi} \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ и любых $0 < t_1 < t_2 < +\infty$ выполнено интегральное тождество

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \odot \wp_{t_2}(d\boldsymbol{x}) - \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \odot \wp_{t_1}(d\boldsymbol{x}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \iint\limits_{\mathbb{R}^2} (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi})^T \cdot \boldsymbol{u} \odot \wp_\tau(d\boldsymbol{x}), \qquad (3.2.4)$$

где $\otimes$ обозначает тензорное произведение, $\odot$ обозначает покомпонентное произведение (произведение Адамара), а индекс T – операцию транспонирования;

2) в слабом смысле при $t \to +0 \quad P_t \to P_0, \quad \boldsymbol{I}_t \to \boldsymbol{I}_0$.

Для последующей формулировки теорем рассмотрим следующую геометрическую конструкцию. Пусть в рамках этого пункта индекс i принимает конечный набор целых значений $i = 1,\ldots,Q$. Рассмотрим в пространстве $(t,\boldsymbol{x})$ на временном отрезке $t \in [t_1,t_2]$ Q поверхностей $\Gamma_i(t,\boldsymbol{x}) = 0$, $\Gamma_i \in C^1([t_1,t_2] \times \mathbb{R}^2)$. Предположим, что все поверхности пересекаются по некоторой кривой L, при этом Γ_i и L задаются параметрически как $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}_i(t,l) \in C^1([t_1,t_2] \times \mathbb{R})$, $\boldsymbol{X} \equiv (\chi,\gamma)$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S}(t) \in C^1([t_1,t_2])$, $\boldsymbol{S} \equiv (s^x, s^y)$. Пусть также для некоторых непрерывно дифференцируемых $l_i(t)$ выполнено равенство $\boldsymbol{X}_i(t, l_i(t)) = \boldsymbol{S}(t), t \in [t_1,t_2]$. Будем рассматривать поверхности Γ_i не для всех значений l, а именно, для Γ_i параметр $l \leq l_i(t)$. Для получившихся частей поверхностей сохраним обозначение Γ_i. Ориентируем Γ_i в соответствии с ориентацией $(t,\boldsymbol{x})$ и по направлению положительной нормали определим положительную «+» и отрицательную «-» стороны Γ_i

, которые задаются при помощи неравенств $\Gamma_i\left(t,\boldsymbol{x}\right)>0$, $\Gamma_i\left(t,\boldsymbol{x}\right)<0$. Соответственно, величины, относящиеся к двум сторонам поверхностей, будем снабжать такими же индексами. Для каждого значения t определим области $G_i\left(t\right)\subset\mathbb{R}^2$ между введенными поверхностями: $G_i\left(t\right)=\left\{\boldsymbol{x}:\Gamma_i\left(t,\boldsymbol{x}\right)>0\,,\Gamma_{i+1}\left(t,\boldsymbol{x}\right)<0\right\}$, $i=1,...,Q$. При этом $\Gamma_{Q+1}\equiv\Gamma_1$. Также будем считать, что характеристики системы (1.5), а именно прямые

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u}_0\left(\boldsymbol{a}\right), \tag{3.2.5}$$

лежащие как с положительной, так и с отрицательной стороны Γ_i пересекают ее в некоторый момент времени. Здесь $\boldsymbol{a}\equiv\left(a,b\right)$ – точка на начальной плоскости, откуда характеристика исходит.

Определим семейство мер

$$\begin{gathered}P_t=P_1^-+\sum_{i=1}^{Q}\left(P_i^+-P_i^-\right)H\left(\Gamma_i\right)+\sum_{i=1}^{Q}P_i\left(t,l\right)\delta\left(\Gamma_i\right)+M\left(t\right)\delta\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{S}\left(t\right)\right)\\ \boldsymbol{I}_t=\boldsymbol{I}_1^-+\sum_{i=1}^{Q}\left(\boldsymbol{I}_i^+-\boldsymbol{I}_i^-\right)H\left(\Gamma_i\right)+\sum_{i=1}^{Q}\boldsymbol{I}_i\left(t,l\right)\delta\left(\Gamma_i\right)+\boldsymbol{\Pi}\left(t\right)\delta\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{S}\left(t\right)\right)\end{gathered}, \tag{3.2.6}$$

где H – функция Хевисайда, δ – мера Дирака на кривых и в точке, $P_i^{\pm},\boldsymbol{I}_i^{\pm}$ – меры, абсолютно непрерывные по отношению к мере Лебега с плотностями $\rho_i^{\pm},\rho_i^{\pm}\boldsymbol{u}_i^{\pm}$ соответственно. При этом меры $P_i^+,\boldsymbol{I}_i^+$ определены только в областях G_i, для любой величины f принято, что $f_i^+=f_{i+1}^-$ и номер $Q+1$ заменяется на 1. Функции $\rho_i^{\pm},\rho_i^{\pm}\boldsymbol{u}_i^{\pm}$, $P_i,\boldsymbol{I}_i,M,\boldsymbol{\Pi}$ предполагаются кусочно непрерывно дифференцируемыми на своих областях определения.

Теорема 3.2.3. Пусть семейство мер, определяемое выражением (3.2.6) является обобщенным решением системы (1.5) в смысле определения 3.2.2. Тогда для любой поверхности Γ_i выполняется следующая система уравнений (индекс i опущен для краткости)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial t}=\dfrac{\partial\chi}{\partial l}\left\{V\left[\rho\right]-\left[\rho v\right]\right\}-\dfrac{\partial\gamma}{\partial l}\left\{U\left[\rho\right]-\left[\rho u\right]\right\}\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{I}}{\partial t}=\dfrac{\partial\chi}{\partial l}\left\{V\left[\rho\boldsymbol{u}\right]-\left[\rho v\boldsymbol{u}\right]\right\}-\dfrac{\partial\gamma}{\partial l}\left\{U\left[\rho\boldsymbol{u}\right]-\left[\rho u\boldsymbol{u}\right]\right\}\\ \dfrac{\partial\left(\chi,\gamma\right)}{\partial t}=\boldsymbol{U}\equiv\left(U,V\right)\end{cases}, \tag{3.2.7}$$

где для любой величины f обозначено $\left[f\right]\equiv f^{+}-f^{-}$.

Соотношения (3.2.7) являются соотношениями Ренкина-Гюгонио для (1.5) в случае, когда носитель особенности сосредоточен на поверхности, и существенно отличаются от традиционных соотношений Ренкина-Гюгонио в газовой динамике. Оригинальный вывод этих соотношений изложен в [4] на основе работы диссертанта [R2].

Теорема 3.2.4. Пусть семейство мер, определяемое выражением (3.2.6) является обобщенным решением системы (1.5) в смысле определения 3.2.2. Тогда 1) существует лагранжево отображение $\mathfrak{A}_t:\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{x}$, которое показывает какие точки на начальной плоскости $\boldsymbol{a}$ придут в точку $\boldsymbol{x}$ к моменту времени t; функции $\rho_i^{\pm},\boldsymbol{u}_i^{\pm},i=1,\dots,Q$ удовлетворяют (1.5) в классическом смысле; 3) вдоль поверхностей Γ_i для каждого i выполнены соотношения (3.2.7); 4) вдоль кривой L выполнено

$$M\left(t\right)\frac{d\boldsymbol{S}}{dt}=\boldsymbol{\Pi}\left(t\right), \tag{3.2.8}$$

где $\left(M\left(t\right),\boldsymbol{\Pi}\left(t\right)\right)=\wp_0\left(\mathfrak{A}^{-1}\left(\boldsymbol{S}\left(t\right)\right)\right)$.

