

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

А.Д. Смирнов

**МОНЕТИЗАЦИЯ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ДОЛГА**

Препринт WP2/2005/03

Серия WP2

Количественный анализ в экономике

Москва
ГУ ВШЭ
2005

УДК 336.14
ББК 65.261.4
С60

C60 **Смирнов А.Д.** Монетизация государственного долга: Препринт WP2/2005/03.— М.: ГУ ВШЭ, 2005. — 52 с.

Модель динамики «внешних» финансовых активов представлена стохастическими дифференциальными уравнениями, решения которых используются для характеристики различных режимов монетизации долга. Долговые обязательства государства являются «номинальным якорем» системы. В процессе непрерывного дельта-хеджирования рациональные инвесторы покупают или продают долги и деньги, что моделируется как синтетический опцион «выбора». Значения функции рыночной стоимости долга определяют различные режимы его монетизации. В режиме нормальной монетизации стоимость новых долгов максимизируется, а риски долгового дефолта исключаются. В этом режиме рынок «внешних» активов не имеет арбитражных возможностей, а стоимость новых долгов равна стоимости портфеля рискованного и безрискового активов. Превышение этого порога эмиссии может привести к гиперинфляции и долговому коллапсу. Модель идентифицирована на фактических данных о российском внутреннем государственном долге в 90-х годах.

Классификация JEL: E63, G13, H63, P24.

Ключевые слова: внешние деньги, монетизация долга, опционы, стохастические уравнения.

Smirnov A.D. Public Debt Monetization: Working paper WP2/2005/03. — Moscow: State University-Higher School of Economics, 2005. — 52 pp. (in Russian).

The model of outside debt and money dynamics is given by two stochastic differential equations. Solutions of the system represent different regimes of outside debt monetization. Government liabilities form the nominal anchor while rational, risk-averse investors take different positions with respect to outside debt and money in a process of continuous delta hedging. The level of outside money issuance that guarantees the normal monetization maximizes the market value of new debts while hedging out risks of the default on debt. The probability of hyperinflation and the debt collapse becomes strictly nonzero should this threshold be exceeded. The model identification was performed on Russian data including the debt crisis in August 1998.

JEL Classification: E63, G13, H63, P24.

Key phrases: outside money, debt monetization, put and call options, stochastic equations.

Смирнов Александр Дмитриевич

Государственный университет — Высшая школа экономики
101987, Москва, ул. Мясницкая, д. 20
e-mail: adsmir@hse.ru

Smirnov, Alexandre D.

State University — Higher School of Economics
20, Myasnitskaya Street, Moscow 101987, Russia
e-mail: adsmir@hse.ru

© А.Д. Смирнов, 2005

© Оформление. Издательский дом ГУ ВШЭ, 2005

Постановка проблемы

Термин «монетизация» в современном русском языке, после манипуляций российского правительства с отменой льгот для пенсионеров и инвалидов, приобрел не свойственный ему оттенок скандальности. Между тем это понятие в экономической теории используется по крайней мере со времен А. Смита. Хорошо известны настойчивые призывы Д. Рикардо к правительствам расплачиваться по своим долгам «звонкой монетой» [1]. Нормальная монетизация государственного долга предполагает денежные выплаты купонов и номинала, иными словами, полное возвращение должником, в соответствии с условиями контракта, ранее полученных им средств. В более узком смысле этот термин характеризует участие Центрального банка в покупке государственных долговых обязательств на свободном рынке. Монетизация замещает правительственные долги на «звонкую монету», или долги банка, но уже в современном облачении. Таким образом, монетизация долга — это общий процесс взаимодействия денег и долгов, который особенно полно проявляется в финансировании дефицита государственного бюджета.

Состояние современных рыночных экономик характеризуются огромным накоплением государственных и частных долгов, которое за последнее десятилетие происходило в немалой степени под влиянием рекордно низких ставок процента. Так, помимо гигантского дефицита бюджета, превысившего 420 млрд. долл., экономика США накопила долги, приведенная стоимость которых (с учетом обязательств государства по пенсиям и здравоохранению) на 2003 г. оценивается в 45 трлн. долл. [2]. Более традиционные подсчеты на 2004 г. внутреннего долга по отношению к ВВП дают величины примерно $\frac{7}{12}$ для США и около 160% для Японии.

Необычайно высокие уровни задолженности у многих ведущих экономик мира порождают вполне обоснованные опасения того, что центральные банки будут вынуждены прибегнуть к монетизации долга, проще говоря, разгону инфляции с целью «испарения» избыточной задолженности, особенно правительственной. Такого рода опасения усилились после начавшегося процесса обесценивания доллара и резко поднявшейся цены золота, которая уже превышала порог в 450 долл. за тройскую унцию. По мнению такого авторитетного источника, как британский «Экономист», эти факты свидетельствуют о снижении доверия бизнеса и населения к центральным банкам. В перспективе эти процессы вполне могут явиться симптомами начала распада международной системы финансов, покоящейся лишь на «обещаниях» (promises) центральных банков поддерживать устойчивое денежное обращение и «нормальную» монетизацию долгов.

Признавая всю обоснованность опасений «чрезмерной» монетизации, необходимо иметь в виду и другой аспект той же проблемы, а именно ненулевую вероятность отказа, при определенных обстоятельствах, от монетизации долга вообще. Характерным примером подобного рода явился российский дефолт по внутреннему государственно-му долгу в августе 1998 г. Отвлекаясь от российской специфики этого кризиса, во многом порожденного мимикрией рыночности, экономическая суть августовского дефолта состояла в отказе тогдашнего российского правительства монетизировать долг, иными словами, погашать пустые казначейские векселя рублями, даже не вполне полновесными¹.

Оба явления — чрезмерной и недостаточной монетизации долга — могут быть рассмотрены в совокупности на единой методологической основе как процесс взаимодействия так называемых «внешних» финансовых активов (outside financial assets).

Дело в том, что выделить «чистые» эффекты монетарной политики чрезвычайно затруднительно, если и возможно вообще. Между тем исследование динамики «внешних» финансовых активов позволяет в значительной степени нивелировать влияние реального сектора экономики, сохраняя, в основном, проблематику финансовых отношений. Преимущество данного подхода заключается в применении принципа

¹ У суверенной России не оказалось рублей для того, чтобы расплатиться по рублевым долгам.

«отсутствия арбитражных возможностей» (no-arbitrage principle) к анализу связей между компонентами «внешних» финансовых активов, которые образуют как бы каркас отношений на финансовом рынке в целом. Это существенно облегчает исследование как монетарной политики, включающей процесс изменения денежной базы, так и рынка государственных долговых обязательств — одного из самых крупных финансовых рынков.

Методология и организация работы

Методологически анализ динамики «внешних» финансовых активов может рассматриваться как этап исследования и разработки монетарной политики Центрального банка, особенно в той части, в какой финансирование государственного долга оказывает воздействие на объемы и структуру денежной базы. Модель динамики «внешних» финансовых активов строится в принципиальном плане как динамическая система эволюции денег и долгов в условиях неопределенности. Долги и деньги в модели являются рискованными активами, но стоимость одного из них, а именно долга — производная от стоимости эмиссии «внешних» денег¹. Государственный долг в соответствии с рикардианской теорией долга и денег полагается некоторой неслучайной функцией денег, а общая доходность актива включает цену риска. Динамика денег рассматривается как случайный процесс, удовлетворяющий обычным требованиям логнормальности, а также гомоскедастичности темпов денежной эмиссии. Факторы риска считаются одинаковыми для долга и денег и моделируются стандартным винеровским процессом.

В модели предполагается, что стоимость «внешних» финансовых активов обеспечена частью материального богатства, которая в ры-

¹ Термин ««внешние» деньги» имеет несколько эквивалентов, например, «деньги центрального банка» (the central bank money), «деньги повышенной мощности» (high powered money), «денежная база» (monetary base), которые в большинстве случаев используются синонимично. Термин ««внешний» долг» (outside debt) мы будем использовать при закавыченном слове «внешний», чтобы избежать его смешения с термином «долг иностранным государствам». Как следует из системы понятий Дж. Тобина [3], «внешний» долг эквивалентен понятию «государственный внутренний долг».

ночной экономике принадлежит государству. Это обстоятельство ведет, вполне естественно, к аналогии между государственным долгом и активами, стоимость которых подкреплена материальным богатством. Типичным примером такого рода является самый крупный рынок долгов — ипотека, особенно в связи с колоссальным распространением ценных бумаг, подкрепленных закладными (Mortgage-Backed Securities, MBS) [4].

Конечность вещественного богатства предопределяет фиксацию величины долга государства в номинальном выражении, но не влечет ограничений на размеры фактической эмиссии долгов и денег, равно как и на величины рыночной и фундаментальной стоимости государственного долга. Величина обещания должника, или нарицательная стоимость долга, в модели — это «номинальный якорь» (nominal anchor), который обеспечивается вещественным богатством, принадлежащим государству. Номинал фиксируется условиями долгового контракта и сохраняется неизменным в течение всего периода его действия¹. Возврат номинала и выплата купонов, если они есть, представляет процесс «нормальной» монетизации долга.

Наличие *номинального якоря* в системе отношений между государством-должником и частными инвесторами-кредиторами — не просто техническое требование модели. Оно основано на гипотезе *ограниченной ответственности государства* перед обществом. В конкретном контексте модели это означает, что правительство занимает только фиксированные суммы под будущую стоимость принадлежащих ему ресурсов в предположении существования адекватной рыночной оценки их стоимости и намерено долг возратить. Ответственность вознаграждается рынком — государство может занимать неограниченно длительное время, не погашая долг. Центральный банк, как институт государства, со своей стороны «неохотно» идет на эмиссию денег, хотя формально не имеет явных ограничений в этой части, т. е. он ведет себя как ответственный банк. Ответственность государства, однако, имеет ограниченный характер. Это означает, что

¹ Измерение связи между номиналом долга и вещественным богатством — одна из сложнейших проблем, которая, например, в теории финансовых счетов решается путем определения так называемой «вмененной стоимости» (imputed value) тех компонент вещественного богатства, которые не имеют адекватной рыночной цены. Весь этот комплекс проблем в работе, однако, не рассматривается.

при определенных условиях возможны как отказ от монетизации долга (долговой дефолт), так и его избыточная монетизация, предполагающая инфляционное «испарение» долга. Ненулевые вероятности осуществления этих событий учитываются частными инвесторами, которые хеджируют рискованные активы в составе своих портфелей.

Следует иметь в виду, что для стран с развитым финансовым рынком государственный долг является практически безрисковым активом, а ставка доходности по коротким казначейским обязательствам служит эталоном безрисковой доходности. Это происходит потому, что риски долгового дефолта уменьшаются, когда государство варьирует способы выплаты задолженности, используя, прежде всего, повышение налогов и заимствования на свободном рынке и лишь в последнюю очередь обращаясь к эмиссии денег. Но в модели «внешних» финансовых активов налоги отсутствуют, а «внешние» деньги используются для выплат номинала и купонных платежей. Следовательно, если эмиссия «внешних» денег — стохастический процесс, то государственный долг приобретает черты рискованного актива. При этом источник рисков эмиссии «внешних» денег становится и источником рискованности долга. Это заставляет частных инвесторов, которые полагаются рациональными и избегающими рисков, хеджировать портфели своих активов. В этом процессе для некоторого уровня монетизации долга инвесторы находят такую комбинацию рискованных активов, которая полностью исключает риски, максимизирует стоимость долга и гарантирует возвращение номинала.

