Лекция 2. Матрицы-строки и матрицы-столбцы. Как векторы пространств $\mathbb{R}_{n\times 1}, \mathbb{R}_{1\times n}$. Системы векторов. Линейная зависимость (независимость) системы векторов. Линейная оболочка. Свойства линейно зависимых и независимых систем векторов и линейных оболочек. Базис и размерность линейной оболочки. База (базис) и ранг системы векторов. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.

В этой лекции основное внимание будет уделено частным формам матриц, а именно, *матрицам-строкам* или *матрицам-столбцам*. Как уже отмечалось выше, их можно трактовать как *точки* в арифметических пространствах $\mathbb{R}_{n\times 1}$ (строки длиной n)[1], $\mathbb{R}_{1\times n}$(столбцы высотой n), или векторы в этих пространствах. Они являются естественными обобщениями «одномерных» действительных чисел и прямой аналогией хорошо известных из материала средней школы геометрических векторов, как направленных отрезков, точнее, их *координатных представлений* в некотором *базисе*.

Понятие базиса может быть обобщено и для рассматриваемого случая. Под векторами всюду ниже для определенности подразумеваются векторы-столбцы (для строк все определения и утверждения совершенно аналогичны).

Начнем с обсуждения *ключевого* в линейной алгебре *понятия линейной зависимости*.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Под *системой векторов* подразумевается *непустая упорядоченная* их *совокупность*. Вектор, все элементы (*компоненты*) которого – нули, в дальнейшем будет обозна-

---

[1] $n \in \mathbb{N}$.

чаться посредством θ и именуется *нуль-вектором*.

◄Определение►

Пусть $\{a_1,\ldots,a_k\}$ – система векторов одного размера $(n\times 1)$;[2] $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ – действительные числа. Выражение

(2.1) $$\alpha_1\cdot a_1+\ldots+\alpha_k\cdot a_k=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot a_i$$

называется ***линейной комбинацией*** векторов данной системы. Числа $\{\alpha_i\},\ i=\underline{1,k}$ – ее *коэффициенты*.

Линейная комбинация называется ***тривиальной***, если все ее коэффициенты – нули: $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2=0$, и ***нетривиальной*** в противном случае, т.е. если $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2\neq 0$, так что *хотя бы один из коэффициентов линейной комбинации отличен от нуля*.

◆Замечание

Тривиальная линейная комбинация любых векторов одного размера равна нуль-вектору того же размера: $\sum_{i=1}^{k}0\cdot a_i=\theta$.

◄Определение►

Система векторов называется ***линейно зависимой***, если существует ***нетривиальная*** линейная комбинация векторов системы, равная нуль-вектору (говорят еще: векторы системы ***линейно зависимы***).

Иными словами, равенство

$$\alpha_1\cdot a_1+\ldots+\alpha_k\cdot a_k=\theta$$

выполняется для некоторых значений коэффициентов, *среди которых имеются* ***не равные нулю***.

[2] Если не оговорено противное, то предполагается, что векторы системы имеют одинаковый размер.

◆**Примеры:**

1). $k = 2, n = 3;\ a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \theta$ при том, что

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 2^2 + 1^2 \neq 0$. Следовательно, система векторов $\{a_1, a_2\}$ линейно зависима.

2). $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2010 \end{pmatrix}$.

Очевидно, что $7 \cdot e_1 + (-3) \cdot e_2 + 2010 \cdot e_3 + (-1) \cdot a = \theta$. Следовательно, система векторов $\{ e_1, e_2, e_3, a \}$ линейно зависима. Здесь специальное «устройство» векторов e_1, e_2, e_3 позволило нам быстро угадать нетривиальную линейную комбинацию векторов системы, равную нуль-вектору.

◀**Определение**▶

Система векторов называется ***линейно независимой*** (говорят также: векторы системы ***линейно независимы***) если она не является линейно зависимой.[3] Иными словами, равенство

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = \theta$$

выполняется лишь для $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 = 0$, т.е. если ***только тривиальная*** *линейная комбинация векторов системы равна нуль-вектору*.

◀**Определение**▶

Множество всевозможных линейных комбинаций векторов $a_1, \ldots, a_k$ называется ***линейной оболочкой*** этих векторов. (или их системы):

(2.2) $$L(a_1, \ldots, a_k) = \{ \alpha_1 \cdot a_1 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \}$$

[3] Таким образом, любая система векторов либо линейно зависима, либо линейно независима.

Линейно зависимые и независимые системы векторов и их линейные оболочки обладают рядом важных свойств, отраженных в следующих утверждениях.

1°. Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима, если он нулевой, и линейно независима, если он ненулевой.

В самом деле, пусть $a\,(n\times 1)=\theta(n\times 1)$. Тогда $\alpha\cdot a=\begin{pmatrix}\alpha a_1\\ \vdots\\ \alpha a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\equiv\theta$[4]. Стало быть, $\alpha\cdot a=\theta$ для любого числа α, в том числе для всякого $\alpha\neq 0$. Поэтому существует нетривиальная линейная комбинация векторов системы $\{\,a\,\}$, равная нуль-вектору, так что система $\{\,a\,\}=\{\,\theta\,\}$ линейно зависима.

Если же среди элементов вектора a имеется ненулевой, т.е. $a\neq\theta$, то система уравнений $\begin{cases}\alpha\cdot a_1=0\\ \vdots\\ \alpha\cdot a_n=0\end{cases}$, равносильная равенству $\alpha\cdot a=\theta$, совместна только при $\alpha=0$. Следовательно, лишь тривиальная линейная комбинация векторов системы $\{\,a\neq\theta\,\}$ равна θ и система $\{\,a\,\}$, состоящая из единственного ненулевого вектора, линейно независима.

2°. Система из $k>1$ векторов линейно зависима ***тогда, и только тогда***, когда хотя бы один из них есть линейная комбинация остальных.

1). Действительно, если система $\{\,a_i\,\},\, i=\underline{1,k}$ линейно зависима, то равенство $\alpha_1\cdot a_1+\ldots+\alpha_k\cdot a_k=\theta$ выполняется для некоторых значений коэффициентов, не все из которых – нули. Пусть $\alpha_j\neq 0,\, 1\le j\le k$. Тогда

$\alpha_j\cdot a_j=-\alpha_1\cdot a_1-\ldots-\alpha_{j-1}\cdot a_{j-1}-\alpha_{j+1}\cdot a_{j+1}-\ldots-\alpha_k\cdot a_k+\theta=-\sum\limits_{i\neq j}\alpha_i\cdot a_i$, откуда

$$a_j=-\frac{\alpha_1}{\alpha_j}\cdot a_1-\ldots-\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\cdot a_{j-1}-\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}\cdot a_{j+1}-\ldots-\frac{\alpha_k}{\alpha_j}\cdot a_k\,, \qquad \textbf{(2.3)}$$

т.е. вектор a_j есть линейная комбинация остальных векторов системы.

[4] Строчные латинские буквы используются в тексте как для обозначения векторов, так и их элементов. Это не может вызвать недоразумений, поскольку в каждом конкретном случае всегда понятно, о чем идет речь.

◆**Замечание**

Линейная комбинация остальных (кроме a_j) векторов системы в равенстве **(2.3)** может быть как тривиальной, так и нетривиальной. Например, если в систему входит несколько линейно независимых векторов и θ, то θ в роли a_j может быть выражен через остальные векторы системы только в виде тривиальной линейной комбинации.

2). Пусть теперь один из векторов системы $\{a_i\}, i=\overline{1,k}$ есть линейная комбинация остальных: $a_j=\beta_1\cdot a_1+\ldots+\beta_{j-1}\cdot a_{j-1}+\beta_{j+1}\cdot a_{j+1}+\ldots+\beta_k\cdot a_k, 1\le j\le k$.[5] Это означает, что

$$\beta_1\cdot a_1+\ldots+\beta_{j-1}\cdot a_{j-1}+(-1)\cdot a_j+\beta_{j+1}\cdot a_{j+1}+\ldots+\beta_k\cdot a_k=\theta,$$

где слева стоит нетривиальная линейная комбинация векторов системы, а равна она, как видно, нуль-вектору. Отсюда заключаем, что эта система векторов линейно зависима.

3°. В линейно зависимой системе $\{a_1,\ldots,a_k\}$ *ненулевых* векторов найдется вектор $a_m, m>1$, являющийся линейной комбинацией *предыдущих* векторов:

$$a_m=\gamma_1 a_1+\ldots+\gamma_{m-1}a_{m-1}.$$

Для доказательства рассмотрим равную нуль-вектору нетривиальную линейную комбинацию векторов системы **(объясните, почему $k>1$)**:

$$\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_k a_k=\theta.$$

Пусть m – *наибольший* номер, для которого $\alpha_m\ne 0$[6]. Если $m=1$ (и тем самым $\alpha_1\ne 0$, а все прочие коэффициенты линейной комбинации – нули), то получаем, что $\underbrace{\alpha_1}_{\ne 0}\cdot a_1=\theta\Rightarrow a_1=\theta$, что противоречит условию, по которому все векторы системы – ненулевые. Следовательно, $m>1\Rightarrow\alpha_m\ne 0$, а коэффициенты с большими номерами – нули, т.е. $\alpha_{m+1}=\ldots=\alpha_k=0$, откуда $\alpha_1\cdot a_1+\ldots+\underbrace{\alpha_m}_{\ne 0}\cdot a_m=\theta$. Уединив слагаемое $\alpha_m\cdot a_m$ и умножив затем обе части равенства на $1/\alpha_m$, получаем в завершение доказательства

---

[5] В правой части этой формулы, как и формулы **(2.3)**, нижний индекс множителей в слагаемых изменяется в диапазоне $\overline{2,k}$ или $\overline{1,k-1}$ в случае, когда $j=1$ или $j=k$ соответственно.

[6] Такой номер существует, поскольку число коэффициентов в рассматриваемой линейной комбинации *конечно*.

(2.4) $$a_m = \underbrace{-\frac{\alpha_1}{\alpha_m}}_{=\gamma_1}\cdot a_1 \underbrace{-\frac{\alpha_2}{\alpha_m}}_{=\gamma_2}\cdot a_2 - \ldots \underbrace{-\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}}_{=\gamma_{m-1}}\cdot a_{m-1}.$$

Это равенство можно записать и как принадлежность вектора a_m линейной оболочке векторов $a_1, \ldots, a_{m-1}$: $a_m \in L(a_1, \ldots, a_{m-1})$. Говорят еще, что вектор a_m *разложим по векторам* $a_1, \ldots, a_{m-1}$.

Следствие

Если в системе ненулевых векторов ни один не разложим по предыдущим, то эта система линейно независима (в противном случае по **3°.** в ней нашелся бы разложимый по предыдущим).

4°. Если система векторов содержит нуль-вектор, то она линейно зависима.

Действительно, пусть $a_j = \theta, 1 \le j \le k$. Тогда

$0 \cdot a_1 + \ldots + 0 \cdot a_{j-1} + \overset{\neq 0}{1} \cdot \underbrace{a_j}_{=\theta} + 0 \cdot a_{j+1} + \ldots + 0 \cdot a_k = \theta$ – нетривиальная линейная комбинация векторов системы, равная нуль-вектору.

5°. Если в системе векторов $\{ a_i \}, i = \overline{1,k}$ имеется линейно зависимая подсистема, то и вся система линейно зависима.

Запишем равную нуль-вектору нетривиальную линейную комбинацию векторов линейно зависимой подсистемы и добавим к ней остальные векторы системы с нулевыми коэффициентами. Полученная линейная комбинация *всех* векторов системы будет нетривиальной и останется раной нуль-вектору. Это докажет линейную зависимость системы.

6°. Всякая подсистема линейно независимой системы векторов сама линейно независима.

В самом деле, если бы в системе нашлась линейно зависимая подсистема, то по утверждению **5°**. Это повлекло бы линейную зависимость всей системы, что исключено: по условию она линейно независима.

7°. Система векторов размера $(n \times 1)$

$e_1 = (1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)^T,\ e_2 = (0 \quad 1 \quad \ldots \quad 0)^T,\ \ldots,\ e_n = (0 \quad 0 \quad \ldots \quad 1)^T$

линейно независима (обратите внимание: количество векторов равно n – количеству элементов каждого из них).

