Лекция 3. Определитель (детерминант) квадратной матрицы. Свойства определителей. Формулы Крамера. Применение к вычислению обратной матрицы

Помимо способов, описанных в предыдущих лекциях, в линейной алгебре имеются и другие средства анализа линейной зависимости (независимости) как ключевого свойства систем векторов. Эти новые средства связаны с понятием ***определителя*** или ***детерминанта*** квадратной матрицы. Это понятие обладает также высокой самостоятельной ценностью и приложимо к решению целого ряда других важных задач, возникающих в различных областях математики.

◀**Определение**▶

Пусть дана квадратная матрица порядка n, элементы которой – действительные числа:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определителем (детерминантом) матрицы A называется число, обозначаемое и вычисляемое следующим образом

(3.1)
$$\Delta_A \equiv \det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} a_{11}, \; n = 1 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot (-1)^{1+k} M_{1k}, \; n > 1 \end{cases}.$$

Формула **(3.1)** называется *разложением определителя по первой строке*. Числа $a_{ij};\, i, j = \underline{1,n}$ – *элементы определителя*. Число M_{1k} – это определитель, образованный элементами исходного определителя, остающимися в нем после вычеркивания[1] $1-$й строки и $k-$го столбца (предполагается, что невычеркнутые строки и столбцы *смыкаются*, так что образуется квадратный массив чисел размера $[(n-1)\times(n-1)]$).

Об определителе **(3.1)**, как и о породившей его матрице, говорят, что он *имеет порядок* n. Тогда M_{1k} при $n>1-$это определитель $(n-1)-$го порядка. Он называется ***минором*** (***дополнительным минором***) элемента a_{1k} в исходном определителе (реже говорят – в матрице A).

Величину $D_{1k}=(-1)^{1+k}\cdot M_{1k}$ называют ***алгебраическим дополнением*** элемента a_{1k} в определителе $\det A$.

◆**Примеры:**

1). $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \Rightarrow \det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot\underbrace{(-1)^{1+1}M_{11}}_{=D_{11}}+a_{12}\cdot\underbrace{(-1)^{1+2}M_{12}}_{=D_{12}}=$

$=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$

►Таким образом, для вычисления определителя $2-$*го порядка* нужно из произведения его элементов, стоящих на главной диагонали вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали[2].

Следует иметь в виду, что так просто дело обстоит *только* для определителей $2-$го порядка. Следующий пример показывает, к чему приводит определение **(3.1)** в более сложном случае определителя $3-$го порядка.

2). $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix} \Rightarrow \det B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}=b_{11}\cdot\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}-b_{12}\cdot\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33}\end{vmatrix}+$

[1] Термину «вычеркивание» не следует придавать буквального значения. Это лишь мысленное вычеркивание и оно относится только к взятому элементу определителя. Для другого элемента мысленно вычеркиваться будут уже *его* строка и столбец.

[2] Главная (побочная) диагональ определителя состоит из элементов, образующих главную (побочную) диагональ в породившей его матрице.

$$+b_{13}\cdot\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} = b_{11}(b_{22}b_{33}-b_{23}b_{32}) - b_{12}(b_{21}b_{33}-b_{23}b_{31}) + b_{13}(b_{21}b_{32}-b_{22}b_{31}).$$

Полезно обратить внимание на то, что здесь (как и в случае определителя $2-$го порядка) множители каждого из произведений после раскрытия скобок представляют *ровно один раз каждую из строк определителя и ровно один раз – каждый его столбец*. Действительно, как первые, так и вторые индексы этих множителей – *все разные* (меняются в диапазоне от 1 до 3 для определителя $3-$го порядка).

Это обстоятельство наталкивает на мысль, что при вычислении определителя его первая строка не может иметь особого статуса, как это кажется при поверхностном взгляде на определение **(3.1)**. Более того, в этом аспекте его столбцы должны быть абсолютно равноправны со строками. Дальнейшее изложение свойств определителей полностью подтвердит эту догадку.

▲ Подсчитайте число слагаемых после раскрытия всех скобок в окончательном выражении для определителя $n-$го порядка.

3). $\mathbb{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\mathbb{E}_n = 1\cdot\det\mathbb{E}_{n-1} + \underbrace{0+\ldots+0}_{n-1\ \text{слагаемое}} = \det\mathbb{E}_{n-1} = \det\mathbb{E}_{n-2} = \ldots = \det\mathbb{E}_1 =$

$=|\,1\,|=1$[3].

4). $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{диагональный определитель}} = 5\cdot(-2)\cdot\frac{1}{5}\cdot 3 = -6$. Чтобы убедиться в справедливости этого равенства, следует действовать по схеме п. **3)**.

Итак, диагональный определитель равен произведению элементов его главной диагонали.

---

[3] Не следует путать здесь обозначение определителя – вертикальные черточки – с обозначением абсолютной величины действительного числа.

4). $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 18 & 0 \\ -1 & 2 & 1/9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 18 & 0 \\ 2 & 1/9 \end{vmatrix} + 0 = 2 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9} = 4$. И здесь, как видно, результат вычисления определителя – это произведение элементов его главной диагонали.

