ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

А.С. Шведов

О ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ, СВЯЗАННЫХ С РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

Препринт WP2/2009/05
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Москва
Государственный университет – Высшая школа экономики
2009

УДК 519.246
ББК 22.172
Ш34

Редактор серии WP2
«Количественный анализ в экономике»
В.А. Бессонов

Ш 34 **Шведов А.С. О поверхностных интегралах, связанных с распределениями случайных матриц**: Препринт WP2/2009/05. — М.: Изд. дом Государственного университета — Высшей школы экономики, 2009. — 32 с.

В работе рассматривается поверхность, состоящая из положительно полуопределенных $m \times m$ матриц ранга r с r различными положительными собственными числами. Строятся первая квадратичная форма и элемент объема. Приводится функция плотности сингулярного гамма-распределения.

УДК 519.246
ББК 22.172

Классификация JEL: C16.

Ключевые слова: сингулярное гамма-распределение случайной матрицы; элемент объема.

Shvedov A.S. Surface integrals relating to matrix variate distributions: Working paper WP2/2009/05. — Moscow: State University — Higher School of Economics, 2009. — 32 p. (in Russian).

In this paper, we consider the surface of positive semidefinite $m \times m$ matrices of rank r with r distinct positive eigenvalues. First fundamental form and volume element are derived. Singular matrix variate gamma distributions are given.

JEL Classification: C16.

Key phrases: singular matrix variate gamma distribution; volume element.

Препринты Государственного университета — Высшей школы экономики размещаются на сайте http://new.hse.ru/C3/C18/preprintsID/default.aspx

Введение

Распределения случайных матриц существенно используются в эконометрических исследованиях (см, например, [5] и приведенный там список литературы). В работе [5], как и во многих других работах, рассматриваются распределения невырожденных случайных матриц. Точнее, рассматриваемые в работе [5] случайные матрицы являются положительно определенными.

Более трудная задача – это исследование распределений положительно полуопределенных случайных матриц. Такие распределения иногда называют сингулярными. Из работ, где изучаются сингулярные распределения, здесь мы назовем [10].

Будем обозначать через m порядок случайной матрицы. Во всей работе m – произвольное натуральное число. Через r будем обозначать ранг случайной матрицы, r – натуральное число, удовлетворяющее условию $1 \le r \le m$.

Одномерная функция плотности гамма-распределения имеет вид

$$\frac{\sigma}{\Gamma(a)}\,(\sigma x)^{a-(m+1)/2} e^{-\sigma x}, \quad x > 0.$$

Здесь σ и a – положительные действительные числа; $m = 1$, когда мы говорим об одномерной функции плотности.

Для несингулярного случая (то есть для случая $r = m$) хорошо известны матричные аналоги гамма-распределений (см., например, [7]).

Чтобы объяснить направление наших исследований в теории сингулярных распределений случайных матриц, используем приведенную формулу для одномерной функции плотности. Точные формулировки для случая, когда x – это матрица, даются в тексте. И в работе [10], и в других работах, где рассматриваются сингулярные гамма-распределения случайных матриц, например, в [11], берется лишь значение $a = \frac{r}{2}$. Это существенно связано с применяемым методом. Распределения, изучаемые в этих работах, относятся к классу сингулярных распределений Уишарта.

В разделе 3 настоящей работы строится функция плотности сингулярного гамма-распределения случайной матрицы при произвольном действительном $a > r - \frac{m+1}{2}$. Но наше выражение для функции плотности не является обобщением соответствующей формулы из [10] или [11], поскольку в тех работах σ – это матрица, положительно определенная или даже более общего вида, а у нас σ – положительное число.

Матрицы

$$x = \| \, x_{ij} \, \|_{i,j=1}^{m}$$

можно рассматривать как точки пространства R^{m^2}. Через $S_{m,r}$ обозначается поверхность, лежащая в этом пространстве, которой соответствуют положительно полуопределенные матрицы x ранга r, имеющие r различных положительных собственных чисел. Разумеется, поверхность $S_{m,r}$ лежит в $\frac{1}{2}m(m+1)$ -мерной плоскости $x_{ij} = x_{ji}$ (при различных i и j). Функция плотности сингулярного гамма-распределения задается на поверхности $S_{m,r}$.

В разделе 1 настоящей работы приводится параметрическое задание поверхности $S_{m,r}$. В разделе 2 изучаются первая квадратичная форма и элемент объема этой поверхности. Обсуждается взаимосвязь найденного выражения для элемента объема с результатом из работы [11].

Более подробное соотнесение результатов настоящей работы с результатами из других работ дается в тексте.

1. Параметризация поверхности $S_{m,r}$

Пусть X – положительно полуопределенная матрица порядка m ранга r, $1 \leq r \leq m$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ – собственные числа матрицы X, удовлетворяющие условию

$$\lambda_1 > \ldots > \lambda_r > 0,$$

$L = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ – диагональная матрица порядка r. Тогда существует $m \times r$ матрица H, столбцы которой $h_1, \ldots, h_r$ представляют собой ортонормированную систему m-мерных векторов, такая, что

$$X = HLH'.$$

Этот результат является несложным следствием того факта, что любая симметричная матрица A представима в виде $A = T\Lambda T'$, где T – ортогональная матрица, Λ – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные числа матрицы A.

Нетрудно увидеть, что если у любого из столбцов матрицы H заменить знаки всех элементов на противоположные, то матрица X не изменится.

Оказывается, что этим произвол в выборе матрицы H и ограничивается. Действительно, пусть J – некоторая $m \times r$ матрица, столбцы которой представляют собой ортонормированную систему m-мерных векторов, и

$$HLH' = JLJ'. \tag{1.1}$$

Умножив последнее равенство на H' слева и на J справа, получаем

$$LC = CL, \tag{1.2}$$

где $C = H'J$ – матрица порядка r с элементами c_{ij}. Из (1.2) следует, что при любых i и j

$$\lambda_i c_{ij} = c_{ij} \lambda_j.$$

Отсюда следует, что $c_{ij} = 0$ при $i \neq j$, поскольку $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то есть матрица C диагональная.

