

**Государственный Университет
Высшая школа экономики**

В.А.Губанов

**НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ
ВЫДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ
СЕЗОННЫХ ЦИКЛОВ**

Препринт WP2/2002/01

Серия WP2

Количественный анализ в экономике

Москва 2002

УДК 330.4
ББК 65.050.9(2)
Г 93

Губанов В.А. Непараметрическое выделение динамических сезонных циклов: Препринт WP2/2002/01. – М.: ГУ ВШЭ, 2002. – 33 с.

В работе предложен непараметрический алгоритм сезонной корректировки временных рядов с динамическими сезонными эффектами, основанный на использовании вариационных принципов. Приводится реализация метода для непрерывных функций и временных рядов. Обсуждаются ее особенности и ограничения. Полученные численные результаты сравниваются с результатами сезонной корректировки на основе других методов. Рассмотрены сезонные эффекты отдельных показателей российской переходной экономики с учетом кризисных явлений 1998 г.

Классификация JEL: C22, C32, C63.

Gubanov V.A. Non-parametric Extraction of Dynamic Seasonal Cycles: Working paper WP2/2002/01. – Moscow: State University – Higher School of Economics, 2002. – 33 p. (in Russian)

The paper presents a non-parametric seasonal adjustment algorithm based on variational principles. Basic relations of the suggested procedure are considered for two cases – continuous time and time series. Some features and restrictions of the algorithm are discussed. Numerical results of the algorithm are compared with Census X-11 and stationary seasonal wave extraction algorithms. Dynamic seasonal effects in transient economy time series are discussed having regard to the crisis of 1998.

JEL Classification: C22, C32, C63.

Губанов Вячеслав Анатольевич
Центр макроэкономического анализа и
краткосрочного прогнозирования
Института народнохозяйственного
прогнозирования РАН
117418, Москва, Нахимовский пр-т, 47
E-mail: vgubanov@forecast.ru

Gubanov, Vyatcheslav
Center for Macroeconomic Analysis and
Short-Term Forecasting of the Institute of
Economic Forecasting of the Russian
Academy of Sciences
47, Nakhimovsky prospekt, Moscow
117418, Russia
E-mail: vgubanov@forecast.ru

© В.А. Губанов, 2002
© Оформление. ГУ ВШЭ, 2002

1. Введение*

В переходной экономике значительно возрастает роль прогноза развития экономической системы или отдельных ее частей в краткосрочной перспективе. Неадекватный анализ ситуации может приводить к потере контроля над экономическими процессами и, как следствие, к кризисным явлениям. Достаточно сказать, что за последнее десятилетие можно выделить три кризисные точки, включая август 1998 г., которые предъявили специфические требования к алгоритмам анализа и представлению экономических индикаторов.

Сказанное относится как к анализу временных рядов, так и к статистическому анализу экономических явлений. Дело в том, что характерные особенности переходной экономики – это быстрые (сильные) изменения показателей и структурная неустойчивость отдельных секторов. Быстрое изменение темпов роста показателей означает, что методы анализа стационарных процессов становятся малопригодными к нашей ситуации. Отсюда следует, что, оставаясь в рамках классических методов, достаточно сложно, а порой и невозможно дать разумную оценку последствий решений, носящих глобальный характер. Такие возмущения затрагивают не только экономическую, но и социально-политическую сферы, где большинство явлений носят нелинейный (результат не пропорционален воздействию) и нестационарный характер.

Важное значение приобретают методы анализа циклических процессов в структурно неустойчивых системах, таких как российская переходная экономика. Характерная особенность переходной экономики состоит в том, что существуют режимы изменения показателей со стационарной сезонной составляющей и режимы, когда сезонная волна возникает, затухает или существенно меняется. Последние связаны с глубокой перестройкой либо

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 01-02-00119а).

экономики в целом, либо отдельных ее отраслей. На основе анализа изменений сезонной составляющей можно делать вполне определенные выводы о структуре и тенденциях развития отдельных сегментов экономической системы. Таким образом, адекватную процедуру выделения циклической составляющей динамики временных рядов можно рассматривать как эффективный инструмент эконометрического анализа.

Вопрос выбора методов анализа временных рядов экономических показателей и порядок выделения отдельных составляющих ряда тесно связаны с динамикой всей экономической системы. Переходный характер российской экономики накладывает ряд требований на методы анализа экономических показателей. *Во-первых*, необходимо использовать методы, которые работают на коротких временных интервалах (меньше пяти лет для помесечных рядов). Поэтому сразу отпадают спектральные методы. *Во-вторых*, следует использовать методы, обладающие, при прочих равных условиях, наименьшей инерционностью, с тем чтобы не пропустить «смену тенденций» изменения показателя. *В-третьих*, это должны быть непараметрические методы – наименее зависимые от экспертных оценок, основанных на предыдущем опыте (содержать наименьшее число гипотез и предположений).

Существующие модели экономических показателей основаны на представлении временных рядов в виде нескольких (аддитивных или мультипликативных) составляющих, число которых зависит от поставленной задачи и процедуры ее решения.

Если рассматривается задача сезонной корректировки временного ряда [1], то возможны разные схемы его представления в виде отдельных составляющих. Рассмотрим для примера две из них.

Пусть сначала исходный ряд сглаживается, скажем, взвешенным скользящим полиномом. Затем результат сглаживания вычитается из исходной реализации, а из полученной разности выделяется «периодическая» составляющая [1]. В этом случае представление исходного ряда содержит три составляющих: сглаженный исходный ряд (тренд), периодическую компоненту («сезонную волну») и нерегулярный остаток.

Другая возможность связана с представлением исходного ряда в виде двух составляющих. Такой подход предполагает, что можно выделить два типа

изменений показателя: те, которые приводят к суммарному изменению показателя за некоторый фиксированный период времени, например, год (они определяют тренд) и те, суммарный эффект от которых за тот же период равен нулю (сезонные циклы) [2]. В этом случае справедливо представление:

$$y(t) = x(t) + s(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ определим как тренд, а $s(t)$ – как сезонную составляющую.

Для детального анализа текущей динамики показателя составляющая $x(t)$ даже более информативна, чем «сглаженный» тренд, поскольку любое сглаживание вносит дополнительную инерционность на концах интервала наблюдения. А для задачи прогнозирования информация о поведении реализации на правом конце интервала наблюдения имеет определяющее значение.

Важный этап выделения циклических изменений временного ряда – постановка и решение такой задачи с непрерывным временем, т.е. случай, когда исходная реализация показателя предполагается заданной в виде непрерывной функции на конечном интервале. Решение такой задачи полезно по нескольким причинам. Во-первых, многие оптимизационные задачи с непрерывным временем имеют более простую формулировку (возможность постановки задачи «из первых принципов»). Во-вторых, достаточно просто формулируются вопросы единственности решения (решение однородной задачи, число начальных условий и т.п.). В-третьих, верификация алгоритма на модельных примерах в непрерывном случае носит более общий характер, поскольку допускает моделирование циклов с произвольным числом «гармоник». Другими словами, решение задачи с непрерывным временем значительно расширяет возможности исследования корректности постановки и решения задачи, а также возможности использования других методов, развитых для моделей с непрерывным временем.

Рассмотрим аддитивную модель. Мультипликативная модель для темпов роста показателя сводится к аддитивной логарифмированием, тогда нулевому суммарному изменению за период аддитивной сезонной волны соответствует единичный базисный индекс за тот же период. Для моделей с дискретным временем такое преобразование не вызывает вопросов, однако предельный

переход от сезонной волны к мультипликативному сезонному индексу в моделях с непрерывным временем не очевиден. Поэтому в дальнейшем будет рассматриваться только аддитивная модель.

Для того чтобы выделить циклические изменения экономического показателя, необходимо их корректно определить. Повторяющиеся на всех периодах циклические изменения мы будем рассматривать как «стационарную сезонную волну» (стационарный цикл с периодом один год) [3]. Это означает, что для любого момента времени t выполняется условие:

$$\int_t^{t+T} s(t) dt = 0, \quad (T - \text{период, например, год}). \quad (2)$$

Условие (2) фактически включает в себя два условия: суммарное изменение показателя за заданный период равно нулю (условие существования цикла) и условие «периодичности» (неизменности формы цикла на интервале наблюдения):

$$s(t) = s(t + T). \quad (3)$$

Процесс диагностики (оценки) сезонной волны с последующим ее исключением из исходных значений показателя будем называть «сезонной корректировкой».