Для доказательства рассмотрим возможность равенства нуль-вектору θ линейной комбинации векторов $e_1,\ldots,e_n$ с коэффициентами $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \cdot e_i = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix} = \theta = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 .$$

Следовательно, лишь тривиальная линейная комбинация векторов $e_1,\ldots,e_n$ может оказаться равной нуль-вектору, что и доказывает линейную независимость системы $\{ e_i \}, i = \underline{1,n}$.

Проведенное доказательство делает почти очевидным утверждение, что *всякий* вектор размера $(n\times 1)$ может быть разложен по системе $\{ e_i \}$. Действительно, пусть $c(n\times 1) = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$. Тогда

(2.5) $$c = \begin{pmatrix}c_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\c_2\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\c_n\end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \ldots + c_n \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot e_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c \in L(e_1, \ldots, e_n) .$$

Формула **(2.5)** – «родная сестра» ***разложения по базису*** в заданной системе координат некоторого вектора в школьной геометрии.

Ниже еще будут поводы к осознанию глубины этой аналогии, а пока заметим лишь, что числа $\{ c_i \}, i = \underline{1,n}$ по-прежнему именуют *координатами* вектора c в базисе $\{ e_i \}, i = \underline{1,n}$[7].

[7] Об определении базиса – см. ниже.

8°. Если вектор разлож*и*м по системе линейно независимых векторов, то *коэффициенты разложения определены* ***однозначно***.

В самом деле, пусть $\{a_i\}, i=\underline{1,k}$ – линейно независимая система векторов и $c=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot a_i$, $c=\sum_{i=1}^{k}\beta_i\cdot a_i$ – два разложения по этой системе вектора c. Тогда, очевидно,

$$\theta=c-c=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot a_i-\sum_{i=1}^{k}\beta_i\cdot a_i=\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i\cdot a_i-\beta_i\cdot a_i)=\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i-\beta_i)\cdot a_i\Leftrightarrow\alpha_i-\beta_i=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha_i=\beta_i,\ i=\underline{1,k},$$

поскольку ввиду линейной независимости векторов $a_1,\ldots,a_k$ их линейная комбинация может быть равна нуль-вектору θ лишь в одном случае – когда она тривиальная, т.е. все ее коэффициенты равны нулю.

Далее приводятся некоторые ключевые свойства линейных оболочек векторов.

9°. Пусть даны системы векторов $\{a_i\}, i=\underline{1,k}$, $\{b_j\}, j=\underline{1,m}$, $\{c_r\}, r=\underline{1,p}$, причем известно, что *каждая* линейная комбинация векторов $\{c_r\}$ содержится среди всевозможных линейных комбинаций векторов $\{b_j\}$. В свою очередь, любая линейная комбинация векторов $\{b_j\}$ содержится в множестве линейных комбинаций векторов $\{a_i\}$. Таким образом,

$(*)$ $\qquad L(c_1,\ldots,c_p)\subset L(b_1,\ldots,b_m)$,

$(**)$ $\qquad L(b_1,\ldots,b_m)\subset L(a_1,\ldots,a_k)$.

Тогда $L(c_1,\ldots,c_p)\subset L(a_1,\ldots,a_k)$, т.е. любая линейная комбинация векторов $\{c_r\}$ – элемент линейной оболочки векторов $\{a_i\}$.

Для доказательства замечаем: из отношения $(*)$ следует, что каждый вектор c_r, как частная форма линейной комбинации векторов системы $\{c_r\}$, разлож*и*м по системе $\{b_j\}$: $c_r\subset L(b_1,\ldots,b_m)$. Точно так же из отношения $(**)$ вытекает, что всякий вектор b_j

разлож***и***м по векторам системы $\{ a_i \}$. Взяв линейную комбинацию, выражающую вектор c_r через векторы $b_1, \dots, b_m$, подставим в нее вместо этих векторов их линейные выражения через векторы $a_1, \dots, a_k$. Получится линейное по этим последним векторам выражение для c_r. Сделав это для всех векторов системы $\{ c_r \}$, любую их линейную комбинацию сможем представить как линейную комбинацию векторов системы $\{ a_i \}$, а это и означает, что $L(c_1, \dots, c_p) \subset L(a_1, \dots, a_k)$.

Доказанное свойство называют ***транзитивностью линейной зависимости***.

10°. Пусть системы векторов $\left\{ b_1, \dots, b_m \right\}$ и $\{ a_1, \dots, a_k \}$ линейно независимы и справедливо включение $L(b_1, \dots, b_m) \subset L(a_1, \dots, a_k)$. Тогда $m \le k$. Словесная форма этого утверждения такова. Если любая линейная комбинация линейно независимых векторов первой системы линейно выражается через векторы второй линейно независимой системы, то число векторов в первой системе не может превосходить числа векторов во второй. Это свойство иногда называют ***монотонностью числа линейно независимых векторов***, поскольку из некоторого количества таких векторов ***невозможно при помощи линейного комбинирования построить большего числа линейно независимых комбинаций***.

Чтобы доказать это утверждение, сперва заметим, что по условию вектор b_1, как частная форма линейной комбинации векторов $b_1, \dots, b_m$, содержится в линейной оболочке $L(a_1, \dots, a_k)$, т.е выражается в виде линейной комбинации векторов $a_1, \dots, a_k$. Но тогда система векторов $\{ b_1; a_1, \dots, a_k \}$ линейно зависима по свойству **2°**. Далее, поскольку системы $b_1, \dots, b_m$, $a_1, \dots, a_k$ линейно независимы, среди этих векторов нет нуль-вектора θ. Отсюда по свойству **3°** заключаем: среди векторов $b_1; a_1, \dots, a_k$ найдется такой, который линейно выражается через предыдущие. Ясно, что это не b_1, так как он первый в списке, и без ограничения общности будем считать, что среди оставшихся векторов указанным свойством обладает вектор a_k. В самом деле, хотя выше система векторов и была определена как их *упорядоченная* совокупность, но в силу коммутативности сложения векторов ее линейная зависимость или независимость *инвариантна* относительно изменения порядка ее векторов. Проще говоря, векторы можно упорядочить (перенумеровать) как угодно иначе, в результате чего линейно независимая (зависимая) система таковой и останется, поскольку ***в вопросе линейной зависимости важен лишь состав системы, но не порядок векторов в ней***.

Таким образом, обнаружив среди векторов $a_1,\ldots,a_k$ в системе $\{b_1;a_1,\ldots,a_k\}$ тот, который выражается линейно через предыдущие, поставим его на последнее место, добавив в его выражение через предшествовавшие ему *до* перестановки векторы вновь появившиеся у него *после* перестановки предшествующие векторы с нулевыми коэффициентами. В итоге выразим a_k линейно через $b_1;a_1,\ldots,a_{k-1}$ и сможем утверждать, что $a_k\in L(b_1;a_1,\ldots,a_{k-1})$. Теперь замечаем, что $L(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k)\subset L(b_1;a_1,\ldots,a_{k-1})$, т.к. векторы $a_1,\ldots,a_{k-1}$ содержатся в системе $\{b_1;a_1,\ldots,a_{k-1}\}$, а вектор a_k разлож***и***м по ней, как показано выше. По условию $L(b_1,\ldots,b_m)\subset L(a_1,\ldots,a_k)$, а тогда транзитивность линейной зависимости позволяет сделать вывод: $L(b_1,\ldots,b_m)\subset L(b_1;a_1,\ldots,a_{k-1})$.

Продолжаем рассуждения в том же духе: раз вектор b_2 содержится среди $b_1,\ldots,b_m$, а $L(b_1,\ldots,b_m)\subset L(b_1;a_1,\ldots,a_{k-1})$, то b_2 разлож***и***м по системе $\{b_1;a_1,\ldots,a_{k-1}\}$, так что система векторов $\{b_2,b_1;a_1,\ldots,a_{k-1}\}$ линейно зависима и в ней найдется вектор, разложимый по предыдущим. Это не b_2 и не b_1 (разложимость b_1 по предыдущим векторам, т.е. в данном случае по b_2, означала бы линейную зависимость векторов b_1,b_2, которая исключена в силу того, что это подсистема линейно независимой системы $\{b_1,\ldots,b_m\}$ – см. свойство **3°**). Среди оставшихся векторов $a_1,\ldots,a_{k-1}$ таковым без ограничения общности считаем a_{k-1}: $a_{k-1}\in L(b_2,b_1;\,a_1,\ldots,a_{k-2})$. Отсюда $L(b_1;a_1,\ldots,a_{k-1})\subset L(b_2,b_1;\,a_1,\ldots,a_{k-2})$ и в силу доказанного выше включения $L(a_1,\ldots,a_k)\subset L(b_1;a_1,\ldots,a_{k-1})$ получаем: $L(a_1,\ldots,a_k)\subset$ $\subset L(b_2,b_1;\,a_1,\ldots,a_{k-2})$, а тогда $L(b_1,\ldots,b_m)\subset L(b_2,b_1;\,a_1,\ldots,a_{k-2})$ – результат второго шага доказательства.

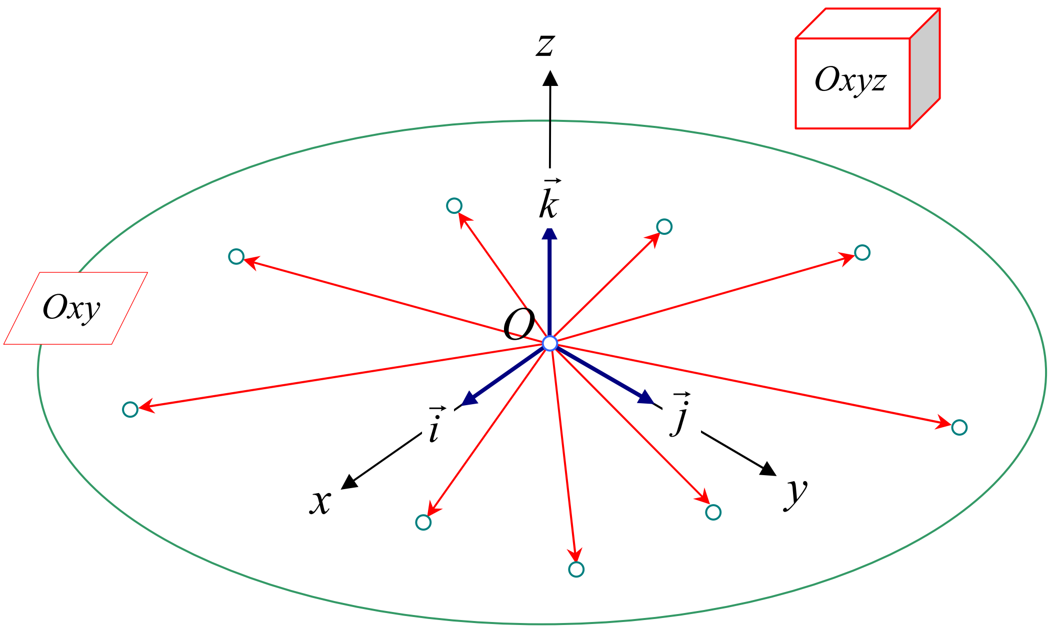
Допустим теперь, что $m>k$. Тогда после k шагов (первые два выполнены выше) все аргументы «a» справа пропадают и получается: $L(b_1,\ldots,b_m)\subset L(b_k,b_{k-1},\ldots,b_1)$. Отсюда $b_{k+1}\in L(b_k,\ldots,b_1)$[8], так что векторы $b_{k+1},b_k,\ldots,b_1$ линейно зависимы, что невозмож-

[8] m – не меньше $k+1$, т.е. b_{k+1} – среди векторов $b_1,\ldots,b_m$.

но по условию на основании свойства **3°**. Поэтому необходимо $m \le k$ и требуемое доказано.

▲ Выведите из доказанного, что, как уже говорилось выше, из некоторого количества линейно независимых векторов невозможно построить б*о*льшего числа линейно независимых линейных комбинаций.

Геометрическая интерпретация свойства 10°



Отождествим линейные комбинации ортов д.п.с.к. с их концами. Тогда $L(\vec{i},\vec{j}) = \{\alpha_1 \cdot \vec{i} + \alpha_2 \cdot \vec{j},\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ – это координатная плоскость Oxy, вложенная в пространство $Oxyz$, которому отвечает линейная оболочка $L(\vec{i},\vec{j},\vec{k}) = \{\alpha_1 \cdot \vec{i} + \alpha_2 \cdot \vec{j} + \alpha_3 \cdot \vec{k},$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$: $L(\vec{i},\vec{j}) \subset L(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. В соответствии со свойством **10°** линейная оболочка $L(\vec{i},\vec{j})$, определяющая плоскость, есть линейная оболочка линейно независимой системы *меньшего* числа векторов, чем линейная оболочка $L(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, определяющая все пространство.