Равенство (1.1) можно переписать в виде

$$HL^{1/2}(HL^{1/2})' = JL^{1/2}(JL^{1/2})'.$$

Тогда существует ортогональная матрица T порядка r такая, что

$$HL^{1/2}T = JL^{1/2}$$

(см., например, [9], с. 589). Умножив последнее равенство на H' слева и на $L^{-1/2}$ справа, получаем

$$L^{1/2}TL^{-1/2} = C.$$

Отсюда следует, что матрица T диагональная. Но поскольку эта матрица ортогональная, на ее диагонали стоят либо $+1$, либо -1. А отсюда следует, что и на диагонали матрицы C стоят либо $+1$, либо -1. То есть матрица H по матрице X выбирается единственным способом с точностью до замены каждого из векторов h_j на $-h_j$.

Отметим, наконец, что любая матрица HLH', где матрицы H и L имеют указанный выше вид, является положительно полуопределенной матрицей ранга r.

В книге [4] матрицы L и H называются полярными координатами матрицы X, что, во многом, передает суть дела.

Основная трудность при параметризации поверхности $S_{m,r}$ состоит в параметризации матрицы H. Рассмотрим сначала случай $r = m$.

Пусть $V_0 = \{v_0^1, \dots, v_0^m\}$ – ортонормированный базис пространства R^m; h_1 – m-мерный вектор единичной длины; $\theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,m-1}$ – сферические координаты вектора h_1, то есть

$$h_1 = \sum_{j=1}^{m} \left(\cos\theta_{1,j} \prod_{k=1}^{j-1} \sin\theta_{1,k} \right) v_0^j, \tag{1.3}$$

где $\theta_{1,m} = 0$.

Как и везде в дальнейшем, считается, что произведение равно 1, если нижний индекс больше верхнего, в данном случае, $1 > j - 1$.

Построим ортонормированный базис

$$h_1, v_1^2, \dots, v_1^m$$

пространства R^m. При $j = 2, \dots, m$ вектор v_1^j строится из вектора h_1 при помощи следующего алгоритма.

Во-первых, компоненты вектора h_1 в базисе V_0 с номерами меньшими $j - 1$ заменяются на нули.

Затем в произведениях, составляющих остальные компоненты вектора h_1, делаются следующие изменения.

1. $\sin\theta_{1,i}$ при любом $i < j - 1$ заменяется на 1.

2. $\sin\theta_{1,j-1}$ заменяется на $\cos\theta_{1,j-1}$.

3. $\cos\theta_{1,j-1}$ заменяется на $(-\sin\theta_{1,j-1})$.

Например, при $m = 4$

$$h_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_{1,1} \\ \sin\theta_{1,1}\cos\theta_{1,2} \\ \sin\theta_{1,1}\sin\theta_{1,2}\cos\theta_{1,3} \\ \sin\theta_{1,1}\sin\theta_{1,2}\sin\theta_{1,3} \end{pmatrix};$$

$$v_1^2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta_{1,1} \\ \cos\theta_{1,1}\cos\theta_{1,2} \\ \cos\theta_{1,1}\sin\theta_{1,2}\cos\theta_{1,3} \\ \cos\theta_{1,1}\sin\theta_{1,2}\sin\theta_{1,3} \end{pmatrix};$$

$$v_1^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta_{1,2} \\ \cos\theta_{1,2}\cos\theta_{1,3} \\ \cos\theta_{1,2}\sin\theta_{1,3} \end{pmatrix}; \quad v_1^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin\theta_{1,3} \\ \cos\theta_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Ортонормированный базис $\{v_1^2, \ldots, v_1^m\}$ пространства R^{m-1} обозначим через V_1. Пусть h_2 – вектор единичной длины из этого пространства; $\theta_{2,2}, \ldots, \theta_{2,m-1}$ – сферические координаты вектора h_2, то есть

$$h_2 = \sum_{j=2}^{m} \left(\cos\theta_{2,j} \prod_{k=2}^{j-1} \sin\theta_{2,k} \right) v_1^j,$$

где $\theta_{2,m} = 0$.

Ортонормированный базис

$$h_2, v_2^3, \ldots, v_2^m$$

пространства R^{m-1} строится при помощи того же алгоритма, что и ортонормированный базис $h_1, v_1^2, \ldots, v_1^m$ пространства R^m, как это описано выше. Ортонормированный базис $\{v_2^3, \ldots, v_2^m\}$ пространства R^{m-2} обозначим через V_2.

Продолжая таким же образом, приходим к ортонормированному базису

$$h_{m-2}, v_{m-2}^{m-1}, v_{m-2}^{m}$$

пространства R^3. Пусть h_{m-1} – вектор единичной длины из пространства R^2 с базисом $V_{m-2} = \left\{v_{m-2}^{m-1}, v_{m-2}^{m}\right\}$; $\theta_{m-1,\,m-1}$ – сферическая координата вектора h_{m-1}, то есть

$$h_{m-1} = \cos\theta_{m-1,\,m-1} v_{m-2}^{m-1} + \sin\theta_{m-1,\,m-1} v_{m-2}^{m}. \tag{1.4}$$

Последний вектор будем строить по формуле

$$h_{m} = -\sin\theta_{m-1,\,m-1} v_{m-2}^{m-1} + \cos\theta_{m-1,\,m-1} v_{m-2}^{m}. \tag{1.5}$$