Для диагностики *динамической сезонной волны* нужно прежде всего ее корректно определить, иными словами, изначально разделить изменения волны и изменения тренда так, чтобы и динамическая волна, и тренд определялись однозначно. Определение динамической волны должно быть, с одной стороны, достаточно широким, чтобы процедура сезонной корректировки была максимально универсальной относительно формы цикла, с другой стороны – удовлетворять условиям однозначного разделения изменений тренда и изменений волны. Действительно, априори можно считать, что сезонные циклы имеют стационарный характер, а все их изменения соотносить с динамикой тренда. Можно допустить изменения формы циклов, и тогда тренд будет иметь другую форму. Поэтому общий алгоритм выделения сезонных эффектов должен эффективно работать для сезонных циклов произвольного типа, включая стационарные сезонные волны на основе одного и того же критерия «гладкости» тренда. Кстати, так можно проверить адекватность любого метода

сезонной корректировки как на модельных реализациях, так и на реальных временных рядах.

Требование однозначного разделения динамики тренда и сезонной волны выделяет класс «экономических» решений из всех возможных решений. Это значит, что решение математической задачи может определять целый класс функций, удовлетворяющих исходным условиям, но только одна из них будет решением конкретной экономической задачи.

Если допустить, что форма волны может меняться, то условие (2) должно быть ослаблено, и вместо него вводится другое условие:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} s_k(t) dt = 0, \quad (4)$$

где k – целое число, такое что $kT \in [t_0, t_1]$ и $s_k(t)$ – динамическая сезонная волна на k -м периоде. Считаем, что на интервале наблюдения расположены K целых периодов ($k \leq K$). Условие (4) означает, что суммарное изменение показателя равно нулю только на заданных периодах и волна определяется, например, только от января к январю интервала наблюдения (для помесечных рядов). Для других базовых месяцев динамическая волна может быть уже другой.

Условие периодичности (3) для динамической волны принимает следующий «ослабленный» вид:

$$s_k(0) = s_k(T), \quad (k = 1, \dots, K). \quad (5)$$

Условие (5) – это определение цикла с периодом T . Если (5) не выполняется, то это не цикл и такие изменения не относятся к сезонной динамике. Поэтому, на наш взгляд, более корректно вместо термина «динамическая сезонная волна» пользоваться определением «сезонный цикл», которое в дальнейшем и будет употребляться. Соотношения (4) и (5) будем считать условиями существования цикла.

В стационарном случае начальное значение сезонной волны полностью определяется условиями (2) и (3) (см. работу [3]). Если мы допускаем изменение формы сезонного цикла (волны), то возникает вопрос о начальных условиях. Эти условия можно определить, исследуя тот же показатель на более ранних интервалах наблюдения или решая простейшую вариационную задачу на

периоде, тогда начальные условия определяются автоматически из критерия «гладкости» тренда. Второе решение проблемы начальных условий предпочтительнее, поскольку в первом случае необходимо вводить в исходную задачу дополнительную гипотезу, либо терять часть имеющейся информации (часть реализации) на оценку начального значения цикла.

Важная особенность процедуры диагностики динамических сезонных циклов – сравнение циклической составляющей на разных периодах интервала анализа. На наш взгляд, наиболее адекватной процедурой выделения сезонного цикла на одном периоде будет взвешивание исходного ряда по периодам или введение функции ценности информации (ФЦИ), как это сделано в работе [4]. В данной задаче необходимо выделять не отдельные точки ряда, а именно периоды, поскольку на каждом из них все точки информационно равнозначны и изменения формы циклов фиксируются от периода к периоду. Следует отметить, что постулирование причинно-следственных связей по уже имеющейся реализации процесса соответствует установлению неявно заданной модели процесса, т.е. введению ничем не обусловленных связей и отношений симметрии. В нашем случае никаких априорных гипотез и моделей процессов (типа AR-процесса) не предполагается, поэтому циклы справа и слева относительно выделенного равноправны. Единственное ограничение, которое накладывается на динамику сезонных циклов, – это эволюционный характер их изменений.

2. Модель с непрерывным временем

Для определения динамического сезонного цикла выделим на интервале наблюдения K целых периодов длительностью T (без потери общности далее положим, что весь интервал наблюдения состоит из K целых периодов). Исходную реализацию – $y(t)$ и динамические сезонные циклы – $s(t)$ на интервале $[0, KT]$ можно представить в виде набора функций, определенных на одном периоде аналогично тому, как это сделано в работе [3]:

$$y_k(t) = y(t + (k-1)T), \quad (6)$$

$$s_k(t) = s(t + (k-1)T), \quad (7)$$

$$k = 1, \dots, K.$$

Каждому периоду соответствуют своя часть исходной реализации и свой сезонный цикл. Для того чтобы определить изменения сезонного цикла от периода к периоду, необходимо ввести процедуру выделения $s_k(t)$ на k -м периоде.

Рассмотрим степенное взвешивание на k -м периоде. Полагаем, что сезонный цикл определяется в первую очередь исходной реализацией на том же периоде (весовой коэффициент $\alpha^0 = 1$, причем $0 \leq \alpha \leq 1$), а остальные периоды учитываются с меньшими весами: чем дальше l -й период отстоит от анализируемого – k -го, тем меньше его вес (весовой коэффициент – $\alpha^{|k-l|}$). Такое выделение анализируемого периода (цикла $s_k(t)$) означает, что задача определения динамических сезонных циклов из исходной реализации распадается на K задач определения стационарной сезонной волны – $s_k(t)$ для K , соответствующим образом взвешенных по периодам реализаций – $y^{(k)}(t)$. Взвешенную реализацию $y^{(k)}(t)$ можно представить в виде набора функций:

$$y_l^{(k)}(t) = \alpha^{|k-l|} y(t - (l-1)T), \quad l = 1, \dots, K, \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

Теперь тренд на l -м периоде – $x_l^{(k)}(t)$, при выделении цикла $s_k(t)$ на k -м периоде, имеет следующий вид:

$$x_l^{(k)}(t) = \alpha^{|k-l|} (y_l(t) - s_k(t)). \quad (9)$$

Процедура выделения $s_k(t)$ как стационарной сезонной волны для реализации $y^{(k)}(t)$ описана в работе [3]. Стационарная сезонная волна определяется как функция, доставляющая минимум функционалу*):

$$\| \dot{x} \| = \int_{t_0}^{t_1} | \dot{x}(t) |^2 dt \Rightarrow \min, \quad (10)$$

где точка над символом означает производную по времени. Теперь из (9) и (10) с учетом (6) приходим к явному виду функционала $\Phi_k(x^{(k)})$ для определения k -го сезонного цикла:

*) В принципе можно было бы определить тренд как кривую с наименьшей суммарной кривизной на всем интервале анализа, но тогда уравнение Эйлера соответствующей вариационной задачи было бы четвертого порядка, а разностная схема содержала бы четвертые разности. При такой постановке задачи «инерционность» алгоритма сезонной корректировки увеличивается в два раза по сравнению с формулировкой (10).

$$\Phi_k(x^{(k)}) = \int_0^T \left\{ \sum_{l=1}^K \alpha^{k-l} \left[\dot{y}_l(t) - \dot{s}_k(t) \right] \right\}^2 dt \Rightarrow \min_s, \quad (11)$$

где

$$x^{(k)}(t) = \sum_{l=1}^K \alpha^{k-l} [y_l(t) - s_k(t)] = \sum_{l=1}^K x_l^{(k)}(t).$$

С учетом «изопериметрического» условия (4)

$$\int_0^T s_k(t) dt = 0,$$

и условия существования цикла (5)

$$s_k(0) = s_k(T)$$

задача сводится к классической вариационной задаче [5] с лагранжианом:

$$L_k = \left\{ \sum_{l=1}^K \alpha^{k-l} \left[\dot{y}_l(t) - \dot{s}_k(t) \right] \right\}^2. \quad (12)$$

Уравнение Эйлера этой задачи имеет вид:

$$\ddot{s}_k(t) \sum_{l=1}^K \alpha^{k-l} - \sum_{l=1}^K \alpha^{k-l} \ddot{y}_l(t) = 0, \text{ при } t \in [0, T]. \quad (13)$$

Введем обозначения:

$$w_k(\alpha) = \left(\sum_{l=1}^K \alpha^{k-l} \right)^{-1} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha-\alpha^{K-k+1}-\alpha^k}, \quad (14)$$

$$\varphi^{(k)}(t) = w_k(\alpha) \sum_{l=1}^K \alpha^{k-l} y_l(t). \quad (15)$$

Теперь уравнение (13) для выделения k -го сезонного цикла принимает более простую форму:

$$\ddot{s}_k(t) = \varphi^{(k)}(t), \text{ при } t \in [0, T]. \quad (16)$$

Отметим две особенности выражений (14) и (15). $w_k(\alpha)$ играет роль нормирующего множителя в процедуре взвешивания исходной реализации при выделении k -го сезонного цикла. Кроме того, из (14) следует очевидное соотношение:

$$w_k(\alpha) = w_{(K-k+1)}(\alpha).$$

Это означает, что периоды, равноудаленные от анализируемого, вносят вклад в формирование волны на k -м периоде с одинаковыми весами. $\varphi^{(k)}(t)$ –

известная, с точностью до весового коэффициента – α , функция и представляет собой средневзвешенные по периодам значения исходной реализации.