Из двух линейно независимых векторов $\vec{i},\vec{j}$ невозможно «сделать» 3 и более линейно независимых линейных комбинации, т.е. «выйти» из плоскости Oxy.

БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ОБОЛОЧКИ ВЕКТОРОВ

Пусть дана система векторов $\{a_1,\ldots,a_k\}$ и $V = L(a_1,\ldots,a_k)$ – ее линейная оболочка.

◀**Определение**▶

Линейно независимая система векторов $\{b_1,\ldots,b_m\}$ из V называется ***базисом*** линейной оболочки V, если $L(b_1,\ldots,b_m) = V$, то есть всякий вектор из V разлож***и***м по системе $\{b_1,\ldots,b_m\}$.

Можно сказать, что *множество линейных комбинаций базисных векторов* ***исчерпывает*** *эту оболочку* (в ней нет ни одного вектора, который не являлся бы некоторой линейной комбинацией этих векторов), так что $L(b_1,\ldots,b_m) = L(a_1,\ldots,a_k)$.

11°. •ТЕОРЕМА О БАЗИСАХ•

Любой базис линейной оболочки V содержит одно и то же число векторов.

Доказательство

Пусть $b_1,\ldots,b_m$ и $c_1,\ldots,c_p$ – два базиса линейной оболочки V некоторой системы векторов. Тогда по определению базиса

$$\begin{cases} L(b_1,\ldots,b_m) = V \\ L(c_1,\ldots,c_p) = V \end{cases} \Leftrightarrow L(b_1,\ldots,b_m) = L(c_1,\ldots,c_p)$$

[9], что в свою очередь равносильно утверждению

$$\begin{cases} L(b_1,\ldots,b_m) \subset L(c_1,\ldots,c_p) \\ L(c_1,\ldots,c_p) \subset L(b_1,\ldots,b_m) \end{cases}$$

, из которого в соответствии с монотонностью числа линейно независимых векторов выводим, что $\begin{cases} m \le p \\ p \le m \end{cases} \Leftrightarrow m = p$, что и требовалось доказать.

◀**Определение**▶

Число векторов базиса линейной оболочки V некоторой системы векторов называется ее ***размерностью*** и обозначается $\dim V$.

---

[9] Это *равенство двух множеств*.

Если задана некоторая система векторов $\{a_1,\ldots,a_k\}$, то вполне естественным является вопрос: нельзя ли построить базис ее линейной оболочки $L(a_1,\ldots,a_k)$, не привлекая никаких линейных комбинаций векторов $a_1,\ldots,a_k$, кроме простейших – то есть. самих этих векторов.

Ответ положительный. В самом деле, если среди векторов системы есть ненулевой[10], то в системе имеется ***максимальная*** *линейно независимая подсистема* векторов. Справедливость этого утверждения обусловлена тем, что число подсистем системы, содержащей *конечное* количество векторов, само *конечно* и каждая из них либо линейно зависима, либо линейно независима. Понятно, что среди также конечного числа линейно независимых подсистем имеется подсистема, содержащая наибольшее число векторов.

◄Определение►

Максимальная линейно независимая подсистема называется ***базой*** (иногда также базисом) данной системы.

Если в системе векторов найдена база, то любой вектор системы, не входящий в базу, разлож***и***м по ней. Для нулевого вектора (если он содержится в системе) такое разложение есть, очевидно, тривиальная линейная комбинация векторов базы. Если же берется ненулевой вектор, то добавим его к базе на последнее место и применим к полученной системе векторов свойство **3°**. Заметим, что ни один из векторов базы не разлагается по предыдущим в силу линейной независимости ее векторов. Если добавленный вектор не разлагался бы по базе, то в полученной системе ни один вектор не разлагался бы по предыдущим. Поскольку все они ненулевые, то система оказалась бы линейно независимой. Однако, это вошло бы в противоречие с максимальностью линейно независимой подсистемы векторов, образующих базу исходной системы[11].

На основании этого можем утверждать: *всякая линейная комбинация векторов системы есть также и некоторая линейная комбинация векторов ее базы*. В силу того, что база есть подсистема системы векторов, верн***о*** и обратное утверждение: *всякая линейная комбинация векторов базы есть и некоторая линейная комбинация векторов всей системы*.

---

[10] Выше было показано, что единственный ненулевой вектор составляет линейно независимую систему, см. свойство **1°**.

[11] Среди векторов системы нет большего числа линейно независимых векторов, чем в базе.

Стало быть, множества линейных комбинаций векторов базы и линейных комбинаций векторов системы совпадают, то есть линейные оболочки векторов базы и всей системы равны. По определению это означает, что *всякая база системы векторов является базисом ее линейной оболочки*.

Исчерпывается ли, однако, множество баз системы векторов множеством ее подсистем, являющихся базисами в ее линейной оболочке? ***Ответ утвердительный***: среди подсистем системы, являющихся базисами ее оболочки, нет такой, которая не была бы при этом максимальной линейно независимой ее подсистемой – ее базой.

В самом деле, пусть некоторая подсистема системы векторов – базис ее линейной оболочки. Раз любая база системы, как доказано выше, – тоже базис этой линейной оболочки, то они содержат одинаковое количество векторов. Поэтому выбранная подсистема состоит из наибольшего возможного числа линейно независимых векторов системы и является ее базой.

В результате доказано:

12°. Подсистема системы векторов является базисом ее линейной оболочки ***тогда и только тогда, когда*** она является базой этой системы.

13°. **•ТЕОРЕМА О РАЗМЕРНОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ОБОЛОЧКИ•**

Размерность линейной оболочки системы векторов $\{a_1,\ldots,a_k\}$ не превосходит количества векторов в системе: $\dim L(a_1,\ldots,a_k)\le k$.

Действительно, база системы векторов является по доказанному выше базисом в $L(a_1,\ldots,a_k)$. Будучи подсистемой в системе из k векторов, она содержит не превосходящее k количество векторов. Но это количество по определению и есть размерность линейной оболочки $L(a_1,\ldots,a_k)$.

14°. В системе векторов и ее линейной оболочке *одно и то же максимальное количество линейно независимых векторов*. Иными словами, базис линейной оболочки системы векторов, как и базу системы, можно трактовать как максимальную линейно независимую подсистему векторов этой линейной оболочки[12].

[12] Обращаем внимание читателя на то, что линейная оболочка *конечного* множества векторов представляет собой ***бесконечное*** *множество* их линейных комбинаций.

Положим $V = L(a_1,\ldots,a_k)$ и пусть $\{e_1,\ldots,e_m\}$ – базис в V. Допустим, что в V имеется $r > m$ линейно независимых векторов $b_1,\ldots,b_r$. Поскольку множество линейных комбинаций базисных векторов исчерпывает всю линейную оболочку V, то ее векторы $b_1,\ldots,b_r$ сами являются некоторыми линейными комбинациями векторов $e_1,\ldots,e_m$, а тогда и любая линейная комбинация векторов $b_1,\ldots,b_r$ – тоже некоторая линейная комбинация указанных векторов. Отсюда вытекает, что $L(b_1,\ldots,b_r) \subset L(e_1,\ldots,e_m)$.

По свойству **10°** с учетом линейной независимости систем $\{b_i\}, i=\underline{1,r}$ и $\{e_s\}, s=\underline{1,m}$ заключаем, что $r \le m$ – ***противоречие***. Следовательно, *базис в* V *– это* ***максимальная*** *линейно независимая система векторов* V. Число векторов в ней – такое же, как и в базе системы $\{a_1,\ldots,a_k\}$, породившей оболочку V (оно равно $\dim V$).

15°. Дополним свойство **10°** следующим утверждением: если $\{b_1,\ldots,b_m\}$, $\{a_1,\ldots,a_m\}$ – линейно независимые системы векторов, причем $L(b_1,\ldots,b_m) \subset L(a_1,\ldots,a_m)$, то $L(b_1,\ldots,b_m) = L(a_1,\ldots,a_m)$.

Для доказательства заметим, что $\dim L(a_1,\ldots,a_m) = m$, поскольку $\{a_1,\ldots,a_m\}$ – максимальная линейно независимая подсистема в $\{a_1,\ldots,a_m\}$ Допустим теперь, что в линейной оболочке $L(a_1,\ldots,a_m)$ есть вектор $a \ne \theta$, неразложимый по системе $\{b_1,\ldots,b_m\}$.

Заметим, что раз $L(b_1,\ldots,b_m) \subset L(a_1,\ldots,a_m)$, то все векторы $\{b_i\}, i=\underline{1,m}$, как частные формы линейных комбинаций самой системы $\{b_1,\ldots,b_m\}$, лежат в линейной оболочке $L(a_1,\ldots,a_m)$: $b_1,\ldots,b_m \in L(a_1,\ldots,a_m)$. Рассмотрим теперь систему из $(m+1)$ – го вектора $\{b_1,\ldots,b_m; a\}$. Каждый из них принадлежит $L(a_1,\ldots,a_m)$, все они ненулевые и ни один из них не разлагается по предыдущим. Отсюда по следствию из свойства **3°** вытекает, что эта система линейно независима. Однако наибольшее возможное число линейно независимых векторов в $L(a_1,\ldots,a_m)$ совпадает с размерностью этой линейной оболочки и равно m.

Полученное противоречие доказывает, что всякий вектор из оболочки $L(a_1,\ldots,a_m)$ разлож***и***м по системе $\{b_1,\ldots,b_m\}$, а тогда $L(a_1,\ldots,a_m) \subset L(b_1,\ldots,b_m)$.

Из системы включений $\begin{cases} L(b_1,\ldots,b_m) \subset L(a_1,\ldots,a_m) \\ L(a_1,\ldots,a_m) \subset L(b_1,\ldots,b_m) \end{cases}$ следует, что линейные оболочки обеих систем равны: $L(b_1,\ldots,b_m) = L(a_1,\ldots,a_m)$, что и требовалось доказать.

16°. Пусть S – некоторая система векторов, $L(S)$ – ее линейная оболочка и $\dim L(S) = m$. Далее, пусть S_1 – некоторая подсистема в S, $L(S_1)$ – линейная оболочка этой подсистемы и известно, что она содержит в себе базис $\mathbb{e}$ оболочки $L(S)$. Тогда в $L(S_1)$ гарантировано наличие m линейно независимых векторов – это базисные векторы из $\mathbb{e}$. Далее, всякий другой вектор из $L(S_1)$, как линейная комбинация векторов подсистемы в S, является и линейной комбинацией векторов всей системы S.[13] Следовательно, взятый вектор из $L(S_1)$ разлож***и***м по $\mathbb{e}$ и в $L(S_1)$ нет б***о***льшего чем m числа линейно независимых векторов. Это означает по свойству **14°**, что $\dim L(S_1) = m$, а тогда $\mathbb{e}$ является также и базисом в $L(S_1)$. Отсюда по определению базиса линейной оболочки следует, что $L(\mathbb{e}) = L(S) = L(S_1)$.

Допустим теперь, что в подсистему S_1 входит m векторов. Тогда все они линейно независимы, поскольку в противном случае база S_1 состояла бы менее чем из m векторов и по свойству **14°** было бы $\dim L(S_1) < m$, что исключено. Следовательно, подсистема S_1 в рассматриваемом случае *сама является базисом* в $L(S)$ и в $L(S_1)$.

Предположим, что дана система векторов $\{a_1,\ldots,a_k\}$ и в ее линейной оболочке $V = L(a_1,\ldots,a_k)$ найдены *линейно независимые* векторы $b_1,\ldots,b_m$. Спрашивается, нельзя ли использовать их как «материал» для построения некоторого базиса в V, если система $\{b_1,\ldots,b_m\}$ – еще не базис? ***Ответ утвердительный***:

17°. Любая линейно независимая система векторов в $L(a_1,\ldots,a_k)$, не являющаяся ее базисом, является подсистемой некоторого ее базиса и ***может быть дополнена до него***.

Утверждение основано на том, что к любой такой системе можно присоединить еще один вектор, неразложимый по векторам системы (будь это не так, т.е. если бы *любой*

[13] Поскольку любой вектор из S_1 есть также и вектор из S.

вектор из V линейно выражался через векторы системы, она сама была бы базисом).