Пренебрегая многообразием меньшей размерности, так как нашей целью является подсчет интегралов, будем считать, что при любом $q = 1, \ldots, m-1$

$$\begin{array}{ll} 0 < \theta_{q,\,j} < \pi \qquad \text{при} \quad q \le j < m-1, \\ -\pi < \theta_{q,\,m-1} < \pi. \end{array} \tag{1.6}$$

Остается исключить вектора h_q, которые имеют противоположные направления, точнее, выбрать из любых двух таких векторов один. Для этого заметим, что

$$h_q = \sum_{j=q}^{m} \left(\cos\theta_{q,\,j} \prod_{k=q}^{j-1} \sin\theta_{q,\,k} \right) v_{q-1}^{j}, \tag{1.7}$$

где $\theta_{q,\,m} = 0$. Компонента, соответствующая вектору v_{q-1}^{q}, равна $\cos\theta_{q,\,q}$. Будем считать данную компоненту при любом $q = 1, \ldots, m-1$ положительной. Это накладывает более жесткие ограничения на некоторые из углов:

$$\begin{array}{ll} 0 < \theta_{q,\,q} < \dfrac{\pi}{2} \qquad \text{при} \quad 1 \le q < m-1, \\ -\dfrac{\pi}{2} < \theta_{m-1,\,m-1} < \dfrac{\pi}{2}. \end{array}$$

Выбор одного из двух возможных направлений вектора h_m определяется тем. что в базисе V_{m-2} этот вектор получается из вектора h_{m-1} поворотом против часовой стрелки, а не по часовой стрелке.

Параметризация матрицы H при $r = m$ проведена. В случае $r < m$ нужны лишь вектора $h_1, \ldots, h_r$. Поэтому при параметризации используются только углы $\theta_{q,j}$ с $q \leq r$.

При $r < m$ размерность поверхности $S_{m,r}$ равна числу параметров

$$\theta_{1,1}, \ldots, \theta_{1,m-1}, \ldots, \theta_{r,r}, \ldots, \theta_{r,m-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_r,$$

то есть равна

$$mr - \frac{r(r-1)}{2}. \tag{1.8}$$

При $r = m$ размерность поверхности $S_{m,r}$ равна числу параметров

$$\theta_{1,1}, \ldots, \theta_{1,m-1}, \ldots, \theta_{m-1,m-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m.$$

Нетрудно увидеть, что и в этом случае размерность выражается формулой (1.8).

Для дальнейшего нам удобно рассмотреть два прямоугольных параллелепипеда Θ_{mr} и Θ^0_{mr} в пространстве $\mathrm{R}^{mr-r(r+1)/2}$. Пусть

$$s = \min(r, m-1).$$

Точки каждого из рассматриваемых параллелепипедов имеют координаты

$$(\theta_{1,1}, \ldots, \theta_{1,m-1}, \ldots, \theta_{s,s}, \ldots, \theta_{s,m-1})\,.$$

Границы изменения координат для параллелепипеда Θ_{mr} при $q = 1, \ldots, s$ определяются соотношениями (1.6). Границы изменения координат для параллелепипеда Θ^0_{mr} следующие

$$\begin{array}{rll} 0 < \theta_{q,q} < \pi/2 & \text{при} & q < m-1, \\ 0 < \theta_{q,j} < \pi & \text{при} & q < j < m-1, \\ -\pi < \theta_{q,m-1} < \pi & \text{при} & q < m-1, \\ -\pi/2 < \theta_{m-1,m-1} < \pi/2. & & \end{array}$$

Условие на $\theta_{m-1,m-1}$, очевидно, должно включаться лишь при $s = m-1$. Из приведенных соотношений следует, что $\Theta^0_{mr} \subset \Theta_{mr}$.

Кроме того, рассмотрим область в пространстве R^r

$$\Lambda_r = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) : \lambda_1 > \ldots > \lambda_r > 0\}.$$

Чтобы согласовать с обозначениями из книги [2], результаты, изложенные в которой, нами существенно используются в дальнейшем, положим

$$U' = \Theta^0_{mr} \times \Lambda_r.$$

Отображение

$$\varphi : U' \to \mathrm{R}^{m^2}$$

задается формулой HLH'.

Использование сферических координат в связи с ротационной инвариантностью задачи при изучении распределений случайных матриц обсуждается в [6]. Однако подход из работы [6] нельзя назвать близким к нашему. Ключевым у нас является указание явных формул для векторов из базисов V_q, $q = 1, \ldots, m-2$, что позволяет задать поверхность $S_{m,r}$ аналитически.

2. Первая квадаратичная форма и элемент объема поверхности $S_{m,r}$

Положим $M = mr - \dfrac{r(r-1)}{2}$, $N = m^2$. Координаты точки в пространстве R^M будем обозначать $y^1, \dots, y^M$, координаты точки в пространстве R^N будем обозначать $x^1, \dots, x^N$.

Как и в книге [2], при целом неотрицательном p через $\mathcal{L}_p(\mathrm{R}^N; \mathrm{R})$ обозначим пространство p-линейных отображений $\left(\mathrm{R}^N\right)^p \to \mathrm{R}$. Через $\mathcal{A}_p(\mathrm{R}^N; \mathrm{R})$ обозначим подпространство пространства $\mathcal{L}_p(\mathrm{R}^N; \mathrm{R})$, состоящее из кососимметричных отображений.

Пусть U – открытое подмножество в R^N. Напомним, что дифференциальной p-формой называется гладкое отображение

$$\omega : U \to \mathcal{A}_p(\mathrm{R}^N; \mathrm{R}).$$

В данной работе можно считать, что $U = \mathrm{R}^N$. Пусть U' – открытое подмножество в R^M, $\varphi : U' \to U$ – гладкое отображение. Отображение φ и дифференциальная p-форма ω порождают дифференциальную p-форму

$$\varphi^*\omega : U' \to \mathcal{A}_p(\mathrm{R}^M; \mathrm{R})$$

согласно формуле (2.8.1) из главы 3 книги [2].

