

Листок 2. Работа, законы сохранения.

1. На материальную точку действует сила, проекции которой на координатные оси выражаются как

$$F_x = 2x + y, \quad F_y = x + z^2, \quad F_z = 2yz + 1.$$

Определите, является ли эта сила потенциальной. Если является, то вычислите соответствующий потенциал.

2. Материальная точка движется на плоскости под действием силы, величина которой является функцией расстояния до начала координат, а направление перпендикулярно радиус-вектору точки:

$$\vec{F} \perp \vec{r} = (x, y), \quad |\vec{F}| = f(r), \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- а) Каким должен быть вид функции $f(r)$, чтобы сила \vec{F} была потенциальной?
 б) В случае, когда сила \vec{F} потенциальна, вычислите соответствующий потенциал (указание: эту задачу удобно решать в полярных координатах).

$$(f(r) = \frac{C}{r^2}, \quad \vec{F} = C(\frac{y}{r}, -\frac{x}{r}), \quad U = C \arctan \frac{y}{x})$$

3. а) Определите силу гравитационного притяжения, действующую на материальную точку единичной массы, находящуюся на расстоянии R от центра однородной сферы массы m и радиуса r (рассмотрите случаи $R > r$ и $R < r$).

б) Та же задача для однородного шара массы m и радиуса r .

в) Вычислите потенциалы для сил из задач а) и б).

4. Трое путников пересекают поле из начальной точки $A = (0, 0)$ в конечную $B = (1, 1)$ за одно и то же время, но разными путями

1-й: $\vec{r}_1(t) = (t, t)$, где $t \in [0, 1]$ – время;

2-й: $\vec{r}_2(t) = (t, t + \frac{\alpha}{4}t(1-t))$;

3-й: $\vec{r}_3(t) = (t + \frac{\alpha}{\pi}(1-t - \cos \frac{\pi t}{2}), t + \frac{\alpha}{\pi}(t - \sin \frac{\pi t}{2}))$.

Все время, пока они находятся в пути, в поле дует ветер. Вычислите работу, затраченную каждым путником на преодоление сопротивления ветра, считая что сила сопротивления ветра прямо пропорциональна скорости воздуха относительно путника; k – коэффициент пропорциональности (т.е., это сила вязкого трения). Решите задачу в каждом из следующих случаев:

а) скорость ветра постоянна $\vec{v} = (0, -\alpha)$;

б) ветер постепенно нарастает $\vec{v} = (0, -\alpha t)$;

в) ветер меняет направление по закону $\vec{v} = (\alpha \sin \frac{\pi t}{2}, -\alpha \cos \frac{\pi t}{2})$

$$(A_{1a} = -k(2+\alpha), A_{2a} = A_{1a} - \frac{k\alpha^2}{48}, A_{3a} = A_{1a} - k\alpha^2(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}); \quad A_{1b} = -k(2 + \frac{\alpha}{2}), A_{2b} = A_{1b} + \frac{k\alpha^2}{48}, A_{3b} = A_{1b} - k\alpha^2(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}); \quad A_{1c} = -2k, A_{2c} = A_{1c} + \frac{k\alpha^2}{2\pi}(1 - \frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{24}), A_{3c} = A_{1c} + k\alpha^2(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}))$$