До момента возникновения особенностей лагранжево отображение $\mathfrak{A}_t$ задается формулами (3.2.5). Соотношения (3.2.8) являются соотношениями Ренкина-Гюгонио для (1.5) в случае, когда носитель особенности сосредоточен на кривой, у этих соотношений нет газодинамических аналогов. Формулы (3.2.8) впервые получены диссертантом в [R3] и далее в соавторстве в [AR2], окончательное доказательство опубликовано в [6]. Сочетание формул (3.2.7), (3.2.8) описывает ситуацию образования иерархии особенностей, которая была обнаружена диссертантом и не была отмечена другими авторами.

Реальный случай возникновения иерархии особенностей показан для решений задачи Римана для (1.5).

Определение 3.2.3. *Задачей Римана* для системы (1.5) называется такая задача Коши, при которой начальные данные постоянны в каждом квадранте $\mathbb{R}^2$, т.е.

$$\rho_0\left(\boldsymbol{x}\right)=\rho_k=\mathrm{const}\,,\ \boldsymbol{u}_0\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{u}_k=\mathrm{const}\,, \tag{3.2.9}$$

где $k=1,2,3,4$ является естественной нумерацией квадрантов в $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим конкретные данные (3.2.9). А именно, пусть $u>0,v>0,0<\rho<R$ и пусть

$$\begin{array}{l} u_1=u_4=-u,\quad u_2=u_3=u,\quad v_1=v_2=-v,\quad v_3=v_4=v,\\ \rho_k=\rho,\quad k\neq4\,,\quad \rho_4=R \end{array}, \tag{3.2.10}$$

Теорема 3.2.5. Для обобщенного решения задачи (1.5), (3.2.10) существует такая прямая $\boldsymbol{x} = t \cdot \left(X^*, Y^* \right)$, что при любом t мера P_t имеет в точке $t \cdot \left(X^*, Y^* \right)$ дельта особенность. При этом точка $\left(X^*, Y^* \right)$ является точкой пересечения ударных волн, описываемых автомодельной версией системы (3.2.7)

$$\begin{cases} X' = \left(X - U \right) / \bar{l} \\ Y' = \left(Y - V \right) / \bar{l} \\ m' = m / \bar{l} - \left(\rho^+ d^+ - \rho^- d^- \right) / \bar{l}^{\,2} \\ U' = \left(\rho^+ \left(U - u^+ \right) d^+ - \rho^- \left(U - u^- \right) d^- \right) / \left(m \bar{l}^{\,2} \right) \\ V' = \left(\rho^+ \left(V - v^+ \right) d^+ - \rho^- \left(V - v^- \right) d^- \right) / \left(m \bar{l}^{\,2} \right) \end{cases}, \qquad (3.2.11)$$

где $\bar{l} \equiv l / t$, «штрих» обозначает дифференцирование по $\bar{l}$, $\left(\chi, \gamma \right) = t \cdot \left(X, Y \right)\left(\bar{l} \right)$, $\left(U, V \right)$ рассматриваются как зависимые только от $\bar{l}$, $P = t \cdot m\left(\bar{l} \right)$, $\boldsymbol{I} = P \cdot \left(U, V \right)$,

$$d^{\pm} \equiv \begin{vmatrix} X - U & U - u^{\pm} \\ Y - V & V - v^{\pm} \end{vmatrix}.$$

Доказательство этой теоремы содержится в [5], [6]. Основная трудность заключается в том, что волны типа (3.2.11) не обязательно пересекаются, эту трудность удается преодолеть при помощи соображений симметрии.

Пусть теперь начальная мера $\wp_0\left(d\boldsymbol{x} \right)$ является дискретной, то есть в начальный момент времени на $\mathbb{R}^2$ имеется N частиц с массами m_i и скоростями $\left(u_i, v_i \right)$, $i = 1, \ldots, N$, и эти частицы размещены в равномерной вспомогательной сетке $\left[x_{j-1/2}, x_{j+1/2} \right] \times \left[y_{k-1/2}, y_{k+1/2} \right]$, $x_j \equiv j\Delta x, y_k \equiv k\Delta y$, $\varepsilon \equiv \sqrt{\left(\Delta x \right)^2 + \left(\Delta y \right)^2}$ – достаточно мало. Предположим также, что при $N \to \infty$ рассматриваемая система частиц сходится в слабом смысле к некоторой мере, абсолютно непрерывной по отношению к мере Лебега. Далее рассмотрим следующую приближенную динамику прилипания. Каждая частица с некоторым номером i_1 движется прямолинейно с предписанной ей скоростью до тех пор, пока не приблизится к другой частице с номером i_2 на расстояние $k \cdot \varepsilon$, где $k < 1$ – некоторая постоянная. Назовем факт такого сближения событием типа E. При наступлении события E частицы i_1 и i_2 слипаются в одну, масса и движение которой определяются законами сохранения массы и импульса, новая частица располагается в центре масс частиц i_1 и i_2. Аналогичная процедура применяется, если слипаются не две, а большее число частиц. Легко видеть, что полученная система частиц будет в слабом смысле удовлетворять (1.5) не точно, а с некоторой погрешностью R.

Теорема 3.2.6. Для описанной выше динамики прилипания имеет место оценка

$$|R| \le C\varepsilon \sum_E \left(\frac{\sum_{i<l} m_i m_l \left(|u_i - u_l| + |v_i - v_l| \right)}{\sum_l m_l} + \varepsilon \sum_i m_i \left(1 + |u_i| + |v_i| \right) \right),$$

где C – некоторая положительная константа, внешнее суммирование идет по всем событиям типа E, а остальное суммирование идет по всем частицам, участвующим в данном событии E.

Представленная оценка получена в [7], там же получены алгоритмы для численного расчета обобщенных решений (1.5), дополнительно см. [KRy]. Вообще говоря, оказалось, что для выяснения сходимости построенной системы частиц к какой-либо эволюционирующей мере необходимы дополнительные предположения о структуре обобщенного решения. Например, предположим, что обобщенное решение содержит в себе конечный набор эволюционирующих кривых с соответствующей дельта функцией массы. Тогда массы частиц, составляющих эту кривую $\sim \varepsilon$, в то время как масса невзаимодействующих частиц $\sim \varepsilon^2$, а количество провзаимодействовавших частиц $\sim 1/\varepsilon$. То есть $\sum_l m_l \sim \varepsilon$, $\sum_{i<l} m_i m_l \sim \varepsilon^3$, скорости ограничены, то есть $|R| \sim \varepsilon^3 \cdot N_E$, где N_E – число событий типа E. Однако $N_E < C/\varepsilon^2$, поскольку начальная масса конечна в любой ограниченной области, то есть $|R| \sim \varepsilon$.

Таким образом, недостаточность приведенных оценок, а также результаты [BrN], [BD] заставляют искать другие подходы к описанию обобщенных решений системы (1.5). Примером такого подхода является поиск вариационных описаний обобщенных решений.

В случае одной пространственной переменной вариационный принцип (3.2.3) описывает с единой точки зрения и гладкую, и не гладкую части обобщенного решения. В двумерном случае форма (3.2.3) не может быть использована вследствие того факта, что траектории частиц в общем положении, вообще говоря, скрещиваются. Однако вариационное описание возможно сформулировать. Для этого нам понадобятся дополнительные построения.