Указанные аналитические преимущества, однако, как и все на рынке, должны быть оплачены. Такой платой является значительное упрощение политики центрального банка в части регулирования ставок процента. Дело в том, что денежные потоки, которые приходят в движение, меняются как под воздействием государственных заимствований, так и интервенций центрального банка на турбулентном рынке денег, или сделок «сегодня». Но государственные заимствования приводят к изменению ставок доходности главным образом по «длинным» инструментам, поскольку казначейские векселя практически не играют заметной роли в финансировании государственного долга [5]. С другой стороны, на рынке денег, или краткосрочных финансовых инструментов (money market), ответственный центральный банк, даже активно участвуя в монетизации правительственного долга, всегда про-

водит собственную политику. Последняя состоит в установлении короткой ставки рыночного процента (*federal funds target rate*) посредством интервенций банка преимущественно на валютном рынке (Швейцария, Россия), либо казначейских векселей (США, Великобритания), либо репо (*repurchasing agreement, repo*) на казначейские облигации (Великобритания). Поэтому монетарная политика центрального банка включает не только операции на стохастическом рынке денег, но и воздействие на кривую доходностей, что в модели в полном объеме не раскрывается.

Моделирование связей между «внешними» финансовыми активами, которые возникают в процессе взаимодействия государства и агрегатов частных инвесторов, образуют предмет настоящей статьи. Методологически работа основана на классической трактовке процессов монетизации долга, в частности «фундирования займов», сформулированной в трудах Д. Рикардо [1]. Макроэкономическое уравнение связи денег и долгов во многом аналогично простому варианту монетарной модели Дж. М. Кейнса. Оно исследовано в рамках анализа финансовых требований (*contingent claims analysis*), основанного на теории опционов, заложенной работами Р. Мертона, Ф. Блэка и М. Шоулса [6, 7]. Особо следует отметить фундаментальное исследование экономических процессов в терминах опционов, проведенное А. Дикситом и Р. Пиндайком [8]. Методология этой работы используется для построения модели стохастической динамики «внешних» финансовых активов.

В макроэкономической литературе уравнения стохастической динамики денег, инфляции и долга исследованы в монографии С. Тарновского [9], а глубокий анализ монетарных процессов и соответствующих моделей проведен К. Уэлшем [10]. Еще в 1980-е гг. непрерывная стохастическая модель динамики денег исследовалась, например, М. Гетлером и Е. Гринолсом [11]. Динамика сеньоража как случайного процесса моделировалась Н. Мэнкью [12] и продолжена, например, Р. Аmano [13]. Непрерывные стохастические модели динамики бюджетного дефицита, сеньоража и инфляции, разработанные Дж. Бертолой и А. Дразеном [14], а также М. Миллером и Л. Зангом [15], значительно продвинули анализ макроэкономических процессов в контексте теории финансовых опционов. Фундаментальное исследование эконометрических проблем, возникающих на финансовых рынках, проведенное Дж. Кемпбеллом, А. Лоу и А. Маккинли [16], как представ-

ляется, отражает растущий интерес к анализу экономических процессов на основе стохастических моделей.

Дальнейшая организация статьи следующая. Формулируется модель стохастической динамики долга и денежной эмиссии, что приводит к решению уравнения Блэка-Шоулса для бесконечных опционов американского типа. Затем определяются условия обмена денег на долги, стоимость опционов дефолта и «новых долгов». Торговля долгами представляется как процесс непрерывного дельта-хеджирования стоимости агрегированного портфеля активов частных инвесторов. Взаимодействие государства и инвесторов обеспечивает нормальную монетизацию долга, которая максимизирует стоимость государственного долга. Далее характеризуются различные режимы монетизации долга, дефолт и инфляционная монетизация долга. Уравнение рыночной стоимости долга используется для оценки нижней границы гиперинфляционной монетизации, которая устраняет долговую зависимость государства. Российский долговой дефолт обсуждается в рамках эмпирической идентификации модели.

Модель «внешних» финансовых активов

Известно, что величина чистого частного богатства (net private wealth), состоит из вещественного богатства и «человеческого капитала», а также финансовых требований частного сектора к государству [17]. Элементами вещественного богатства являются природные ресурсы, физический капитал, товарные запасы, ноу-хау, квалификация, знания и т. д. Финансовые требования бизнеса и населения к государству, представленному правительством и центральным банком, являются, по существу, конечными и отражают стоимость богатства, принадлежащего государству. В теории стоимость этих требований получила название «внешних» финансовых активов (outside assets), состоящих из денег центрального банка и государственного долга.

Денежная база H_t представляет монетизированную часть государственного долга. Покупка центральным банком государственного долга и замещение правительственных обязательств на обязательства центрального банка освобождает государство от процентных платежей, тогда как собственно правительственный долг, B_t , должен обслуживаться по рыночной ставке процента. В силу данных различий динамика долга и денежной базы неодинаковы, хотя они и являются фор-

мами различных долговых обязательств государства¹. «Внешние» деньги используются как всеобщее средство платежа и не приносят дохода, тогда как владение долгом приносит доход по рыночной ставке доходности $\mu > 0$.

Модель представляет случайный процесс динамики «внешних» финансовых активов как простейший финансовый портфель, состоящий из денег и долгов:

$$H_t + B_t = V_t. \quad (1)$$

Государственный долг монетизируется, т. е. погашается деньгами через купонные платежи и возвращение номинала. Следовательно, если S_t — часть «внешних» денег, соответствующая обслуживанию долга, то стоимость государственного долга является неслучайной функцией случайного процесса динамики «внешних» денег, $B_t = B(S_t)^2$.

Через малый период времени dt ожидаемая величина приращения «внешних» финансовых активов становится равной $E_t[dV] = \mu B(S_t) dt$, поскольку в модели принимается, что только долги приносят доход его владельцу. Участие Центрального банка в финансировании правительственного долга представлено через ожидаемую эмиссию «внешних» денег, которая полагается равной $E_t[dH] = S_t dt$. Таким образом, для малых периодов времени ожидаемые изменения «внешних» финансовых активов моделируются уравнением:

¹ Сумма денежной базы и государственного долга может быть меньше, равняться либо превышать стоимость вещественного богатства, находящегося в собственности государства. В последнем случае — величина чистого частного богатства превышает стоимость вещественного богатства нации. Рассогласование этих величин усиливается положительными обратными связями, возникающими в развитии и взаимодействии реального и финансового рынков. Положительная обратная связь реализуется, например, через эффект богатства, исследованный А. Пигу, кредитную экспансию коммерческих банков, действие иррациональных факторов типа «стадного чувства» (animal spirit), значимость которых отмечена Дж. М. Кейнсом. Динамика «финансовых пузырей» отражает действие положительных обратных связей подобного рода [18].

² Понятно, что долги делает и погашает правительство, но доходам правительства должна соответствовать и денежная масса во избежание бартеризации экономики и долгового дефолта; напротив, чрезмерный акцент на эмиссию денег может привести к инфляционным последствиям. Адекватное отражение в монетарных агрегатах, не обязательно только в составе денежной базы, денежных сумм, предназначенных для обслуживания долга, предполагает когерентность монетарных и долговых процессов, нарушение которой приводит к дезорганизации финансового и реального рынков.

$$\mu B(S_t)dt = S_t dt + E_t[dB] . \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет естественное истолкование декомпозиции ожидаемого дохода от долга на сумму купонных платежей и ожидаемого изменения стоимости долга. Это же уравнение, трактуемое с позиции государства, говорит о равенстве расходов по обслуживанию долга тем средствам, которое получило государство от продажи долга. Между тем эмиссия «внешних» денег S_t носит случайный характер из-за турбулентности рынка денег (money market), на котором Центральный банк постоянно проводит интервенции, покупая и продавая различные краткосрочные финансовые инструменты. Поэтому изменение стоимости долга dB также является стохастическим процессом, который полагается геометрическим (Geometric Brownian Motion) и моделируется дифференциальным уравнением:

$$dB = [\mu B(S_t) - S_t]dt + \sigma B(S_t)dW_t , \quad (3)$$

где σ — параметр волатильности, а dW_t — приращения винеровского процесса.

Как нетрудно заметить, для ожидаемых значений долга уравнение (2) является аналогом стандартной модели финансирования бюджетного дефицита, хорошо изученной в макроэкономической литературе [19]. В контексте взаимодействия долга и денег это уравнение исследовано, в частности, в [20].

Альтернативная формулировка процесса эволюции денег и долгов покоится на факте неравноправия «внешних» финансовых активов, поскольку деньги — исходная и конечная точки процесса обмена, а стоимость долгов находит свое выражение в деньгах. Эта логика ведет к следующему определению модели. Во-первых, как уже было сказано, стоимость долга — функция денег, т. е. $B = B(S_t)$. Во-вторых, в каждый момент стоимость долга может быть представлена как сумма денежных выплат (эмиссии денег) за предстоящий (бесконечно короткий) период времени dt и ожидаемой будущей стоимости долга, дисконтированной по рыночной ставке процента $\mu > 0$:

$$B(S_t) = S_t dt + \exp[-\mu dt] E_t[B(S_t + dS)], \quad (4)$$

где $\mu > 0$ — номинальная ставка доходности долга, учитывающая рыночные риски, а E_t — оператор ожиданий, обусловленных всей информацией, доступной на момент t .

Уравнения (2) и (4) являются разными выражениями одной модели динамики стохастического долга, что будет показано ниже. Сейчас же отметим, что обе записи модели динамики «внешних» финансовых активов используют один и тот же параметр — рыночную ставку процента, или доходности долга $\mu > 0$. В модели предполагается, правда, не вполне реалистично, постоянство этого параметра, однако имеется в виду постоянство *будущих* значений доходности. В настоящий момент эти значения не известны, по крайней мере, до тех пор, пока не известны предстоящие риски и их цены. С этим же обстоятельством связано и предсказание эмиссии «внешних» денег в предстоящем периоде — ожидаемое значение темпа эмиссии также не известно, пока нет оценок рискованности рынка на ближайшее будущее. В связи с этим дадим характеристику рисков на рынке денег и долгов.

Риски на рынке «внешних» финансовых активов

На рынке «внешних» финансовых активов происходит торговля двумя рискованными активами: долгом и деньгами. Из стандартного определения доходности актива следует, что ставка рыночной доходности долга $\mu > 0$ равна сумме ставок купонных платежей $\delta > 0$ и изменения стоимости долга a :

$$\mu = \delta + a, \quad (5)$$

где параметр a является мерой ожидаемого изменения капитальной стоимости актива. Экономическое развитие предполагает, что величина этого параметра положительна, хотя это условие и не носит обязательного характера.

В модели полагается, что динамика «внешних» денег — случайный процесс с ожидаемым темпом изменения $a > 0$. Параметр «удобства» от обладания деньгами полагается положительным, $\delta > 0$. В противном случае рациональное объяснение фундаментальной стоимости долга как дисконтированного потока будущей стоимости «внешних» денег невозможно, поскольку соответствующий функционал будет расходиться. Соответствующие условия будут рассмотрены в следующем разделе работы.

В соответствии с гипотезой *CAPM* (capital asset pricing model), в силу неопределенности, господствующей на рынке «внешних» финан-

совых активов, ставка доходности рискованного актива μ равна сумме ставки безрисковой доходности r и стоимости рыночных рисков $\lambda\sigma$, т. е.

$$\mu = r + \lambda\sigma, \quad (6)$$

где λ — цена единицы риска, измеряемого волатильностью $\delta > 0$. Все параметры представлены в номинальном исчислении

Известно, что на финансовом рынке с рискованным активом увеличение волатильности влечет продажу инвесторами части этого актива и понижение его цены. Вызванный этим рост доходности актива должен быть достаточен, чтобы компенсировать возросшие риски и побудить инвесторов к занятию «длинной» позиции. В состоянии равновесия, следовательно, высокой волатильности финансовых рынков должна соответствовать высокая ожидаемая доходность актива, и наоборот. Эти рассуждения прямо следуют из моделей финансовых рисков, сформулированных Р. Мертоном для непрерывных процессов и Р. Инглом для дискретных процессов. Сказанное означает, что именно волатильность играет ключевую роль в структуре параметров финансового рынка¹. По экономическому смыслу необходимо знание величины будущей волатильности финансового рынка, которая, вообще говоря, в данный момент неизвестна и может лишь быть аппроксимирована «исторической» волатильностью.