После такого присоединения получается линейно независимая система с увеличившимся на 1 числом векторов. Обоснование ее линейной независимости таково: ставим добавляемый к системе вектор на *последнее место* и получаем систему, в которой, во-первых, все векторы ненулевые, и, во-вторых, ни один из них не разлагается по предыдущим, что по свойству **3°** не было бы возможно, если бы система была линейно зависима.

Описанную процедуру следует повторять до тех пор, пока число векторов в системе не станет равно $\dim V$, а сама эта система – базисом в V.

▲ Векторы $\{a_1,\ldots,a_{k+1}\}$ линейно независимы. Докажите, что в линейной оболочке $L(a_1,\ldots,a_{k+1})$ существует базис, не содержащий ни одного вектора из линейной оболочки $L(a_1,\ldots,a_k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ О СУЩЕСТВОВАНИИ БАЗИСА

Из доказанного в пункте **17°** вытекает, что базис в линейной оболочке существует, если в ней существует линейно независимая подсистема векторов. Такой подсистемы не отыщется лишь в одном случае – когда линейная оболочка *нулевая*, т.е. состоит из единственного вектора $\theta: L = L(\theta)$. По определению $\dim L(\theta) = 0$.

Линейная оболочка конечной системы векторов – это пример т.н. ***линейного пространства*** (линейным пространствам и их свойствам будет уделено значительное место в данном курсе линейной алгебры). В общем случае линейное пространство может быть устроено так, что в нем для любого $n \in \mathbb{N}$ существует система из n линейно независимых векторов.

Такое линейное пространство называется ***бесконечномерным***, и *в нем нет базиса*.

РАНГ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

◀Определение▶

Пусть дана система векторов $S = \{a_1,\ldots,a_k\}$. Количество векторов ее базы (совпадающее с размерностью линейной оболочки $L(S)$) называется ***рангом системы*** и обозначается $\operatorname{Rg} S$; по определению полагают $\operatorname{Rg}\{\theta\} = 0$ (ранг системы, состоящей из одного нулевого вектора, *равен нулю*).

Из сказанного выше заключаем:

ранг системы векторов равен максимальному числу линейно независимых векторов в этой системе.

СВОЙСТВА РАНГА СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

1). Ранг системы векторов не превосходит числа векторов в системе (это очевидное следствие теоремы о размерности линейной оболочки, см. **13°**).

2). Если система векторов линейно зависима, то ее ранг строго меньше числа векторов в системе, а если она линейно независима, то он равен числу векторов в ней **(докажите)**.

3). Если каждый вектор системы S_1 разлагается по векторам системы S_2, то $\operatorname{Rg} S_1 \le \operatorname{Rg} S_2$.

Пусть BS_1, BS_2 – базы систем S_1, S_2 соответственно. Поскольку база системы векторов – это базис ее линейной оболочки, то по определению базиса $L(BS_1) = L(S_1)$, $L(BS_2) = L(S_2)$. Раз по условию каждый вектор системы S_1 разлагается по векторам системы S_2, то $L(S_1) \subset L(S_2)$, а тогда и $L(BS_1) \subset L(BS_2)$. По свойству **10°** монотонности числа линейно независимых векторов заключаем, что число векторов в BS_1 не превосходит числа векторов в BS_2. Остается вспомнить определение ранга системы и вывести отсюда доказываемое неравенство $\operatorname{Rg} S_1 \le \operatorname{Rg} S_2$.

Следствия

•а). Если для двух систем векторов S_1, S_2 всякий вектор первой из них разлагается по векторам второй и одновременно всякий вектор второй системы разлагается по векторам первой, то $\operatorname{Rg} S_1 = \operatorname{Rg} S_2$ **(докажите)**.

•**б).** Ранг системы векторов не изменится, если в ней поменять местами два вектора **(докажите)**.

•**в).** Ранг системы векторов не изменится, если некоторый вектор системы умножить на число, не равное нулю **(докажите)**.

•**г).** Ранг системы векторов не изменится, если к некоторому ее вектору прибавить другой ее вектор **(докажите)**.

•д). Если $\operatorname{Rg} S = k$, то каждая линейно независимая подсистема системы S, состоящая из k векторов, является базой системы S **(докажите)**.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ[14]

Аналогично тому, как в **Лекции 1** были определены элементарные преобразования строк или столбцов матрицы, определим *элементарные преобразования* ***векторов*** в некоторой их системе как переход от нее к новой системе при помощи одного из действий, описанных только что в пунктах **б). – г).**

Стало быть, к элементарным преобразованиям векторов в некоторой системе относятся:

1. Перестановка (транспозиция) двух векторов системы.
2. Умножение вектора системы на число, не равное нулю.
3. Прибавление к вектору системы другого ее вектора.

Комбинируя эти три действия, можно построить более сложные преобразования системы. Например, изменение порядка (произвольная перестановка) векторов системы представляет собой композицию перестановок пар векторов системы, а сложение вектора системы с другим ее вектором, умноженным на число, есть композиция второго и третьего элементарных преобразований системы.

Из следствий **б). – г).** можно сделать теперь ***важный вывод:***

Элементарные преобразования векторов в некоторой их системе не меняют ранга этой системы.

[14] Вместо слов «элементарные преобразования системы векторов» часто говорят также «элементарные преобразования векторов системы».

Очевидно, сказанное относится к любой композиции конечного числа элементарных преобразований системы.

◆**Замечание**

Как и в случае элементарных преобразований строк (столбцов) матрицы, для преобразования, состоящего в сложении вектора системы с другим ее вектором, умноженным на число, снимается требование отличия этого числа от нуля (см. **Лекцию 1**).

Переходим к практической стороне проблематики, связанной с рассмотренными выше фундаментальными понятиями линейной зависимости и независимости векторов, базы системы векторов и базиса ее линейной оболочки.

К основным задачам здесь можно отнести следующие.

А. Дана система векторов (их компоненты – конкретные числа). Выяснить, является ли система линейно зависимой или независимой. К вопросу об *индикаторе линейной зависимости* мы еще вернемся несколько позже в лекции об определителях. Пока же можем пользоваться лишь данными выше определениями.

◆**Примеры:**

1). $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Составим линейную комбинацию этих векторов *с неизвестными коэффициентами* (выше они часто обозначались посредством букв α, β, γ греческого алфавита; здесь же будет полезно по школьной традиции назвать их x_1, x_2, x_3) и займемся изучением возможности ее обращения в нулевой вектор.

Итак, пусть

(2.6) $x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3 = \theta$, или в развернутой форме

(2.6)' $$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку операции над векторами выполняются покомпонентно, можем записать следующую эквивалентную равенству **(2.6)'** систему уравнений

(2.6)'' $$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + (-3) \cdot x_3 = 0 \\ (-1) \cdot x_1 + (-2) \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$ [15].

Введенное в **Лекции 1** правило умножения матриц позволяет дать еще такую компактную и равносильную **(2.6)**, **(2.6)'**, **(2.6)''** *матричную форму* рассматриваемого уравнения

(2.6)''' $A \cdot X = B$, где

- $A(4 \times 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ – ***матрица (коэффициентов) системы***, содержащей 4 (m) *линейных уравнения* относительно $3 - х$ (n) неизвестных;

[15] В дальнейшем изложении будем в основном придерживаться традиционных соглашений относительно записи подобных формул. В соответствии с этими соглашениями множитель «1» на письме отсутствует, равно как и слагаемые с нулевыми коэффициентами.

• $X(3\times1)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ – ***вектор-столбец*** этих ***неизвестных***;

• $B(4\times1)=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}$ – ***вектор-столбец правых частей (свободных членов)***, совпадающий в рассматриваемом случае с нуль-вектором $\theta(4\times1)$.

Если трактовать матрицу A как строку из ее столбцов, можем еще записать

(2.6)’’’’ $A=(a_1\quad a_2\quad a_3)\Rightarrow$ **(2.6)** $\Leftrightarrow$ $(a_1\quad a_2\quad a_3)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1a_1+\ldots+x_na_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Можно заметить, что уравнение вида **(2.6)’’’** является обобщением[16] школьного уравнения $ax=b$, а весь предшествующий материал во многом подготавливал почву для восприятия такого обобщения.

➔ В целом ряде важных задач линейной алгебры, примеры решения которых даны ниже, *исследование системы линейных уравнений*, или равносильного ей матричного уравнения $A\cdot X=B$, *полезно толковать как решение вопроса* ***о разложимости вектора*** B ***по системе столбцов матрицы*** A. Формулы **(2.6)**, **(2.6)’** показывают, что дело сводится к выяснению существования и нахождению коэффициентов этого разложения, в роли которых выступают неизвестные x_1-x_n.

Таким образом, система линейных уравнений, равносильная форма которой есть $x_1a_1+\ldots+x_na_n=B$, ***совместна***, то есть имеет решение вида $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$,[17] если найдутся

---

[16] Все последующее изложение ставит целью показать, что это обобщение принадлежит к числу тех, которые принято называть «далеко идущими».

[17] Хотя бы одно.

числа $x_1 - x_n$, удовлетворяющие этому равенству при заданных матрицах A, B. Это означает, что столбец свободных членов разложи**и**м по системе $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ столбцов матрицы A этой системы. В противном случае система ***несовместна***.

На основании критерия линейной зависимости системы векторов, можем утверждать, что в случае, когда линейная система $A \cdot X = B$ имеет решение, система векторов $\{a_1, \ldots, a_n; B\}$ линейно зависима **(означает ли несовместность линейной системы линейную независимость этой системы векторов?)**.

Линейные системы общего вида и свойства их решений подробно изучаются в следующих лекциях, а пока плотнее займемся нашей частной задачей **(2.6)’’**.

Полезно прямо теперь познакомиться с ключевой идеей решения линейных систем (всех вообще!), известной в линейной алгебре под названием «***метод Гаусса***», в основе которого лежит уже применявшееся при отыскании обратных матриц *преобразование Гаусса-Жордана*.

Это преобразование применительно к решению линейных систем есть равносильное преобразование системы, сводящее ее к системе, легко разрешимой относительно неизвестных (почти так же легко, как в одномерном случае). ***Цель преобразования*** – сделать (по возможности) так, чтобы в преобразованной системе каждая из неизвестных компонентов вектора X содержалась лишь в одном из уравнений системы, а остальные неизвестные были из него *исключены*. Неслучайно и сам метод Гаусса именуют поэтому методом последовательного исключения неизвестных (идеологически он весьма близок к школьным приемам решения систем уравнений).

Смысловым ядром описываемых преобразований является следующая совокупность утверждение.

Произвольная система линейных уравнений переходит в равносильную систему, если в ней:

⇨**I.** поменять местами любые два уравнения;

(2.7) ⇨**II.** умножить любое уравнение на число, не равное нулю;

⇨**III.** прибавить к любому уравнению некоторое другое уравнение, умноженное на любое число.

(Докажите истинность утверждений I – III).

Легко заметить, что описанные в **(2.7)** преобразования системы на языке матричной алгебры – не что иное, как элементарные преобразования строк матрицы $(A|B)$, которая называется ***расширенной матрицей системы***.

■Заметим, что если в ходе описанных преобразований в преобразуемой матрице $(A|B)$ возникает *строка из нулей*, то это означает, что в данной системе получилось уравнение, в котором все коэффициенты при неизвестных и его правая часть – нули. Поскольку такое уравнение для любого набора неизвестных, то *его отбрасывание не изменяет множества решений системы*. В соответствии с этим нулевые строки в матрице $(A|B)$ можно отбрасывать[18].

■Далее, если в ходе преобразований получится уравнение, в котором все коэффициенты при неизвестных – нули, а его правая часть при этом отлична от нуля, то это будет означать *несовместность системы* (в школе было, например, $0\cdot x=1$ и т.п. – образец несовместного линейного уравнения относительно одной неизвестной).

Какому же порядку подчинить теперь последовательность преобразований системы, или, что то же, ***как конкретно*** *исключать неизвестные из ее уравнений*?