Зафиксируем $t>0$. Пусть A_1 – конечное множество взаимонепересекающихся областей в $\mathbb{R}^2$, а A_2 – множество областей, полученное следующим образом. Рассмотрим также конечный набор взаимонепересекающихся областей $G_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \setminus A_1$ вида $G_\alpha = \left\{ \boldsymbol{a}_\alpha(s,l), s \in \left[s_\alpha^1, s_\alpha^2 \right], l \in \left[l_\alpha^1, l_\alpha^2 \right] \right\}$, функции $\boldsymbol{a}_\alpha$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми на своей области определения. Тогда некоторая область G будет принадлежать A_2 тогда и только тогда, если существует такое α и l_G^1, l_G^2, что $G = \left\{ \boldsymbol{a}_\alpha(s,l), s \in \left[s_\alpha^1, s_\alpha^2 \right], l \in \left[l_G^1, l_G^2 \right] \right\}$, $0 < \left| l_G^2 - l_G^1 \right| < \left| l_\alpha^2 - l_\alpha^1 \right|$. Пусть теперь A_3 представляет собой множество всех областей, лежащих в $\mathbb{R}^2 \setminus \left(A_1 \cup A_2 \right)$, и $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Обозначим

$$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x};G) \equiv \iint\limits_G \left[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{a}) - \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}{t} \right] \rho_0(\boldsymbol{a})\, d\boldsymbol{a}\,,\ G \in B. \tag{3.2.12}$$

Определение 3.2.4. Пусть запись $|G| \downarrow \min$ означает, что площадь G стремится к минимуму при условии $G \in B$. Назовем *производной* $\boldsymbol{F}$ *по области*, содержащей точку $\bar{\boldsymbol{a}}$, величину

$$\frac{\delta \boldsymbol{F}}{\delta \bar{\boldsymbol{a}}} \equiv \lim_{|G|\downarrow\min} \frac{\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x};G)}{|G|}, \quad \bar{\boldsymbol{a}} \in G \in B. \tag{3.2.13}$$

Теорема 3.2.7. Пусть $\wp_0(d\boldsymbol{x})$ – абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега. Пусть существует обобщенное решение системы (1.5) в условиях теорем 3.2.3, 3.2.4. Тогда для почти всех $t>0$ и почти всех $\bar{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^2$ существует такое $\boldsymbol{x}$, что $\delta \boldsymbol{F} / \delta \bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0}$.

Данная теорема получена в [5], [6], см. также [R3].

Теорема 3.2.8. Пусть $\wp_0(d\boldsymbol{x})$ – абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега и пусть существует обобщенное решение системы (1.5) в смысле определения 3.2.2. Пусть также существует такая параметризация $\boldsymbol{a}(s,l)$ и значение l^*, что вектор функция

$$\boldsymbol{\Phi}(\tau,l^*) \equiv \int\limits_0^\tau \left[\boldsymbol{u}_0\left(\boldsymbol{a}(\tau,l^*)\right) - \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(\tau,l^*)}{t} \right] \rho_0\left(\boldsymbol{a}(\tau,l^*)\right) \left. \frac{\partial \boldsymbol{a}(\tau,l)}{\partial(\tau,l)} \right|_{l=l^*} d\tau \tag{3.2.14}$$

покомпонентно имеет более одного совместного глобального минимума по τ, то в точке $(t,\boldsymbol{x})$ обобщенное решение системы (1.5) имеет особенность в виде концентрации меры массы.

Функция (3.2.14) получена из функции (3.2.12) при помощи параметризации области G, а поведение функции (3.2.14) фактически означает обращение в нуль производной (3.2.13). Данная теорема получена в [AR3], см. также [AR1]. В качестве дальнейшей иллюстрации в [KRy] показано, что условие существования двух глобальных минимумов (3.2.14) приводит к формулам эволюции поверхности особенностей, не опираясь на систему (3.2.7).

3.3 Существование сильных решений квазигазодинамической системы уравнений в случае двух пространственных переменных

В данном разделе рассмотрим начально-краевую задачу для системы (1.7), переписанной в немного другой форме,

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2} + \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + (\boldsymbol{U} \cdot \nabla)\boldsymbol{U} + \nabla P = \Delta \boldsymbol{U} + g, \, \mathrm{div}\boldsymbol{U} = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{3.3.1}$$

в ограниченной гладкой области $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{U}\big|_{t=0} = \boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{x}), \left.\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\right|_{t=0} = \boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{U}\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.3.2}$$

Напомним, что здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, P – давление, Δ – оператор Лапласа, g – внешняя сила.

Задача вида (3.3.1), (3.3.2) изучалась, например, в работах [BNP], [PaR], см. также [RS1], [RS2], однако либо для случая периодических краевых условий, либо во всем пространстве $\mathbb{R}^2$ (отметим, что случай $\mathbb{R}^3$ также рассматривался). В отличие от других работ результаты, представленные в диссертации, см. [8], получены для ограниченной области. В этой постановке техника упомянутых выше работ не применима, и приходится использовать только оценки энергетического типа. В соответствии с этим результаты получены лишь для малых $\varepsilon > 0$, а в случае одной пространственной переменной приведен пример ситуации, демонстрирующий «взрыв» решения за конечное время для конечных $\varepsilon > 0$. Отметим также, что для линейной версии квазигазодинамических уравнений дополнительные результаты получены в [IR].

Будем изучать сильные решения задачи (3.3.1), (3.3.2) $\mathfrak{A}(t) = \{\boldsymbol{U}(t), \partial \boldsymbol{U}(t) / \partial t\}$ в фазовом пространстве E_ε^1 с соответствующей нормой $\|\mathfrak{A}\|_{\mathrm{E}_\varepsilon^1}$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_\varepsilon^1 \equiv \left\{\{\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\} \in \left[H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right]^2 \times \left[H_0^1(\Omega)\right]^2, \nabla\cdot\boldsymbol{U}=0, \nabla\cdot\boldsymbol{V}=0\right\}\\ &\left\|\mathfrak{A}\right\|_{\mathrm{E}_\varepsilon^1}^2 \equiv \varepsilon\left\|\partial\boldsymbol{U}(t)/\partial t\right\|_{H^1}^2 + \left\|\partial\boldsymbol{U}(t)/\partial t\right\|_{L^2}^2 + \left\|\boldsymbol{U}(t)\right\|_{H^2}^2\end{aligned}. \quad (3.3.3)$$

Пусть $\mathcal{V} \equiv \left\{\boldsymbol{U} \in \left[H_0^1(\Omega)\right]^2, \nabla\cdot\boldsymbol{U}=0\right\}$, $\mathcal{H} \equiv \left\{\boldsymbol{U} \in \left[L^2(\Omega)\right]^2, \nabla\cdot\boldsymbol{U}=0, \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}\big|_{\partial\Omega}=0\right\}$,

$\mathcal{D} \equiv \left[H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right]^2 \cap \{\nabla\cdot\boldsymbol{U}=0\}$.

Определение 3.3.1. Функцию $\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x})$ назовем *сильным решением* задачи (3.3.1), (3.3.2) на интервале $[0,T]$, если: 1) $\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{x}) \in C([0,T],\mathcal{D})$, $\partial\boldsymbol{U}/\partial t \in C([0,T],\mathcal{V})$, $\varepsilon\partial^2\boldsymbol{U}/\partial t^2 \in C([0,T],\mathcal{H})$; 2) $\boldsymbol{U}$ удовлетворяет (3.3.1) в $\mathcal{H}$ после применения ортогональной проекции Лерэ-Гельмгольца на соленоидальные векторные поля; 3) $\boldsymbol{U}$ удовлетворяет начальным данным (3.3.2).

Теорема 3.3.1. Пусть $g \in \mathcal{H}$. Тогда для любого $R>0$ существует такое $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_0(R)$, что для любого $\varepsilon \le \varepsilon_0$ и любых начальных данных $\mathfrak{A}(0), \left\|\mathfrak{A}(0)\right\|_{\mathrm{E}_\varepsilon^1} \le R$ задача (3.3.1), (3.3.2) обладает единственным глобальным сильным решение и верна следующая оценка при $t \ge 0$

$$\left\|\mathfrak{A}(t)\right\|_{\mathrm{E}_\varepsilon^1} \le Q\left(\left\|\mathfrak{A}(0)\right\|_{\mathrm{E}_\varepsilon^1}\right)e^{-\alpha t} + Q\left(\|g\|_{L^2}\right), \quad (3.3.4)$$

где положительная постоянная α и монотонная функция Q не зависят от $R,\varepsilon,t \ge 0$ и начальных данных $\mathfrak{A}(0)$.

