МЕТОДЫ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ПРЕДСТАВИТЕЛЬСТВА: ОСОБЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ТЕРМИНАХ РАЦИОНАЛЬНОГО ВЫБОРА

Карпов А.В.

Государственной Университет – Высшая Школа Экономики
Россия, 109028, г. Москва, Покровский бул., 11
E-mail: Karpov_hse@mail.ru

Аннотация: В работе показана невозможность создания процедуры пропорционального представительства, удовлетворяющей некоторым свойствам рационального выбора, что является некоторым аналогом теоремы Эрроу.

Введение

Основы теории коллективного выбора посвящены методам агрегирования индивидуальных предпочтений и построения общего упорядочения альтернатив. Фундаментальные исследования систем пропорционального представительства [2] были произведены не в терминах рационального выбора. Это объясняется тем, что в США методы пропорционального представительства применяются для определения количества представителей от штата в палате представителей по численности населения. Предпочтения не играют никакой роли.

Построение аксиоматики систем пропорционального представительства, которая включала бы описание систем пропорционального представительства в терминах рационального выбора является современным развитием моделей описания систем пропорционального представительства.

Основной результат теории коллективного выбора, показывающий невозможность построения рационных предпочтений общества, заключен в теореме Эрроу [3]. Системы пропорционального представительства совершенно другой метод агрегирования, и поэтому они не рассматривались в данном контексте. Задача данной работы провести анализ систем пропорционального представительства в терминах рационального выбора.

В работе показана невозможность создания процедуры пропорционального представительства, удовлетворяющей некоторым свойствам рационального выбора.

1. Постановка задачи пропорционального представительства в терминах рационального выбора

Выборный орган избирается путем голосования за партии. Каждый избиратель из множества N ($|N| = n$) характеризуется предпочтениями, представимыми линейным порядком P на множестве партий A ($|A| = k$). Некоторое правило должно определить представительство каждой партии при заполнении S мест в парламенте

$$F : P^n \to A^S .$$

Итоговый выбор является множеством из S альтернатив, будем считать, что $S > |A| = k$. В общем случае не исключается возможность неоднозначного решения. Например, задача распределения 3 мест при профиле $\begin{Bmatrix} a \succ b \\ b \succ a \end{Bmatrix}$ не имеет единственного анонимного, нейтрального решения, поэтому возможным решением будут два набора $\{a,b,b\}$, $\{a,a,b\}$.

Множество участников, для которых альтернатива x является более предпочтительной, чем альтернатива y.

$$V(x, y, \vec{P}) = \{i \in N \mid (x, y) \in P_i\} .$$

Процедура пропорционального представительства характеризуется функцией выбора: $C(\vec{P}, A, S) = \{y \mid y \in F(\vec{P}, A, S)\}$.

Иногда удобно характеризовать выбор как вектор $(s_1, s_2, ..., s_k)$, где $s_j = card(C(\vec{P}, A, S) \cap \mathrm{Im}(x_j))$.

Если выбор множественный, то $MC(\vec{P}, A, S) = \cup C(\vec{P}, A, S)$.

2. Описание процедур пропорционального представительства

Суть систем пропорционального представительства в распределении мест в парламенте между конкурирующими париями в наибольшем соответствии предпочтениям избирателей. Различные методы можно разделить по используемой информации о предпочтениях на кардинальные, в которых каждый избиратель характеризуется лучшим в его предпочтениях кандидатом, и порядковые, в которых учитываются вся информация о предпочтениях (линейный порядок).

В силу простоты процедуры голосование наибольшее распространение получили кардинальные методы.

$$F : Z^n \to A^k \text{, где } Z = \left\{ a \middle| \forall y \in A \quad aP_i y, i \in N \right\}$$

Так как число мест, которое партия может получить дискретно, то возникает множество способов распределения. В общем случае процедуры, удовлетворяющим минимальному набору разумных требований не существует [2].

Наиболее распространены две группы процедур: методы наибольшего остатка и методы делителей.

2.1. Методы наибольшего остатка

В зависимости от общего количества голосов и мест метод определяет квоту, необходимую для получения одного места. На первом шаге определяется точное число мест каждой партии, на втором распределяются целые места, на третьем оставшиеся свободными места распределяются по наибольшим остаткам.

2.2. Метод Хэра

Квота определяется как количество голосов на одно место в парламенте $q_H(n,k) = \dfrac{n}{k}$. Рассмотрим пример применения квоты Хэра при распределении 8 мест. Квота в данном примере будет равна $q_H(n,k) = \dfrac{100000}{8} = 12500$.