Нам понадобятся не только гладкие отображения $\omega : U \to \mathcal{A}_p(\mathrm{R}^N; \mathrm{R})$, но и несколько более общие гладкие отображения

$$U \to \mathcal{L}_p(\mathrm{R}^N; \mathrm{R}).$$

Необходимые нам результаты параграфов 2.8, 2.9 главы 3 из книги [2] остаются верными и для таких отображений.

Поскольку $M \le N$, отображение φ задает M-мерную поверхность в R^N:

$$x^k = x^k \left(y^1, \ldots, y^M \right), \quad k = 1, \ldots, N.$$

Подчеркнем, что обозначение x^k используется нами в трех различных смыслах.

Во-первых, это k-я координата точки из R^N.

Во-вторых, это функция из U' в R.

В-третьих, это дифференциальная 0-форма в R^N, то есть отображение

$$x^k : \mathrm{R}^N \to \mathcal{A}_0 \left(\mathrm{R}^N ; \mathrm{R} \right).$$

Поскольку $\mathcal{A}_0 \left(\mathrm{R}^N ; \mathrm{R} \right) = \mathrm{R}$, это отображение ставит каждой точке из R^N в соответствие некоторое действительное число, а именно, k-ю координату данной точки. Применяя к дифференциальной 0-форме x^k операцию внешнего дифференцирования d (см., например, параграфы 2.3 – 2.6 главы 3 книги [2]), получаем дифференциальную 1-форму dx^k.

Также обозначение y^i используется нами в двух разных смыслах. И как i-я координата точки из R^M, и как дифференциальная 0-форма в R^M.

Пусть обозначение y^i используется во втором смысле. Тогда, если обозначение x^k используется также во втором смысле, то

$$dx^k = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \, dy^i. \tag{2.1}$$

А если обозначение x^k используется в третьем смысле, то

$$\varphi^* \left(dx^k \right) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \, dy^i. \tag{2.2}$$

Определение симметризованного прямого произведения полилинейных отображений мы напомним лишь для случая, когда эти отображения являются линейными. В более общих ситуациях данное произведение нами не используется.

Пусть α и β – элементы пространства $\mathcal{L}_1\left(\mathrm{R}^N;\mathrm{R}\right)$, то есть линейные отображения $\mathrm{R}^N \to \mathrm{R}$.

Прямое произведение α и β – это элемент пространства $\mathcal{L}_2\left(\mathrm{R}^N;\mathrm{R}\right)$, то есть билинейное отображение, значение которого на паре элементов $\xi_1 \in \mathrm{R}^N$, $\xi_2 \in \mathrm{R}^N$

$$(\alpha \otimes \beta)\left(\xi_1, \xi_2\right) = \alpha\left(\xi_1\right) \cdot \beta\left(\xi_2\right).$$

Симметризованное прямое произведение α и β – это также элемент пространства $\mathcal{L}_2\left(\mathrm{R}^N;\mathrm{R}\right)$:

$$\alpha \odot \beta = \frac{1}{2}\left(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha\right).$$

Рассмотрим первую квадратичную форму пространства R^N

$$\sum_{k=1}^{N} dx^k \odot dx^k.$$

Первая квадратичная форма – это отображение

$$\mathrm{R}^N \to \mathcal{L}_2\left(\mathrm{R}^N;\mathrm{R}\right).$$

Отметим, что первая квадратичная форма не является дифференциальной 2-формой, поскольку она не обладает свойством кососимметричности.

Введем обозначение

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^k}{\partial y^j}; \quad i = 1, \ldots, M; \quad j = 1, \ldots, M.$$

Тогда

$$\varphi^*\left(\sum_{k=1}^{N} dx^k \odot dx^k\right) = \sum_{k=1}^{N} \varphi^*\left(dx^k\right) \odot \varphi^*\left(dx^k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{M} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\, dy^i\right) \odot \left(\sum_{j=1}^{M} \frac{\partial x^k}{\partial y^j}\, dy^j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\, \frac{\partial x^k}{\partial y^j}\right) dy^i \odot dy^j.$$

То есть

$$\varphi^*\left(\sum_{k=1}^{N} dx^k \odot dx^k\right) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} g_{ij}\, dy^i \odot dy^j. \tag{2.3}$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (2.3), это первая квадратичная форма поверхности $\varphi\,(U')$ (см. параграф 7 главы II книги [3]).

Рассмотрим матрицу $G = \| \; g_{ij} \; \|_{i,j=1}^{M}$. Элементом объема поверхности $\varphi\,(U')$ называется дифференциальная M-форма в U'

$$\sqrt{\det(G)}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^M,$$

$\wedge$ – знак внешнего умножения дифференциальных форм. (Иногда элементом объема называют дифференциальную M-форму ω в U, для которой $\varphi^*\omega = \sqrt{\det(G)}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^M$. Но мы будем придерживаться терминологии, принятой, например, в [4], и называть элементом объема форму в U'.)

В книге [4] используется следующий прием для нахождения элемента объема поверхности. Предположим, что удается найти дифференциальные 1-формы в U'

$$\omega^l = \sum_{j=1}^{M} a^l_j dy^j, \quad l = 1, \ldots, M,$$

такие, что

$$\varphi^* \left(\sum_{k=1}^{N} dx^k \odot dx^k \right) = \sum_{l=1}^{M} \omega^l \odot \omega^l \tag{2.4}$$

(a^l_j – гладкие функции, определенные в U' и принимающие действительные значения). Тогда

$$\varphi^* \left(\sum_{k=1}^{N} dx^k \odot dx^k \right) = \sum_{l=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{M} a^l_i dy^i \right) \odot \left(\sum_{j=1}^{M} a^l_j dy^j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \left(\sum_{l=1}^{M} a^l_i a^l_j \right) dy^i \odot dy^j.$$

То есть для матрицы $A = \| \ a^l_i \ \|^M_{i,l=1}$ имеет место соотношение

$$G = AA'.$$

Поэтому $|\det(A)| = \sqrt{\det(G)}$.