Из уравнений (5) и (6) следует крайне важное соотношение для параметров рынка «внешних» финансовых активов [22]. Оно получается посредством разложения рыночной ставки доходности $\mu > 0$ на компенсацию риска и стоимость времени (безрисковую доходность):

$$r - \delta = a - \lambda\sigma \quad (7)$$

и будет использоваться в дальнейшем. Равенство (7) означает, что как инвесторы, так и правительство используют лишь разности между безрисковой ставкой процента и параметром «удобства» денег. Значения ставки доходности и темпа прироста эмиссии «внешних» денег, вообще говоря, не известны, по крайней мере до тех пор, пока не определены количество и цена рыночных рисков. В свете сказанного уравнение (3), раскрывая структуру формирования денег и долгов, не имеет операционального характера.

¹ Экономический анализ взаимосвязей волатильности и доходности на финансовых рынках дан в статье Р. Ингла [21].

В модели, так же, как и в практике финансовых расчетов, полагаются известными значения безрисковой ставки доходности долга и параметра «удобства» денег. Известность первой основана на гипотезе ЕМН (Effective Market Hypothesis), предполагающей, что на равновесном рынке капитала доходности всех активов равны и арбитражные возможности отсутствуют. На таком рынке все участники вознаграждаются за риски одинаково, что эквивалентно их отсутствию [23]. Следовательно, доходность активов на равновесном финансовом рынке определяется единственной безрисковой ставкой, которая полагается известной. Параметр «удобства» денег полагается известным исходя из априорных соображений, поскольку он отражает неявные способности денег служить единственным платежным средством.

Динамика случайной эмиссии «внешних» денег

Фактическая эмиссия «внешних» денег является случайным процессом, что справедливо практически для любого типа современной рыночной экономики. Так, в течение анализируемого в работе кризисного 1998 г., который характеризовался чрезмерно жесткой эмиссией денег, волатильность логарифма темпов денежной базы России $\ln \frac{H_t}{H_{t-1}}$ составила 3,7% в расчете на месяц, или 12,8% за год.

Источники случайных колебаний эмиссии денежной базы следует искать на рынке краткосрочных финансовых инструментов, где активно действует центральный банк, покупая и продавая соответствующие инструменты. Различные асинхронности текущих операций с деньгами и короткими инструментами, колебания значений межбанковского клиринга, так называемые floats, а также аperiodичность денежных потоков платежей и доходов правительства в совокупности генерируют случайные колебания, свойственные монетарной политике центрального банка. Одним из источников случайности на рынке денег является отсутствие у его участников полной информации как о состоянии рынка, так и возможных реакциях на интервенции центрального банка.

Распределения вероятностей денежной эмиссии, естественно, обусловлены всей информацией, имеющейся у центрального банка относительно состояния рынка. В модели предполагается наличие одного

источника риска на рынке долгов и денег, действие которого адекватно характеризуется гипотезой логнормальности процесса динамики «внешних» денег [24]. Известно, что гипотеза логнормальности стоимости актива доминирует в стандартной финансовой теории, хотя гауссовский характер реальной действительности и подвергается сомнению для широкого класса событий¹.

Напомним, что в модели символом S_t обозначена часть денежной базы, соответствующая уровню монетизации, или обслуживания, долга. Для модели «внешних» финансовых активов $H_t \equiv S_t$, но в общем случае равенства между ними нет. Уровень монетизации долга, S_t , отражает необходимость денежного обеспечения доходов правительства, отсутствие которого вызывает бартеризацию, а значит, долговой дефолт для монетарной экономики². Для длительных периодов времени динамика уровня монетизации в модели полагается случайным геометрическим процессом

$$S_t = S_0 \exp\{Y_t\}, \quad (8)$$

где $Y_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ есть логарифм случайного темпа изменения стоимости «внешних» денег за период времени $(0, t)$. В течение достаточно короткого периода времени

$$\Delta t = t - u, \text{ где } 0 < u < t,$$

для логарифма «короткого» темпа изменения денежной базы справедливо условие:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_u}\right) = \ln(\exp[Y_t - Y_u]) = \ln(\exp[\Delta Y_t]) = \Delta Y_t.$$

В финансовой теории стандартным является предположение о том, что логарифм случайного «короткого» темпа может быть представлен как сумма предсказуемой тенденции процесса (drift) за предстоящий период $\nu \Delta t$ и чисто случайной компоненты $\sigma Z_t \sqrt{\Delta t}$ (diffusion or news) с параметром волатильности σ :

¹ Последние исследования по теории опционов позволяют иметь обобщения для случайных процессов типа Леви — Парето [25].

² Сказанное не противоречит тому, что в реальной экономике скорее существуют связи между объемами обслуживания долга и различными денежными агрегатами.

$$\Delta Y_t = v \Delta t + \sigma Z_t \sqrt{\Delta t} .$$

На бесконечно коротком временном интервале это уравнение становится стохастическим дифференциальным уравнением динамики «коротких» темпов эмиссии «внешних» денег:

$$dY_t = v dt + \sigma dW_t ,$$

где W_t — стандартный винеровский процесс¹. Это уравнение интегрируется при условии $W_t = \int_0^t dW_z ; W(0) = 0$. Подставляя результат в

уравнение (8), находим представление случайного процесса динамики денежной базы, точнее, той ее части, которая соответствует размерам монетизации долга за длительный период времени:

$$S_t = S_0 \exp(vt + \sigma W_t) . \quad (9)$$

Динамика стоимости «внешних» денег, таким образом, формируется под воздействием целенаправленного поведения Центрального банка на рынке денег, на которое накладывается поток случайных шоков, моделируемый винеровским процессом с параметром волатильности $\sigma > 0$.

Применяя лемму Ито к процессу случайных изменений величины монетизации долга dS :

$$dS = (S_t)'_Y dY + \frac{1}{2} (S_t)''_Y (dY)^2 = S_t [(v + \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dW_t],$$

находим стохастическое дифференциальное уравнение для непрерывно исчисляемых темпов изменения стоимости «внешних» денег:

$$\frac{dS}{S_t} = a dt + \sigma dW , \quad (10)$$

¹ Условие изменения «коротких» темпов, записанное в виде

$$Z_t = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{S_u}\right) - v \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}} ,$$

эквивалентно утверждению относительно случайной величины Z_t как гауссовской переменной с независимыми и одинаково распределенными значениями на рассматриваемом интервале времени, т.е. $Z_t \approx niid (0,1)$.

где $a = v + \frac{1}{2}\sigma^2$ — ожидаемый темп мгновенного изменения денежной базы. Таким образом, расчет ожидаемого изменения «внешних» денег требует знания ожидаемого «короткого» темпа и будущей волатильности этого процесса. Отметим, что наиболее вероятное значение уровня монетизации долга равно $S_t = S_0 \exp(v t)$, тогда как в точке t процесс S_t имеет следующие значения ожидания и дисперсии:

$$\begin{aligned} E[S_t] &= S_0 (\exp[at] - 1), \\ \text{Var}[S_t] &= S_0^2 \exp[2at](\exp[\sigma^2 t] - 1). \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим еще раз, что пока не рассчитана величина волатильности процесса S_t , ожидаемая величина темпа роста стоимости «внешних» денег неизвестна.

Решение уравнения динамики «внешних» активов

Точное представление случайной динамики изменения стоимости долга dB можно получить, решая совместно систему уравнений (3) и (10). Снова применяем лемму Ито к стохастическому дифференциалу dB и подставляем в его разложение значение стохастического дифференциала dS из (10). Получаем выражение:

$$\begin{aligned} dB &= B'(S_t)dS + \frac{1}{2}B''(S_t)(dS)^2 = \\ &= [aS_t B'(S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 B''(S_t)]dt + \sigma S_t B'(S_t)dW. \end{aligned}$$

Коэффициенты при детерминированном и стохастическом дифференциалах в этом выражении, а также в уравнении (3) равны:

$$\begin{aligned} \mu B(S_t) - S_t &= aS_t B'(S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 B''(S_t), \\ \sigma B(S_t) &= \sigma S_t B'(S_t). \end{aligned}$$

Это с учетом уравнения (7) после соответствующих преобразований приводит к обыкновенному линейному уравнению второго порядка относительно функции стоимости долга $B(S_t)$:

$$r B(S_t) = S_t + (r - \delta)S_t B'(S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 B''(S_t). \quad (12)$$

Левая часть этого уравнения представляет доход владельца (или агрегата владельцев) долга, который он получает в условиях отсутствия рисков, а правая — раскрывает источники формирования этого дохода. Важно иметь в виду, что нейтральность к рискам явилась следствием точного представления случайной динамики изменений стоимости долга. Уравнение (12) можно рассматривать как аналог известного уравнения Блэка-Шоулса для стоимости производного финансового актива, в данном случае — государственного долга с бесконечным периодом погашения.

Решение уравнения (12) находится в виде:

$$B(S_t) = B_1 S_t^{\beta_1} + B_2 S_t^{\beta_2} + \frac{1}{\delta} S_t, \quad (13)$$

где $\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 1$ — корни характеристического уравнения:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \beta(\beta - 1) + (r - \delta)\beta - r = 0, \quad (14)$$

а B_1 , B_2 — произвольные константы интегрирования.

В целях аналитической прозрачности решение (13) динамики долга для нашей модели можно существенно упростить в силу следующих экономических соображений.

Естественно полагать, что в отсутствие «внешних» денег государственный долг имеет нулевую стоимость, $B(0) = 0$. Это — конкретное выражение для нашей модели требования так называемой «абсорбции». Оно выполняется, если константу интегрирования, соответствующую компоненте решения (13) с отрицательным характеристическим корнем, приравнять к нулю, $B_1 = 0$. Кроме того, в предположении отсутствия «финансовых пузырей» можно положить равной нулю и константу B_2 . Это допущение, безусловно, облегчает анализ, но в общем случае должно быть специально обосновано. Действительно, обычные долги (с фиксированным периодом погашения) не имеют «пузырей», но долг в нашей модели — бесконечный, никогда не погашаемый, долг типа консоли (consol). Значит, отсутствие «пузырей» допустимо, но, вообще говоря, не очевидно.

Итак, в модели динамика стоимости долга моделируется частным решением уравнения (12):

$$B(S_t) = \frac{1}{\delta} S_t. \quad (15)$$

Как было сказано выше, из предпосылки ограниченной ответственности государства следует, что оно может бесконечно долго не погашать полностью номинал долга. Поэтому при выполнении условия «нейтральности к рискам»

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \{ \exp[-rt] S_t \} = 0,$$

ожидаемая стоимость государственного долга может быть представлена как поток ожидаемой стоимости «внешних» денег в будущем, непрерывно дисконтированный по безрисковой ставке доходности долга:

$$B(t, S_t) = E_t \int_t^{\infty} S(z) \exp[-r(z-t)] dz.$$

Функционал $B(t, S_t)$ представляет фундаментальную стоимость государственного долга, которая обычно отождествляется со «справедливой» рыночной ценой актива (fair market price of an asset)¹. Он отражает в общем виде зависимость стоимости государственного долга от динамики «внешних» денег и формально является частным решением (15).