Рассмотрим теперь одномерный вариант уравнения (3.3.1) для функции $u(t,x)$

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g,\ x \in [0,L], t \in \mathbb{R}_+, \quad (3.3.5)$$

с граничными условиями Дирихле и начальными данными $(u_0(x), u_1(x))$.

Теорема 3.3.2. Пусть $g=0$, а $\varepsilon=1$. Тогда существуют гладкие начальные данные с компактным носителем такие, что соответствующие решения (3.3.5) перестают существовать за конечное время.

Теорема 3.3.2 показывает, что при конечном ε требование ограниченности начальных данных по энергетической норме в теореме 3.3.1 существенно.

3.4 Вырожденные параболические системы уравнений, описывающие процессы сжимаемой двухфазной многокомпонентной фильтрации с точки зрения теории законов сохранения

В системе уравнений (1.8), (1.9) переменные $x_{1G},...,x_{NG};x_{1L},...,x_{NL}$ с учетом термодинамических соотношений (конкретный вид которых в данном контексте не является важным) подчиняются условию нормировки $\sum_i x_{iG} = \sum_i x_{iL} = 1$ и связаны N функциональными соотношениями, выражающими собой равенство химических потенциалов фаз. Будем считать, что эти нелинейные зависимости выражаются при помощи дважды непрерывно дифференцируемых функций. Таким образом, из указанных выше переменных имеются ровно $N-2$ независимых, которые будут обозначаться через $y_k, k=1,...,N-2$. Тогда, вводя обозначения, $i=1,...,N$,

$$X_i\left(x,s,y_1,...,y_{N-2},P\right) \equiv \phi(x)\left(x_{iG}\rho_G s + x_{iL}\rho_L\left(1-s\right)\right)$$

$$F_i\left(x,s,y_1,...,y_{N-2},P\right) \equiv K\left(x\right)\left(x_{iG}\rho_G\frac{k_G\left(s\right)}{\mu_G} + x_{iL}\rho_L\frac{k_L\left(1-s\right)}{\mu_L}\right),$$

$$Q \equiv -\frac{\partial P}{\partial x}$$

система (1.8), (1.9) может быть записана в форме вырожденной системы законов сохранения с правой частью

$$\frac{\partial}{\partial t}X_i + \frac{\partial}{\partial x}\left(F_i Q\right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -Q \quad , \quad i=1,...,N. \tag{3.4.1}$$

Система (3.4.1) представляет собой систему из $N+1$ уравнений в частных производных первого порядка от вектора неизвестных функций $\boldsymbol{U} = \left(s, y_1,...,y_{N-2},P,Q\right)$.

Математическая теория процессов фильтрации наиболее развита в случае однокомпонентной среды, где основной моделью является одно вырождающееся параболическое уравнение для давления P, см., например, [Vaz] и также [Ka]. Также достаточно давно рассматривался случай двух несмешивающихся фаз (соответствующие фазовые плотности постоянны), см. фундаментальную работу [AKM]. С математической точки зрения данный случай сводится к решению совокупности вырождающегося параболического уравнения для насыщенности и равномерно эллиптического уравнения для давления. При этом параболичность уравнения для насыщенности возникает вследствие использования концепции капиллярного давления. Наличие параболических/эллиптических членов позволяет получать различные априорные оценки, что до настоящего времени является основой для математического изучения явлений фильтрации. Так можно привести следующие примеры работ в данном направлении. Неизотермический случай, в котором добавляется уравнение для температуры, рассмотрен в [Amz]. В случае зависимости пористости от давления [DEH] возникают два вырождающихся параболических уравнения от насыщенности и давления. Такая же ситуация в случае сжимаемых несмешивающихся фаз [AJK]. Случай многих компонент, которые могут смешиваться, в частности описывать процессы взаиморастворимости, содержится в [ASh], где возникает вырожденная параболическая система уравнений для концентраций и давления. Введение в рассмотрение фазовых переходов приводит в несжимаемом случае к рассмотрению гиперболической системы уравнений, см., например, [Orr]. Соответственно, при математическом исследовании уже здесь возникают трудности, связанные с развитием теории квазилинейных систем законов сохранения. Сжимаемый случай рассматривался преимущественно с физической и вычислительной точек зрения, например, [Bed], [AbP], поскольку характер даже простейшей системы уравнений (1.8), (1.9), которая описывает процесс фазовых переходов, остается неясным. Результаты, полученные в диссертации, [9], заполняют этот пробел. Система уравнений (3.4.1) определяется как *почти гиперболическая*, обладающая свойствами как гиперболических, так и параболических систем уравнений.

Систему уравнений (3.4.1) уже можно записать как систему уравнений первого порядка в недивергентной форме и стандартным образом вычислить собственные числа и вектора. Оказывается, что может существовать не более $N-1$ собственных значений λ_j, для которых можно искать левые $\boldsymbol{l}_j$ и правые $\boldsymbol{r}_j$ собственные вектора. Далее, наряду с некоторым вектором $\boldsymbol{q}=\left(q^1,...,q^{N+1}\right)$ будем рассматривать его проекцию $\boldsymbol{q}'=\left(q^1,...,q^{N-1}\right)$, состоящую из первых $N-1$ координат вектора $\boldsymbol{q}$.

Определение 3.4.1. Назовем некоторый набор векторов $\boldsymbol{q}_j$ *линейно независимым по проекции*, если линейно независимы вектора $\boldsymbol{q}'_j$.

Определение 3.4.2. Систему уравнений типа (3.4.1) назовем *почти гиперболической*, если у нее имеется ровно $N-1$ действительных и различных собственных значений, а также существуют соответственные наборы левых и правых собственных векторов, каждый из которых содержит ровно $N-1$ линейно независимых по проекции векторов.

Для почти гиперболических систем (3.4.1) рассмотрим полосу

$$\Pi_T \equiv \left\{ (t,x) : (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \right\}$$

и зададим начальные данные

$$s(0,x) = s^0(x),\ y_1(0,x) = y_1^0(x), \ldots, y_{N-2}(0,x) = y_{N-2}^0(x),\ P(0,x) = P^0(x). \quad (3.4.2)$$

Определение 3.4.3. Пусть начальные функции (3.4.2) являются ограниченными измеримыми функциями на $\mathbb{R}$. Тогда назовем ограниченные измеримые в Π_T функции $s(t,x), y_1(t,x), \ldots, y_{N-2}(t,x)$ и непрерывную в Π_T функцию $P(t,x)$ *обобщенным решением* задачи (3.4.1), (3.4.2), если для любой функции $\varphi \in C^\infty\left([0,T) \times \mathbb{R}\right)$, $\varphi(t,\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ при фиксированном $t \in [0,T]$, $\varphi \equiv 0$ при $T_1 \le t \le T$, $T_1 < T$, выполнены следующие интегральные тождества

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Pi_T} \left(X_i \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F_i Q \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}} X_i^0(x) \varphi(0,x)\, dx = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \\ &\iint\limits_{\Pi_T} \left(P \frac{\partial \varphi}{\partial x} - Q \varphi \right) dxdt = 0 \end{aligned} \quad , \qquad (3.4.3)$$

где обозначено $X_i^0(x) \equiv X_i\left(s^0(x), y_1^0(x), \ldots, y_{N-2}^0(x), P^0(x)\right)$.

Определение 3.4.4. Будем говорить, что обобщенное решение задачи (3.4.1), (3.4.2) имеет *сильную особенность*, если функции $s(t,x), y_1(t,x), \ldots, y_{N-2}(t,x)$ терпят разрыв вдоль некоторой кривой в полосе Π_T. Будем говорить, что обобщенное решение задачи (3.4.1), (3.4.2) имеет *слабую особенность*, если функции $s(t,x), y_1(t,x), \ldots, y_{N-2}(t,x)$ непрерывны, в то время как их частные производные по t и x терпят разрыв вдоль некоторой кривой в полосе Π_T, а функция $P(t,x)$ является непрерывно дифференцируемой в окрестности этой кривой.