С другой стороны, из выражения $\omega^1, \ldots, \omega^M$ через $dy^1, \ldots, dy^M$ следует, что

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^M = \det(A)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^M. \tag{2.5}$$

Если функция $\det(A)$ не меняет знак в U', то этим знаком можно пренебречь, и считать элементом объема поверхности $\varphi\,(U')$ дифференциальную M-форму $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^M$.

Еще один прием, позволяющий представить первую квадратичную форму пространства R^{m^2} как след некоторой матрицы, также заимствован нами из книги [4]. Наряду с матрицей $X = \| \ x_{ij} \ \|^m_{i,j=1}$ рассмотрим матрицу $dX = \| \ dx_{ij} \ \|^m_{i,j=1}$, элементами которой являются дифференциальные 1-формы. Умножение матриц, элементами которых являются дифференциальные формы, производится по обычным правилам, но при умножении элементов матриц друг на друга используется соответствующее произведение дифференциальных форм.

Элемент (i,k) матрицы $dX \odot dX'$ – это $\sum_{j=1}^{m} dx_{ij} \odot dx_{kj}$. Поэтому

$$tr\,(dX \odot dX') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} dx_{ij} \odot dx_{ij}. \tag{2.6}$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (2.6), это первая квадратичная форма пространства R^{m^2}.

Несколько изменим обозначения, использовавшиеся в разделе 1. Будем считать, что в разложении

$$X = HLH' \tag{2.7}$$

H – это $m \times m$ матрица со столбцами $h_1, \ldots, h_m$, $L = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$ – диагональная $m \times m$ матрица.

Все элементы матрицы X должны быть функциями аргументов

$$\theta_{1,1}, \ldots, \theta_{1,m-1}, \ldots, \theta_{s,s}, \ldots, \theta_{s,m-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_r. \tag{2.8}$$

Поэтому для $q > r$ при построении векторов h_q углы $\theta_{q,j}$ должны быть каким-то образом зафиксированы в пределах границ, указанных в разделе 1 для параллелепипеда Θ^0_{mm}. Таким образом, и при $q > r$ компоненты векторов h_q являются функциями лишь аргументов (2.8).

Нетрудно увидеть, что и при старом, и при новом определении матриц H и L матрица X остается одной и той же.

Согласно (2.3) и (2.6) первая квадратичная форма поверхности $S_{m,r}$ записывается в виде $\varphi^*\,(tr\,(dX \odot dX'))$ или в виде $tr\,(dX \odot dX')$, в зависимости от того, в каком смысле понимается обозначение x_{ij} (ср. (2.1), (2.2)). Учитывая симметричность матрицы X, приходим к тому, что первая квадратичная форма поверхности $S_{m,r}$ имеет вид $tr\,(dX \odot dX)$.

При умножении на 0-форму будем использовать знак произведения $\cdot$ или вообще опускать знак произведения. Из соотношения $HH' = I$, где I – единичная $m \times m$ матрица, получаем $d\,(HH') = 0$, откуда следует, что

$$dH' \cdot H + H'dH = 0. \tag{2.9}$$

Из соотношения $(H'dH)' = dH' \cdot H$ и (2.9) получаем

$$H'dH = -\,(H'dH)'\,.$$

Это означает, что матрица $H'dH$ кососимметричная, то есть

$$h_i'\,dh_j = -h_j'\,dh_i \tag{2.10}$$

при любых $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, m$.

Из (2.7) следует, что

$$dX = dH \cdot L \cdot H' + H \cdot dL \cdot H' + H \cdot L \cdot dH'.$$

Чтобы преобразовать последнее слагаемое, воспользуемся (2.9). Имеем

$$dH' = dH' \cdot H \cdot H' = -H'dH \cdot H'.$$

Поэтому

$$dX = (dH \cdot L + H \cdot dL - H \cdot L \cdot H'dH)\,H'. \tag{2.11}$$

Используя то, что след произведения двух матриц не зависит от порядка сомножителей, получаем выражение для первой квадратичной формы поверхности $S_{m,r}$

$$tr\,(dX \odot dX) = tr\,(HH'dX \odot HH'dX) =$$

$$= tr\left(H'dX \odot HH'dX \cdot H\right) = tr\left(H'dX \cdot H \odot H'dX \cdot H\right).$$

С учетом (2.11) получаем, что первая квадратичная форма поверхности $S_{m,r}$ имеет вид

$$tr\left(\Omega \odot \Omega\right),$$

где введено обозначение

$$\Omega = H'dH \cdot L + dL - LH'dH.$$

Будем считать, что $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_m = 0$. При умножении матрицы $H'dH$ на диагональную матрицу L справа на λ_j умножается j-й столбец матрицы $H'dH$. При умножении матрицы $H'dH$ на диагональную матрицу L слева на λ_i умножается i-я строка матрицы $H'dH$. Поэтому (i,j)-й элемент матрицы $H'dH \cdot L - LH'dH$ равен

$$\lambda_j h_i' \, dh_j - \lambda_i h_i' \, dh_j.$$

Соответственно, для элемента ω_{ij} матрицы Ω получаем следующие выражения. При $1 \le i \le r$, $1 \le j \le r$

$$\omega_{ij} = \left(\lambda_j - \lambda_i\right) h_i' \, dh_j + \delta_{ij} d\lambda_i,$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \ne j$. При $1 \le i \le r$, $j > r$

$$\omega_{ij} = -\lambda_i h_i' \, dh_j.$$

При $i > r$, $1 \le j \le r$

$$\omega_{ij} = \lambda_j h_i' \, dh_j.$$

Наконец, $\omega_{ij} = 0$ при $i > r$, $j > r$.