Возможность дисконтирования потока «внешних» денег по безрисковой ставке доходности носит принципиальный характер. Однако если известна будущая волатильность процесса эмиссии, то допустимо дисконтирование и по рыночной ставке процента $\mu > 0$. В этом случае уравнения (3) и (4) — эквивалентные представления процесса динамики долга и денег, которые приводятся к одному уравнению второго порядка:

¹ Функционал $B(t, S)$ в детерминированном случае есть стоимость облигации с бесконечным периодом обращения (perpetuity), которая для конечных значений t (time to maturity) превращается в обычное уравнение стоимости купонной облигации с постоянным купоном S и номиналом F :

$$B(t, S) = \int_0^t S \exp\{-r(z-t)\} dz + F \exp\{-rt\}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что для долга, продаваемого по нарицательной стоимости (al pari) $B = F$, ставки фактической доходности к погашению (yield to maturity) r , текущей доходности (current yield) $\frac{S}{B}$ и купонной доходности (coupon or stated yield) $\frac{S}{B}$ равны.

$$\mu B(S_t) = S_t + aS_t B'(S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 B''(S_t). \quad (16)$$

Действительно, в уравнении (4) разложим в ряд, ограничиваясь линейным членом, непрерывно начисляемую ставку дисконта, а ожидаемую стоимость будущего долга $E_t[B(S_t + dS)]$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки S_t , ограничиваясь членами разложения порядка. Учитывая, что для винеровского процесса имеет место равенство $(dW)^2 = dt$, получаем

$$\begin{aligned} & \exp[-\mu dt] E_t[B(S_t + dS)] = \\ & = (1 - \mu dt)[B(S_t) + aS_t B'(S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 B''(S_t)]. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в уравнение (4), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (16) относительно функции долга $B(S_t)$. Это же уравнение может быть получено посредством применения леммы Ито к уравнению (3) непосредственно. Следует, однако, иметь в виду, что использование рыночной ставки доходности $\mu > 0$ вместо безрисковой ставки, не позволяет точно представить изменение стоимости долга dB , поскольку не реплицируется стохастическая компонента процесса dW .

В модели «внешних» финансовых активов трудности, порождаемые различиями между рыночной и безрисковой ставками доходности долга, обходятся благодаря тому, что исключаются возможности возникновения «финансовых пузырей». Однако их нельзя игнорировать при построении портфелей инвесторов, состоящих из денег и новых долгов, о чем речь пойдет ниже.

Стохастическая торговля долгом

Объективные трудности, которые возникают из-за неизвестности априори значения параметра будущей рыночной доходности $\mu > 0$, заставляют участников процесса торговать долгом и деньгами, ориентируясь на соотношение рыночной и фундаментальной стоимости долга. Величина фундаментальной стоимости долга рассчитывается на основе принципа «отсутствия арбитража», исходя из известных величин безрисковой ставки доходности и параметра «удобства» денег. Рассогласование величин рыночной и фундаментальной стоимости

долга эксплуатируется участниками рынка и устраняет арбитражные возможности. Рассмотрим совокупность условий, определяющих процесс обмена денег на долги.

Динамика «внешних» финансовых активов представляет процесс взаимодействия государства в лице правительства и центрального банка, с одной стороны, и агрегата частных инвесторов — с другой. Правительство эмитирует долги, а центральный банк — деньги, которые приобретаются частными инвесторами. Эмиссия государством «внешних» финансовых активов и поведение частных инвесторов связаны через обмен «внешних» активов, представленный уравнениями (2) или (4). В силу этого частный инвестор всегда держит портфель из денег — для оплаты долгов, и долга — как актива, приносящего ненулевую доходность. Государство, со своей стороны, удовлетворяя потребности инвесторов в платежных средствах и доходах, эмитирует как деньги, так и долги. Отсутствие первых привело бы экономику к бартеру, отсутствие вторых — к деградации всей финансовой системы. Последняя ситуация, представляющая, по существу, инфляционное «испарение» долгов государства, будет рассмотрена в дальнейшем.

В общем случае интересы инвесторов и государства противоречат друг другу. Государство заинтересовано в минимальной стоимости обслуживания долга, а потому склонно к эмиссии денег. Частные инвесторы, напротив, заинтересованы в доходах, следовательно, предпочитают иметь в своем портфеле долги. Из элементарных соображений следует, что максимизация стоимости «внешних» денег для стационарного состояния долга обеспечивает когерентность интересов государства и инвесторов, которые в этом случае получают максимальную стоимость долга как актива. Проблема, однако, состоит в том, что максимизировать эмиссию «внешних» денег без ограничений невозможно во избежание гиперинфляции; если же ограничения на эмиссию заданы априорно, то задача становится тривиальной.

Задача нахождения наилучших пропорций между рискованными активами — деньгами и долгами — может быть решена в более общем контексте как максимизация некоторых, содержательным образом определенных нелинейных функций рыночной стоимости долга и новых долгов. Функция стоимости нового долга находится из решения уравнения непрерывного дельта-хеджирования активов по аналогии с финансовым опционом колл американского типа (perpetual American call option). Для составления функции рыночной стоимости

долга необходимо знание опциона дефолта долга (perpetual American put option). Эти опционы, которые возникают в стохастической торговле денег и долгов, существенно усложняют и модифицируют данный процесс. Стоимость опционов определяется, хотя и по-разному, уровнями монетизации долга S_t .

Портфель продавца долга

Рассмотрим структуру портфеля заемщика, или *эмитента долга*, которым является государство. Заемщик, продавая номинал долга F , на деле получает лишь рыночную стоимость последнего, $D(S_t)$. Это объясняется тем, что одновременно с продажей номинала, он покупает опцион дефолта по своим долговым обязательствам, $P(S_t)$, который «встроен» в стоимость номинала долга. Опцион дефолта «продается» эмитенту покупателем долга, который вынужден покупать и связанные с долгом риски, в частности, риск неисполнения должником своих обязательств. В модели — это единственный тип рисков, поскольку ставка процента полагается постоянной. Баланс заемщика представлен в табл. 1.

Таблица 1

Баланс заемщика

Инструменты	Активы	Пассивы
Номинал долга		F
Рыночная стоимость долга	$D(S_t)$	
Стоимость опциона дефолта	$P(S_t)$	

Формальное определение стоимости опциона дефолта целиком опирается на модель Блэка — Шоулса — Мертона стоимости активов корпорации [26], а потому будет весьма лаконичным. Опцион дефолта задается следующим условием:

$$P(S_t) = \max [F - D(S_t), 0], \quad (17)$$

где номинал существующего долга (debt outstanding) F играет роль «цены сделки» (exercise price), а опцион дефолта является опционом пут (put-to-default option). Иными словами, владелец опциона дефолта

(заемщик) фактически уплачивает лишь рыночную стоимость долга, возвращая себе его номинал в случае неравенства $D(S_t) < F$. Последнее определяет возможность неисполнения должником своих обязательств, если он реализует опцион дефолта, $P(S_t)$. В случае обратного неравенства эмитент выплачивает номинал долга полностью, т.е. опцион дефолта остается нереализованным.

В общем случае существование возможности неисполнения должником своих обязательств финансовый рынок оценивает тем, что устанавливает более низкую рыночную стоимость долга по сравнению с номиналом, что эквивалентно более высокой доходности рискованного долга. Спрэд между номинальной доходностью долга и его рыночной доходностью, $r_p - r_f > 0$, характеризует степень рискованности долга¹.

Финансовая стратегия заемщика в отсутствие арбитражных возможностей состоит в получении рыночной стоимости долга и стоимости опциона дефолта, что возможно при уплате номинала долга. Эти действия могут быть представлены следующим равенством:

$$D(S_t) + P(S_t) - F = 0.$$

Иначе, рыночная стоимость долга есть номинал за вычетом стоимости опциона дефолта:

$$D(S_t) = F - P(S_t). \quad (18)$$

По экономическому смыслу, если владелец долга возвращает номинал, что может иметь место при некотором уровне эмиссии «внешних» денег, $S_t = S^*$, то $D(S^*) = F$, а стоимость опциона дефолта равна нулю, $P(S^*) = 0$. По экономическому смыслу — это ситуация *полной монетизации* долга. В противном случае владелец долга нуждается в гарантиях на сумму $P(S_t) > 0$, необходимых для полного возврата данных займа средств. Полная или нормальная монетизация долга исключает арбитраж, а доходность долга в таком случае есть безрисковая доходность.

¹ На мировом финансовом рынке облигации правительств, которые оцениваются рынком как рискованные, продаются со значительным дисконтом относительно, например, казначейских обязательств правительства США. Так, на лондонском финансовом рынке в 1999 г. спрэд по российским еврооблигациям доходил до 5000 базисных пунктов.

На финансовом рынке, если инвестор уже вложил F средств, то, покупая новый долг, он приобретает с ненулевой вероятностью и возможность получения фундаментальной стоимости долга $B(S_t)$. Возможность приобретения нового долга дает владельцу право, но не обязательство, обмена номинала на фундаментальную стоимость долга в зависимости от определенных рыночных условий¹. Стоимость такой возможности естественно принять неотрицательной, $f(S_t) \geq 0$. Сказанное означает, что на рынке долгов правительства агрегированный частный инвестор, покупая фундаментальную стоимость долга, $B(S_t)$, фактически приобретает рыночную стоимость актива, $D(S_t)$, а вместе с ним и «вмененный» опцион приобретения новых долгов, $f(S_t)$.

Такая возможность во многом аналогична опциону колл², выпущенному на объем денежной базы, который, по определению, имеет следующую стоимость:

$$f(S_t) = \begin{cases} B(S_t) - D(S_t), & B(S_t) > D(S_t) \\ 0, & B(S_t) \leq D(S_t). \end{cases} \quad (19)$$

Уравнение (19) означает, что когда фундаментальная стоимость долга превышает его рыночную стоимость, $B(S_t) > D(S_t)$, то опцион имеет ненулевую стоимость. Если владелец реализует опцион, то он получает фундаментальную стоимость долга, уплатив лишь его рыночную стоимость³. В противном случае, если $B(S_t) \leq D(S_t)$, опци-

¹ Многие финансовые инструменты имеют так называемые «встроенные» или «вмененные» опционы, которые существенно влияют на стоимость соответствующих ценных бумаг. К таким инструментам относятся, например, ценные бумаги ипотечного рынка (mortgage-backed securities — MBS), объемы торговли которыми в США сейчас превышают объемы сделок с казначейскими векселями. Владельцы MBS получают доходы от процентов и основного долга по ипотечным займам, которые «поддерживают» тем самым стоимость ценных бумаг данного вида. Продавцы MBS продают вместе с ними и опционы «возмещения долга», которые могут быть реализованы в любой момент по желанию владельца MBS, что делает высоколиквидным данный вид финансовых инструментов и способствует поддержанию на них постоянного спроса. Понятно поэтому, что величина премии за такой «встроенный» опцион существенно влияет на рыночную цену ипотечного инструмента [27].

² Аналогия с опционом, впрочем, ограниченная, поскольку рыночная цена долга $D_c(S_t)$ — величина случайная. Как будет показано ниже, возможность реализации долга является опционом колл, в строгом смысле этого термина, лишь в точке максимальной эмиссии «внешних» денег, или денежной базы.

³ Ненулевая стоимость опциона «предпочтения ликвидности» еще не означает, что его владелец будет реализовывать его.

он не реализуется, а его владелец возвращает себе рыночную стоимость долга, т. е. получает деньги или ликвидность.

Данный опцион может быть определен как опцион стоимости «нового долга». Выбор владельца долга и опциона «нового долга» определяется совокупностью рыночных условий. Например, если ставка рыночного процента снижается, то поток будущих доходов дисконтируется по более низкой, чем раньше, ставке и фундаментальная стоимость долга возрастает и может превысить рыночную стоимость долга. В этом случае опцион «нового долга» дает возможность его владельцу получить фундаментальную стоимость долга, уплатив лишь его рыночную стоимость $D(S_t)$, которая играет роль «цены сделки», или цены реализации опциона.

Существенно в данной интерпретации покупки долга то, что данный опцион — «вмененный», т. е. он как бы встроен в стоимость обычного долга. Его обладатель не платит премию, как на рынке обычных финансовых опционов, но в момент реализации опциона осуществляет приобретение новых долгов на величину

$$B(S_t) - D(S_t) = f(S_t),$$

что, собственно, и является свидетельством реализации опциона. В момент реализации стоимость опциона равна стоимости новых долгов правительства на свободном рынке, а потому термины «опцион предпочтения ликвидности» или стоимости «новых долгов», по сути, синонимичны¹.