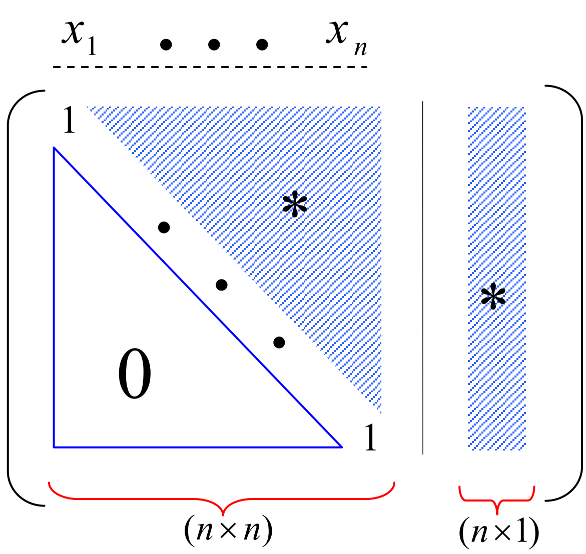
Если понять, что исключение неизвестных соответствует обнулению коэффициентов при них в этих уравнениях и вспомнить предшествующие опыты с элементарными преобразованиями строк матриц, то нетрудно допустить, что цель и в данном случае аналогичная – диагонализация в «зоне A» расширенной матрицы $(A|B)$. В самом деле, если представить себе, что в этой зоне в итоге преобразований оказалась единичная матрица, порядок которой совпадает с числом неизвестных, то их исключение прошло «идеально». А именно, в первом уравнении остался лишь x_1, во втором – только $x_2,\ldots,$ в последнем n–м – только x_n. Поэтому ясно, что в таком случае система ***совместна***, *имеет* ***единственное*** *решение* X, компоненты которого – это числа в преобразованной «зоне B».

[18] Такое отбрасывание не является обязательным и традиционно выполняется лишь в целях экономии письма. В ряде случаев нагляднее не делать отбрасывания, перемещая нулевые строки на последние места в преобразованной расширенной матрице системы.

Легко подметить, что подобная «идеальная» ситуация иногда *принципиально невозможна*. Например, она не может возникнуть при решении системы из одного уравнения относительно любого большего 1 числа неизвестных. Поэтому в общем случае, когда как в начале, так и в конце преобразований зона A – необязательно квадратная, будем требовать только, чтобы *диагональ из единиц* (составлена из элементов зоны A с одинаковыми индексами) *достигла последней* (ненулевой) *строки в зоне* A. Понятно, что такому расширительному требованию будет удовлетворять и рассмотренный выше «идеальный» случай.

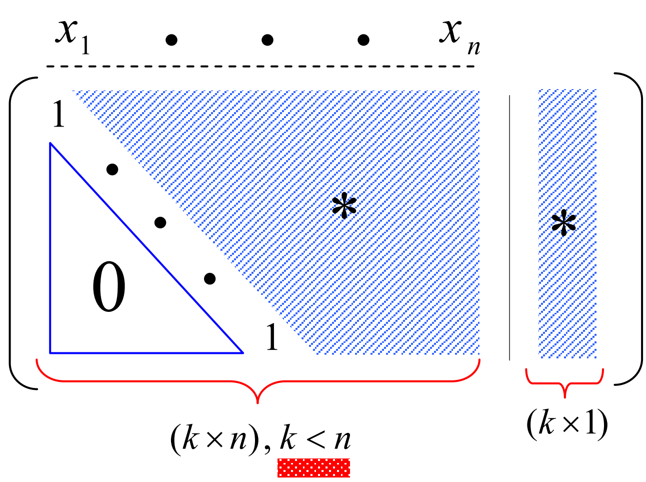
Тогда возможны лишь два исхода процедуры исключения неизвестных (если раньше не будет установлена несовместность системы), схематически изображенные ниже – итог т.н. ***прямого хода метода Гаусса***.

(2.8)



а. Треугольная зона A

(2.8)'



б. Трапецевидная зона A

В первом случае решение единственно. Действительно, из последнего уравнения ищем x_n, из предпоследнего, зная x_n, ищем $x_{n-1},\dots$, из первого, зная все предыдущие, – x_1.

Описанная процедура называется ***обратным ходом метода Гаусса***.

Заметим, что обратный ход сведется к описанной выше идеальной схеме, если преобразования в зоне A продолжить до возникновения в ней единичной матрицы $\mathbb{E}_n$ в соответствии со следующим алгоритмом. Складывая *последнюю* строку матрицы $(A|B)$, умножаемую на подходящие числа, с *вышележащими строками*, можно обратить в них все элементы *последнего* столбца в нули. Далее следует складывать со всеми вышележащими строками *предпоследнюю*, умножаемую на нужные числа, чтобы получить нули над предпоследней единицей *предпоследнего* столбца и т.д. вплоть до превращения зоны A в $\mathbb{E}_n$. После этого останется лишь выписать числа из зоны B в качестве решения системы.

Во втором случае система имеет бесконечно много решений, зависящих от $n-k$ параметров, где $1\le k\le n-1$. Роль таких параметров могут играть последние $n-k$ неизвестных, члены с которыми следует перенести в правые части, сводя дело при нахождении первых k неизвестных к первому случаю.

Подчеркнем здесь еще раз во избежание недоразумений, что строки в изображенных на рисунках **(2.8)**, **(2.8)’** матрицах – это образы видоизмененных по правилам **(2.7)** уравнений исходной системы, в которых для сокращения письма искомые неизвестные не пишут, а работают только с коэффициентами при них. Роль знаков равенства в уравнениях играет вертикальная черта в записи расширенной матрицы системы $(A|B)$.

Заметим: задача **(2.6)’’** – частная форма общей линейной системы с нулевыми правыми частями. Такие системы называют ***однородными***. Поскольку в процессе Гаусса-Жордана нулевые правые части уравнений таковыми и остаются, их обычно не пишут.

Легко понять, что любая однородная линейная система всегда имеет нулевое решение $x_1=\ldots=x_n=0$, соответствующее тривиальной линейной комбинации в **(2.6)**. Речь, таким образом, идет здесь фактически о том, *является ли оно единственным*.

Возвращаясь к решению системы **(2.6)’’** и следуя описанной схеме метода Гаусса, получаем:

$$A=\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 3 & -3\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}\end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & -1 & -13\\ 0 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & -1 & -13\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array} \text{ – конец прямого хода.}$$

Последнее уравнение системы имеет вид $1\cdot x_3=0 \Rightarrow x_3=0$. Тогда из предыдущего уравнения $1\cdot x_2+7\cdot x_3=0$ следует, что $x_2=0$. Наконец, из первого уравнения $1\cdot x_1+2\cdot x_2+5\cdot x_3=0$ с учетом найденного заключаем, что $x_1=0$.

Итак, система **(2.6)’’** имеет единственное решение $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$[19]. Это означает, что только *тривиальная* линейная комбинация векторов a_1,a_2,a_3 может быть равна нуль-вектору, так что *система векторов* $\{a_1,a_2,a_3\}$ *линейно независима*.

2). Прежнее условие для системы векторов $a_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ -2\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}, a_4=\begin{pmatrix}4\\ -1\\ -3\end{pmatrix}$.

Действуем, как и прежде (теперь линейная комбинация векторов система содержит 4 коэффициента x_1-x_4):

«отрезание» параметрических неизвестных

$$A=\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 4\\ -1 & -1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 3 & -3\end{pmatrix}\end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -11\end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{matrix}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2\\ 0 & 0 & 1 & -11\end{array}\right)\end{array} \text{ – конец прямого хода.}$$

квадратная часть зоны A

[19] Единственность решения немедленно следует из того, что в конце прямого хода метода Гаусса получился случай **(2.8)** с треугольной зоной A.

Положим $x_4 = C$ и перенесем слагаемые с x_4 в правые (здесь – нулевые) правые части уравнений. Тогда

$x_3 = 11C$;

$x_2 - \frac{x_3}{2} = \frac{3}{2}C \Rightarrow x_2 = \frac{x_3}{2} + \frac{3}{2}C = \left(\frac{11}{2} + \frac{3}{2}\right)C = 7C$;

$x_1 - x_2 + x_3 = -4C \Rightarrow x_1 = x_2 - x_3 - 4C = 7C - 11C - 4C = -8C$, так что окончательно

(2.9) $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8C \\ 7C \\ 11C \\ C \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}, C \in \mathbb{R} -$$ множество решений системы $\sum_{i=1}^{4} a_i \cdot x_i = \theta$,

зависящее от одного свободного параметра C.

Среди векторов **(2.9)** имеются такие, что $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \neq 0$, т.е. соответствующие линейные комбинации векторов $\{a_i\}, i = \underline{1,4}$ – нетривиальные (проверьте, например, что $-8 \cdot a_1 + 7 \cdot a_2 + 11 \cdot a_3 + 1 \cdot a_4 = \theta$; в **(2.9)** это соответствует значению $C = 1$).

Вывод:

Система векторов $\{a_i\}, i = \underline{1,4}$ *линейно зависима*.

◆**Замечания**

1). Иногда для получения форм **(2.8)**, **(2.8)'** требуется перестановка столбцов в зоне A. *Другие элементарные преобразования* ***столбцов*** ***запрещены***, поскольку они меняют смысл неизвестных, коэффициентами при которых служат элементы этих столбцов.

Сказанное иллюстрируется примером (сверху над матрицей удобно поместить *разметочную строку*, позволяющую контролировать порядок столбцов)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$ – конец прямого хода.

В данном случае необходимость в перестановке столбцов связана с тем, что перестановка строк и комбинирование второй и третьей из них не могут дать не равного нулю числа на позиции с индексами $(2,2)$.

2). Внимательно анализируя ход решения *однородной* системы линейных уравнений, можно придти к следующему ***важному выводу***.

Если изначально в системе число уравнений m меньше числа неизвестных n, то поскольку в ходе преобразований число строк в преобразуемой матрице $(A|\theta)$ (или A с учетом соглашения о нулевом столбце правых частей) может *только убывать*, если отбрасывать нулевые строки, а число столбцов в зоне A сохраняется, то в конце прямого хода метода Гаусса всегда будет получаться форма **(2.8)’**. Иными словами, такая система всегда будет иметь бесконечно много решений (*из-за наличия параметров*), среди которых есть нетривиальные (состоящие не из одних нулей). В самом деле, в решении часть неизвестных – свободные параметры, а остальные будут выражены через них линейно. Достаточно одной из *параметрических неизвестных* придать ненулевое значение, и какими бы ни оказались соответствующие значения всех остальных, получим одно из решений исходной линейной системы уравнений, не все состоящее из нулей.

Таким образом, столбцы матрицы $A(m\times n)$, $m<n$ оказываются *линейно зависимы*. Это обстоятельство ведет к такому ***общему заключению***:

➔ система $m-$мерных[20] векторов, состоящая ***более*** *чем из m векторов*, линейно зависима. В соответствующей матрице, составленной из компонентов этих столбцов, высота меньше ширины, т.е. в эквивалентной однородной линейной системе *число уравнений* (m) ***меньше*** *числа неизвестных* (n).

---

[20] Прилагательное «$m-$мерный» по отношению к вектору является синонимом словосочетаний «имеющий размеры $(m\times 1)$» или «состоящий из m элементов». Позже выяснится, что $m-$мерные векторы рассматриваемого вида – элементы т.н. $m-$*мерного* ***линейного пространства***. Понятие размерности пространства окажется фактически тождественным понятию размерности линейной оболочки, введенному выше.

Рассмотренный выше пример системы из $4-$х трехмерных векторов полностью подтверждает сказанное.

3). Выше говорилось о том, что система линейных уравнений может оказаться несовместной. Оказывается, что на культивируемом в данной лекции языке линейных оболочек и рангов систем векторов можно сформулировать ***фундаментальный критерий совместности*** таких систем, известный как ***теорема Кронеккера-Капелли***.

•ТЕОРЕМА КРОНЕККЕРА – КАПЕЛЛИ•

Система линейных уравнений $A\cdot X=B$, $A\in\mathcal{M}_{m,n}$, $X\in\mathcal{M}_{n,1}$, $B\in\mathcal{M}_{m,1}$ совместна (имеет решение) тогда и только тогда, когда $L(a_1,\dots,a_n)=L(a_1,\dots,a_n;B)$, т.е. линейные оболочки систем векторов $S_1=\{a_1,\dots,a_n\}$, где $\{a_i\}, i=\underline{1,n}-$ столбцы матрицы системы A, и $S_2=\{a_1,\dots,a_n;B\}-$ равны между собой.

Доказательство

•а). Заметим, что поскольку $S_1\subset S_2$, то линейная оболочка системы S_1 включена в линейную оболочку системы S_2: $L(a_1,\dots,a_n;B)$: $L(a_1,\dots,a_n)\subset L(a_1,\dots,a_n;B)$.