Решение уравнения (16), при произвольном весовом коэффициенте α , имеет вид:

$$s_k(t) = C_0^{(k)} + C_1^{(k)}t + \varphi^{(k)}(t). \quad (17)$$

Зависимость $C_i^{(k)}$ от α подразумевается. $C_0^{(1)}$ и $C_1^{(1)}$ определяются из условий существования цикла (5) и «изопериметрического» условия (4). Примем следующие обозначения:

$$\bar{\varphi}^{(k)} = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^{(k)}(t) dt, \quad (18)$$

$$\Delta\varphi^{(k)} = \varphi^{(k)}(T) - \varphi^{(k)}(0). \quad (19)$$

Тогда выражение для сезонного цикла на произвольном периоде принимает вид:

$$s_k(t) = \frac{\Delta\varphi^{(k)}}{2} - \bar{\varphi}^{(k)} - \frac{\Delta\varphi^{(k)}}{T}t + \varphi^{(k)}(t). \quad (20)$$

Общий вид (20) совпадает с видом выражения для стационарной сезонной волны (соотношение (7) из работы [3]). Таким образом, задача о выделении динамических сезонных циклов сводится к решению K задач о выделении стационарных сезонных циклов. Различия связаны с разным усреднением исходной реализации по периодам. Если для стационарного случая берется простое среднее по периодам, то для динамического – средневзвешенное выражение (15). Таким образом, выражение (20) дает общее решение задачи выделения сезонных циклов $s_k(t)$ при произвольном весовом коэффициенте α (определяет однопараметрическое семейство экстремалей на каждом периоде).

Конкретное значение оптимального (в смысле (10)) весового коэффициента α_k на заданном периоде реализации $y^{(k)}(t)$ определяется из решения простейшей экстремальной задачи:

$$\Phi_k(x^{(k)}(t, \alpha_k)) \Big|_{0 \leq \alpha_k \leq 1} \Rightarrow \min. \quad (21)$$

Здесь $x^{(k)}(t, \alpha_k)$ зависит от α_k как от параметра.

В общем случае коэффициент связи для разных периодов имеет разные значения. Такая адаптация решения (20) к произвольному виду исходной реализации представляется весьма естественной при непараметрическом подходе, так как «фиксация» весовой функции эквивалентна введению дополнительных произвольных параметров. Назовем такую задачу векторной, поскольку оптимальное решение для циклов в смысле (11) определяется вектором весовых коэффициентов $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_K\}$.

Можно сформулировать «скалярную» задачу выделения сезонных циклов, которая в смысле соотношения (10) будет «квазиоптимальной». В этом случае коэффициент связи для всех периодов полагается одинаковым. Для того чтобы получить конкретное значение α , соответствующее наиболее «гладкому» тренду в скалярной задаче, необходимо численно решить аналогичную задачу на экстремум. С вводом зависимости сезонного цикла от параметра связи $s_k(t) = s_k(t, \alpha)$ условие оптимальности для сезонных циклов по α принимает вид:

$$\Phi(\alpha) \Rightarrow \min_{0 \leq \alpha \leq 1}, \quad (22)$$

где

$$\Phi(\alpha) = \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{1}{w_k^2(\alpha)} \int_0^T \left[\dot{s}_k(t, \alpha) - \dot{\varphi}_k(t) \right]^2 dt \right\}.$$

В такой постановке задачу можно рассматривать и как частный случай общей задачи, и как приближенный алгоритм выделения динамических циклов. Важное значение имеет тот факт, что алгоритм выделения стационарной волны «вложен» в алгоритм выделения динамических сезонных циклов и решение при любом α , по крайней мере, «не хуже» стационарного случая.

3. Анализ предельных случаев («вложенность» алгоритмов)

Полученное решение для динамической сезонной волны в форме (20) должно включать в себя решение для стационарной сезонной волны как предельный случай. Действительно, при $\alpha \rightarrow 1$ нормирующий множитель $w_k(\alpha) \rightarrow 1/K$, а уравнение (13) переходит в уравнение:

$$\ddot{s}(t) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \ddot{y}_k(t), \quad (23)$$

т.е. в уравнение для стационарной сезонной волны [3].

Легко показать, что справедливо более сильное утверждение: процедура выделения стационарной сезонной волны «вложена» в процедуру выделения динамического сезонного цикла. «Вложенность» одной процедуры в другую означает, что при любом α динамическая процедура выделяет именно стационарную сезонную волну, если исходная реализация содержит только стационарную составляющую. Действительно, просуммировав по k уравнения (13) для всех взвешенных реализаций (8) и учитывая, что для стационарной сезонной волны должно выполняться равенство $s(t) = s_k(t)$ для всех k , получаем:

$$K \ddot{s}(t) = \sum_{k=1}^K w_k(\alpha) \sum_{l=1}^K \alpha^{|k-l|} \ddot{y}_l(t). \quad (24)$$

Теперь перегруппируем члены в правой части (24) и воспользуемся тождеством (14) для нормирующего множителя. Приходим к уравнению (23) для стационарной сезонной волны.

Условие «вложенности» различных процедур сезонной корректировки представляется достаточно важным как для понимания механизма выделения циклической составляющей из исходной реализации (разделение изменений тренда и изменений сезонного цикла), так и для верификации самих процедур. Необходимые условия применимости алгоритма сезонной корректировки к реальным данным формулируются достаточно просто. Для непараметрических процедур алгоритм выделения более широкого класса циклических составляющих должен включать в себя как частный случай алгоритм выделения более узкого класса (например, «модулированная» и стационарная волны). Для параметрических процедур не должны варьироваться параметры для заданного класса показателей и тем более для одного показателя на разных интервалах наблюдения. Любой алгоритм может быть верифицирован на модельных рядах с заданным типом циклических составляющих.

4. Модель с дискретным временем и численная реализация процедуры сезонной корректировки

Для определения динамического сезонного цикла на исходном интервале наблюдения выделяются K целых периодов, каждый из которых фиксируется верхним индексом (k) . Если интервал наблюдения не равен целому числу периодов, то сезонный цикл (в силу определения) выделяется именно на K периодах, а для оставшихся членов ряда цикл экстраполируется, например, методом наименьших квадратов по последним периодам.

Исходная реализация – $y_n^{(k)}$, тренд – $x_n^{(k)}$ и динамический сезонный цикл – $s_n^{(k)}$ связаны аддитивно:

$$y_n^{(k)} = x_n^{(k)} + s_n^{(k)}.$$

С учетом соотношений (7), (8) и (11) в дискретном случае функционал $\Phi^{(k)}(x_n)$ может быть записан в форме:

$$\Phi^{(k)}(x_n) = \sum_{n=1}^T \sum_{l=1}^K \left[\alpha^{|k-l|} (y_{T(l-1)+n} - y_{T(l-1+n-1)}) - (s_n^{(k)} - s_{n-1}^{(k)}) \right]^2. \quad (25)$$

Условия экстремума функционала (25) на всех K периодах определяются аналогично стационарному случаю:

$$\frac{d\Phi^{(k)}}{ds_n^{(k)}} = 0, \quad (n = 1, \dots, T), \quad (26)$$

что в итоге приводит к K системам из T линейных уравнений вида:

$$\Delta^{(2)} s_n^{(k)} = w_k(\alpha) \sum_{l=1}^K \alpha^{|k-l|} \Delta^{(2)} y_{T(l-1)+n} \quad (27)$$

для k -го периода исходного ряда (здесь $\Delta^{(2)} z_n = z_{n-1} - 2z_n + z_{n+1}$ – вторая центральная разность соответствующей переменной). Из системы уравнений (27) видно, что сезонный цикл на k -м периоде определяется средневзвешенными значениями вторых разностей исходного ряда.

Систему (27) можно записать в виде линейного матричного уравнения аналогичного уравнению для стационарной сезонной волны, но с другой правой частью:

$$A^{(k)} s^{(k)} = f^{(k)}, \quad (28)$$

где $s^{(k)}$ – k -й вектор сезонного цикла,

$$f^{(k)} = w_k(\alpha) \sum_{l=1}^K \alpha^{|k-l|} \Delta^{(2)} y_{T(l-1)+n},$$

$A^{(k)}$ – матричный оператор “сезонности” размера $T \times T$, который для дальнейшего анализа удобно представить как блочную матрицу вида:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} A^{(2)} & A_{(k)} \\ I & 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

$A^{(2)}$ – матричный оператор вторых разностей размера $(T-1) \times (T-1)$.