Из последнего равенства следует, что рыночная стоимость покупаемых совокупным инвестором долгов равна их фундаментальной стоимости за вычетом стоимости опциона «нового долга»:

$$D(S_t) = B(S_t) - f(S_t). \quad (20)$$

Иначе, издержки покупателя на приобретение фундаментальной стоимости долга снижаются на величину стоимости опциона, что и составляет рыночную стоимость долга.

¹ Отметим, что если опцион $f(S)$ приобретается эмитентом долга, то эмитируемая им облигация является «возвратной» (callable bond), стоимость которой $D_c(S)$ ниже стоимости обычной облигации $b(S)$. Это объясняется требованиями инвесторов в части компенсации за риск досрочного погашения «возвратной» облигации. Премия за данный вид рисков определяется величиной спреда — разности между доходностями «возвратной» и обычной облигаций.

Подстановка равенства (20) в баланс покупателя долга дает возможность представить баланс частного инвестора (покупателя долга) в виде табл. 2.

Таблица 2

Баланс инвестора

Инструменты	Активы	Пассивы
Номинал долга	F	
Фундаментальная стоимость долга		$B(S_t)$
Стоимость опциона дефолта		$P(S_t)$
Стоимость нового долга	$f(S_t)$	

Соответственно *финансовая стратегия инвестора* при отсутствии арбитражной прибыли состоит в покупке фундаментальной стоимости актива и затратах на рыночную стоимость долга и опцион «возмещения долга», что представлено соотношением:

$$B(S_t) - D(S_t) - f(S_t) = 0.$$

Таким образом, инвестиции покупателя долга состоят из его рыночной стоимости и стоимости опциона «новых долгов». Реализация последнего, так сказать, физически, представляет *инвестиции в новые долги*, которые и увеличивают рыночную стоимость долга. Интерпретация данного опциона через стоимость приобретения новых долгов — связующее звено между процессами обслуживания долга и торговли долгами на рынке.

Условия реализации опциона «новых долгов», а также опциона дефолта зависят, как было сказано выше, от уровня обслуживания долга (части денежной базы) S_t и будут детально рассмотрены в дальнейшем. Однако уже сейчас можно сказать, что у покупателя долга стремление обменять рыночную стоимость долга на его фундаментальную стоимость существует всегда, кроме точки абсорбции $S_t = 0$, где $B(0) = D(0) = f(0) = 0$. Но новые долги приобретаются рациональным инвестором, только когда их стоимость превышает стоимость потенциальных потерь от невозвращения долга государством.

В условиях неопределенности естественно полагать, что стоимость опциона покупки новых долгов увеличивается по мере роста риско-

ванности операций и увеличения стоимости «внешних» денег. Поэтому стоимость опциона является выпуклой неслучайной функцией $f(S_t)$ случайного процесса эмиссии «внешних» денег. Эта функция имеет, как будет показано ниже, две положительные первые производные $f'(S_t) > 0$ и $f''(S_t) > 0$.

Поскольку $F \geq D(S_t)$, то замещение рыночной стоимости долга на его номинал для произвольных значений сеньоража $0 \leq S_t \leq S^*$ порождает арбитражные возможности, и равенство (20) превращается в неравенство:

$$B(S_t) - F - f(S_t) \leq 0$$

или

$$f(S_t) \geq B(S_t) - F. \quad (21)$$

В случае, когда неравенство (21) имеет место, владельцу невыгодна реализация опциона «нового долга», поскольку его стоимость выше выгоды реализации, и опцион целесообразно сохранить. Это обстоятельство имеет важный экономический смысл и будет в деталях проанализировано в дальнейшем.

Дельта-хеджирование портфеля инвестора

Итак, на рынке долгов частные инвесторы и государство работают с рисками, величины которых изменяют стоимость опционов дефолта и предпочтения ликвидности. Важным выводом гипотезы ограниченной ответственности государства является следующая характеристика поведения частных инвесторов. Считается, что кредитуя правительство и принимая деньги в обмен на долги, инвесторы приписывают ненулевую вероятность отказу государства в определенных ситуациях от полной монетизации долга. Теоретически такие ситуации могут возникнуть либо как стандартный дефолт, означающий отказ от возврата номинала долга, либо как инфляционная монетизация, обесценивающая долги.

Рациональные, избегающие рисков инвесторы стараются риски денежной и долговой эмиссии минимизировать либо исключить полностью в процессе непрерывного дельта-хеджирования, который для рынка денег и долгов может быть определен как зеркальное отражение процесса финансирования бюджетного дефицита. Стоимость порт-

феля, $\Phi(S_t)$, состоящего из «внешних» денег и новых долгов государства, который держат частные инвесторы (бизнес и население) на момент времени t , есть

$$\Phi(S_t) = \theta_1 S_t + \theta_2 f(S_t), \quad (22)$$

где $f(S_t)$ — стоимость опциона «нового долга», которая может при определенных условиях быть равной стоимости новых заимствований правительства на открытом рынке.

По экономическому смыслу доходы инвесторов равны расходам государства по обслуживанию долга. Поэтому обслуживание долга правительством является зеркальным отражением процесса формирования инвестиционного портфеля частными кредиторами. «Физические» константы θ_1, θ_2 эмиссии денег и долгов находятся в руках частных инвесторов и формируются в процессе непрерывного дельта-хеджирования, но стоимость портфеля зависит от размеров эмиссии «внешних» денег, которая является прерогативой центрального банка.

Изменение стоимости обслуживания долга за период dt , в предположении постоянства параметров, дается уравнением:

$$d\Phi = \theta_1 dS + \theta_2 df. \quad (23)$$

Из теории непрерывного дельта-хеджирования известно, что рациональные инвесторы, избегающие рисков, выбирают в уравнении (23) следующие величины параметров портфеля:

$$\theta_1 = -f'(S_t); \theta_2 = 1, \quad (24)$$

где $f'(S_t)$ — производная функции новых долгов по денежной эмиссии. Поэтому, применяя лемму Ито к оценке df в уравнении (23) и используя равенство $(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$ для случайного процесса S_t , получаем с учетом (24):

$$\begin{aligned} d\Phi &= (\theta_1 dS + \theta_2 df'(S_t))dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 f''(S_t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 f''(S_t) dt \end{aligned}$$

или

$$d\Phi_t = \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 f''(S_t) dt. \quad (25)$$

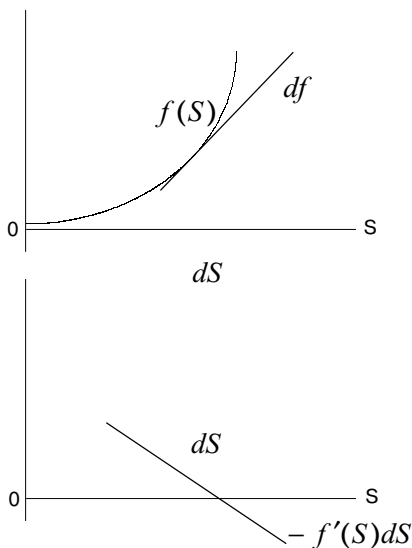


Рис. 1. Схема дельта-хеджирования долга

Для нейтральных к рискам портфелей инвесторы получают доход по безрисковой ставке процента $r > 0$. Этот доход равен изменению стоимости хеджированного портфеля, скорректированному на потери инвесторами «удобства» от обладания деньгами, когда они тратят деньги на приобретение новых долгов:

$$r\Phi(S_t)dt = d\Phi(S_t) + \delta\theta_1 S_t dt. \quad (26)$$

Таким образом, для заданной безрисковой ставки процента и при отсутствии арбитражной прибыли для каждого малого периода dt доход частных инвесторов по правительственным долгам должен равняться издержкам государства по финансированию долга. Уравнение (26) после простых преобразований сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции стоимости новых долгов правительства $f(S_t)$:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t) + (r - \delta)S_t f'(S_t) - rf(S_t) = 0. \quad (27)$$

Это уравнение имеет такие же параметры доходности и рисков, что и уравнение для общей величины «внешнего» долга (12). Сходство уравнений (12) и (27) объясняется известным из теории облигаций соотношением общего и вторичного рынков долгов. Данный тип

уравнения Блэка-Шоулса для опционов с бесконечным сроком функционирования в контексте исследования динамики государственного долга использовался в [28].

Функция стоимости новых долгов правительства $f(S_t)$ находится как общее решение уравнения (27):

$$f(S_t) = A_1 S_t^{\beta_1} + A_2 S_t^{\beta_2}, \quad (28)$$

где $\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 1$ — корни характеристического уравнения (14), которое одно и то же для уравнений общего долга (12) и новых долгов (27).

Из соображений абсорбции, аналогичных высказанным в отношении общего долга, константа, соответствующая отрицательному характеристическому корню, полагается равной нулю, $A_1 = 0$, и функция стоимости новых долгов правительства принимает вид

$$f(S_t) = A S_t^\beta, \quad (29)$$

где $A \equiv A_2$, и $\beta \equiv \beta_2 > 1$ — положительный характеристический корень. Функция (29) случайной эмиссии денег имеет две положительные производные и удовлетворяет требованиям выпуклости, сформулированным ранее. Стоимость опциона (29) определяет стратегию рационального, избегающего рисков инвестора в отношении приобретения новых долгов в условиях отсутствия арбитражных возможностей. С экономической точки зрения, если подобная стратегия допустима, то динамика долга и денег становится полностью предсказуемой, несмотря на то, что динамика стоимости «внешних» денег содержит непредсказуемую компоненту.

Поведение инвестора на рынке долга

Процесс торговли «внешним» долгом (outside debt) в модели включает обмен его участниками соответствующими опционами. Анализ этого процесса, в частности, дает возможность сформулировать простое инвестиционное правило управления долгом. Оно строится в соответствии со значениями синтетического опциона «выбора» (the chooser option), состоящего из опционов «новых долгов» и «долгового дефолта», соответственно, аналогов опционов колл и пут, выписанных по стоимости «внешних» денег [29]. Рассмотрим процесс торговли долгом сначала для фиксированных размеров стоимости «внешних» денег, связанных с монетизацией долга.

Финансовые сделки за период dt

Инструменты	Государство	Инвесторы	Баланс
Стоимость хеджированного портфеля $d\Phi$	$+\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t)$	$-\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t)$	0
Стоимость опциона дефолта dP	$-\delta S_t f(S_t)$	$+\delta S_t f(S_t)$	0
Стоимость опциона «новых долгов» df	$+r S_t f(S_t)$	$-r S_t f(S_t)$	0
Деньги (доход от «новых долгов») dS	$-rf(S_t)$	$+rf(S_t)$	0
Баланс	$-rf(S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t)$ $+ (r - \delta) S_t f(S_t) = 0$	$rf(S_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t)$ $-(r - \delta) S_t f(S_t) = 0$	

Уравнения (18) и (20) дают альтернативное представление рыночной стоимости долга $D(S_t)$, рассматриваемого либо с (длинной) позиции покупателя актива, либо с (короткой) позиции продавца актива. Естественно, что это — одна и та же величина, определяемая условиями торговли долгом (terms of trade). Вдоль кривой $D(S_t)$ происходит обмен агрегированного долга между совокупным инвестором-покупателем и государством-эмитентом долга. При этом частные инвесторы покупают опцион «нового долга», продавая государству опцион дефолта. Приравнявая (18) и (21) после исключения рыночной стоимости долга получаем следующее равенство:

$$B(S_t) - f(S_t) = F - P(S_t), \quad (30)$$

которое моделирует процесс торговли государственным долгом, происходящий вдоль кривой $D(S_t)$. Левая часть равенства (30) представляет издержки покупателя, а правая — выручку продавца долга. Это же равенство, переписанное несколько по-иному:

$$B(S_t) + P(S_t) = F + f(S_t), \quad (31)$$

предстает как аналог известной эквиваленции опционов пут и колл (put-call equivalence theorem) на хорошо развитом финансовом рынке,

которая существует при условии отсутствия арбитражных возможностей. С позиции частного инвестора левая часть равенства (31) может быть истолкована как обязательства (пассивы), которые в равновесии равны активам владельца долга, представленным в правой части этого равенства.