Таблица 1. Квота Хэра.

Партия	Голоса	Точное число мест	Целое число мест	Дополн. места	Распределение мест
A	40000	3,2	3	0	3
B	30000	2,4	2	0	2
C	18000	1,44	1	1	2
D	12000	0,96	0	1	1
Сумма	100000	8	6	1	8

Квота Хэра используется при распределении мест в российском парламенте.

2.3. Метод Друпа

Квота определяется как минимально количество голосов, гарантирующее место в парламенте. Действительно, при распределении одного место достаточно половину голосов плис один голос, при борьбе за два места партия, получившая больше трети голосов должна иметь хотя бы одно место при любом распределении голосов между другими партиями. В общем случае квота определяется как $q_D(n,k) = \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor + 1$.

Рассмотрим пример применения квоты Хэра при распределении 8 мест. Соответственно квота равна $q_D(n,k) = \left\lfloor \frac{100000}{9} \right\rfloor + 1 = 11112$.

Таблица 2. Квота Друпа.

Партия	Голоса	Точное число мест	Целое число мест	Дополн. места	Распределение
A	40000	3,60	3	0	3
B	30000	2,70	2	1	3
C	18000	1,62	1	0	1
D	12000	1,08	1	0	1
Сумма	100000	9	7	1	8

Метод, использующий квоту Друпа, распределяет меньше мест по наибольшим остаткам, так как уменьшает необходимую квоту. Это преимущество данного метода.

Квоты, которые используются в других методах наибольших остатков:

2.4. Квота Империали

$$q_I(n,k) = \frac{n}{k+2}.$$

2.5. Усиленная квота Империали

$$q_{RI}(n,k) = \frac{n}{k+3}.$$

Метод наибольших остатков чувствителен к небольшому изменению числа голосов, числа мест к распределению. После известного случая со штатом Алабама, когда штат потерял одно место в палате представителей, не смотря на обще увеличение мест в палате, методы наибольших делителей в США не использовались, на смену им пришли методы делителей.

2.6. Методы делителей

Эти процедуры исключают проблемы возникающие из-за распределения мест по наибольшим остаткам соответствующим образом подобрав квоту..

2.7. Методы делителей Д'Ондта

Находится такая квота, чтобы при распределении целой части от точного числа мест получали количество мест в парламенте.

Применение метода состоит в последовательном делении количества голосов на соответствующие делители $d_D(k_i) = k_i + 1$, где k – количество полученных партией мест.

Рассмотрим пример распределения 6 мест, иллюстрирующий применение этого метода.

Таблица 3. Метод Д'Ондта.

Партия	Голоса	v/1	v/2	v/3	Распределение
A	40000	40000(1)	20000(3)	13333,33(6)	3
B	30000	30000(2)	15000(5)	10000	2
C	18000	18000(4)	9000	6000	1
D	12000	12000	6000	4000	0
Сумма	100000				6

Места распределяются последовательно по наибольшим значениям в таблице. Первое место получает партия A, второе B, третье A и так далее. Партия A получила 3 места, или 13333 голоса в расчете на каждое. Партия D с 12000 осталась без мест.

Таким образом, если выбрать квоту между 12000 и 13333, например 12500, то при распределении целой части от точного числа мест партии получат в точности 6 мест.

Таблица 4.

Партия	Голоса	Точное число мест	Число Мест
A	40000	3,2	3
B	30000	2,4	2
C	18000	1,44	1
D	12000	0,96	0
Сумма	100000	8	6

Этот метод склонен распределять большее количество мест крупным партиям и при прочих равных условиях делает более выгодным образование объединений партий.

2.8. Сент-Лаге

Находится такая квота, чтобы при распределении целой части от точного числа мест получали количество мест в парламенте.

Применение метода состоит в последовательном делении количества голосов на соответствующие делители $d_D(k_i) = k_i + 0,5$, где k – количество полученных партией мест. Обычно для удобства делят не на 0.5, 1.5, 2.5, …, а на 1, 3, 5…

Рассмотрим пример распределения 6 мест, иллюстрирующий применение этого метода.

Таблица 5. Метод Сент-Лаге.

Партия	Голоса	v/1	v/3	v/5	Распределение
A	40000	40000(1)	13333,33(4)	8000	2
B	30000	30000(2)	10000(6)	6000	2
C	18000	18000(3)	6000	3600	1
D	12000	12000(5)	4000	2400	1
Сумма	100000				6

Распределение мест происходит последовательно, аналогично методу д'Ондта. В данном примере квота будет находиться в границах между 16000 и 20000, например 18000.