Предложение 3.4.1. Скорость распространения слабых особенностей совпадает с одним из собственных чисел системы (3.4.1).

Для сильных особенностей, распространяющихся вдоль некоторой кривой $x = z(t)$, из (3.4.3) теперь уже стандартным образом вытекают соотношения Ренкина-Гюгонио

$$\frac{dz}{dt}\left(X_i^+ - X_i^- \right) = Q^+ F_i^+ - Q^- F_i^-, \quad i = 1, \ldots, N, \quad P^+ = P^-, \qquad (3.4.4)$$

где запись вида $y^{\pm}$ обозначает значения некоторой функции y справа и слева от разрыва соответственно, т.е. $y^{\pm} \equiv y\left(t, z(t) \pm 0\right)$. Условимся далее в рамках этого раздела, что индекс s или Q у величин обозначает частную производную по соответственным переменным. Введем обозначение

$$A \equiv \left(\frac{F_N \left(X_j \right)_s - F_j \left(X_N \right)_s}{F_N}; \frac{F_N \left(X_j \right)_{y_k} - F_j \left(X_N \right)_{y_k}}{F_N} \right),$$

где A является матрицей размера $(N-1)\times(N-1)$, $j = 1,..., N-1$, $k = 1,..., N-2$, запись вида $\left(X_j\right)_{y_k}$ обозначает матрицу Якоби для функций X_j в зависимости от переменных y_k. То есть первый элемент записи для A представляет собой столбец длиной $N-1$, а второй элемент – матрицу размерности $(N-2)\times(N-1)$.

Теорема 3.4.1. Пусть выполнены условия: $\left|F_N\right| > 0, \left|\det A\right| > 0$. Тогда в фазовом пространстве $\boldsymbol{U} = \left(s, y_1, ..., y_{N-2}, P, Q\right)$ множество значений $\boldsymbol{U}^+$, определяемых соотношениями (3.4.4), локально представляет собой множество, состоящее из $N-1$ кривых $\boldsymbol{U}_j(\varepsilon), \boldsymbol{U}_j(0) = \boldsymbol{U}^-$, $j = 1,..., N-1$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ является некоторым малым параметром. При этом существует $N-1$ скоростей разрыва $\sigma_j(\varepsilon)$, соответствующих кривым $\boldsymbol{U}_j(\varepsilon)$. Кроме того, $d\boldsymbol{U}_j(0)/d\varepsilon \,||\, \boldsymbol{r}_j$, а локальная скорость разрыва удовлетворяет соотношению $\sigma_j(0) = \lambda_j(0)$.

Теперь рассмотрим случай двух компонент, т.е. $N = 2$. Тогда переменных y_k нет, величины x_{iG}, x_{iL} зависят только от давления P, т.е. система уравнений (3.4.1) состоит из трех уравнений с неизвестными функциями s, P, Q. Пусть также величины μ_G, μ_L являются постоянными, и $\phi = K \equiv 1$. Изучим свойства решений задачи Римана в случае $N = 2$ с учетом только что указанных упрощений, т.е. рассмотрим для (3.4.1) следующие начальные данные

$$s^0(x) = \begin{cases} s_0^-, & x < 0 \\ s_0^+, & x > 0 \end{cases} \qquad P^0(x) = \begin{cases} P_0^-, & x < 0 \\ P_0^+, & x > 0 \end{cases}. \tag{3.4.5}$$

Теорема 3.4.2. Если $P_0^+ \ne P_0^-$, то автомодельные решения задачи (3.4.1) при $N = 2$, (3.4.5) обладают бесконечной скоростью распространения возмущений.

Данное свойство характерно для параболических уравнений и отсутствует у гиперболических уравнений с гладкими нелинейностями.

Теорема 3.4.3. В автомодельном решении задачи (3.4.1) при $N = 2$, (3.4.5) всегда присутствует особенность насыщенности s: либо скачок, либо, по крайней мере, точка с бесконечной производной по автомодельной переменной.

Для гиперболических систем уравнений существуют непрерывные решения задачи Римана, состоящие из волн разрежения. Как показывает теорема 3.4.3, в случае фильтрации это не так, и насыщенность в решении задачи Римана в случае общего положения разрывна.

В теории систем законов сохранения для решения вопросов, связанных с единственностью обобщенного решения, важную роль играет понятие энтропии. Поэтому обсудим это понятие для системы (3.4.1). Определим вектора длины $N+1$:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} QF_i \\ P \end{pmatrix} \quad , \quad i = 1,\ldots,N .$$

Определение 3.4.5. Пусть существуют такая вектор функция $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{U})$ и такие функции $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{U}), \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{U})$, что

$$\boldsymbol{E} \cdot D\boldsymbol{X} = D\boldsymbol{\mathcal{E}}\,, \quad \boldsymbol{E} \cdot D\boldsymbol{F} = D\boldsymbol{\mathcal{F}}\,, \quad E^{N+1}Q \ge 0,$$

где знак D обозначает дифференциал соответствующих функций, а E^{N+1} является последней координатой вектора $\boldsymbol{E}$. Тогда функцию $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ назовем *энтропией* для системы (3.4.1).

Теорема 3.4.4. Пусть в системе (3.4.1) в случае $N = 2$ в дополнение к указанным выше ограничениям функции X_i и F_i, $i = 1,2$, не зависят от переменной давления P. Пусть $\rho_G \rho_L \left(k_G / \mu_G + k_L / \mu_L\right)\left(x_{1G}x_{2L} - x_{2G}x_{1L}\right) > 0$ и $\chi(s) \equiv F_2\left(X_1\right)_s - F_1\left(X_2\right)_s$, а ω является некоторой дважды непрерывно дифференцируемой функцией двух переменных, удовлетворяющей условию $Q \cdot \omega\left(Q\chi(s), P\right) \ge 0$. Пусть также $e_m(s,Q), m = 1,2$, являются некоторыми непрерывно дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\begin{gathered} \left(X_2\right)_s \left(e_2\right)_Q + \left(X_1\right)_s \left(e_1\right)_Q = 0\,; \left(X_2\right)_s \left[F_2\left(e_2\right)_s + F_1\left(e_1\right)_s\right] = -Q\chi'(s)\left(e_1\right)_Q\,; \\ \left(X_2\right)_s \left(e_2\right)_s + \left(X_1\right)_s \left(e_1\right)_s > 0 \end{gathered}.$$

Тогда выпуклая энтропия $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ такой системы зависит только от насыщенности s и выражается с помощью формулы

$$\mathcal{E}_s = e_1(X_1)_s + e_2(X_2)_s,$$

а соответствующий поток $\mathcal{F}$ определяется неоднозначно согласно следующей формуле

$$\mathcal{F} = \int \omega(Q\chi(s), P)dP + A(s,Q),$$

где знак $\int$ обозначает операцию неопределенного интегрирования, а функция $A(s,Q)$ удовлетворяет соотношениям

$$A_s = Q\left[e_1(F_1)_s + e_2(F_2)_s\right] \quad , \quad A_Q = e_1F_1 + e_2F_2.$$

Из теоремы 3.4.4 вытекает, в частности, что множество пар энтропия-поток включает в себя соответствующие пары С.Н. Кружкова для одного скалярного закона сохранения, но множество потоков оказывается намного богаче скалярного случая.