Асимметрия позиций покупателя по отношению к приобретению новых долгов и гарантиям существующего долга выражается в том, что опционы стоимости «нового долга» и дефолта в общем случае имеют разную стоимость. Лишь для уровня стоимости «внешних» денег $S_t = \hat{S}$, тогда фундаментальная стоимость долга совпадает с его номиналом:

$$B(\hat{S}) - F = 0, \quad (32)$$

значения опционов дефолта и «предпочтения ликвидности» равны, т. е. $f(\hat{S}) = P(\hat{S})$.

Сказанное выше формирует простое правило поведения владельца долга. Для каждого уровня денежной базы позиция инвесторов в отношении покупки и продажи долгов определяется в зависимости от значения стоимости опциона выбора.

Так, в интервале значений $0 \leq S_t < \hat{S}$ стоимость опциона дефолта превышает стоимость опциона «нового долга»: $P(S_t) > f(S_t)$. Это свидетельствует о высокой вероятности отказа государства от полной монетизации существующего долга, что может иметь место для низких уровней значений денежной базы. Если $P(S_t) > f(S_t)$, то из (31) следует, что фундаментальная стоимость долга ниже номинала $B(S_t) < F$, и владельцы существующих долгов не имеют стимула приобретать новые долги. Напротив, для достаточно высоких уровней стоимости «внешних» денег $\hat{S} < S_t \leq S^*$, соотношение опционов стоимости «новых долгов» и дефолта меняется на противоположное. Понятно, что когда фундаментальная стоимость превышает величину номинала долга $B(S_t) > F$, то инвесторы, ожидая высокого вознаграждения, заинтересованы в приобретении новых долгов.

Полная монетизация существующего долга

Естественные границы допустимых размеров «нового долга» на открытом рынке $f(S_t)$, задаются значениями функции фундаментальной стоимости правительственного долга $B(S_t)$:

$$B(S_t) \geq f(S_t) \geq B(S_t) - F, \quad (33)$$

где F — номинал долга, подлежащий выплате (face value of the matured debt), а $[B(S_t) - F]$ — величина дисконта или премии при продаже долга на рынке.

Область значений опциона стоимости «новых долгов» определяется неравенством (33), а область существования — минимальным и максимальным значениями монетизации долга. Последние представлены точкой абсорбции $B(0) = f(0) = 0$, а также точкой максимального значения монетизации $B(S^*) = f(S^*) - F$. Иными словами, в нормально функционирующей финансовой системе государство может эмитировать деньги, рассчитывая на то, что частные инвесторы будут хеджировать портфели своих активов. Эквивалентно, частные инвесторы формируют свои портфели и адаптируют их сообразно размерам эмиссии «внешних» денег.

Стратегия рационального инвестора, заинтересованного в приобретении фундаментальной стоимости долга $B(S_t)$ при заданной величине номинала, в модели реализуется через максимизацию стоимости опциона «новых долгов», $f(S^*)$. Эта стратегия осуществляется в рамках эмиссии государством новых денег и долгов, которую оно проводит на отрезке $0 \leq S_t \leq S_t^*$, где фундаментальная стоимость государственного долга достигает своего максимального значения. Подчеркнем, что подобные действия государства и инвесторов могут иметь место только в нормально функционирующей финансовой системе. С формальной точки зрения этот процесс моделируется как задача «оптимальной установки» динамического программирования [7] с двумя граничными условиями на значения стоимости «внешних» денег.

Первое граничное условие задается, исходя из определения долга как бесконечно рефинансируемого процесса. Напомним, что решение (15) определяет никогда не погашаемый долг $B(S^*)$ для некоторого уровня монетизации, $S_t = S^*$. Но новые долги, эмитированные государством, будут приобретаться рациональными инвесторами лишь при гарантиях возвращения номинала. Из уравнения (18) следует, что $D(S^*) = F$, если $P(S^*) = 0$. Значит, при соблюдении этих условий фундаментальная стоимость долга состоит из суммы номинала и стоимости новых долгов:

$$B(S^*) = f(S^*) + F. \quad (34)$$

Условие (34) дает ответ на вопрос о возможности существования механизма бесконечного рефинансирования и наращивания долга государством. На равновесном рынке рациональный инвестор согласен покупать новые долги государства, если приобретаемая им фундаментальная стоимость превышает номинал на величину стоимости нового долга, а полный возврат номинала гарантируется, $P(S^*) = 0$. Для других уровней эмиссии денег, как было рассмотрено выше, поведение рационального инвестора сложнее: он сравнивает стоимости опционов стоимости дефолта и «нового долга» и покупает новые долги только, когда имеет место неравенство $f(S_t) > P(S_t)$.

Второе граничное условие — это условие гладкости в точке максимальной монетизации «внешних» денег, $S = S^*$, где номинал долга возвращается полностью, а производные функций долга и «новых долгов» равны:

$$B'(S_t) = f'(S_t). \quad (35)$$

Подставляя функции стоимости долга (15) и «новых долгов» (29) в уравнения задачи оптимальной остановки (34) и (35), получаем простую систему нелинейных уравнений:

$$AS^\beta = \frac{1}{\delta}S - F; \beta AS^{(\beta-1)} = \frac{1}{\delta},$$

решая которую, находим неизвестную константу A и оптимальное значение стоимости «внешних» денег, идущих на монетизацию долга, S^* :

$$A = (\beta - 1)^{-1} F(q\delta F)^{-\beta} > 0; S^* = \frac{\beta}{\beta - 1} \delta F, \quad (36)$$

где $q = \frac{\beta}{\beta - 1}$. По экономическому смыслу, положительность констан-

ты, $A > 0$, отражает ненулевую вероятность заимствований для ответственного должника. Параметр $q > 1$ является *мультипликатором нормальной монетизации долга*, и характеризует меру неопределённости динамики долга. Естественно назвать точку S^* точкой стоимости «внешних» денег, обеспечивающей нормальную монетизацию государственного долга.

Таким образом, модель рекомендует увеличивать стоимость «внешних» денег до точки S^* , где фундаментальная стоимость государственного долга становится максимальной. При таких размерах эмиссии

денег ответственное правительство получает наибольшие суммы новых заимствований, $f(S^*)$, а частные инвесторы возвращают себе номинальную стоимость долга (par value), F . В этой точке правительство, возвращая номинал прежних долгов, получает новые кредиты, что позволяет ему рефинансировать долги, не погашая их целиком.

Любые другие размеры стоимости «внешних» денег, $S_t < S^*$, требуют от правительства либо дополнительных затрат на обеспечение гарантий возврата долга, либо провоцируют его на неполную монетизацию долга посредством объявления долгового дефолта. Эта ситуация будет в деталях рассмотрена в разделе эмпирической идентификации модели.

Напомним, что стоимость гарантий возврата номинала долга — это стоимость опциона «пут-от-дефолта», $P(S_t) > 0$, которая равна нулю, $P(S^*) = 0$ для уровня полной монетизации долга. Для нулевого опциона дефолта имеет место равенство $D(S_t) = F$, а значит, равенство (34) есть стандартное требование к «справедливой» рыночной цене опциона покупки (колл) $f(S^*)$. «Справедливая» цена опциона должна равняться стоимости портфеля, состоящего из рискованного $B(S^*)$ и безрискового актива F .

Инфляционная монетизация долга

Точка S^* , в которой стоимость новых долгов максимальна, разделяет различные режимы монетизации долга, хотя, сама по себе, не является ограничением на размеры эмиссии денег и долгов. Номинальные режимы монетизации могут быть заданы при помощи кривой рыночной стоимости долга

$$D(S_t) = \frac{1}{\delta} S_t - AS_t^\beta, \quad (37)$$

которая, как нетрудно убедиться, имеет холмообразную форму подобно кривой Лаффера¹. Уравнение этой кривой [30] для значений параметров, рассчитанных по российским данным о долге и эмиссии денежной базы, имеет следующий вид:

¹ Кривые подобного типа естественно возникают при исследовании взаимодействия долга и денег в инфляционных системах [18; 31]. Однако такие системы основаны на моделировании реальных процессов, тогда как в нашей модели монетизация долга есть номинальный процесс.

$$D(S_t) = \left(\frac{1}{0,0138} \right) S_t - 0,00325 S_t^{5,429}.$$

Эта кривая представлена на рис. 2:

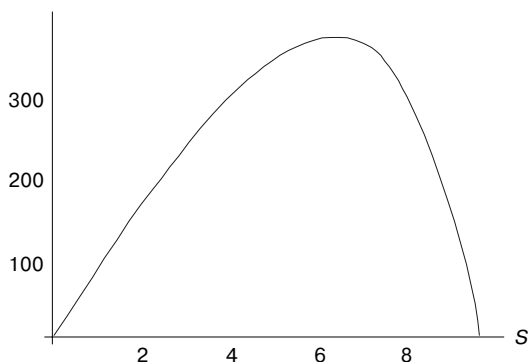


Рис. 2. Функция рыночной стоимости долга

Нетрудно заметить, что максимум рыночной стоимости долга $D(S_t) = \max$ при условии (34) реализуется именно для размеров полной монетизации долга:

$$S^* = q\delta F.$$

Между тем опционы дефолта и «новых заимствований», а также операции дельта-хеджирования содержательно определены только для размеров эмиссии «внешних» денег на отрезке $0 \leq S_t \leq S^*$, т. е. для левой ветви кривой рыночной стоимости долга. Для этой ветви производная рыночной стоимости долга неотрицательна:

$$D'(S_t) = \frac{1}{\delta} - \beta AS_t^{\beta-1} \geq 0. \quad (38)$$

Это может иметь следующую интерпретацию. Для размеров монетизации в пределах $0 \leq S_t \leq S^*$ государство и частные инвесторы конструктивно взаимодействуют в рамках эффективной финансовой системы. По экономическому смыслу эта ветвь соответствует эмиссии государством как денег, так и долгов, причем эмиссия денег не порождает инфляционные явления.

Случайное блуждание вдоль этой ветви кривой рыночной стоимости долга может, однако, привести к возникновению долгового де-

фолта из-за чрезмерно ограниченных объемов монетизации. Как следует из анализа, проведенного выше, государство, если стоимость опциона дефолта велика и превышает стоимость новых долгов, готово отказаться от монетизации долга, объявив дефолт по своим долгам. При этом, исходя из экономических соображений, превышение стоимости опциона дефолта над стоимостью новых долгов для малых значений монетизации неявно предполагает высокую вероятность возрождения бартерных отношений. Напомним, что к 1998 г. не прошло и десяти лет с начала рыночных реформ в России, призванных покончить с бартером централизованного планирования. Поэтому отказ от монетизации долга в переходной российской экономике явился как бы естественным следствием наследия командной экономики. Удивляться можно лишь тому, что ортодоксия МВФ, считающая инфляцию абсолютным злом, по сути, поддержала этот рецидив командной экономики посредством введения чрезмерно жестких ограничений на эмиссию рублей.

Напротив, развитые рыночные экономики имеют иммунитет к бартеру, а, следовательно, использование чрезмерно жесткой монетарной политики в современных условиях маловероятно¹. В развитых монетарных системах качественная грань между «дорогими» деньгами и отсутствием денег представляется достаточно прочной, и найти примеры ее нарушения весьма затруднительно, если они есть вообще.

Высказанные соображения, естественно, ведут к рекомендации формировать размеры эмиссии денег так, чтобы стоимость долга достигала максимума. По экономическому смыслу в этом состоянии, которое достижимо при случайном блуждании вдоль левой ветви кривой рыночной стоимости, долг монетизируется неинфляционным образом. Однако государство может увеличить масштабы монетизации долга в размерах, превышающих критический порог S^* . Серьезные трудности в обслуживании долга правительствами могут вынудить центральные банки провести инфляционную, или *чрезмерную, монетизацию* долга в целях уменьшения его реальной стоимости. Именно об этом пишет, в частности, цитируемый в начале статьи британский «Экономист» [33].