(i,k)-й элемент матрицы $\Omega\odot\Omega$ – это $\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_{ij}\odot\omega_{jk}$. При нахождении $tr\,(\Omega\odot\Omega)$ используются лишь элементы матрицы с $i=k$.

В дальнейшем, считается, что сумма равна 0, если нижняя граница суммирования больше верхней границы.

(i,k)-й элемент матрицы $\Omega\odot\Omega$ при $1\le i\le r$, $1\le k\le r$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{r}((\lambda_j-\lambda_i)\,h_i'\,dh_j+\delta_{ij}d\lambda_i)\odot((\lambda_k-\lambda_j)\,h_j'\,dh_k+\delta_{jk}d\lambda_j)+$$

$$+\sum_{j=r+1}^{m}(-\lambda_i h_i'\,dh_j)\odot(\lambda_k h_j'\,dh_k).$$

(i,k)-й элемент матрицы $\Omega\odot\Omega$ при $i>r$, $k>r$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{r}(\lambda_j h_i'\,dh_j)\odot(-\lambda_j h_j'\,dh_k).$$

Тогда первая квадратичная форма поверхности $S_{m,r}$ представляется в виде

$$tr\,(\Omega\odot\Omega)=A_1+A_2+A_3,$$

где (выражения для A_2 и A_3 преобразуются с учетом (2.10))

$$A_1=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}((\lambda_j-\lambda_i)\,h_i'\,dh_j+\delta_{ij}d\lambda_i)\odot((\lambda_i-\lambda_j)\,h_j'\,dh_i+\delta_{ji}d\lambda_j),$$

$$A_2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{m}(\lambda_i h_i'\,dh_j)\odot(\lambda_i h_i'\,dh_j),$$

$$A_3 = \sum_{i=r+1}^{m} \sum_{j=1}^{r} (\lambda_j h'_j \, dh_i) \odot (\lambda_j h'_j \, dh_i).$$

Вновь используя (2.10), получаем

$$A_1 = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=i+1}^{r} ((\lambda_i - \lambda_j)\, h'_j \, dh_i) \odot ((\lambda_i - \lambda_j)\, h'_j \, dh_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} d\lambda_i \odot d\lambda_i.$$

Поменяв в выражении для A_3 местами i и j, получаем

$$A_2 + A_3 = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{m} (\lambda_i h'_j \, dh_i) \odot (\lambda_i h'_j \, dh_i).$$

Коэффициент 2, возникающий перед суммами, можно внести в выражения для сомножителей в степени 1/2. Учитывая, что $\lambda_j = 0$ при $j > r$, получаем выражение для первой квадратичной формы поверхности $S_{m,r}$

$$tr\,(\Omega \odot \Omega) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=i+1}^{m} \psi_{ij} \odot \psi_{ij} + \sum_{i=1}^{r} d\lambda_i \odot d\lambda_i,$$

где

$$\psi_{ij} = 2^{1/2}\, (\lambda_i - \lambda_j)\, h'_j \, dh_i.$$

Таким образом, первая квадратичная форма поверхности $S_{m,r}$ имеет вид (2.4).

Дифференциальная M-форма, стоящая в левой части равенства (2.5), имеет вид

$$2^{(mr-r(r+1)/2)/2} \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{m-r} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=i+1}^{r} (\lambda_i - \lambda_j) \cdot$$

$$\cdot \bigwedge_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=i+1}^{m} (h_j' \, dh_i) \bigwedge_{i=1}^{r} d\lambda_i. \qquad (2.12)$$

Будет ли знак коэффициента дифференциальной M-формы, стоящей в правой части равенства (2.5), постоянным в области U'? Если да, то дифференциальная M-форма (2.12) является элементом объема поверхности $S_{m,r}$. Положительный ответ на вопрос о постоянстве знака данного коэффициента в области U' дает теорема 2.1.

Похожее на (2.12) выражение для элемента объема поверхности $S_{m,r}$ содержит теорема 2 из работы [11]. Единственное отличие заключается в том, что вместо коэффициента $2^{(mr-r(r+1)/2)/2}$ в работе [11] стоит коэффициент 2^{-r} (в наших обозначениях). Поскольку явно область изменения параметров и функция, задающая поверхность $S_{m,r}$, в работе [11] не указываются, нельзя однозначно ответить на вопрос о правильности результата из работы [11]. Отметим все же, что основной переход в доказательстве теоремы 2 в работе [11] делается “апелляцией к аналогии” со случаем $r = m$.

Теорема 2.1.

$$\bigwedge_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=i+1}^{m} (h_j' \, dh_i) = \Phi\,(\theta) \bigwedge_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=i}^{m-1} d\theta_{i,j},$$

где

$$|\,\Phi\,(\theta)| = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=i}^{m-2} (\sin\theta_{i,j})^{m-j-1}\,,$$

через θ обозначается вектор с координатами $\theta_{i,j}$, $i = 1, \dots, s$; $j = i, \dots, m-1$.

Доказательство. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\bigwedge_{j=2}^{m} (h_j' \, dh_1).$$

Применяя формулу (2.1) к каждой из компонент вектора h_1, из разложения (1.3) нетрудно увидеть, что

$$dh_1 = \sum_{p=2}^{m} v_1^p \, \omega_{1,\,p-1},$$

где

$$\omega_{1,\,p-1} = \left(\prod_{k=1}^{p-2} \sin \theta_{1,\,k} \right) d\theta_{1,\,p-1}.$$

Пусть

$$h_j = \sum_{p=2}^{m} h_j^p \, v_1^p, \quad j = 2, \dots, m.$$

В силу ортонормированности базиса V_1

$$h_j' \, dh_1 = \sum_{p=2}^{m} h_j^p \, \omega_{1,\,p-1}.$$

Следовательно,

$$\bigwedge_{j=2}^{m} (h_j' \, dh_1) = \det \left(\| \, h_j^p \, \|_{j,\,p=2}^{m} \right) \bigwedge_{p=2}^{m} \omega_{1,\,p-1} = \varepsilon \bigwedge_{p=2}^{m} \omega_{1,\,p-1},$$

где $\varepsilon = +1$ или -1.