3.5 Уравнение с насыщаемым (ограниченным) потоком диссипации

Уравнения типа (1.10) достаточно много изучались в контексте теории параболических уравнений. Как правило рассматривались уравнения вида

$$\partial u / \partial t = \partial\left(\varphi(u)\psi(\partial u / \partial x)\right) / \partial x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.5.1}$$

где функция ψ стремится к постоянным при обращении в бесконечность модуля градиента u. Если ψ становится постоянной то (3.5.1) переходит в квазилинейное гиперболическое уравнение, что обуславливает возникновение разрывов. По-видимому, впервые этот эффект исследован в [BdP], [dP], однако лишь при растущих начальных данных. В дальнейшем необходимость в выборе достаточно узких классов начальных данных сохранилась, см., например, [LTa]. В отличие от (3.5.1) уравнение (1.10) больше связано с расширением теории законов сохранения, и в литературе часто называется уравнением типа Бюргерса с насыщаемой диссипацией. Данный тип уравнений изучался преимущественно с точки зрения частных свойств решений, например, [KuR], [GKR], причем рассматривались и немонотонные функции Q, [KLR]. Кроме того, изучался и вычислительный аспект, например, [CKR]. В работе диссертанта [10] предприняты шаги по построению теории существования и единственности решений. Аналогично работам [BdP], [dP], соответствующие результаты получены при достаточно сильных ограничениях на класс начальных данных и множество рассматриваемых обобщенных решений.

Для уравнения (1.10) рассмотрим начальные данные $u(0,x) = u_0(x)$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) $u_0 \in W^{2,1}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$; 2) существует конечный набор точек $\{x_i\} \in K \subset \mathbb{R}$, где K компакт, такой что $u_0 \in C^2\left(K \setminus \{x_i\}\right)$, а точки $\{x_i\}$ являются разрывами первого рода для u_0; 3) $u_0{}'\left(x_i \pm 0\right) = 0$.

Определение 3.5.1. Будем говорить, что ограниченная измеримая функция $u(t,x)$ является *обобщенным решением задачи Коши* для (1.10) с начальной функцией u_0, если выполнены следующие условия:

а) существует такое множество $\mathcal{E} \subset [0,T]$, $\operatorname{mes} \mathcal{E} = 0$, что для $t \in [0,T] \setminus \mathcal{E}$ определена непрерывная функция $Q_{\lim}(t,x)$

$$Q_{\lim}(t,x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in [0,\delta] \setminus \chi}} Q\left(\frac{u(t,x+h) - u(t,x-h)}{2h}\right),$$

где величина δ и множество χ, $\operatorname{mes} \chi = 0$, вообще говоря, зависят от x;

б) для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\Pi_T = [0,T] \times \mathbb{R}$, выполнено интегральное тождество

$$\iint_{\Pi_T} \left\{ u(t,x) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f\left(u(t,x)\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - Q_{\lim}(t,x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} dt dx = 0;$$

в) для любого отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in [0,T] \setminus \mathcal{E}}} \int_a^b \left| u(t,x) - u_0(x) \right| dx = 0.$$

Теорема 3.5.1. Для начальных данных, удовлетворяющих условиям 1) – 3) существует обобщенное решение $u(t,x)$ задачи Коши для (1.10), причем $u(t,x) \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $Q_{\lim}(t,x) \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ для почти всех $t \in [0,T]$.

Определение 3.5.2. Пусть

$$l(u) \equiv f\left(u^-\right) + \left(u - u^-\right) \frac{f\left(u^+\right) - f\left(u^-\right)}{u^+ - u^-}.$$

Будем говорить, что обобщенное решение $u(t,x)$ в смысле определения 3.5.1 *удовлетворяет условию* E (терминология О.А. Олейник), если для каждой точки разрыва $u(t,x)$ существуют $u^\pm = u(t,x \pm 0)$ и $l(u) \ge f(u)$ для $u \in \left[u^+, u^-\right]$, $u^- > u^+$; $l(u) \le f(u)$ для $u \in \left[u^-, u^+\right]$, $u^+ > u^-$.

Приводимая ниже теорема единственности носит во многом условный характер, поскольку формулируется для достаточно узкого, хотя и отражающего все особенности задачи, класса функций.

Определение 3.5.3. Будем говорить, что функция $u(t,x)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, если выполнены следующие условия:

а) $u(t,x) \in C^2(\Pi_T)$ для всех $(t,x) \in \Pi_T$ за исключением конечного множества кривых $x_i(t) \in C^1(0,T)$; кроме того, $\sup\limits_{[0,T]} |u(t,R)| \to 0$ при $|R| \to \infty$;

б) для любой точки разрыва, за исключением конечного их числа, существуют односторонние пределы $u(t, x_i(t) \pm 0) = u^{\pm}, u^{+} \neq u^{-}$;

в) $\sup\limits_{[0,T]} |Q_{\lim}(t,R)| \to 0$ при $|R| \to \infty$.

Теорема 3.5.2. Для начальных данных, удовлетворяющих условиям 1) – 3) обобщенное решение $u(t,x)$ задачи Коши для (1.10), лежащее в классе $\mathcal{K}$ и удовлетворяющее условию E, единственно.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ К ЗАЩИТЕ

1. E Weinan, Rykov Yu. G., Sinai Ya. G. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics // Comm. Math. Phys. – 1996. – V. 177. – Issue 2. – P. 349 – 380.
2. Рыков Ю. Г. О вариационном подходе к системам квазилинейных законов сохранения // Труды МИАН. – 2018. – Т. 301. – С. 225 – 240.
3. Рыков Ю.Г. Вариационная постановка задачи поиска обобщенных решений для квазилинейных гиперболических систем законов сохранения // Математические заметки. – 2021. – Т. 110. – Вып. 6. – С. 944 – 947.
4. Rykov Yu. G. On the nonhamiltonian character of shocks in 2-D pressureless gas // Bolletino dell' U.M.I. Sezione B (8). – 2002. – V. 5-B. – P. 55 – 78.
5. Рыков Ю. Г. О взаимодействии ударных волн в двумерных изобарических средах // УМН. – 2023. – Т. 78. – Вып. 4. – С. 199 – 200.
6. Рыков Ю.Г. Об эволюции иерархии ударных волн в двумерной изобарической среде // Известия РАН. – 2024. – Т. 88. – Вып. 2. – С. 96 – 126.
7. Chertock A., Kurganov A. & Rykov Yu. A new sticky particle method for pressureless gas dynamics // SIAM J. Numer. Anal. – 2007. – V. 45. – No. 6. – P. 2408 – 2441.
8. Ilyin A., Rykov Yu., Zelik S. Hyperbolic relaxation of the 2D Navier-Stokes equations in a bounded domain // Physica D. – 2018. – V. 376-377. – P. 171 – 179.
9. Рыков Ю.Г. О возможности распространения теории законов сохранения на некоторые вырожденные параболические системы уравнений, описывающие процессы сжимаемой двухфазной многокомпонентной фильтрации // Математические заметки. – 2011. – Т. 89. – Вып. 2. – С. 300 – 315.
10. Rykov Yu. G. Discontinuous solutions of some strongly degenerate parabolic equations // Russian J. Math. Phys. – 2000. – V. 7. – No. 3. – P. 341 – 356.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[Vo] Вольперт А.И. Пространства *BV* и квазилинейные уравнения // Матем. Сб. — 1967. — Т. 73. — № 2. — С. 255 – 302.

[Kr] Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. Сб. — 1970. — Т. 81. — № 2. — С. 228 – 255.

[L1] Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws II // Comm. Pure Appl. Math. — 1957. — V. 10. — No. 4. — P. 537 – 566.

[G] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. Сб. — 1959. — Т. 47. — Вып. 3. — С. 271 – 306.

[Gl] Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations // Comm. Pure Appl. Math. — 1965. — V. 18. — No. 4. — P. 697 – 715.

[B] Bressan A. Hyperbolic systems of conservation laws: the one-dimensional Cauchy problem. Oxford Univ. Press, 2000.

[S1] Serre D. Systems of conservation laws. Vol. 1. Hyperbolicity, entropies, shock waves. Cambridge : Cambridge University Press, 1999.

[S2] Serre D. Systems of conservation laws. Vol.2. Geometric structures, oscillations and initial-boundary value problems. Cambridge : Cambridge University Press, 2000.

[BGS] Benzoni-Gavage S., Serre D. Multidimensional Hyperbolic Partial Differential Equations: First-order Systems and Applications. Oxford Mathematical monographs. Oxford : Clarendon Press, 2007.