¹ Напомним, что начиная с работы М. Фридмена и А. Шварц [32] многие экономисты склонны обвинять ФРС в проведении чрезмерно жесткой монетарной политики, которая если не спровоцировала, то усилила Великую депрессию 1929—1933 гг.

Подобные процессы содержательно определены для правой ветви кривой рыночной стоимости долга, заданной условием:

$$D'(S_t) = \frac{1}{\delta} - \beta AS_t^{\beta-1} < 0. \quad (39)$$

Чрезмерная монетизация долга может происходить при размерах эмиссии «внешних» денег $S^* < S_t \leq S_0$, которые не связаны с потребностями монетизации, а значит, приводят к эрозии покупательной способности денег. В такой ситуации для правой ветви кривой $D(S_t)$ операции хеджирования, равно как и понятия опционов, теряют свой смысл. Это может объясняться тем, что чрезмерная монетизация долга, нарушая когерентность между эмиссией денег (денежной базой) и потребностями в обслуживании долга, дезорганизует весь процесс обмена денег на долги. Можно утверждать, что правая ветвь кривой $D(S_t)$ соответствует эмиссии государством только денег, тогда как долги не эмитируются.

Для правой ветви функции рыночной стоимости долга корень уравнения $D(S_t) = 0$ определяет размер эмиссии «внешних» денег, которая целиком «испаряет» долги, накопленные государством. Эмиссия в таких размерах, по экономическому смыслу, является инфляционной, и величина эмиссии «нулевого долга»

$$S_0 = (\delta A)^{\frac{1}{1-\beta}} \quad (40)$$

может считаться границей инфляционной эмиссии «внешних» денег, которая происходит на интервале $S^* < S_t \leq S_0$. Легко заметить, что для точек полной монетизации и «монетизации нулевого долга» имеет место неравенство:

$$S^* = (\beta \delta A)^{\frac{1}{1-\beta}} < S_0 = (\delta A)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

После достижения точки S_0 денежная эмиссия становится гиперинфляционной, а долг продолжает оставаться нулевым, что характеризует полный коллапс системы «внешних» финансовых активов. По смыслу именно правая ветвь кривой $D(S_t)$ характеризует размеры инфляционной монетизации долга, способной возникнуть в развитых рыночных экономиках и которой столь серьезно опасается британский «Экономист».

Общая структура модели стохастической динамики государственного долга и сеньоража представлена на рис. 3.

Эмпирическая идентификация модели

Для оценки возможностей использования модели в экономическом анализе была проведена ее идентификация на данных о динамике государственного долга России за период 1994—1999 гг. Одной из целей было объяснение причин долгового дефолта в России, который привлек значительное внимание исследователей [34].

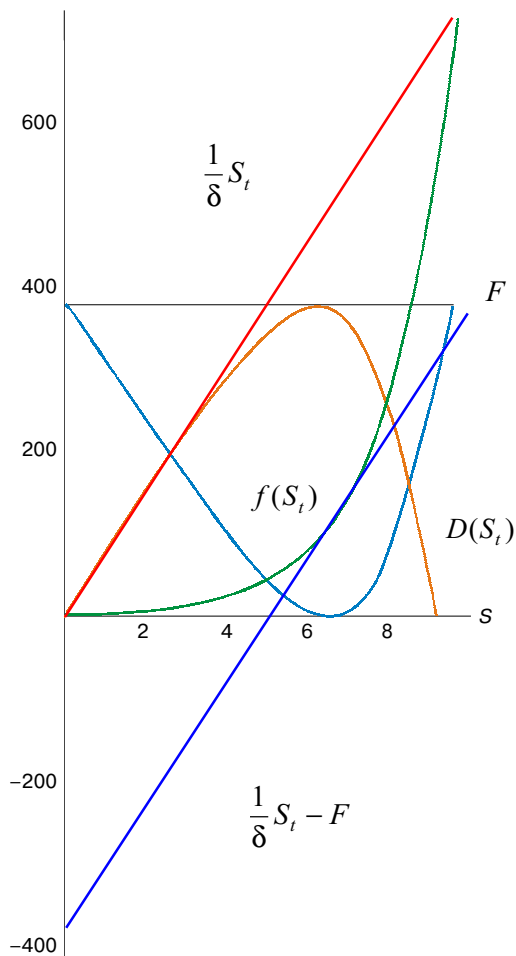


Рис. 3. Структура процесса динамики долга и денег (по российским данным)

Для определения поведения инвесторов и государства вдоль левой ветви кривой рыночной стоимости долга $D(S_t)$ использовались два источника данных: статистический сборник «Обзор экономики России» и «Экономический журнал Высшей школы экономики». Динамика внутреннего (рублевого) государственного долга России в укрупненном виде (квартальных значений) представлена в табл. 4. Как видно, российский государственный внутренний долг (ГКО—ОФЗ) за период 1994—1998 гг. вырос примерно в 34 раза, достигнув 436 млрд. руб. накануне августовского кризиса 1998 г. [35], когда пузырь долговых обязательств правительства лопнул.

Таблица 4

Динамика государственного долга России за 1994—1998 гг.

Период	Номинальная цена, млрд. руб.	Рыночная цена, млрд. руб.	Последний срок обращения, дней
1994 г.	12,7	—	—
1995 г.	73,7	64,6	85,5
1996 г.	237,1	219,1	148,6
1997 г.	384,9	336,2	342,8
Квартальные показатели			
1997 г. I кв.	267,6	253,2	158,0
II кв.	311,4	294,6	207,2
III кв.	366,0	341,2	383,6
IV кв.	384,9	336,2	342,8
1998 г. I кв.	415,7	368,7	314,4
II кв.	436,0	316,7	308,2
14 августа	387,1	231,8	314,1

Источник: Обзор экономики России. 1999. № 2. С. 160.

По данным [36] о среднем доходе к погашению (табл. 5) была рассчитана средняя за восемь месяцев ставка доходности долга к погашению, которая составила 54,5% годовых. Она послужила ориентиром для оценки среднемесячной доходности долга, μ , равной 0,0437, которая была использована для расчетов параметров модели.

Средний доход к погашению за 1998 г.

Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь
33,4	29,6	24,4	27,8	54,8	65,1	81,0	135,3	0

Источник: Экономический журнал ВШЭ. Т. 2. № 3. 1998. С. 425.

Среднемесячный *температура прироста денежной базы* $v = 0.0299$ рассчитан по данным сборника «Обзор экономики России» о динамике денежной базы, а параметр «удобства» денег $\delta > 0$ вычислен как разность между фактической доходностью долга и темпом прироста денежной базы.

Волатильность процесса эмиссии «внешних» денег $\sigma = 0.037$ была рассчитана по данным месячной динамики денежной базы России за 1998 г.

Пожалуй, наиболее сложный вопрос эмпирической идентификации модели — это определение *ставки безрисковой доходности* для переходного периода вообще и для кризисного 1998 г. в частности. Дело в том, что если ставка доходности по государственным краткосрочным обязательствам в развитой рыночной экономике является эталоном рыночной доходности, то в России 1990-х гг. именно этот класс ценных бумаг стал объектом дефолта государства.

Критерием оценки величины этого показателя для России была выбрана средняя ставка доходности по депозитам, которая является нижней границей доходности заимствований для банковской системы. В 1998 г. эта ставка фактически составляла 17,1% годовых, или 1,32% в расчете на месяц. Разумеется, выбор этой величины как ставки безрисковой доходности весьма спорен, учитывая, что банковская система России после событий августа 1998 г. застопорилась, но аргументы в пользу другого выбора нам не известны.

Все параметры в исчислении за год и за месяц, которые использовались в модели, сведены в табл. 6. Заметим, что вычисление параметров до четвертого знака после запятой не есть свидетельство точности модели, а скорее отражает незначительность изменений, происходящих в экономике за месяц. Кроме того, в финансах обычно используются базисные пункты (сотые доли процентного пункта).

Основные параметры модели

Параметры модели	В расчете на год	В расчете на месяц
Доходность долга, μ	0,5296	0,0444
Темп прироста денежной массы, α	0,424	0,0306
Параметр «удобства денег», δ	0,179	0,0138
Безрисковая ставка доходности, r	0,17	0,0132
Волатильность, σ	0,128	0,037
Цена риска, λ	3?38	0,8243

В соответствии с гипотезой логнормальности случайный темп изменения эмиссии денежной базы распределен нормально, со средней $\nu = 0.0299$ и параметром волатильности $\sigma = 0,037$. Таким образом, имеет место:

$$Z_t = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{S_u}\right) - 0,0299\Delta t}{0,037\sqrt{\Delta t}} \approx niid(0,1).$$

Траектория эмиссии денежной базы как стохастического процесса дается следующим уравнением:

$$S_t = S_0 \exp\{0.0299t + 0.037W_t\}.$$

Стохастическое дифференциальное уравнение эмиссии «внешних» денег для эмпирических значений динамики внутреннего (рублевого) долга России середины 1990-х гг. имеет вид:

$$\frac{dS}{S_t} = 0.0306 dt + 0.037 dW_t,$$

где $a = 0,0306$ — ожидаемое значение среднемесячного темпа прироста денежной базы за 1998 г. Таким образом, *ожидаемое значение денежной эмиссии* за месяц составляет:

$$E_t[S_T] = S_0 \exp[0.0306(T - t)].$$

Равновесное значение средней за месяц *цены риска* рассчитывалось из уравнения:

$$0,0132 - 0,0138 = 0,0306 - \lambda 0,037 .$$

Цена риска для российского рынка государственного долга, как и следовало ожидать, оказалась чрезвычайно высокой, составив в среднем за месяц 0,84 в расчете на единицу риска.

Расчетные параметры модели использовались для составления *характеристического уравнения*:

$$\frac{1}{2}(0,037)^2 \beta(\beta - 1) - 0,0006\beta - 0,0132 = 0 ,$$

которое имеет два действительных корня:

$$\beta_1 = -3,55 \text{ и } \beta_2 = 5,429 .$$

Положительный корень характеристического уравнения использовался для вычисления *мультипликатора полной монетизации долга*, или аналога *коэффициента Тобина* для рынка долга:

$$q = \frac{5,429}{4,429} = 1,226 .$$

Результаты имитации по расчетам опционов приводятся в табл. 7 и 8. Стоимость опционов вычислялась для соответствующих значений фундаментальной и рыночной стоимости долга, а также месячных значений параметров: $\sigma = 0.037$; $n = 100$; $T = 0.083$; $r = 0.01$. Вычисление стоимости опционов пут и колл американского типа для данной модели проводилось с помощью программы *Mathematica5*, разработанной С. Беннинга и Ц. Винером [37].

Имитация поведения государства и инвесторов на рынке долга была проведена по следующей схеме. Например, известно, что на момент кризиса 14 августа 1998 г. номинальная стоимость долга составила 387,1 млрд. руб., а рыночная стоимость долга — 231,8 млрд. руб. Для этих значений переменных и указанных выше значений параметров модель определила стоимость опциона «новых долгов» в 0 рублей, а опциона дефолта — 155,3 млрд. руб. Это означает, что рациональный инвестор, который должен был (как оказалось, совершенно обоснованно) опасаться реализации государством опциона дефолта, не стал в этой ситуации приобретать новые долги, и рынок долга оказался совершенно неликвидным, т. е. произошел дефолт. Если бы Россий-

ское государство было ответственным должником, то инвестор получил бы страховку, равную сумме потерь, т. е. 155,3 млрд. руб. Этой же суммы государство его лишило, отказавшись платить по долгам. Как видим, данные расчетов в точности совпали с фактическим положением дел в России на 14 августа 1998 г.