$A_{(k)} = (a_1, 0, \dots, 0, 1)'$ – матрица-столбец размера $(T-1)$, причем

$$a_1 = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 1, \\ 0, & \text{при } k > 1. \end{cases}$$

I – единичная матрица-строка размера $(T-1)$. В правом нижнем углу матрицы $A^{(k)}$ расположена единица.

Уравнение (28) может быть решено в явном виде, т.е. определены элементы обратной матрицы $B_{(k)} = (A_{(k)})^{-1}$. Тогда решение (28) можно записать в виде:

$$s^{(k)} = B_{(k)} f^{(k)}. \quad (30)$$

Действительно, зная выражение для обратной матрицы оператора вторых разностей [6]:

$$B^{(2)} = (A^{(2)})^{-1},$$

можно получить выражение для обратной матрицы оператора “сезонности” – $B_{(k)}$. Блочное представление $B_{(k)}$ имеет следующий вид:

$$B_{(k)} = \begin{bmatrix} B & B_k \\ B_{T1} & B_{TT} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

где B – матрица размера $(T-1) \times (T-1)$, B_k и B_{T1} – матрица-столбец и матрица-строка размера $(T-1)$, B_{TT} – скаляр. Явные выражения для элементов матрицы $B_{(k)}$ приводятся в Приложении.

Далее необходимо определить оптимальное значение α , при котором результирующий тренд становится максимально «гладким» в смысле (21). Для этого функционал (11) табулируется как функция α :

$$\Phi(\alpha) = \sum_{k=1}^K \frac{1}{w_k^2(\alpha)} \sum_{n=1}^T [\Delta y_n^{(k)} - \Delta s_n^{(k)}(\alpha)]^2. \quad (32)$$

В векторной задаче вычисляются K функционалов (32) на каждом периоде отдельно. Дальнейший ход решения одинаковый для обеих задач.

Экстремальное значение (32) определяется стандартной процедурой FMIN [7] с начальным значением $\alpha = 1$. Значение α , при котором (32) имеет наименьшее значение и будет оптимальным в смысле (21) для скалярной задачи. В векторной задаче аналогично определяем α_k для каждого периода.

Таким образом, в случае дискретного времени определены конкретные процедуры для выделения динамических сезонных циклов с оптимальными весовыми коэффициентами α_k (α – для скалярной задачи).

5. Особенности численной реализации алгоритма

Понятно, что динамические сезонные циклы не могут быть инвариантными относительно сдвигов или изменения длины интервала анализа в силу того, что используется процедура усреднения. Однако для реальных рядов экономических показателей форма циклов должна приближенно сохраняться. Поэтому можно говорить об устойчивости сезонных колебаний на интервалах анализа без критических (кризисных) точек. В данном случае понятие устойчивости циклов в значительной степени интуитивное, поскольку невозможно учесть даже существенные факторы, влияющие на форму циклов конкретного показателя, и определить устойчивость строго. Для этого нужно было бы идентифицировать систему (определить малоразмерную модель) и оценить ляпуновские показатели [8].

Динамические сезонные циклы, в принципе, определяются на K целых периодах. С учетом того, что процедура выделения сезонного цикла основана на вычислении вторых разностей (уравнение (27)), для определения значений сезонного цикла на K целых периодах необходимо использовать $KT + 1$ значение исходного ряда (уменьшение числа используемых для анализа точек на единицу связано с регуляризацией (4), см. работу [3]). Тогда сезонный цикл s_k будет определен в KT точках и сдвинут относительно начала исходного ряда на единицу вправо. Назовем $KT + 1$ точку исходного ряда базовым

интервалом анализа. Отсюда возникают две проблемы: как экстраполировать значения цикла на крайние точки базового интервала анализа и как доопределить цикл в том случае, когда число точек ряда $n > KT + 1$. Первая проблема – «заполнение» краевых точек базового интервала, может быть решена только тривиальным образом. Если допустить возможность изменения формы цикла, то при $K \geq 2$ крайние точки линейно экстраполируются вперед – s_n^+ и назад – s_1^- :

$$s_n^+ = 2s_{n-T} - s_{n-2T},$$

$$s_1^- = 2s_{1+T} - s_{1+2T}.$$

Если $K = 1$, то никакой, даже простейшей, экстраполяции цикла на крайние точки быть не может, поэтому единственная оставшаяся возможность – это воспользоваться условиями существования циклов ($s_n^+ = s_{n-T}$, $s_1^- = s_{1+T}$).

Рассмотрим вторую проблему, т.е. случай, когда длина исходного ряда $n > KT + 1$. Здесь принципиально возможны два подхода: экстраполяция циклов и дискриминантная процедура (название дано условно, по аналогии со сходными процедурами в статистике). Худший случай – циклы нужно доопределить в десяти точках ($n - KT - 1 \leq 10$ при $T = 12$ для помесечных рядов). При $K > 3$ возможна полиномиальная экстраполяция с МНК оценкой коэффициентов полиномов. Однако всегда существует риск изменения волны именно в диапазоне экстраполяции. Поэтому использование такого подхода чревато неустойчивостью счета на концах интервала анализа.

Более предпочтителен подход, основанный на дискриминантной процедуре. Суть этого подхода заключается в следующем. Выделим сезонные циклы s_k^- на начальном базовом интервале – G^- (первые $KT + 1$ точка) и циклы s_k^+ на конечном базовом интервале – G^+ (последние $KT + 1$ точка). Тогда циклы s_k на всем интервале анализа $G = G^- \cup G^+$ будут определяться по правилу:

$$s_k = \begin{cases} s_k^-, & \text{при } k \in G^- \setminus G^+ \\ (s_k^- + s_k^+)/2, & \text{при } k \in G^- \cap G^+ \\ s_k^+, & \text{при } k \in G^+ \setminus G^- \end{cases}$$

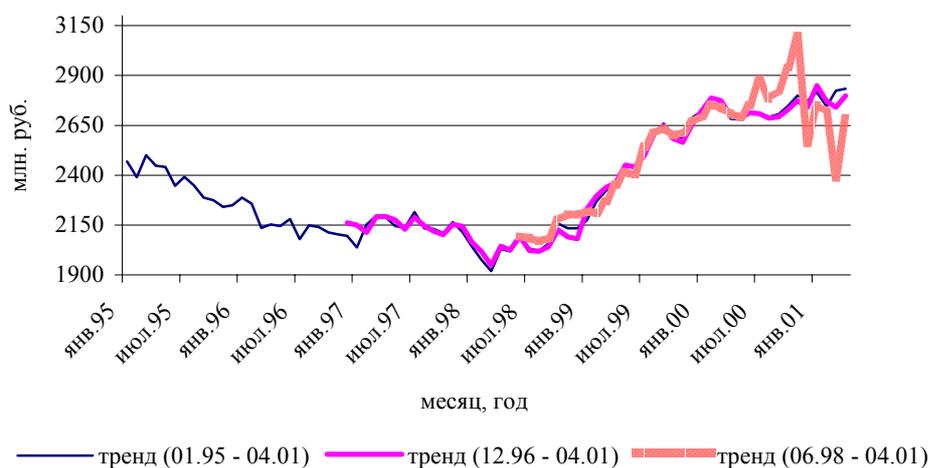
Такая процедура доопределения циклов на всем интервале анализа обладает рядом достоинств, в особенности для экстраполяции тренда. Во-первых, процедура выделения тренда становится устойчивой на правом конце интервала анализа при изменении его длины. Во-вторых, изменение тренда в зависимости от изменения интервала анализа становится «существенным» («существенность» изменений тренда, конечно, определяется коэффициентом сезонности – [3]) только тогда, когда при изменении G , например, в сторону его уменьшения теряется нестационарная часть динамики сезонных циклов.

Поясним этот случай на примере. Возьмем интервал анализа G , внутри которого происходят кризисные явления (точка i_{cr} соответствует, например, августу 1998 г.). В этой точке возникает резкое изменение характерного параметра – для отраслей таким параметром может быть отношение спроса к предложению. Следствием этого будет изменение формы циклов до и после i_{cr} . При изменении G в сторону уменьшения тренд и циклы будут выделяться устойчиво до тех пор, пока хотя бы один период отражает докризисную динамику циклов. Как только i_{cr} попадет на первый анализируемый период, динамика тренда и циклов «существенно» изменится, поскольку процедура сезонной корректировки уже «не знает», какой была форма цикла до кризисной точки i_{cr} .