Из разложения (1.7) следует, что при $1 < q < m - 1$

$$dh_q = \sum_{p=q+1}^{m} v_q^p \left(\prod_{k=q}^{p-2} \sin \theta_{q,k} \right) d\theta_{q,p-1} + \ldots .$$

Многоточие означает члены, содержащие дифференциальные 1-формы $\theta_{i,k}$ с $i < q$. Эти члены не влияют на вид дифференциальной формы $\bigwedge_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=i+1}^{m} (h_j' \, dh_i)$ из-за условия кососимметричности.

Введя в рассмотрение дифференциальные 1-формы

$$\omega_{q,p-1} = \left(\prod_{k=q}^{p-2} \sin \theta_{q,k} \right) d\theta_{q,p-1}, \quad p = q+1, \ldots, m,$$

получаем более короткую запись

$$dh_q = \sum_{p=q+1}^{m} v_q^p \, \omega_{q,p-1} + \ldots .$$

Пусть

$$h_j = \sum_{p=q+1}^{m} h_j^p \, v_q^p, \quad j = q+1, \ldots, m.$$

В силу ортонормированности базиса V_q

$$h_j' \, dh_q = \sum_{p=q+1}^{m} h_j^p \, \omega_{q,p-1} + \ldots .$$

Следовательно,

$$\bigwedge_{j=q+1}^{m} (h_j' \, dh_q) = \det \left(\| \, h_j^p \, \|_{j,p=q+1}^{m} \right) \bigwedge_{p=q+1}^{m} \omega_{q,p-1} =$$

$$= \varepsilon \bigwedge_{p=q+1}^{m} \omega_{q,\,p-1},$$

где $\varepsilon = +1$ или -1.

Наконец, при $q = m-1$ (этот случай возможен при $r = m-1$ или $r = m$) из (1.4) следует, что

$$dh_{m-1} = v_{m-2}^{m-1}\,(-\sin\theta_{m-1,\,m-1})\,d\theta_{m-1,\,m-1}+$$

$$+v_{m-2}^{m}\cos\theta_{m-1,\,m-1}d\theta_{m-1,\,m-1} + \dots\ .$$

Воспользовавшись (1.5), получаем

$$h'_m\,dh_{m-1} = d\theta_{m-1,\,m-1} + \dots\ .$$

Теорема 2.1 доказана.

При $r = 1$ теорема 2.1 доказана в [8], с. 58. Также в [8] получены результаты, показывающие, какую структуру имеет функция $\Phi\,(\theta)$ при произвольном r.

Как уже сказано выше, при $q > r$ углы $\theta_{q,j}$ должны быть каким-то образом зафиксированы в пределах границ, указанных в разделе 1 для параллелепипеда Θ_{mm}^0. Из доказанного следует, что дифференциальная форма $\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=i+1}^{m}(h'_j\,dh_i)$ не зависит от того, как именно эти углы выбраны. Этот же факт устанавливается и в [8].

В заключительной части данного раздела вычисляются интегралы от дифференциальной формы $\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=i+1}^{m}(h'_j\,dh_i)$ по параллелепипедам Θ_{mr} и Θ_{mr}^0.

Лемма 2.1. При целом неотрицательном p

$$\int_0^{\pi}\sin^p x\,dx = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p}{2}+1\right)}.$$

Доказательство леммы 2.1 при $p > 0$ основано на формуле

$$\left(\frac{\sin^{p-1} x \, \cos x}{p}\right)' = \frac{p-1}{p} \sin^{p-2} x - \sin^p x.$$

Дальнейшие выкладки проводятся несколько по-разному при четных и нечетных p, но в итоге получается один и тот же результат.

Пусть k – натуральное число. Рассмотрим функцию

$$\Gamma_k(x) = \pi^{k(k-1)/4} \prod_{j=1}^{k} \Gamma\left(x + \frac{1}{2} - \frac{j}{2}\right), \quad x > \frac{k-1}{2}.$$

Лемма 2.2.

$$\left| \int\limits_{\Theta_{mr}} \bigwedge_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=i+1}^{m} (h_j' \, dh_i) \right| = \frac{2^s \, \pi^{mr/2}}{\Gamma_r\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Доказательство леммы 2.2 проводится путем прямых выкладок с использованием теоремы 2.1 и леммы 2.1.

Теорема 2.2.

$$\left| \int\limits_{\Theta_{mr}^0} \bigwedge_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=i+1}^{m} (h_j' \, dh_i) \right| = \frac{\pi^{mr/2}}{\Gamma_r\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Результат следует из соотношения

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^p x \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \sin^p x \, dx,$$

теоремы 2.1 и леммы 2.2.

Из известных результатов результат теоремы 2.2 наиболее близок, по-видимому, к теореме 2.1.15 из книги [9].

3. Сингулярное гамма-распределение случайной матрицы

Пусть σ и b – действительные числа, $\sigma > 0$, $b > \dfrac{r-1}{2}$.