[Da] Dafermos C.M. Conservation Laws in Continuum Physics, Volume 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag. Berlin, fourth edition 2016.

[He] Hesthaven J.S. Numerical Methods for Conservation Laws: From Analysis to Algorithms. SIAM. Philadelphia, 2018.

[LTP] Liu Tai-Ping. Shock waves. American Math. Soc. Providence. Rhode Island, 2021.

[DP] DiPerna R.J. Measure-valued solutions to hyperbolic conservation laws // Arch. Rational Mech. Anal. — 1985. — V. 88. — No.3. — P. 223 – 270.

[FST] Fjordholm U.S., Siddhartha M., Tadmor E. On the computation of measure-valued solutions // Acta Numer. — 2016. — V. 25. — P. 567 – 679.

[S3] Serre D. Divergence-free positive symmetric tensors and fluid dynamics // Annales de l’Institut Henri Poincare. — 2018. — V. 35. — P. 1209 – 1234.

[KK] Keyfitz B. L., Kranzer H. C. A viscous approximation to a system of conservation laws with no classical Riemann solution // in C. Carasso et all., (eds), Nonlinear Hyperbolic problems. Lecture Notes in Math. — 1989. — V. 1402. — P. 185 – 197.

[K] Keyfitz B. L. Singular shocks, retrospective and prospective // Confl. Math. — 2011. — V. 3. — No. 3. — P. 445 – 470.

[Se] Sever M. Distribution solutions of nonlinear systems of conservation laws // Mem. Amer. Math. Soc. — 2007. — V. 190. — P. 1 – 163.

[DS] Danilov V. and Shelkovich V. Delta-shock wave type solution of hyperbolic systems of conservation laws // Quart. Appl. Math. — 2005. — V. 63. — No. 3. — P. 401 – 427.

[PSh] Panov E. Yu., Shelkovich V. M. δ'-shock waves as a new type of solutions to systems of conservation laws // J. Differential Equations. — 2006. — V. 228. — No. 1. — P. 49 – 86.

[Sh1] Шелкович В.М. Сингулярные решения систем законов сохранения типа δ- и δ'-ударных волн и процессы переноса и концентрации \\ Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63. — Вып. 3. — С. 73 – 146.

[MY1] Miroshnikov A., Young R. Weak* solutions I: A new perspective on solutions to systems of conservation laws // Methods and Appl. of Anal. — 2017. — V. 24. — No. 3. — P. 351 – 382.

[MY2] A. Miroshnikov and R. Young, Weak* solutions II: The vacuum in Lagrangian gas dynamics // SIAM J. Math. Anal. — 2017. — V. 49. — Issue 3. — P. 1810 – 1843.

[L2] Lax P. D. Hyperbolic partial differential equations. Courant Lecture Notes in Math., V. 14. American Math. Soc., 2006

[Co] Colombeau J. F. Elementary introduction to new generalized functions. North-Holland Math. Studies., V. 113. Amsterdam. North-Holland, 1985.

[LF] Le Floch P.G. Hyperbolic systems of conservation laws. The theory of classical and nonclassical shock waves. Lectures in Mathematics. ETH Zurich. Birkhauser. Basel, 2002.

[Che] Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз. М., 1959.

[Se] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Наука. М., 1965.

[St] Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Наука. М., 1971.

[El1] Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н. Кинетический алгоритм для расчета газодинамических течений // Ж. выч. матем. и матем. физ. — 1985. —Т. 25. — № 10. — С.1526 – 1533.

[El2] Елизарова Т. Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Научный мир. М. , 2007.

[BNP] Brenier Y., Natalini R., Puel M. On a relaxation approximation of the incompressible Navier–Stokes equations // Proc. Amer. Math. Soc. — 2004. — V. 132. — No. 4. — P. 1021 – 1028.

[CK] Constantin P., Kliegl M. Note on global regularity for two-dimensional oldroyd-B fluids with diffusive stress // Arch. Ration. Mech. Anal. — 2012. — V. 206. — No. 3. — P. 725 – 740.

[BER] Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. Недра. М., 1984.

[Ka] Калашников А. С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи Матем. Наук. — 1987. — Т.42. — Вып. 2. — С. 135 – 176.

[Or] Orr (Jr.) F. M. Theory of gas injection processes. Tie-Line Publications. Holte, Denmark, 2007.

[KM] Keyfitz B. L., Mora C. A. Prototypes for nonstrict hyperbolicity in conservation laws // Contemporary Math. — 2000. — V. 255. — P. 125 – 137.

[Ro] Rosenau Ph. Extending hydrodynamics via the regularization of the Chapman–Enskog expansion // Phys. Rev. A. — 1989. — V. 40. — No. 12. — P. 7193 – 7196.

[BBP] Barenblatt G.I., Bertsch M., Dal Passo R., Ughi M. A degenerate parabolic regularization of a nonlinear forward-backward heat equation arising in the theory of heat and mass exchange in stable stratified turbulent shear flow // SIAM J. Math. Anal. — 1993. — V. 24. — Issue 6. — P. 1414 – 1439.

[H] Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. — 1950. — V. 3. — Issue 3. — P. 201 – 230.

[L3] Lax P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Comm. Pure Appl. Math. — 1954. — V. 7. — Issue 1. — P. 159 – 193.

[O] Олейник О.А. Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями // Труды Моск. Мат. Об-ва. — 1956. — Т. 5. — с. 433 – 454.

[ERS] И Вейнан, Рыков Ю.Г., Синай Я.Г. Вариационный принцип Лакса-Олейник для некоторых одномерных систем квазилинейных уравнений // Успехи матем. наук. – 1995. – Т. 50. – Вып. 1. – С. 193 – 194.

[Ta] Tadmor E. Variational formulation of entropy solutions for nonlinear conservation laws // Joint Math. Meeting, Baltimore, MD, January 2014, http://www.cscamm.umd.edu/tadmor/Lectures/2014%2001%20Variational_formulation_JMM_address%20printout.pdf.

[R1] Rykov Yu. G. Extremal properties of the functionals connected with the systems of conservation laws // Mathematica Montisnigri. — 2019. — V. 46. — P. 21 – 30.

[Ze1] Zel'dovich Ya. B. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations // Astron. Astrophys. — 1970. — V. 5. — P. 84 – 89.

[Ze2] Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. Наука. М., 1973.

[Kra] Крайко А. Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной собственного давления // Приклад. матем. и мех. — 1979. — Т. 43. — № 3. — С. 500 – 510.

[Bou] Bouchut F. On zero-pressure gas dynamics // B. Perthame (Ed.), Advances in Kinetic Theory and Computing, series on Advances in Mathematics and Applied Sciences, V. 22, P. 171 – 190. World Scientific. Singapore, 1994.

[Ov] Овсянников Л. В. Изобарические движения газа // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30. — № 10. — С. 1792 – 1799.

[Chu] Чупахин А. П. О барохронных движениях газа // Доклады РАН. — 1997. — Т. 352. — № 5. — С. 624 – 626.

[Gr] Grenier E. Existence globale pour la systeme des gaz sans pression // C. R. Acad. Sci. Serie 1. Math. — 1995. — V. 321. — Issue 2. — P. 171 – 174.

[HW] Huang F., Wang Z. Well posedness for pressureless flow // Comm. Math. Phys. — 2001. — V. 222. — Issue 1. — P. 117 – 146.

[LiW] Li J., Warnecke G. Generalized characteristics and the uniqueness of entropy solutions to zero-pressure gas dynamics // Adv. Differential Equations. — 2003. — V. 8. — No. 8. — P. 961 – 1004.

[Hy1] Hynd R. Sticky particle dynamics on the real line // Notices Amer. Math. Soc. — 2019. — V. 66. — Issue 2. — P. 162 – 168.

[Hy2] Hynd R. A trajectory map for the pressureless Euler equations // Transactions Amer. Math. Soc. — 2020. — V. 373. — No. 10. — P. 6777 – 6815.