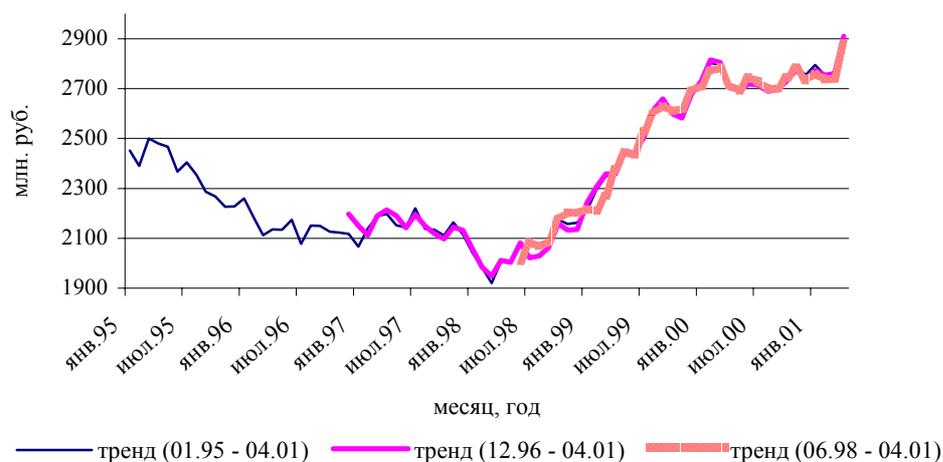
6. Обсуждение численных результатов

Численные эксперименты для проверки дискриминантной процедуры проводились на модельных и реальных рядах (например, валовая продукция основной химии) показателей длиной 75 наблюдений (шесть лет и четыре месяца для помесечных рядов). Для реальных рядов – это период с января 1995 г. по апрель 2001 г., т.е. кризисные явления августа 1998 г. были включены в интервал анализа. Далее сравнивался выделенный тренд по всему интервалу и выделенные тренды на более коротких интервалах. Уменьшение интервала анализа наполовину (для помесечных рядов – перенос первой точки анализа с января 1995 г. на апрель 1998 г.) приводило к появлению значительных, сравнимых со средним значением тренда на интервале анализа, «переколебаний» на правом краю интервала анализа при линейной

экстраполяции циклов – рис.1а. Использование дискриминантной процедуры позволило значительно уменьшить разницу в значениях тренда для разных интервалов наблюдения. Так, для вышеупомянутого показателя на последних трех точках (для последнего квартала) различие в выделенных трендах не превышало 1% при изменении интервала анализа наполовину – рис.1б.



а)



б)

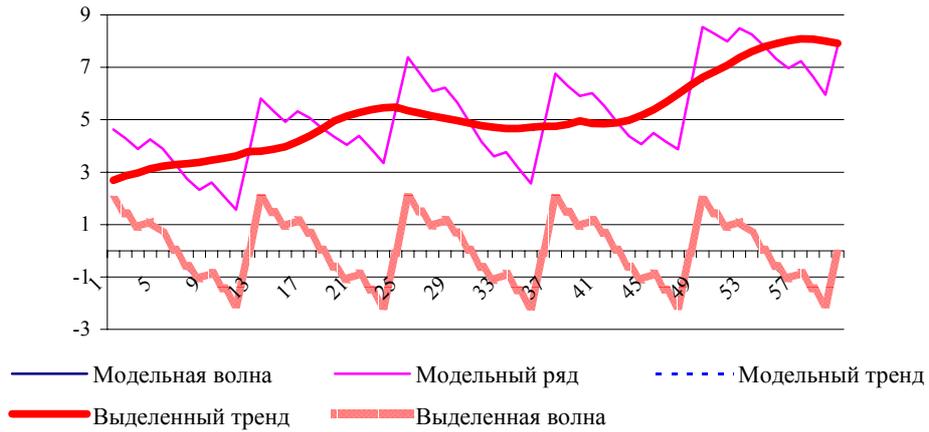
Рис. 1. Выделение тренда на разных временных интервалах с использованием линейной экстраполяции сезонных циклов – а), и с применением дискриминантной процедуры – б) на примере валовой продукции основной химии (в ценах на январь 1995 г.)

Эффективность алгоритма сезонной корректировки, основанного на предложенной выше процедуре, исследовалась на двух типах данных. Для верификации процедуры использовались модельные ряды с одинаковой (стационарная сезонность) и эволюционирующей (динамическая сезонность)

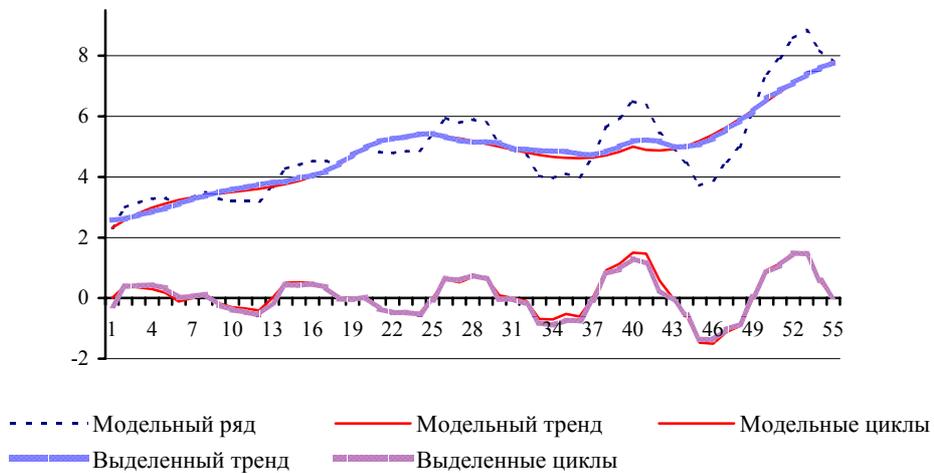
формой сезонных циклов. В качестве реальных показателей использовались те временные ряды, где сезонные эффекты существенно эволюционируют и, кроме того, имеют значительную амплитуду (значительный коэффициент сезонности [3]).

Прежде всего процедура выделения динамических сезонных циклов использовалась для выделения стационарной волны из модельного ряда с различным составом «гармоник». Стационарная сезонная волна включала в себя от одной (первой) до полного набора из четырех «гармоник» (максимальное число «гармоник» для помесечных рядов с периодом год). Результат выделения такой волны показан на рис. 2а. Исходный ряд представлял собой аддитивную смесь полиномиального тренда с разрывом производных (сменой «тенденций» в точке 40) и сезонной волны в виде композиции четырех «гармоник». Расчеты подтвердили принципиально важное свойство: алгоритм выделения стационарной сезонной волны «вложен» в алгоритм выделения динамических сезонных циклов. Это значит, что сезонная корректировка временных рядов динамической процедурой дает результаты в принципе не хуже, чем при выделении стационарной сезонной волны соответствующей процедурой. Об этом свидетельствует тот факт, что кривые для модельной и выделенной волны, а также для модельного и выделенного тренда сливаются (см. рис. 2а).

На рис. 2б приведен пример верификации предложенной процедуры на модельном ряде с тем же трендом, что и на рис. 2а. Циклы формировались с вариацией всех «гармоник» на нескольких периодах. Характерные особенности выделенного тренда показывают, что основные погрешности сезонной корректировки связаны как с «изломами» тренда [3], так и со скоростью изменения формы сезонных циклов (не выполняется гипотеза об эволюционной динамике циклов). Для скалярного алгоритма (α – скаляр) даже оптимальный выбор (в смысле (22)) весового коэффициента не гарантирует оптимального



а)



б)

Рис. 2. Выделение стационарных – а) и изменяющихся – б) сезонных циклов динамической процедурой сезонной корректировки из модельных рядов

выделения тренда на всей реализации. Более точные результаты могут быть получены только при решении векторной задачи сезонной корректировки ($\vec{\alpha}$ – вектор), ход решения которой был описан выше.