Далее, представим систему $A\cdot X=B$ в равносильной форме $\begin{pmatrix}a_1 & \dots & a_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=$

$=a_1\cdot x_1+\dots+a_n\cdot x_n=B$. В соответствии с этим равенством совместность системы означает, что столбец свободных членов B разлож***и***м по столбцам матрицы A, откуда следует, что $L(a_1,\dots,a_n;B)\subset L(a_1,\dots,a_n)$. Выходит, должна выполняться система включений

(∗) $\begin{cases}L(a_1,\dots,a_n)\subset L(a_1,\dots,a_n;B)\\ L(a_1,\dots,a_n;B)\subset L(a_1,\dots,a_n)\end{cases}$, а это и означает, что

(2.10) $L(a_1,\dots,a_n)=L(a_1,\dots,a_n;B)$, что и требовалось доказать.

•б). Пусть теперь верн***о*** равенство **(2.10)**. Тогда верн***о*** и второе включение **(∗)**, которое означает, что вектор B разлож***и***м по системе S_1 (остальные векторы S_2 –это векторы S_1 и их разложимость по S_1 очевидна).

Но это означает, что найдутся такие числа $x_1,\dots,x_n$, что $B = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n$, т.е. что исходная система совместна.

Поскольку равные линейные оболочки имеют равные размерности, совпадающие с рангами породивших их систем векторов S_1, S_2, то можно дать еще и такую формулировку теоремы Кронекера – Капели:

Система $A \cdot X = B$ совместна $\Leftrightarrow$

(2.11) $$\boxed{\operatorname{Rg} L(a_1,\dots,a_n) = \operatorname{Rg} L(a_1,\dots,a_n; B)}$$

Б. Сформулированный критерий совместности линейной системы вплотную подводит к необходимости выработать практические приемы *нахождения ранга заданной системы векторов*. К этой же задаче тесно примыкает проблема *нахождения базы* системы (количество векторов в ней и есть ранг).

Обе эти задачи фактически уже решены выше, однако, в несколько завуалированной форме. Цель состоит теперь в том, чтобы добиться здесь максимальной ясности.

Предположим, требуется найти ранг системы векторов $S_1 = \{ a_i \}$, $a_i \in \mathcal{M}_{m,1}$, $i = \underline{1,n}$, т.е. *определить количество векторов в максимальной линейно независимой подсистеме этой системы*.

Как можно было понять из сказанного выше в части **А.** (стр. 19), эта задача тесно связана со структурой решения линейной однородной системы уравнений

(2.12) $$\underbrace{A}_{(m\times n)} \cdot \underbrace{X}_{(n\times 1)} = \underbrace{\theta}_{(m\times 1)},$$

где элементы столбцов матрицы A – это соответственные элементы векторов $\{ a_i \}$, $i = \underline{1,n}$ нашей системы, а $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}$ – вектор–столбец неизвестных.

В дальнейшем, как и выше, удобно представить уравнение **(2.12)** в равносильной форме

(2.12)' $$x_1 \cdot a_1 + \dots + x_n \cdot a_n = \theta,$$

откуда вновь виден смысл неизвестных $\{x_i\}, i = \underline{1, n}$ как коэффициентов линейной комбинации векторов a_i, которая равна нуль-вектору.

1. Допустим, что в результате решения системы **(2.12)** методом Гаусса в конце прямого хода получается треугольная форма зоны A, см. **(2.8)**,[21] размер которой совпадает с числом векторов в системе S.

Это означает, что **(2.12)** имеет только тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$, т.е. система S линейно независима и поэтому $\operatorname{Rg} S = n$.

Преобразования **(2.7)** уравнений системы **(2.12)**, приведшие ее матрицу к виду **(2.8)**, тождественны с элементарными преобразованиями строк в A. Эти преобразования, как было показано в **Лекции 1**, равносильны умножению матрицы A слева на некоторую квадратную матрицу $\Pi \in \mathcal{M}_m$ – произведение элементарных матриц, реализующих каждое из сделанных элементарных преобразований.

В соответствии с **(2.12)’** запишем

(2.13) $$\Pi \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\Pi \cdot a_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \widehat{a_i} = \Pi \cdot \theta = \theta,$$

откуда видно, что «под действием» матрицы Π линейная комбинация векторов a_i переходит в линейную комбинацию *их **образов*** $\widehat{a_i} = \Pi \cdot a_i$ *с теми же коэффициентами*, а нуль-вектор – в себя (образы $\widehat{a_i}$ – это то, что мы видим на месте столбцов в зоне A в **(2.8)** с добавлением нулевых строк, если они отбрасывались в процессе преобразований).

Итак, перед нами отображения $S \xrightarrow{\Pi} \hat{S}$, $L(S) \xrightarrow{\Pi} L(\hat{S})$, причем последнее, как говорят, *сохраняет линейную структуру*: в согласии с **(2.13)** образ линейной комбинации векторов есть линейная комбинация их образов с теми же коэффициентами.

Общие свойства таких отображений буду рассматриваться в данном курсе позже. Пока же докажем практически важное утверждение: $\operatorname{Rg} S = \operatorname{Rg} \hat{S}$ – *элементарные преобразования строк матрицы, составленной по столбцам из компонентов векторов некото-*

[21] Напомним, что при решении однородных систем методом Гаусса столбец свободных членов остается нулевым и не выписывается.

рой системы, приводят к новой системе $\hat{S}$, ***ранг которой совпадает с рангом исходной системы***.

Доказательство

Заметим, что матрица Π, упомянутая выше, – обратима, т.е. $\exists \Pi^{-1}$. В самом деле, «отмена» любого элементарного преобразования строк матрицы *всегда выполнима* и сама является элементарным преобразованием. Например, отмена умножения строки матрицы на число, не равное нулю, есть умножение преобразованной строки на обратное число, тоже не равное нулю и т.п. Тогда из равенства $\Pi\cdot\theta=\theta$ выводим

$$\Pi^{-1}\cdot\Pi\cdot\theta=\begin{cases}\Pi^{-1}(\Pi\cdot\theta)=\Pi^{-1}\cdot\theta\\(\Pi^{-1}\cdot\Pi)\cdot\theta=\mathbb{E}\cdot\theta=\theta\end{cases},\text{ так что } \Pi^{-1}\cdot\theta=\theta.$$

Пусть теперь $\operatorname{Rg} S=k$ и в системе образов $\hat{S}$ найдется $r>k$ линейно независимых векторов:[22] $\alpha_1\cdot\widehat{a_1}+\ldots+\alpha_r\cdot\widehat{a_r}=\theta \Leftrightarrow \alpha_1^2+\ldots+\alpha_r^2=0$. Действуя матрицей Π^{-1} на обе части этого равенства, находим

$$\Pi^{-1}\cdot\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\cdot\widehat{a_j}\right)=\Pi^{-1}\cdot\left[\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\cdot\left(\Pi a_j\right)\right]=\left(\Pi^{-1}\cdot\Pi\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\cdot a_j\right)=\mathbb{E}\cdot\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\cdot a_j\right)=$$

$=\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\cdot a_j=\Pi^{-1}\cdot\theta=\theta\Leftrightarrow\alpha_1^2+\ldots+\alpha_r^2=0$. Но условие $\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\cdot a_j=\theta\Leftrightarrow\alpha_1^2+\ldots+\alpha_r^2=0$ означает, что лишь тривиальная линейная комбинация векторов a_j, $j=\underline{1,r}$ из S обращается в нуль-вектор и доказывает их линейную независимость. Однако максимальная линейно независимая подсистема в S содержит только $k=\operatorname{Rg} S<r$ векторов – ***противоречие***.

Итак, в $\hat{S}$ нет линейно независимой подсистемы, состоящей более чем из $k=\operatorname{Rg} S$ векторов. Однако, есть ли в ней линейно независимая подсистема из k векторов? ***Ответ утвердительный***. Действительно, пусть $\{b_j\}$, $j=\underline{1,k}$ – база в S, так что равенство $\sum_{j=1}^{r}\beta_j\cdot b_j=\theta$ возможно лишь для $\beta_1+\ldots+\beta_k=0$. Отсюда последует: $\Pi\cdot\left(\sum_{j=1}^{r}\beta_j\cdot b_j\right)=$

[22] Без ограничения общности считаем, что это k *первых* векторов $\hat{S}$.

$= \sum_{j=1}^{k} \beta_j \cdot \Pi(b_j) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \cdot \widehat{b_j} = \Pi \cdot \theta = \theta \Leftrightarrow \beta_1 + \ldots + \beta_k = 0$, что и влечет окончательный вывод: максимальная линейно независимая подсистема в $\hat{S}$, т.е. ее база, состоит из k векторов, или, что то же, $\operatorname{Rg} \hat{S} = \operatorname{Rg} S$ $(= k)$. Доказательство завершено.

▲ Докажите, что под действием Π линейно независимая система векторов переходит в линейно независимую систему их образов, а линейно зависимая система векторов соответственно в линейно зависимую систему образов.

◆**Замечание**

Мы можем теперь охарактеризовать рассматриваемый случай треугольной зоны A равенством $\operatorname{Rg} S = \operatorname{Rg} \hat{S} = n$. В этом случае линейная независимость образов $\{\widehat{a_i}\}, i = \underline{1,n}$[23] станет совсем очевидной, если пойти в преобразованиях несколько дальше, а именно, до формирования в зоне A единичного блока $\mathbb{E}_n$. Соответствующая последовательность действий уже была описана выше (см. стр.24). На основании опыта обращения матриц мы понимаем, что получив **(2.8)**, *всегда можно добиться требуемого*. В итоге образами векторов $\{a_i\}, i = \underline{1,n}$ окажутся векторы $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ размера $(n \times 1)$, возможно, «наращенные» некоторым *одинаковым* количеством нулей снизу (если $m > n$ и нулевые строки при получении формы **(2.8)** отбрасывались). Их линейная независимость доказана в п. **7°**, стр.7.

▲ Докажите, что «лишние» нули снизу не влияют на справедливость этого вывода.

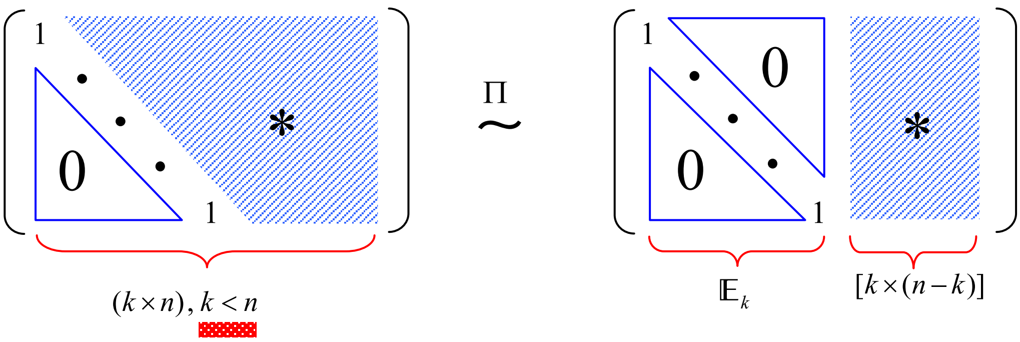
2. Пусть теперь в результате решения системы **(2.12)** методом Гаусса получится трапецевидная форма зоны A с $k < n$ строками и n столбцами. Покажем, что в этом случае $\operatorname{Rg} \hat{S} = \operatorname{Rg} S = k$.

Действительно, квадратную часть $(k \times k)$ зоны A[24] всегда можно преобразовать в единичный блок порядка k. Последовательность действий при этом – та же, что и опи-

[23] А тогда в соответствии с только что доказанным и их прообразов $\{a_i\}, i = \underline{1,n}$.

[24] Совокупность элементов преобразованной матрицы системы, стоящих в k первых ее строках и k первых столбцах.

санная выше для первого случая, но «приложенная» к указанной зоне. Она отражена схематически на следующем рисунке



Образующие блок $\mathbb{E}_k$ векторы $e_1=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ldots,e_k=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ размера $(k\times 1)$ линейно независимы[25] и являются базой в $\hat{S}$, поскольку любой из остающихся $n-k$ векторов-столбцов разлагается по системе $\{e_i\},\ i=\underline{1,k}$, так что большего, чем k количества линейно независимых векторов в $\hat{S}$ нет.

Как и прежде, наличие «добавленных» нулей в образах $\widehat{a_i},\ i=\underline{1,n}$, связанных с возможным отбрасыванием нулевых строк в матрице A в процессе преобразований, на справедливость этих выводов не влияет **(подробно объясните, почему?)**.