[KlR] Klyushnev N. V., Rykov Yu. G. Non-conventional and conventional solutions for one-dimensional pressureless gas // Lobachevskii journal of mathematics. — 2021. — V. 42. — Issue 11. — P. 2615 – 2625.

[LZY] Li J., Zhang T., Yang S. L. The Two-Dimensional Riemann Problem in Gas Dynamics. Longman. London, 1998.

[R2] Рыков Ю. Г. Особенности типа ударных волн в среде без давления, решения в смысле теории меры и в смысле Коломбо. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, №30. М., 1998.

[R3] Рыков Ю. Г. Двумерная газовая динамика без давления и вариационный принцип. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, №94. М., 2016.

[AR1] Аптекарев А. И., Рыков Ю. Г. Детализация механизма образования особенностей в системе уравнений газовой динамики без давления // Доклады РАН. — 2019. — Т. 484. — № 6. — С. 655 – 658.

[Pa] Pang Y. The Riemann problem for the two-dimensional zero-pressure Euler equations // J. Math. Anal. Appl. — 2019. — V. 472. — Issue 2. — P. 2034 – 2074.

[BD] Bianchini S., Daneri S. On the sticky particle solutions to the multi-dimensional pressureless Euler equations // J. Differential Equations. — 2023. — V. 368. — P. 173 – 202.

[BrN] Bressan A., Nguyen T. Non-existence and non-uniqueness for multidimensional sticky particle systems // Kinetic and Related Models. — 2014. — V. 7. — No. 2. — P. 205 – 218.

[KRy] Клюшнев Н.В., Рыков Ю.Г. О модельных двумерных течениях газа без давления: вариационное описание и численный алгоритм в рамках динамики прилипания // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2023. — Т. 63. — № 4. — С. 639 – 656.

[BCH] Bressan A., Chen G., Huang S. Generic Singularities for 2D Pressureless Flow, https://arxiv.org/abs/2307.11602, 2023.

[LY] Li J., Yang H. Delta-shock waves as limits of vanishing viscosity for multidimensional zero-pressure gas dynamics // Quart. Appl. Math. — 2001. — V. LIX. — P. 315 – 342.

[ARS] Albeverio S., Rozanova O. S., Shelkovich V. M. Transport and concentration processes in the multidimensional zero-pressure gas dynamics model with energy conservation law, https://arxiv.org /abs/1101.5815, 2011.

[KS1] Khanin K., Sobolevski A. Particle dynamics inside shocks in Hamilton-Jacobi equations // Phil. Trans. Roy. Soc. A. — 2010. — V. 368. — P. 1579 – 1593.

[KS2] Khanin K., Sobolevski A. On Dynamics of Lagrangian Trajectories for Hamilton-Jacobi Equations // Arch. Ration. Mech. Anal. — 2016. — V. 219. — Issue 2. — P. 861 – 885.

[GSS] Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Шандарин С. Ф. Крупномасштабная структура Вселенной: Приближение Зельдовича и модель слипания // Успехи физ. наук. — 2012. — Т. 182. — № 3. — С. 233 – 261.

[AR2] Аптекарев А.И., Рыков Ю.Г. Возникновение иерархии особенностей в средах без собственного перепада давления. Двумерный случай // Математические заметки. — 2022. — Т. 112. — Вып. 4. — С. 486 – 499.

[AR3] Аптекарев А. И., Рыков Ю. Г. Вариационный принцип для многомерных законов сохранения и среды без давления // УМН. – 2019. – Т. 74. – Вып. 6. – С. 159 – 160.

[BNP] Brenier Y., Natalini R., Puel M. On a relaxation approximation of the incompressible Navier–Stokes equations // Proc. Amer. Math. Soc. — 2004. — V. 132. — No. 4. — P. 1021 – 1028.

[PaR] Paicu M., Raugel G. Une perturbation hyperbolique des équations de Navier– Stokes [A hyperbolic perturbation of the Navier–Stokes equations] // ESAIM: PROCEEDINGS. — 2007. — V. 21. — P. 65 – 87.

[RS1] Racke R., Saal J. Hyperbolic Navier–Stokes equations I: local well-posedness // Evol. Equ. Control Theory. — 2012. — V. 1. — No. 1. — P. 195 – 215.

[RS2] Racke R., Saal J. Hyperbolic Navier–Stokes equations II: global existence of small solutions // Evol. Equ. Control Theory. — 2012. — V. 1. — No. 1. — P. 217 – 234.

[IR] Ильин А.А., Рыков Ю.Г. О близости траекторий для модельных квазигазодинамических уравнений // Доклады РАН. — 2016. — Т. 470. — № 4. — С. 380 – 383.

[Vaz] Vázquez J.L. The Porous Medium Equation. Mathematical Theory. Oxford University Press. Oxford, 2007.

[AKM] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Наука. Новосибирск, 1983.

[Amz] Amaziane B, Jurak M, Pankratov L, Piatnitski A. An existence result for nonisothermal immiscible incompressible 2-phase flow in heterogeneous porous media // Math. Meth. Appl. Sci. — 2017. — V. 40. — Issue 18. — P. 7510 – 7539.

[DEH] Daim F.Z., Eymard R., Hilhorst D. Existence of a solution for two phase flow in porous media: The case that the porosity depends on the pressure // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — V. 326. — P. 332 – 351.

[AJK] Amaziane B., Jurak M., Keko A.Z. An existence result for a coupled system modeling a fully equivalent global pressure formulation for immiscible compressible two-phase flow in porous media // J. Diff. Eq. — 2011. — V. 250. — Issue 3. — P. 1685 – 1718.

[ASh] Amirat Y. and Shelukhin V. Global weak solutions to equations of compressible miscible flows in porous media // SIAM J. Math. Anal. — 2007. — V. 38. — No. 6. — P. 1825 – 1846.

[Orr] Orr, jr. F. M. Theory of Gas Injection Processes. Tie-Line Publ. Copenhagen, 2007.

[Bed] Бедриковецкий П. Г., Каневская Р. Д., Лурье М. В. Автомодельные решения задач двухфазной фильтрации с учетом сжимаемости одной из фаз // МЖГ. —1990. — № 1. — С. 71 – 80.

[AbP] Abadpour A., Panfilov M. Asymptotic decomposed model of two-phase compositional flow in porous media: analytical front tracking method for Riemann problem // Transp. Porous Med. — 2010. — V. 82. — Issue 3. — P. 547 – 565.

[BdP] Bertch M. and Dal Passo R. Hyperbolic Phenomena in a Strongly Degenerate Parabolic Equation // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1992. — V. 117. — Issue 4. — P. 349 – 387.

[dP] Dal Passo R. Uniqueness of the entropy solution of a strongly degenerate parabolic equation // Commun. Part. Diff. Eq. — 1993. — V. 18. — Issue 1-2. — P. 265 – 279.

[LTa] Lavrentiev M. M., Tani A. Solvability to some strongly degenerate parabolic problems // J. Math. Anal. Appl. — 2019. — V. 475. — Issue 1. — P. 576 – 594.

[KuR] Kurganov A. and Rosenau P. Effects of a saturating dissipation in Burgers-type equations // Comm. Pure Appl. Math. — 1997. — V. 50. — No. 8. — P. 753 – 771.

[KLR] Kurganov A., Levy D. and Rosenau P. On Burgers-Type Equations with Non-Monotonic Dissipative Fluxes // Comm. Pure Appl. Math. — 1998. — V. 51. — No. 5. — P. 443 – 473.

[GKR] Goodman J., Kurganov A. and Rosenau Ph. Breakdown in Burgers-type equations with saturating dissipation fluxes // Nonlinearity. — 1999. — V. 12. — No. 2. — P. 247 – 268.

[CKR] Chertock A., Kurganov A., Rosenau Ph. On degenerate saturated-diffusion equations with convection // Nonlinearity. — 2005. — V. 18. — No.2. — P. 609 – 630.