В качестве примера сезонной корректировки реальных экономических показателей рассматривалась динамика производства цемента за период с января 1991 г. по декабрь 1999 г. Графики на рис. 3 фиксируют возникновение значительных сезонных циклов вследствие резкого изменения соотношения спрос/предложение (в определенном смысле, это отношение можно

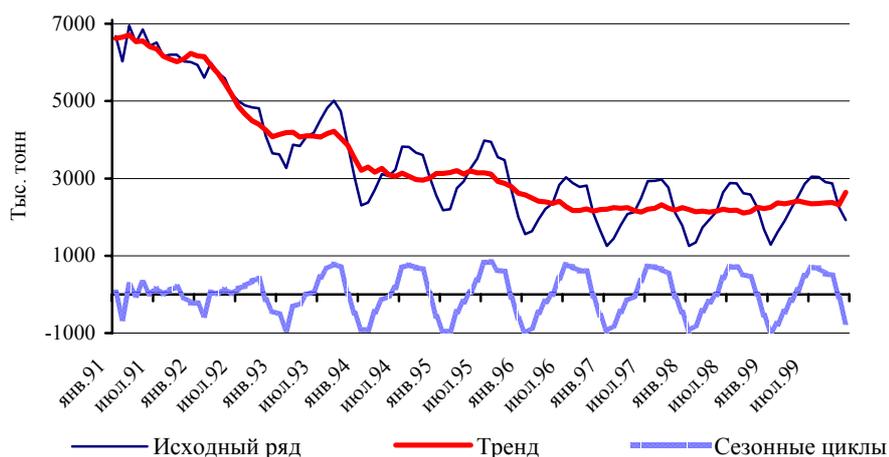


Рис. 3. Динамика производства цемента (аналог бифуркации Хопфа)

рассматривать как бифуркационный параметр динамической системы). На такой посткризисный эффект впервые обратил внимание В.А. Бессонов в работе [9].

Исследование временных рядов экономических показателей в промышленности показало, что наиболее ярко эффекты структурной перестройки экономики проявились в сезонной динамике ряда отраслей промышленности строительных материалов и пищевой промышленности. Именно там отношение спрос/предложение (дефицит) является управляющим параметром. Следует отметить, что на интервалах формирования (затухания) сезонных циклов возникают дополнительные «колебания» тренда с периодом, не кратным периодам сезонных циклов, которые можно считать конъюнктурными циклами реформируемой отрасли. Это вполне естественный процесс, т.к. даже в простейших одномерных системах хорошо известны переходные процессы с «переколебаниями» (приближение динамической системы по паре координат к устойчивому фокусу [10]).

На рис. 4 приведены результаты сравнения трех методов сезонной корректировки процедурой Census X11 [1] (в дальнейшем X11), ES (Extract Seasons из настоящей работы) и процедурой выделения стационарной сезонной волны (в дальнейшем StW), предложенной в работе [3]. Дополнительное сглаживание во всех процедурах не использовалось. В качестве тестового рассматривался ряд данных со значительным коэффициентом сезонности и циклами переменной формы из работы М. Кендэла – расстояния, пройденные авиалайнерами Соединенного Королевства за месяц (табл.1.3 из работы [2]) с

января 1963 г. по декабрь 1970 г. Характерной особенностью этого ряда является существенная перестройка сезонных циклов по форме (изменение состава «гармоник»), в то время как амплитуда сезонных циклов на интервале наблюдения меняется незначительно.

Результаты сравнения процедур X11 и ES показали, что на тех отрезках времени, где сезонные циклы носят квазистационарный характер (периоды с января 1963 г. по январь 1968 г. и с июня 1969 г. по декабрь 1970 г.), различия в амплитуде выделенных трендов незначительны и не превышают 5%. Основные отличия связаны с интервалом существенной перестройки формы циклов – временной интервал с января 1968 г. по декабрь 1970 г. – рис.4. Близость сезонных циклов полученных с помощью

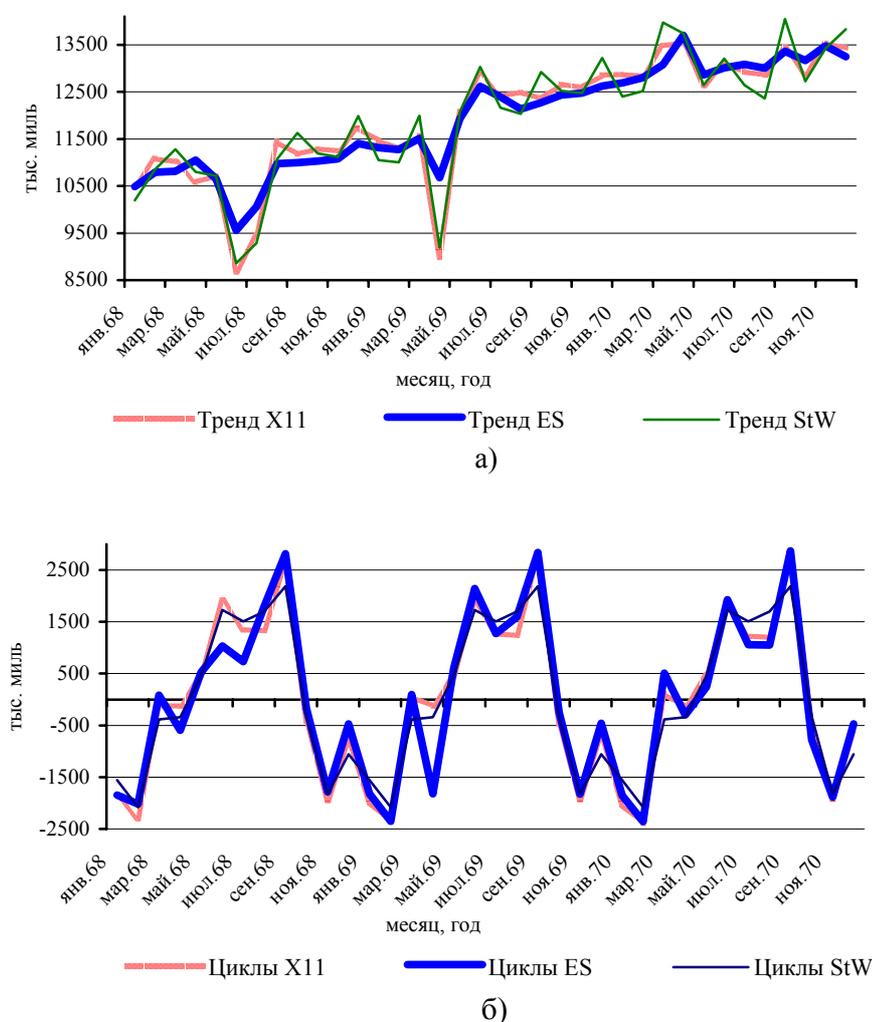


Рис. 4. Сравнение результатов сезонной корректировки ряда расстояний, пройденных авиалайнерами Великобритании за месяц тремя различными алгоритмами. Выделенные тренды – а), выделенные сезонные циклы – б)

X11 и StW (рис. 4б) свидетельствует о том, что процедура X11 существенно запаздывает с фиксацией момента начала существенной перестройки формы цикла (для данного ряда запаздывание составляет около квартала). Поэтому суммарная относительная ошибка выделения нестационарного тренда для процедуры ES – ε_{ES} (ε_{X11} для процедуры X11) в смысле критерия (10):

$$\varepsilon = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \Delta x_i^2 \right)^{1/2} / \left(\sum_{i=1}^{N-1} \Delta x_i \right)$$

различается почти в два раза – $\varepsilon_{ES} = 0.61$ и $\varepsilon_{X11} = 1.19$.

Такой результат представляется достаточно естественным, поскольку сезонная корректировка рядов процедурой X11 основана на комплексе алгоритмов ARIMA, т.е. на полиномиально-лаговых операторах и скользящих средних. Но как отмечалось в литературе (см., например, предисловие к [11]), алгоритмы ARIMA и, следовательно, процедура X11 более подходят для анализа процессов в квазистационарных экономиках с плавными (не менее трех лет для помесечных рядов) переходными процессами.

Российская экономика и ее динамика (наличие по меньшей мере трех кризисных точек на протяжении десяти лет) под определение квазистационарной явно не подходят. Кризисные явления на финансовых рынках отчетливо проявляются в динамике показателей практически всех экономических секторов. Чисто внешне августовский дефолт 1998 г. повлиял на циклическую составляющую экономической динамики совершенно произвольным образом. В одних секторах сезонность возникла, в других исчезла, а в некоторых циклы изменили свою форму.

На рис. 5–7 показаны наиболее яркие примеры влияния кризисных явлений на циклическую динамику показателей производственной сферы – возникновение сезонных циклов (рис. 5), затухание сезонных циклов (рис. 6) и перестройка формы циклов (рис. 7). Однако даже из небольшого числа примеров легко усмотреть, что перестройка сезонности происходит не мгновенно. Детальный анализ экономических причин на ранних стадиях изменения сезонности в каждом конкретном случае позволяет сделать конструктивные выводы об основных тенденциях развития данного сектора или производства.