Итак, в рассматриваемом случае $\mathrm{Rg}\,\hat{S}=\mathrm{Rg}\,S=k<n$, а базу в $\hat{S}$ образуют те векторы, образами которых являются столбцы единичного блока максимально размера в конце преобразований.

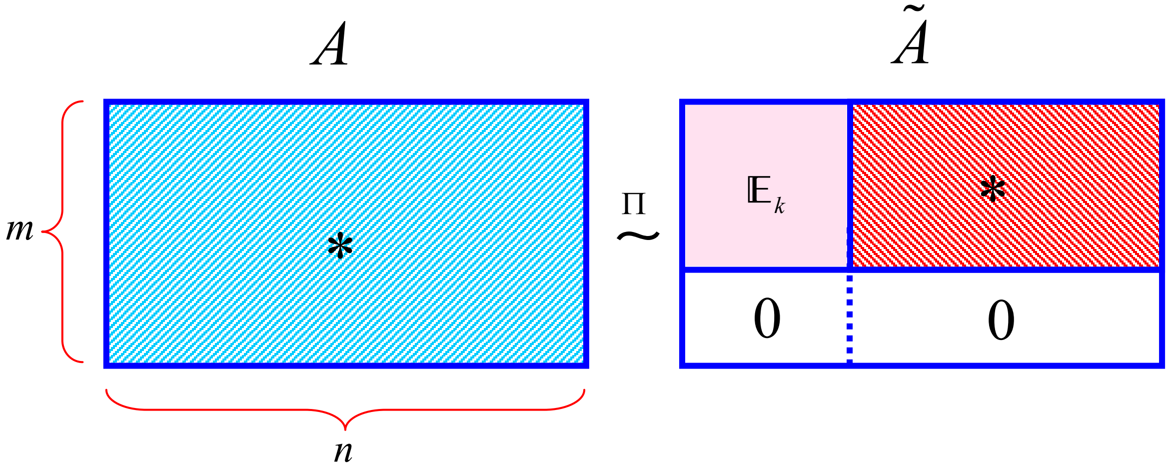
Заметим, что описанный алгоритм попутно позволят решить задачу разложения по базе в системе S тех векторов, которые в нее не вошли.

Действительно, обозначим базу в S посредством $\{a_m\},\ m=\underline{1,k}$ и пусть a – любой вектор S, не вошедший в нее. Его разложение по базе имеет вид $a=\alpha_1\cdot a_1+\ldots+\alpha_k\cdot a_k=$ $=\sum\limits_{m=1}^{k}\alpha_m\cdot a_m$. Действуя на обе части этого равенства оператором Π, получаем

[25] Эти векторы, как и в первом случае, могут оказаться удлиненными снизу на одинаковое число нулевых элементов.

(2.14) $$\Pi\cdot a=\Pi\cdot\left(\sum_{m=1}^{k}\alpha_m\cdot a_m\right)=\sum_{m=1}^{k}\alpha_m\cdot\underbrace{\Pi(a_m)}_{e_m}=\sum_{m=1}^{k}\alpha_m\cdot e_m=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}.$$

Равенство **(2.14)** означает, что *коэффициенты разложения вектора* a *по некоторой базе системы* S *равны коэффициентам разложения образа этого вектора при преобразовании* Π *по системе* $\{e_i\},\ i=\underline{1,k}$ *столбцов единичного блока порядка* $k=\operatorname{Rg}S$ *в преобразованной матрице* $\tilde{A}$[26]. *Векторы этой системы – образы соответствующих векторов выбранной базы.*



Итак, для получения искомых разложений векторов, не вошедших в базу исходной системы S, по этой базе, нужно реализовать последовательность операций, схематически изображенных на приведенной иллюстрации.

Окончательные выводы:

- По номерам неизвестных $\{x_i\},\ i=\underline{1,n}$, стоящих в первых k позициях *верхней разметочной строки* по окончании перехода от A к $\tilde{A}$ узн**а**ем номера векторов исходной системы, образующих в ней базу.
- Число k – ранг системы.

---

[26] Замечание, сделанное в предыдущей сноске, остается в силе. Заметим, что в силу линейной независимости векторов $\{e_i\},\ i=\underline{1,k}$ *они образуют базис в своей линейной оболочке*. Если базисные векторы покомпонентно совпадают со столбцами единичной матрицы порядка, равного их количеству, то такой базис называют ***стандартным***.

- Номера остальных неизвестных x_i – это номера векторов базы, в нее не входящих.

- Возьмем столбец, отвечающий неизвестной x_u, из той части преобразованной матрицы $\tilde{A}$, которая расположена справа от $\mathbb{E}_k$ и, возможно, находящегося под $\mathbb{E}_k$ нулевого блока. Его компоненты – это коэффициенты разложения вектора a_u по получившейся базе в S.

В заключение обратим внимание еще на следующее обстоятельство. В матрице $\tilde{A}$ первые k *строк*, проходящие через единичный блок $\mathbb{E}_k$, линейно независимы. Действительно, линейная комбинация этих строк с коэффициентами $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ – это строка, первые k элементов которой равны соответственно $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$. Она может оказаться нуль-вектором лишь если все числа γ_j, $j=\underline{1,k}$ – нули, то есть только для тривиальной линейной комбинации взятых строк.

Остальные же строки в $\tilde{A}$, если таковые вообще имеются, – нулевые. Поскольку добавление нулевой строки делает систему строк линейно зависимой (свойство **4°**, стр.6), то наибольшее число линейно независимых векторов в системе образов строк исходной матрицы A при преобразовании Π, равно k – максимальному количеству линейно независимых векторов в системе образов ее столбцов. Поскольку выше было доказано, что максимальное число линейно независимых столбцов в ходе преобразований Π сохраняется ($\operatorname{Rg}\hat{S}=\operatorname{Rg}S=k$), приходим к естественному предположению о том, что сказанное справедливо и для строк, так что ***в любой матрице максимальное количество линейно независимых строк и столбцов – одно и то же***.

Доказать это строго будет удобнее несколько позже, после введения важного понятия определителя (детерминанта) и изучения его свойств как т.н. *индикатора линейной зависимости*.

◆**Примеры:**

1). Найдите ранг и базу система векторов S:

$$a_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix},\ a_4=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\ a_5=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

Не вошедшие в базу векторы системы разложите по ней.

Реализуем описанный выше алгоритм:

$$A=\begin{array}{c}\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5\end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & 4\\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\end{array}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1 & -2 & 4\\ -1 & 0 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -7 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}\sim$$

(2.15)

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 7 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3/2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5\end{matrix}\\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0\end{array}\right)\end{array}.$$

Таким образом, система S линейно зависима **(объясните, почему это ясно сразу?)**, ее ранг $\operatorname{Rg} S=3$, в качестве базы можно взять $\{a_1,a_2,a_3\}$.

Далее, поскольку

$$\begin{pmatrix}0\\-3/2\\1/2\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\text{ и }\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

то разложения не вошедших в базу векторов a_4, a_5 по этой базе имеют вид:

$$\bullet\, a_4=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=0\cdot a_1+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot a_2+\frac{1}{2}\cdot a_3=\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix};$$

$$\bullet\, a_5=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}=1\cdot a_1+2\cdot a_2=1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Подсистема $\{a_1,a_2,a_3\}$ системы S может быть взята в качестве одного из базисов линейной оболочки $V=L(a_1,\ldots,a_5)$ и $\dim V=3$.

Все множество наборов чисел x_1-x_5 – коэффициентов всевозможных линейных комбинаций векторов системы S, каждая из которых равна $\theta\in\mathcal{M}_{3,1}$, – это общее решение однородной системы линейных уравнений $A\cdot X=\theta$. Полагая в **(2.15)** $x_4=C_1$, $x_5=C_2$, получаем

$x_3=-\frac{1}{2}x_4=-\frac{1}{2}C_1$; $x_2=\frac{3}{2}x_4-2x_5=\frac{3}{2}C_1-2C_2$; $x_1=-x_5=-C_2$, так что окончательно

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot C_1+1\cdot C_2\\ \frac{3}{2}\cdot C_1-2\cdot C_2\\ -\frac{1}{2}\cdot C_1+0\cdot C_2\\ 1\cdot C_1+0\cdot C_2\\ 0\cdot C_1+1\cdot C_2\end{pmatrix}=C_1\cdot\begin{pmatrix}0\\3/2\\-1/2\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\left(C_1\leftarrow\frac{C_1}{2}\right)=^{27}$$

$$=C_1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0\\3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}}_{b_1}+C_2\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{b_2}=C_1\cdot b_1+C_2\cdot b_2.$$

Как видно, множество всех таких наборов X – линейная оболочка системы $\{b_1,b_2\}$, причем векторы b_1 и b_2 – линейно независимы. Оказывается, что описанная картина – не частность, а общая закономерность, относящаяся к структуре решения всех вообще однородных линейных систем уравнений в случае, если часть неизвестных – параметрические.

Во-первых, можно усмотреть, что число таких неизвестных (и соответственно, векторов «b») будет всегда равно $n-k$, где n – общее число неизвестных в линейной однородной системе уравнений, а k – ранг системы столбцов соответствующей ей матрицы. Без ограничения общности будем считать, что параметрические неизвестные занимают *последние* позиции в разметочной строке после окончания прямого хода метода Гаусса.

---

[27] Сделанная замена корректна в силу того, что C_1,C_2 – свободные параметры, т.е. произвольные действительные числа. Если таково C_1, то ясно, что таково и $C_1/2$ и наоборот. Замена имеет целью упрощение конечной формулы.

Положим $n-k=s$. Если выписать покомпонентно один вслед за другим векторы $b_1,\ldots,b_s$, то получившаяся матрица будет оканчиваться снизу единичным блоком $\mathbb{E}_s$ и иметь вид, изображенный на следующей иллюстрации

$$\left(\begin{array}{|ccc|}\hline b_{11} & \vdots & b_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & \vdots & b_{ks} \\ \hline & & \\ & \mathbb{E}_s & \\ & & \\ \hline \end{array}\right)$$

Единичный блок $\mathbb{E}_s$ стоит в матрице «во всю ширину», так что

$$\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\cdot b_i=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_i b_{1i}\\ \vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_i b_{ki}\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}=\theta(s\times 1)\Leftrightarrow\alpha_1=\ldots=\alpha_s=0.$$

Здесь b_{uv} – это u-я компонента вектора b_v. Первые k компонент линейной комбинации векторов $b_1,\ldots,b_s$ представляют собой линейные комбинации их первых, вторых, …, k-х компонент *с одними и теми же коэффициентами* $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$. Все эти линейные комбинации, очевидно, обращаются в нули при $\alpha_1=\ldots=\alpha_s=0$. Стало быть, только тривиальная линейная комбинация векторов $b_1,\ldots,b_s$ обращается в нуль-вектор, что и доказывает их линейную независимость. В своей линейной оболочке эти векторы образуют базис.

2). Установите, является ли система векторов $S=\{b_1,b_2,b_3\}$, где

$b_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$, $b_2=\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}$, $b_3=\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}$ базисом линейной оболочки V системы $\{e_1,e_2,e_3\}$,

$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$[28]. Если да, то разложите по этому базису вектор $B=\begin{pmatrix}4\\-4\\-2\end{pmatrix}$.

Задача сводится к решению линейной системы $A\cdot X=B$, где $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&5&4\\-3&-1&8\end{pmatrix}$.

Если решение системы единственно, то $\operatorname{Rg}S=3$, так что образующие S векторы линейно независимы. Поскольку $\dim V=3$, то S – один из базисов в V, а компоненты вектора X и есть коэффициенты искомой линейной комбинации базисных векторов b_j, $j=\underline{1,3}$, выражающей заданный вектор b. Их называют также ***координатами*** вектора b в указанном базисе.

Метод Гаусса дает

$$\begin{array}{c}
 & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
(A\mid B)= & \left(\begin{array}{ccc|c}2&1&2&4\\0&5&4&-4\\-3&-1&8&-2\end{array}\right)
\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&2&4\\0&5&4&-4\\-1&0&10&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-10&-2\\2&1&2&4\\0&5&4&-4\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-10&-2\\0&1&22&8\\0&5&4&-4\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-10&-2\\0&1&22&8\\0&0&-106&-44\end{array}\right)\end{array}$$

– треугольная зона $A\Rightarrow$ система имеет единственное решение:

$$x_3=\frac{-44}{-106}=\frac{22}{53},\ x_2=8-22x_3=8-\frac{22^2}{53}=\frac{424-484}{53}=-\frac{60}{53},\ x_1=-2+10x_3=-2+\frac{220}{53}=$$

---

[28] Как уже упоминалось выше, в своей линейной оболочке эти векторы образуют ***стандартный базис***.