Таблица 7.

Партия	Голоса	Точное число мест	Число Мест
A	40000	2,22	2
B	30000	1,67	2
C	18000	1,00	1
D	12000	0,67	1
Сумма	100000	5,56	6

Этот метод не дает преимущество ни малым ни крупным партиям.

Другие методы делителей:

Датская система $d_{DS}(k_i) = k_i + 1/3$

Среднее геометрическое $d_{GM}(k_i) = \sqrt{k_i\left(k_i + 1\right)}$

Среднее гармоническое $d_{HM}(k_i) = 2k_i\left(k_i + 1\right)/\left(2k_i + 1\right)$

Наименьший делитель $d_{SD}(k_i) = k_i$

Любая убывающая последовательность k-ый элемент которой находится между k и k+1 может быть использована для применения метода делителей. Так места распределяются последовательно, то ситуация с парадоксом штата Алабама возникнуть не может. Эти методы исключают возможность появления и некоторых других парадоксов, поэтому методы делителей сейчас более распространены. Основной недостаток этих методов состоит в том, что итоговое распределение может отличаться от точного числа мест, рассчитанному по квоте Хэра, более чем на 1.

3. Свойства систем пропорционального представительства

1 Независимость от посторонних альтернатив (consistency).

Для любого разбиения альтернатив на $(J \cup \bar{J}) = A$ выбор останется неизменным

$$C(\vec{P}, J, \sum_{j \in J} s_j) \cup C(\vec{P}, \bar{J}, \sum_{j \in \bar{J}} s_j) = C(\vec{P}, A, S).$$

Этому свойству, например, удовлетворяет процедура, дающая каждой партии по одному месту, а оставшиеся места достаются первой по алфавиту партии.

2 Единогласие

Если $V(x, y, \vec{P}) = N$, то $s_x \geq s_y$.

3. Монотонность

Если $V(x, y, \vec{P}) \subset V(x, y, \vec{P}')$, то $s_x \leq s'_x$, $s_y \geq s'_y$

4. Ненавязанность

$\forall A, S, N \ \forall C \in A^s \exists \vec{P} : C = C\left(\vec{P}, A, S\right)$

5. Анонимность

Выбор не зависит индекса участника i в профиле $\vec{P}$.

6. Нейтральность

Выбор основывается только на предпочтениях и не зависит от других характеристик альтернативы.

7. Монотонность представительства

$\forall \vec{P}, A, S \quad C\left(\vec{P}, A, S\right) \subset C\left(\vec{P}, A, S+1\right).$

8. Сбалансированность. При объединении двух партий их представительство не должно отличаться более, чем на 1 место.

$s_x + s_y - 1 \leq s_{x \cup y} \leq s_x + s_y + 1$

9. Outcst condition. Если убрать партии не получившие мест, то распределение не должно измениться.

Лемма 1 (о нейтральности). Пусть $V(x, y, \vec{P}) \subset V(t, z, \vec{P})$, выполняется монотонность, нейтральность, тогда из $s_x \geq s_y$ следует $s_t \geq s_z$ и из $s_z \geq s_t$ следует $s_y \geq s_x$.

Доказательство. Рассмотрим профиль $\vec{P}'$, в котором альтернативы x, y стоят на месте t, z, соответственно, тогда

$$V(x, y, \vec{P}) \subset V(x, y, \vec{P}').$$

Из свойства монотонности следует

$$s_x \leq s'_x$$

$$s_y \geq s'_y$$

Согласно нейтральности представительство должно сохраниться независимо от названий альтернатив $s_t = s_x'$, $s_z = s_y'$. Из этого следует, что

$$s_x \leq s_t,$$

$$s_y \geq s_z .$$

Если $s_x \geq s_y$, то $s_t \geq s_z$. Если $s_z \geq s_t$, то $s_y \geq s_x$.■

Лемма 2 (о двух альтернативах). Если число альтернатив равно 2 и процедура удовлетворяет свойствам монотонности, анонимности, нейтральности, то при $card(V(x, y, \vec{P}')) > n/2$ будет выполняться $s_x \geq s_y$

Доказательство. В силу выполнения анонимности и нейтральности выбор s_x зависит только от $card(V(x, y, \vec{P}))$ и общего количества мест к распределению для альтернатив x, y.