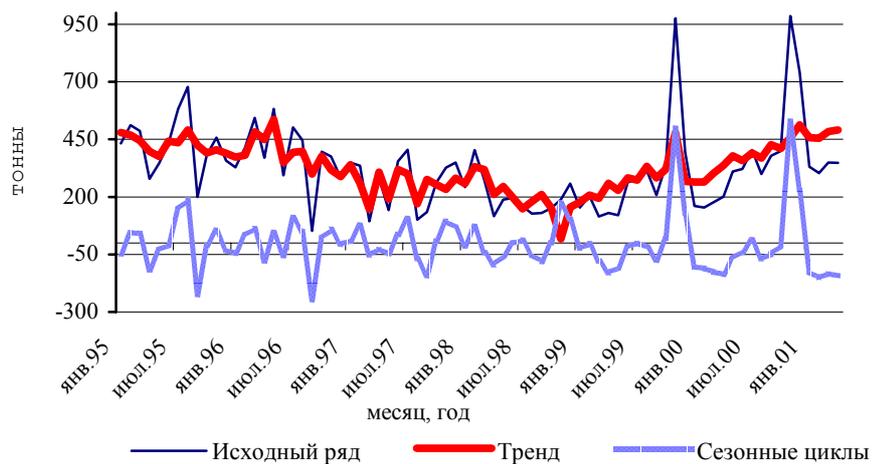


Рис. 5. Возникновение сезонных циклов (производство кофе)

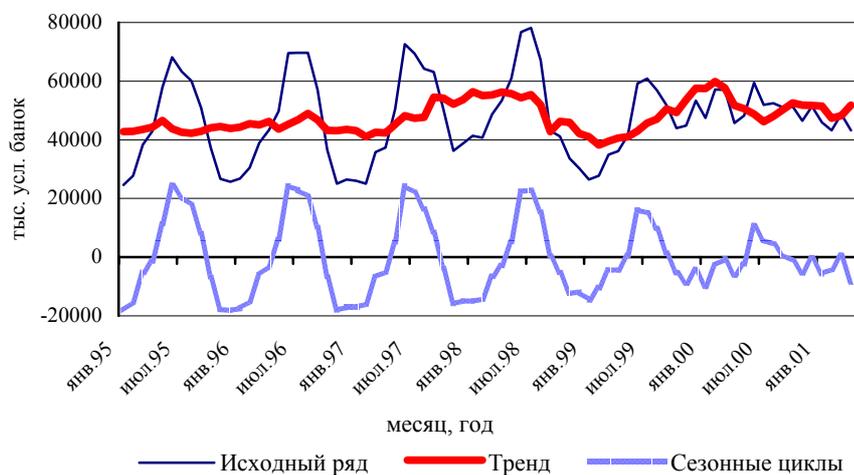


Рис. 6. Затухание сезонных циклов (производство молочных консервов)

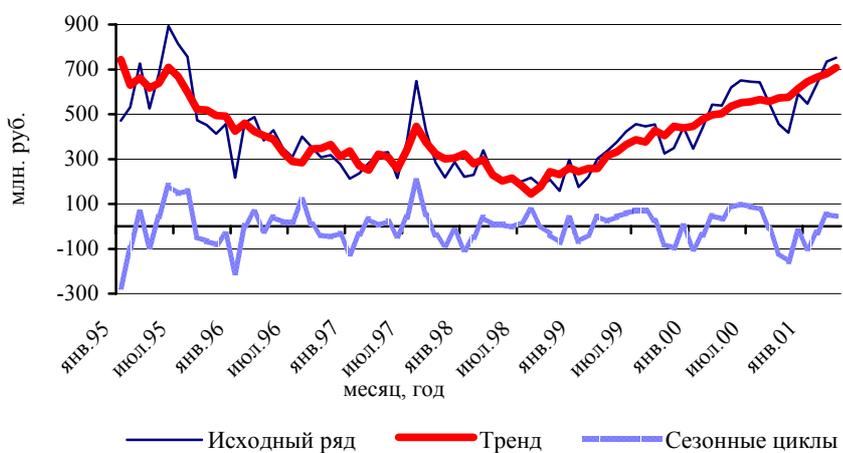


Рис. 7. Перестройка формы сезонных циклов (тракторное и сельскохозяйственное машиностроение в ценах января 1995 г.)

7. Ограничения на предложенный метод

Анализ циклических составляющих экономических показателей при наличии кризисной точки (август 1998 г.) выявил определенные ограничения на предложенный метод сезонной корректировки. Первое ограничение на возможность корректного использования предложенной процедуры связано с «эффектом отрицательного тренда». Этот эффект возникает в том случае, когда сезонные циклы изменяются не эволюционным образом. Характерные признаки такой динамики показателя – значительный коэффициент сезонности ($\eta \approx 1$) и резкое (на порядки) уменьшение самого показателя с приближением к кризисной точке. На рис. 8 показано возникновение «отрицательного тренда» на примере конкретной подотрасли, причем характерные признаки появления отрицательных значений тренда достаточно ярко выражены. В этом случае

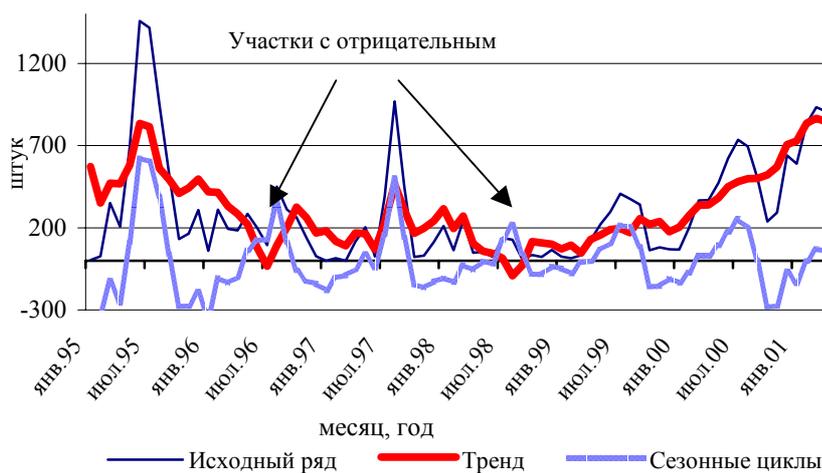


Рис. 8. Возникновение отрицательных значений тренда (производство зерноуборочных комбайнов)

альтернативой предложенному методу может быть использование метода разложений сезонных циклов по ортогональным функциям типа Уолша [12].

Если «эффект отрицательного тренда» встречается в реальных рядах довольно редко, то «остаточные пики» на тренде вблизи максимумов сезонных циклов встречаются чаще. Если представление временного ряда содержит три составляющие, то такие пики обычно относят к нерегулярным остаткам. Но существует целый ряд экономических показателей, для которых период может

варьироваться^{*)}. В этом случае при проведении сезонной корректировки с заданным постоянным периодом появляются «всплески» вблизи максимумов сезонных циклов. Характерный пример неоднородности тренда такого рода показан на рис. 9. После 1998 г. в вывозе капитала возникла сильная сезонность, причем детальный анализ исходного ряда показывает, что максимумы вывоза приходятся на разные месяцы. Таким образом, существует класс экономических временных рядов, для которых условие постоянства периода на всем интервале анализа не позволяет функционалу (10) достичь абсолютного минимума. Для этого класса показателей сезонная корректировка должна сводиться к вариационной задаче с подвижными концами [5].

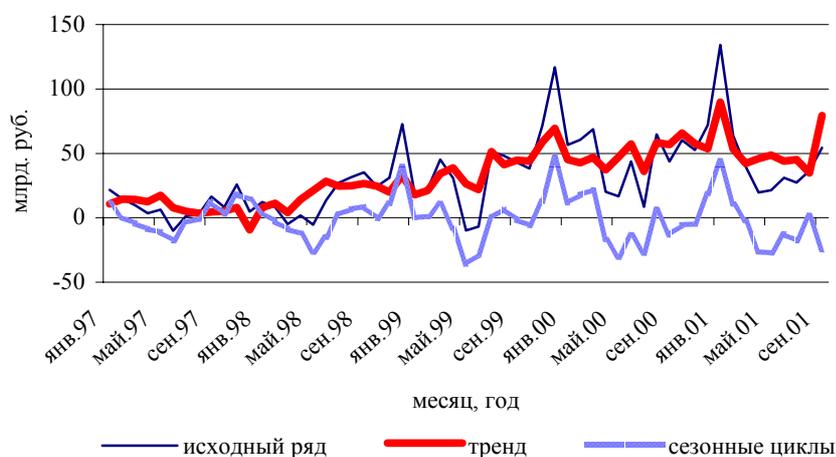


Рис. 9. Сезонная динамика вывоза капитала из страны (по модели О.Г. Солнцева и М.Ю. Хромова)

8. Заключение

- Предложенная процедура сезонной корректировки отличается от других широко распространенных алгоритмов следующими полезными свойствами: фиксирует точки смены тенденций (разрывы производной тренда), не искажает динамику тренда при добавлении новых данных, работает на коротких временных интервалах (менее трех лет для помесечных рядов). Для нестационарных переходных экономик эти свойства становятся

^{*)} На существование такого класса показателей автору любезно указал Э.Ф. Баранов.