Модель указывает на причину кризиса. Таковой оказалась недостаточная доля денежной базы, идущая на погашение долга. В модели она составила лишь 3,2 млрд. руб., что значительно ниже равновесного значения в 5,34 млрд. руб. Заметим, что фактически эмиссия денежной базы за июль-август 1998 г. составила 0,4 млрд. руб. Модель между тем показывает, что увеличение эмиссии денежной базы до 6,54 млрд. руб. привело бы к максимизации стоимости опциона заимствований до 87,8 млрд. руб. (см. табл. 7). В этом случае государственный долг был бы полностью монетизирован, рациональные инвесторы продолжали бы оказывать кредиты государству, и российская экономика избежала бы финансового кризиса. Ускоренная эмиссия рублей состоялась и фактически, но, к сожалению, уже после августовского дефолта.

Таблица 7

Расчетные характеристики модели

Переменные модели	Значения, млрд. руб.
Нормативный объем монетизации на момент долгового дефолта	3,2
Нормативный объем неполной монетизации долга, \hat{s}	5,34
Нормативный объем полной монетизации долга, s^*	6,54
Фундаментальная стоимость долга для его полной монетизации, $B(s^*)$	474,5
Стоимость новых заимствований для полной монетизации долга, $f(S^*)$	87,8
Граница инфляционной эмиссии денежной базы, S_0	9,58

Хотя в части размеров эмиссии денег на момент кризиса модель расходится с фактическими данными, но расчетная величина опциона дефолта на 14 августа 1998 г. полностью совпала с эмпирическим

значением стоимости долговых гарантий. Именно этой величине равна фактическая разность между номинальной и рыночной стоимостью государственного внутреннего долга России, что видно из последней строки табл. 1.

Процессы инфляционной эмиссии требуют, вообще говоря, специального исследования. Российские данные такой информации не содержат, поскольку исторически в России 1990-х гг. процессы высокой инфляции и эмиссии государственного долга были разделены во времени. В модели поэтому лишь сугубо ориентировочно был рассчитан минимальный предел инфляционной эмиссии, которая привела бы к полному «испарению» государственного долга. Такой оценкой является величина корня уравнения, которая оказалась весьма значительной и составила 9,6 млрд. руб. в месяц. Отметим, что прирост денежной базы за год после августовского кризиса составил 102,4 млрд. руб., а рыночная стоимость долга на 31 августа 1999 г. равнялась 116,7 млрд. руб.

Таблица 8

Результаты имитации по модели

Точки расчета	Значения долга, млрд. руб.
Точка абсорбции Стоимость опциона заимствований Стоимость опциона дефолта	0; 0 0 0
Нулевая рыночная стоимость долга Стоимость опциона заимствований Стоимость опциона дефолта	387,1; 0 0 387,1
Отказ от монетизации долга (дефолт 14 августа 1998 г.) Стоимость опциона заимствований Стоимость опциона дефолта	387,1; 231,8 0 155,3
Неполная монетизация долга (равенство стоимости опционов) Стоимость опциона заимствований Стоимость опциона дефолта	387,1; 385,4 1,919 1,901
Возмещение номинала Стоимость опциона заимствований Стоимость опциона дефолта	387,1; 387,1 1,86 1,47
Полная монетизация долга Стоимость опциона заимствований Стоимость опциона дефолта	387,1; 474,5 87,8 0

В целом результаты идентификации модели на реальных данных оказались, по нашему мнению, вполне удовлетворительными. Имитация долга и денег достаточно убедительно объясняет монетарные причины дефолта по государственному долгу России. Вместе с тем наша осторожность в оценке практической применимости модели оправдана как малыми масштабами выборки, так и сугубо ориентировочными оценками ряда параметров модели. Это прежде всего относится к оценке ставки безрисковой доходности на российском финансовом рынке — в отсутствие таковой *de facto* для модели была рассчитана ее «вмененная» величина.

Заключение

Обратим внимание на один интересный теоретический результат. Модель демонстрирует достижимость «нормальной монетизации» долга, несмотря на отсутствие явных ограничений размеров монетарной эмиссии. Механизм реального взаимодействия государства и частных инвесторов в процессе торговли долгами существенно уменьшает опасность возникновения гиперинфляции, ведущей к устранению долгов и коллапсу всей системы «внешних» финансовых активов, хотя вероятность подобного развития событий и не равна нулю. В этом отношении стохастическая модель с нелинейной функцией долговых заимствований принципиально отличается от детерминированной линейной модели долга и денег, аналогичной уравнению (1).

С экономической точки зрения отсутствие формальных ограничений на размеры эмиссии денег и долгов, казалось бы, должно порождать процесс с положительной обратной связью. Большее количество денег увеличивает спрос на долги и покупает больше долгов. В свою очередь растущий спрос на долги порождает расширение денежной эмиссии, что, в отсутствие ограничений, неизбежно ведет к гиперинфляции и долговому коллапсу. Так и происходит, например, в простом портфеле денег и долгов Дж. М. Кейнса, для которого логическая цепь импликаций имеет следующий вид:

$$H^s \uparrow \Rightarrow H^s - H^d > 0 \Rightarrow \text{sell money, buy debts} \Rightarrow$$

$$B^d \uparrow \Rightarrow P_B \uparrow \Rightarrow \mu \downarrow,$$

где B^d — спрос на долги (облигации), а P_B — цена облигаций. Понятно, что неограниченная эмиссия денег влечет неограниченный рост стоимости долга.

Монетарная модель Кейнса, разумеется, верна, но лишь для линейного детерминированного процесса монетизации долга, не предполагающего адаптацию параметров портфеля. Между тем, если эти параметры адаптируются к изменению условий обмена денег на долги, то такая система демонстрирует эффекты стабилизации. В частности, конечный номинал долга может быть возвращен полностью, а обмен денег на долги — происходить как нормальная монетизация государственного долга, обеспечивающая когерентность интересов государства и частных инвесторов.

Отмеченное свойство модели справедливо в рамках гипотезы лог-нормальности и гомоскедастичности динамики долга и денег. Эти предположения не учитывают, однако, асимметричность воздействия «хороших» и «плохих» новостей на поведение финансового рынка, а значит и наличие распределений с «толстыми» хвостами [38, 39]. Поэтому вопрос о сохранении этого свойства модели для случайных негауссовых процессов, например, типа Леви-Парето и(или) в условиях гетероскедастичности, сохраняет свою теоретическую и практическую актуальность.

Источники

1. Рикардо Д. Сочинения. Т.2. М.: Госполитиздат, 1941.
2. The Economist. Heading for a fall, by fiat? 2004. Feb. 26th // www. Economist.com.
3. Tobin J. Financial Intermediaries // The New Palgrave's Dictionary on Money and Finance. The MacMillan Press, L., 1992.
4. Livingston M. Bonds and Bond Derivatives. Oxford: Blackwell Publishers, 1999.
5. Buckle M., Thompson J. The U.K. Financial System. Theory and Practice. 3^d ed. Manchester University Press, Manchester, 1998.
6. Merton R. Continuous Time Finance. Oxford: Blackwell, 1992.
7. Black F., Sholes M. The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency // The Journal of Finance. 1972. 27(2). P. 399—417.
8. Dixit A., Pindyck R. Investment under Uncertainty. Princeton University Press, 1994.
9. Turnovsky S. Methods of Macroeconomic Dynamics. The MIT Press, 1995.
10. Walsh C. Monetary Theory and Policy. The MIT Press, 2001.
11. Gertler M., Grinols E. Monetary Randomness and Investment // Journal of Monetary Economics. 1982. 10.
12. Mankiw N. Gregory. The Optimal Collection of Seigniorage: Theory and Evidence // Journal of Monetary Economics. 1987. 20.
13. Amano R. On the Optimal Seigniorage Hypothesis // Journal of Macroeconomics. 1998. 20, 2.
14. Bertola G., Drazen A. Trigger Points and Budget Cuts: Explaining the Effects of Fiscal Austerity // The American Economic Review. 1993. 83.
15. Miller M., Zhang L. Hyperinflation and Stabilisation: Cagan Revisited // The Economic Journal. 1997. 107.

16. Campbell J., Lo A., MacKinlay A. The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press. N. J.:1997, Princeton.
17. Goldsmith R.W. Comparative National Balance Sheets: A Study of Twenty Countries, 1688—1978. Chicago: Chicago University Press, 1985.
18. Sornette D., Andersen J.V. A Nonlinear Super-Exponential Rational Model of Speculative Financial Bubbles // arXiv:cond-math/0104341 v2 19 Apr 2002.
19. Heijdra J., Ploeg van der F. The Foundations of Modern Macroeconomics, Oxford University Press, 2002.
20. Смирнов А.Д. Лекции по макроэкономическому моделированию. М.: Изд. ГУ ВШЭ, 2000.
21. Engle R. Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice // The American Economic Review. 2004. Vol. 94. N 3. P. 405—420.
22. Wilmott P. Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering. Chichester: John Wiley & Sons, 1998.
23. Ross S. Finance. The New Palgrave's Dictionary on Money and Finance. The L.: MacMillan Press, 1992.
24. Neftci S. Mathematics of Financial Derivatives. San Diego: Academic Press, 1996.
25. Boyarchenko S. Irreversible Decisions and Record-Setting News Principles // The American Economic Review. 2004. Vol. 94. N 3. P. 557—568.
26. Briys E., Bellalah M., Min May H., De Varenne F. Options, Futures and Exotic Derivatives. John Wiley & Sons, 1998.
27. Blake D. Financial Market Analysis. L.: McGraw Hill Book Company, 2002.
28. Смирнов А.Д. Оптимальная стабилизация государственного долга // Экономический журнал ВШЭ. Т. 2. № 1. М., 1998.
29. Cuthbertson K., Nitzsche D. Financial Engineering. Derivatives and Risk Management. Chichester: John Wiley & Sons, 2002.
30. Wolfram S. The Mathematica Book, 5th edition, Wolfram Media, 2003.
31. Heymann D., Leijonhufvud A. High Inflation. Oxford: Clarendon Press, 1995.
32. Friedman M., Schwartz A. A Monetary History of the United States, 1867—1960, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1963.
33. The Economist. All that glisters. 2004. November 30 // www. Economist.com

34. Финансовый кризис и государственный долг. Институт финансовых исследований. М., 1999.
35. Обзор экономики России / Отв. ред. русского выпуска Э.Б. Ершов. М., 1999.
36. Экономический журнал Высшей школы экономики. 1998. Т. 2. № 3. С. 425.
37. Benninga S., Wiener Z. The Binomial Option Pricing Model // *Mathematica in Education and Research*. 1997. Vol. 6. N. 3.
38. Bernanke B. Irreversibility, Uncertainty, and Cyclical Investment // *The Quarterly Journal of Economics*. 1983. 98(1). P. 85—106.
39. Bouchaud J-F., Iori J., Sornette D. Real-World Options: Smile and Residual Risk // *Risk Magazine*. 1995. December (arXiv:cond-math/9509095 v2 19 Sep 1995).

Содержание

Постановка проблемы	3
Методология и организация работы	5
Модель «внешних» финансовых активов	9
Риски на рынке «внешних» финансовых активов	12
Динамика случайной эмиссии «внешних» денег	14
Решение уравнения динамики «внешних» активов	17
Стохастическая торговля долгом	20
Портфель продавца долга	22
Дельта-хеджирование портфеля инвестора	27
Поведение инвестора на рынке долга	30
Полная монетизация существующего долга	32
Инфляционная монетизация долга	35
Эмпирическая идентификация модели	39
Заключение	46
Источники	48

Препринт WP2/2005/03
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Смирнов Александр Дмитриевич

Монетизация государственного долга

Публикуется в авторской редакции

Оформление серии *А.М. Павлов*
Корректор *Е.Л. Качалова*

ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 3,2. Усл. печ. л. 3,02. Заказ
Изд. № 467

ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3