По монотонности s_x не убывает по $card(V(x, y, \vec{P}'))$ при различных $\vec{P}'$. При $card(V(x, y, \vec{P})) > N/2$ из $card(V(x, y, \vec{P}')) > card(V(y, x, \vec{P}'))$ следует $s_x \geq s_y$.■

Если число распределяемых мест нечетно, а голоса разделились поровну, то процедура может дать множество решений. Если число мест четно, а голоса разделились поровну, то процедура, удовлетворяющая свойствам монотонности, анонимности, нейтральности распределит места поровну.

Следствие 1. Если процедура удовлетворяет свойствам независимости от посторонних альтернатив, монотонности, анонимности, нейтральности, то победитель Кондорсе получит наибольшее число мест.

Доказательство. Так как свойство независимости от посторонних альтернатив выполнено, то для определения соотношения между s_x и s_y, где y≠x, достаточно рассмотреть $C(\vec{P}, \{x, y\}, s_x + s_y)$. Это позволяет воспользоваться результатами Леммы 2. Если x – победитель Кондорсе, то $\forall y \in A, y \neq x \;\; card(V(x, y, \vec{P})) > n/2$, из чего следует, что $s_x \geq s_y$. Победитель Кондорсе набирает наибольшее количество мест.■

Теорема 1. Для n ≥ 3 и $card(A)) \geq 4$ не существует процедур, одновременно удовлетворяющим свойствам независимости от посторонних альтернатив, монотонности, анонимности, нейтральности и ненавязанности.

Доказательство. В силу свойства независимости от посторонних альтернатив распределение мест между любыми двумя альтернативами зависит только $V(a, b, \vec{P})$, $a, b \in A$. По анонимности и нейтральности выбор s_a может зависеть только от $card(V(a, b, \vec{P}))$ и общего количества мест к распределению для альтернатив a, b.

Так как процедура является ненавязанной, то должен существовать профиль, при котором все места достанутся партии a. Если при некотором профиле предпочтений партия a получает все, а партия b ничего, то по монотонности это распределение сохранится и при профиле, где $V(a, b, \vec{P}) = N$.

Рассмотрим профиль для $n = 3, \quad A = \{x, y, z, q\}$.

$x \quad y \quad z$

$y \quad z \quad q$

$z \quad q \quad x$

$q \quad x \quad y$

Так как $V(z,q,\vec{P})=N$, то $s_q=0$. По Лемме 2 из $V(q,x,\vec{P})>N/2$ следует, что $s_q \geq s_x$. Аналогично получаем, что $s_x \geq s_y$, $s_y \geq s_z$. В итоге $0=s_q \geq s_x \geq s_y \geq s_z$. Для любого количества мест к распределению свойства независимости от посторонних альтернатив, монотонности, анонимности, нейтральности и ненавязанности не приводят к решению, являются несовместными.■

Для $card(A))=2$ традиционные процедуры удовлетворяют свойствам независимости от посторонних альтернатив, монотонности, анонимности, нейтральности и ненавязанности.

Теорема 2. Для n ≥ 3 и $card(A))\geq 4$ не существует процедур, одновременно удовлетворяющим свойствам монотонности, анонимности, нейтральности.

Доказательство. Рассмотрим профиль для $n=3,\quad A=\{x,y,z\}$.

$x \quad y \quad z$

$y \quad z \quad x$

$z \quad x \quad y$

Рассмотрим профиль $\vec{P}'$, в котором альтернатива y стоит на месте q,

$$V(y,x,\vec{P}) \subset V(y,x,\vec{P}').$$

Из свойства монотонности следует

$$s_x \geq s'_x$$
$$s_y \leq s'_y$$

Согласно нейтральности представительство должно сохраниться независимо от названий альтернатив $s_z = s_y'$. Из этого следует, что

$$s_y \leq s_z.$$

Аналогично получим $s_x \leq s_y$ и $s_z \leq s_x$.

Таким образом $s_z \geq s_y \geq s_x \geq s_z$, что приводит к $s_z = s_y = s_x$. Это условие невыполнимо при S не кратном 3.■

Литература

1. *Balinski M. Ramirez V*. Parametric methods of apportionment, rounding and production. // Mathematical social studies. 1999. 37, pp. 107-122.
2. *Balinski M. Young P*. Fair representation. // Yale University Press, New Haven, CT, 1982.
3. Geanakoplos J. Three brief proofs of Arrow's impossibility theorem. // Cowles Foundation Discussion Paper, 2004, 1123RRRR.