определяющими при выборе конкретного алгоритма анализа текущих данных.

- Анализ данных выявил определенные ограничения. Существует класс показателей, для которых выделенный тренд имеет «изрезанность», сравнимую по относительной величине с «изрезанностью» исходного ряда из того же класса. Этот вопрос связан с проблемой классификации экономических показателей, а она, в свою очередь, связана с решением проблемы инвариантов нестационарных временных рядов. Частично, исходя из критерия (10), все ряды можно разделить на три класса: с эволюционной динамикой сезонных циклов, с нерегулярной (хаотической) динамикой циклов и на ряды с переменным периодом. Однако такая классификация может быть лишь «нулевым приближением» к реальному решению задачи классификации. Поэтому полное решение задачи выделения циклической составляющей динамики показателя (сезонной корректировки) можно представить себе следующим образом: определяется принадлежность исследуемого ряда к определенному классу и производится сезонная корректировка процедурой, оптимальной именно для этого класса рядов.
- Надежная процедура разделения циклов и тренда позволяет говорить о разработке методов исследования экономической конъюнктуры и прогнозирования экономической динамики, основанной на анализе циклической составляющей показателей. Нельзя сказать, что в макроэкономике этому вопросу не придавали серьезного значения. Однако в поле зрения исследователей попадали, в основном, «глобальные» экономические циклы (см., например, [13]). На сезонные и близкие к сезонным циклам установилась точка зрения как на некий шум, который необходимо убрать, чтобы выявить «истинную» экономическую динамику. На самом деле, параметры циклов – это отдельный и в ряде случаев более информативный, чем тренд показатель функционирования экономической системы.

Последнее высказывание легко проиллюстрировать примером. В принципе возможны несколько вариантов стратегий прогнозирования поведения системы, например, «стратегия гарантированной надежности» или

«стратегия с идеальным мониторингом» и другие. В нашем случае исследование циклической динамики больше всего подходит под «стратегию реагирования на изменение свойств системы» [14]. Поэтому можно сделать вывод, что оценки циклической динамики показателей, в том числе и сезонных циклов, расширяют возможности экономического мониторинга и уменьшают неопределенность прогноза ключевых экономических показателей.

Автор благодарит В.А. Бессонова и Э.Б. Ершова за ценные замечания, а также Д.И. Галимова, В.А. Сальникова, О.Г. Солнцева и М.Ю. Хромова за предоставленные статистические материалы.

Литература

1. *Butter F.A.G. den, Fase M.M.G.* Seasonal Adjustment as a Practical Problem. N.-Y.: Elsevier Science Publisher, 1991.
2. *Кендэл М.* Временные ряды. М.: Финансы и статистика, 1981.
3. *Губанов В.А., Ковальджи А.К.* Выделение сезонных колебаний на основе вариационных принципов // Экономика и математические методы. 2001. Т.37. №1. С.91–102.
4. *Катковник В.Я.* Непараметрическая идентификация и сглаживание данных: метод локальной аппроксимации. М.: Наука, 1985.
5. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1970.
6. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
7. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998.
8. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
9. *Бессонов В.А.* О проблемах измерения в условиях кризисного развития российской экономики // Вопросы статистики. 1996. №7. С.18–32.
10. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.
11. *Драймз Ф.* Распределенные лаги. М.: Финансы и статистика, 1982.
12. *Френкс Л.* Теория сигналов. М.: Советское Радио, 1974.
13. *Кондратьев Н.Д.* Избранные сочинения. М.: Экономика, 1993.
14. Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика. М.: Наука, 2000 (Серия «Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения»).

Приложение. Выражения для элементов матричного оператора сезонности

Исходная задача выделения динамической сезонной волны сводится в итоге к обращению блочной матрицы специального вида:

$$A = \begin{bmatrix} A^{(2)} & A_{(k)} \\ I & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{П1})$$

где $A^{(2)}$ – матричный оператор вторых разностей размера $(T-1) \times (T-1)$ с элементами:

$$a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = (j \pm 1), \\ -2, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, i \neq (j \pm 1). \end{cases}$$

$A_{(k)} = (a_1, 0, \dots, 0, 1)'$ – матрица-столбец размера $(T-1)$, причем

$$a_1 = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 1, \\ 0, & \text{при } k > 1. \end{cases}$$

I – единичная матрица-строка размера $(T-1)$, а в правом нижнем углу матрицы A расположен единичный скаляр.

Обратная блочная матрица – B имеет вид:

$$B_{(k)} = \begin{bmatrix} B & B_k \\ B_{T1} & B_{TT} \end{bmatrix}, \quad (\text{П2})$$

и блоки матрицы (П2) вычисляются по правилу обращения блочных матриц:

$$B = B^{(2)} + (B^{(2)} A_{(k)} I B^{(2)}) / D,$$

$$B_k = -B^{(2)} A_{(k)} / D,$$

$$B_{(T1)} = -I B^{(2)} / D,$$

$$D = 1 - I B^{(2)} A_{(k)}.$$

$B^{(2)} = (A^{(2)})^{-1}$ – матрица, обратная матрице вторых разностей с элементами [7]:

$$b_{ij}^{(2)} = \begin{cases} -\frac{1}{T} \left\{ \begin{array}{l} (T-j)i, \text{ при } i \leq j, \\ (T-i)j, \text{ при } i > j. \end{array} \right. \end{cases}$$

При известной матрице $B^{(2)}$ методом окаймляющих можно определить явный вид элементов матрицы $B_{(k)}$. С учетом периодичности имеем:

$$B_{(1)} = \begin{bmatrix} B & B_1 \\ B_{T1} & B_{TT} \end{bmatrix}, \quad (\text{ПЗ})$$

где элементы матрицы B размером $(T-1) \times (T-1)$ имеют вид:

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{(T-j)(j-2i)}{2T}, & \text{при } i \leq j, \\ \frac{(2i-j-T)j}{2T}, & \text{при } i > j. \end{cases} \quad (\text{ПЗ.1})$$

B_1 – матрица-столбец размера $(T-1)$ с одинаковыми элементами:

$$B_1 = (1/T, \dots, 1/T)'. \quad (\text{ПЗ.2})$$

B_{T1} – матрица-строка размера $(T-1)$ с элементами:

$$b_{(T1)j} = \frac{j(T-j)}{2T}. \quad (\text{ПЗ.3})$$

В правом нижнем углу расположен скаляр:

$$B_{TT} = 1/T. \quad (\text{ПЗ.4})$$

Представление (ПЗ) и формулы (ПЗ.1)–(ПЗ.4) полностью определяют матричный оператор сезонности для выделения стационарной сезонной волны в работе [3] и на отдельных периодах при выделении динамических сезонных циклов.

Оглавление

1.	Введение	3
2.	Модель с непрерывным временем	8
3.	Анализ предельных случаев («вложенность» алгоритмов)	12
4.	Модель с дискретным временем и численная реализация процедуры сезонной корректировки	14
5.	Особенности численной реализации алгоритма	16
6.	Обсуждение численных результатов	18
7.	Ограничения на предложенный метод	26
8.	Заключение	27
	Литература	29
	Приложение	30

Препринт WP2/2002/01
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Губанов Вячеслав Анатольевич
Непараметрическое выделение динамических сезонных циклов

Публикуется в авторской редакции
Оформление серии *А.М.Павлов*
Корректор *Е.Е.Андреева*

ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г.
Отпечатано в типографии ГУ ВШЭ с представленного оригинал-макета.
Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная. Тираж 150 экз. Уч.-изд.л. 1,49. Усл.печ.л.

1,92.

Заказ №17. Изд. №196.

ГУ ВШЭ. 117312, Москва, ул.Вавилова, 7а
Типография ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3

Препринты ГУ ВШЭ
Серия WP2 "Количественный анализ в экономике"

<http://stat.hse.ru/>

2002

Губанов В.А. Непараметрическое выделение динамических сезонных циклов: Препринт WP2/2002/01. – М.: ГУ ВШЭ, 2002. – 33 с.

2001

Поспелов И.Г. Экономические агенты и системы балансов: Препринт WP2/2001/03. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 68 с.

Бессонов В.А. Об измерении динамики российского промышленного производства переходного периода: Препринт WP2/2001/02. - М.: ГУ ВШЭ, 2001. - 34 с.

Алексеенкова М.В. Факторы отраслевого анализа для российской переходной экономики: Препринт WP2/2001/01. - М.: ГУ ВШЭ, 2001. - 34 с.