$= \frac{114}{53}$, так что $X = \begin{pmatrix} \frac{114}{53} \\ -\frac{60}{53} \\ \frac{22}{53} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{114}{53} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{60}{53} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{22}{53} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

3). Исследуйте совместность системы линейных уравнений и в случае совместности решите ее методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 6 \\ -x_2 - 3x_3 = -3 \\ -3x_1 + 4x_2 + 18x_3 = 21 \\ 5x_1 - 10x_3 = -15 \\ -2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 12 \end{cases}.$$

1). Ищем ранг системы столбцов матрицы системы (нулевые строки не отбрасывались).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & 18 \\ 5 & 0 & -10 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & 18 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 13 & 39 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\operatorname{Rg} S(A) = 2$ – ранг системы столбцов матрицы A.

2). Ищем ранг системы столбцов расширенной матрицы системы

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & 18 & 21 \\ 5 & 0 & -10 & -15 \\ -2 & 2 & 10 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 13 & 39 & 39 \\ 0 & -15 & -45 & -45 \\ 0 & 8 & 24 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{Rg} S\left(A \mid B\right)=2$. На основании теоремы Кронеккера–Капелли заключаем, что система совместна.

Отбросим теперь нулевые строки в последней матрице и учтем, что в процессе преобразований расширенной матрицы не пришлось менять в ней порядок столбцов (обратный ход метода Гаусса здесь реализован до конца, то есть до возникновения в зоне A единичного блока размера $\operatorname{Rg} S(A)=\operatorname{Rg} S\left(A \mid B\right)=2$). Получаем

$$\left(A \mid B\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \end{array}.$$

Отсюда находим: $x_3=C\in\mathbb{R}$ – параметрическая переменная (произвольный параметр), и тогда $x_2=3-3x_3=3-3C$, $x_1=-3+2x_3=-3+2C$, так что решение системы имеет вид $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3+2C \\ 3-3C \\ C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+C\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$[29].

4). Установите совместность системы линейных уравнений в зависимости от значений параметров α,β и решите систему для всех их значений, при которых она совместна.

$$\begin{cases} x_1+\alpha x_2+3x_3+4x_4=5 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=\beta \end{cases}.$$

Будем сразу преобразовывать расширенную матрицу системы, принимая в расчет, что несовместность системы может быть связана только с необходимостью перемещения столбца из зоны свободных членов в зону A в процессе реализации прямого хода метода Гаусса. Это обстоятельство в свою очередь связано с тем, что, как уже отмечалось ранее, условие $\operatorname{Rg} S(A)\neq \operatorname{Rg} S\left(A \mid B\right)$ равносильно равенству $\operatorname{Rg} S\left(A \mid B\right)=\operatorname{Rg} S(A)+1$, которое

[29] Формулы, подобные полученной, определяют, как говорят, **общее решение системы линейных уравнений**, см. подробности в **Лекции 5**.

как раз и означает, что в расширенной матрице ее последний столбец неразложим по столбцам матрицы A и потому «обязан принять участие» в формировании единичного блока максимального размера в зоне A при вычислении ранга $A|B$.

Таким образом, совпадение или несовпадение рангов матриц A, $A|B$ станет понятным в ходе описываемых преобразований в матрице $A|B$ без необходимости рассматривать отдельно сходные преобразования в матрице A, как это было сделано в предыдущем примере.

$$(A|B)=\begin{pmatrix}1&\alpha&3&4&5\\1&1&1&1&1\\2&3&4&5&\beta\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&\alpha&3&4&5\\2&3&4&5&\beta\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&\alpha-1&2&3&4\\0&1&2&3&\beta-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&\beta-2\\0&\alpha-1&2&3&4\end{pmatrix}\sim$$

► $2+2\cdot(1-\alpha)=2(2-\alpha)$,

► $3+3\cdot(1-\alpha)=3(2-\alpha)$,

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&\beta-2\\0&0&2(2-\alpha)&3(2-\alpha)&4+(\beta-2)(1-\alpha)\end{pmatrix}\sim\blacksquare_{\text{a), b)}}$$

а). $\alpha=2\Rightarrow$

$$\blacksquare_{\text{a)}}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&\beta-2\\0&0&0&0&6-\beta\end{pmatrix}\sim\bullet_{1,2}$$

а1). $\beta=6\Rightarrow$ (*столбец свободных членов остался в своей зоне*)

$$\bullet_1\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

В этом случае, как видно, $\operatorname{Rg}S(A)=\operatorname{Rg}S(A|B)=2$ и система совместна. Ее общее решение зависит от двух произвольных параметров, как показывает схема

$$(A|B)\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&x_4\end{array}\\\left(\begin{array}{cc|cc|c}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\end{array}\right)\end{array}.$$

Положим $x_3 = C_1, x_4 = C_2$, откуда последует, что $x_2 = 4 - 2x_3 - 3x_4 = 4 - 2C_1 - 3C_2$, $x_1 = -3 + x_3 + 2x_4 = -3 + C_1 + 2C_2$. Общее решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + C_1 + 2C_2 \\ 4 - 2C_1 - 3C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a2). $\beta \neq 6 \Rightarrow$ (*столбец свободных членов переместился в зону* A)

$$\bullet_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta-2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6-\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta-2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь по-прежнему $\mathrm{Rg}\, S(A) = 2$, но уже $\mathrm{Rg}\, S\left(A \middle| B\right) = 3$, так что система не имеет решений (несовместна)[30].

b). $\alpha \neq 2,\ \forall \beta \Rightarrow$

$$\blacksquare_{b)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{4+(\beta-2)(1-\alpha)}{2(2-\alpha)} \end{pmatrix} = \left(\beta - 2 = \gamma,\ \frac{4+(\beta-2)(1-\alpha)}{2(2-\alpha)} = \delta \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \delta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1-\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma-2\delta \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \delta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1-\gamma+\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma-2\delta \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \delta \end{pmatrix}.$$

---

[30] Формальным признаком чего является, как неоднократно указывалось выше, строка в преобразованной расширенной матрице, в которой в зоне A стоят все нули, а в зоне свободных членов число, отличное от нуля (здесь это $6-\beta$).

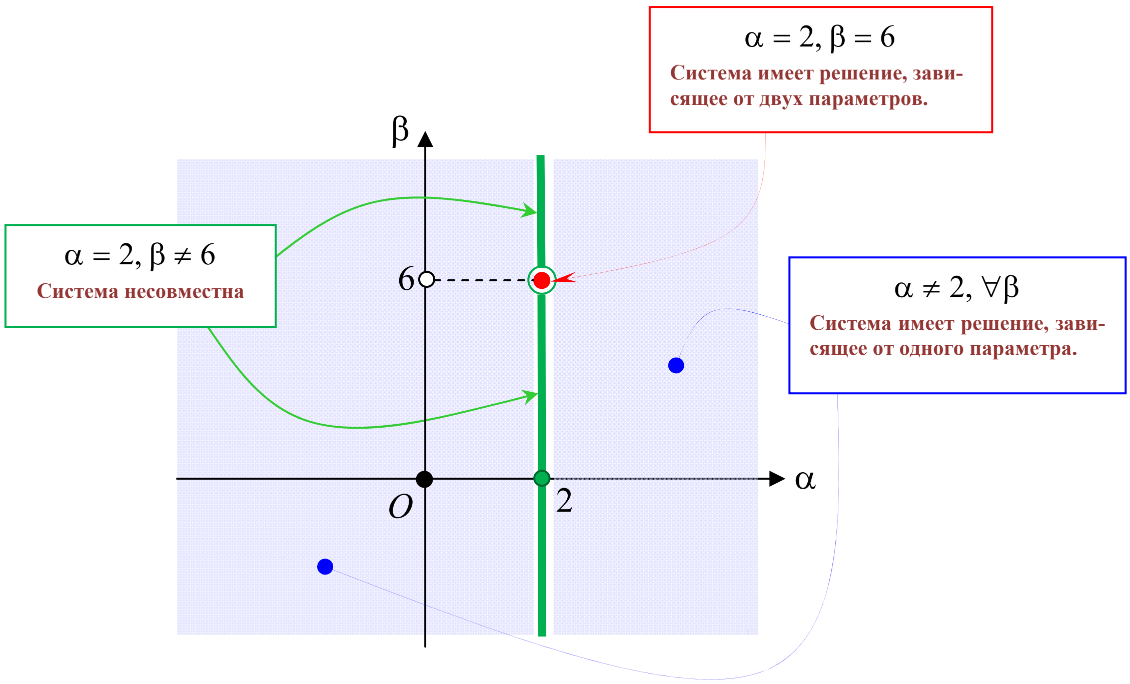
Теперь $\operatorname{Rg} S(A) = \operatorname{Rg} S\left(A\,|\,B\right) = 3$, система совместна, но ее общее решение зависит от одного произвольного параметра:

$$\left(A\,|\,B\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1-\gamma+\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma-2\delta \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \delta \end{array}\right) \end{array}.$$

Полагая $x_4 = C$, находим $x_3 = \delta - \frac{3}{2}x_4 = \delta - \frac{3}{2}C$, $x_2 = \gamma - 2\delta$, $x_1 = 1-\gamma+\delta+\frac{1}{2}x_4 =$ $= 1-\gamma-\delta+\frac{1}{2}C$ и окончательно записываем

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\gamma+\delta+\frac{1}{2}C \\ \gamma-2\delta \\ \delta-\frac{3}{2}C \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\gamma+\delta \\ \gamma-2\delta \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зависимость решения данной системы от параметров иллюстрируется схемой



5). Решите методом Гаусса систему линейных уравнений или убедитесь в ее несовместности.

$$\begin{cases} 112x_1 - 136x_2 + 184x_3 + 416x_4 = 488 \\ -70x_1 + 85x_2 - 115x_3 - 260x_4 = -305 \\ 42x_1 - 51x_2 + 69x_3 + 156x_4 = 182 \end{cases}.$$

Имеем

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 112 & -136 & 184 & 416 & 488 \\ -70 & 85 & -115 & -260 & -305 \\ 42 & -51 & 69 & 156 & 189 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} :\ 8 \\ :-5 \\ :\ 3 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 14 & -17 & 23 & 52 & 61 \\ 14 & -17 & 23 & 52 & 61 \\ 14 & -17 & 23 & 52 & 63 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 14 & -17 & 23 & 52 & 61 \\ 14 & -17 & 23 & 52 & 61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) - \text{система несовместна.}$$

РЕЗЮМЕ

Главным итогом и руководством к практическим действиям по материалам **Лекций 1,2** является осознание плодотворности техники диагонализации, которая оказывается эффективной для широкого круга задач линейной алгебры, как то: обращение матриц, установление линейной зависимости (независимости) систем векторов, отыскание их баз и рангов, размерностей соответствующих линейных оболочек, решение произвольных систем линейных уравнений.

Мы сталкиваемся здесь в очень яркой форме с тем феноменом, который в математике принято характеризовать словами «уравнения умнее нас». Простейшие арифметические действия, подчиненные красивой идее, позволяют отвечать на совсем не простые вопросы, а именно: автоматически указывают базу системы векторов (базис ее линейной оболочки), сами вычисляют ранги и вскрывают структуру решения линейной системы общего вида.

Коротко говоря,

Ай да ГАУСС !!!

▲ В дополнение к свойству **3°.** , стр.5 докажите, что в линейно зависимой системе ненулевых векторов существует вектор, разложимый по последующим.

==

Краткая биографическая справка

■ Гаусс Карл Фридрих (1777–1855 г.г.) – крупнейший немецкий математик, внесший фундаментальный вклад в такие отрасли знаний, как алгебра, теория чисел, дифференциальная геометрия, теория тяготения и электромагнетизма, геодезия, астрономия. Отличительная черта творчества Гаусса – органическая связь между теоретической и прикладной математикой, необычайная широта проблематики.

■ Жордан Мари Энмон Камиль (1838–1922 г.г.) – выдающийся французский математик.

■ Капелли Альфредо (1855–1910 г.г.) – итальянский математик.