Лемма 3.1.

$$\int\limits_{\Lambda_r} \exp\left(-\sigma\left(\lambda_1 + \ldots + \lambda_r\right)\right) \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^{b-(r+1)/2} \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=i+1}^{r} \left(\lambda_i - \lambda_j\right)\; d\lambda_1 \ldots d\lambda_r = \frac{\Gamma_r(b) \cdot \Gamma_r\left(\dfrac{r}{2}\right)}{\pi^{r^2/2} \cdot \sigma^{rb}}.$$

Доказательство. Обозначим через D область в пространстве $\mathrm{R}^{r(r+1)/2}$, состоящую из точек

$$(x_{11}, \ldots, x_{1r}, x_{22}, \ldots, x_{2r}, \ldots, x_{rr})$$

таких, что матрица $x = \| \; x_{ij} \; \|_{i,j=1}^{r}$ – положительно определенная. Тогда

$$\int\limits_{D} etr\left(-\sigma x\right) \left(\det x\right)^{b-(r+1)/2} dx_{11} \ldots dx_{1r} dx_{22} \ldots dx_{2r} \ldots dx_{rr} =$$

$$= \frac{\Gamma_r(b)}{\sigma^{rb}}$$

(см., например, [7], с. 122). etr означает $\exp(tr)$. Из геометрических соображений и этой формулы следует, что

$$\int\limits_{S_{r,\,r}} etr\left(-\sigma X\right) \left(\det X\right)^{b-(r+1)/2} dS = 2^{r(r-1)/4} \cdot \frac{\Gamma_r(b)}{\sigma^{rb}},$$

dS означает, что интегрирование ведется по $\frac{1}{2}r(r+1)$-мерной площади поверхности $S_{r,r}$. Воспользовавшись введенной параметризацией поверхности $S_{r,r}$ и выражением (2.12) для элемента объема, находим

$$2^{r(r-1)/4} \int\limits_{\Theta^0_{rr}\times\Lambda_r} \exp\left(-\sigma\left(\lambda_1+\ldots+\lambda_r\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\prod_{i=1}^{r}\lambda_i\right)^{b-(r+1)/2} \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=i+1}^{r}\left(\lambda_i-\lambda_j\right) \bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=i+1}^{r}\left(h'_j\,dh_i\right)\bigwedge_{i=1}^{r} d\lambda_i =$$

$$= 2^{r(r-1)/4}\cdot\frac{\Gamma_r(b)}{\sigma^{rb}}.$$

Применение теоремы 2.2 завершает доказательство.

Лемма 3.1 доказана.

Результат леммы 3.1 не является новым. Фактически он совпадает с формулой (11) параграфа 13.3 книги [1]. Но при помощи ранее доказанного в настоящей работе этот результат получается достаточно легко, и поэтому лемма 3.1 приводится с доказательством.

При $a > r - \dfrac{m+1}{2}$ положим

$$c_{mr}(a,\sigma) = 2^{-(mr-r(r+1)/2)/2}\cdot\frac{\sigma^{r(a+(m-r)/2)}}{\pi^{r(m-r)/2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\Gamma_r\left(\dfrac{m}{2}\right)}{\Gamma_r\left(a+\dfrac{m-r}{2}\right)\Gamma_r\left(\dfrac{r}{2}\right)}.$$

Набор переменных (2.8) обозначим (θ,λ) и на поверхности $S_{m,r}$ определим функцию

$$f_{mr}(\theta,\lambda;a,\sigma) =$$

$$= c_{mr}(a,\sigma)\exp\left(-\sigma\left(\lambda_1+\ldots+\lambda_r\right)\right)\left(\prod_{i=1}^{r}\lambda_i\right)^{a-(m+1)/2}.$$

Теорема 3.1. Интеграл от функции $f_{mr}(\theta,\lambda;a,\sigma)$ по поверхности $S_{m,r}$ равен 1.

Доказательство. Используя выражение (2.12) для элемента объема поверхности $S_{m,r}$, получаем для данного интеграла выражение

$$c_{mr}(a,\sigma)2^{(mr-r(r+1)/2)/2}\int\limits_{\Theta^0_{mr}\times\Lambda_r}\exp\left(-\sigma\left(\lambda_1+\ldots+\lambda_r\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\prod_{i=1}^{r}\lambda_i\right)^{m-r+a-(m+1)/2}\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=i+1}^{r}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)\cdot$$

$$\cdot\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=i+1}^{m}\left(h'_j\,dh_i\right)\bigwedge_{i=1}^{r}d\lambda_i.$$

Применение теоремы 2.2 и леммы 3.1 дает нужный результат.

Теорема 3.1 доказана.

Библиографический список

[1] Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963.

[2] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.

[3] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.

[4] Хуа Ло-кен Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: ИЛ, 1959.

[5] Шведов А.С. Бета-распределение случайной матрицы и его применение в модели состояние-наблюдение. Препринт WP2/2009/01. М.: ГУ ВШЭ, 2009.

[6] Cadet A. Polar coordinates in R^{np} : application to the computation of Wishart and beta laws // Sankhyā, A 58 (1996), 101–114.

[7] Gupta A.K., Nagar D.K. Matrix Variate Distributions. N.Y.: Chapman & Hall, 1999.

[8] James A.T. Normal multivariate analysis and the orthogonal group // Annals of Mathematical Statistics, 25 (1954), 40–75.

[9] Muirhead R.J. Aspects of Multivariate Statistical Theory. Wiley-Interscience, 2005.

[10] Srivastava M.S. Singular Wishart and multivariate beta distributions // Annals of Statistics, 31 (2003), 1537–1560.

[11] Uhlig H. On singular Wishart and singular multivariate beta distribution // Annals of Statistics, 22 (1994), 395–405.

Препринт WP2/2009/05
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Шведов Алексей Сергеевич

О поверхностных интегралах, связанных с распределениями случайных матриц

Публикуется в авторской редакции

Выпускающий редактор *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии Государственного университета – Высшей школы экономики с представленного оригинал-макета.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 1,7
Усл. печ. л. 1,86. Заказ № . Изд. № 1129

Государственный университет – Высшая школа экономики.
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Государственного университета – Высшей школы экономики.
125319, Москва, Кочновский проезд, 3

Тел.: (495) 772-95-71; 772-95-73

Для заметок