▲ Установите правило вычисления определителя, все элементы которого, стоящие:

а). под главной диагональю

б). над побочной диагональю

в). под побочной диагональю – равны нулю.

В определении **(3.1)** детерминант разложен по $1-$й строке. Как уже говорилось выше, вполне естественно строить аналогичные разложения и по другим его строкам или по столбцам.

Например, разложение определителя $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ по $1-$му столбцу имеет вид

$a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot a_{22} + a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot a_{12} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = \det A$.

Как видно, результат остается равным $\det A$ (проверьте, что и разложения по $2-$й строке или $2-$му столбцу равны $\det A$).

Докажем, что установленная для частного случая *закономерность имеет общий характер*.

•ТЕОРЕМА•

Для любой матрицы A порядка n справедлива формула

(3.2) $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} M_{i1} -$ разложение определителя по $1-$му столбцу.

Доказательство

Для доказательства применим ***метод математической индукции***[4], который, как известно, состоит в следующем.

[4] Индукция – метод рассуждений «от частного – к общему», в отличии от ***дедукции*** – метода рассуждений «от общего к частному».

Предположим, что требуется доказать истинность некоторого высказывания, зависящего от натурального номера n, *при всех* $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$[5].

Для этого достаточно:

1. Доказать истинность этого высказывания для $n = n_0$[6] (этот этап именуется ***«база индукции»***); часто, но не всегда, $n_0 = 1$.

2. Допустить, что высказывание верно для некоторого $n = k \in \mathbb{N}$ (***«предположение индукции»***).

3. ***Доказать***, что из предположения индукции следует справедливость доказываемого высказывания при $n = k + 1$ (***«индукционный шаг»***).

Если описанная программа действий реализована, то можем утверждать:

- на основании п.1 высказывание верн***о*** при $n = n_0$;

- на основании п.3 при $k = n_0$ высказывание верн***о*** при $n = n_0 + 1$;

- на основании п.3 при $k = n_0 + 1$ высказывание верн***о*** при $n = n_0 + 2$ и, далее, для $n = n_0 + 3, n_0 + 4, \ldots$, т.е. для всех натуральных значений номера n, равных или превосходящих n_0.

Осуществим индукцию по числу столбцов матрицы A. Ясно, что в нашем случае $n_0 = 2$.

1. При $n = 2$ утверждение теоремы истинно (это доказано выше), так что *база индукции имеется*.

2. Пусть формула **(3.2)** верна для матриц порядка $n - 1$. Докажем, что тогда она верна для матриц порядка n (обратите внимание, как при сохранении сути изменилась форма предположения индукции по сравнению с описанной выше).

Тем самым утверждение теоремы будет доказано для всех натуральных $n \geq 2$.

---

[5] Пример такого высказывания: при любом натуральном значении n сумма $1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$ равна квадрату числа слагаемых, т.е. n^2.

[6] Такое доказательство нередко сводится к простой проверке.

3. По определению **(3.1)**

(3.3) $$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot (-1)^{1+k} M_{1k} = a_{11} \cdot M_{11} + \sum_{k=2}^{n} a_{1k} \cdot (-1)^{1+k} M_{1k} .$$

Обозначим посредством A_{1k} матрицу $(n-1)-$го порядка, получающуюся из A вычеркиванием $1-$й строки и $k-$го столбца. Ясно, что тогда $\det A_{1k} = M_{1k}$. При $k \geq 2$ в A_{1k} входит без своего $1-$го элемента первый столбец матрицы A.

Пользуясь предположением индукции, разложим M_{1k} по этому столбцу, учитывая, что $i-$я строка матрицы A имеет в A_{1k} номер $i-1$.

Получаем

(3.4) $$M_{1k} = \sum_{i=2}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^{(i-1)1+1} (M_{1k})_{i1} = \sum_{i=2}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^{i} (M_{1k})_{i1} .$$

Здесь $(M_{1k})_{i1}$ – минор элемента a_{i1} в определителе M_{1k}, т.е. определитель, получающийся из M_{1k} вычеркиванием его $i-1-$й строки и $1-$го столбца, или, что тоже, вычеркиванием в $\det A$ строк с номерами $1, i$ и столбцов с номерами $k, 1$.

Подставив **(3.4)** в **(3.3)**, находим

$$\det A = a_{11} \cdot M_{11} + \sum_{k=2}^{n} a_{1k} \cdot (-1)^{1+k} \left[\sum_{i=2}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^{i} (M_{1k})_{i1} \right] =^{7} a_{11} \cdot M_{11} + \sum_{i=2}^{n} \Bigg\{ a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \times$$

$$\times \left. \left[\sum_{k=2}^{n} a_{1k} \cdot (-1)^{k} (M_{1k})_{i1} \right] \right\} = \bullet$$

►а). $(M_{1k})_{i1} = (M_{i1})_{1k}$, поскольку порядок вычеркивания в $\det A$ строк с номерами $1, i$ и столбцов с номерами $k, 1$ несущественен, а важны лишь сами эти номера.

►б). Рассмотрим теперь определитель M_{i1}, который получится, если вычеркнуть в $\det A$ $i-$ю строку ($i \geq 2$) и $1-$й столбец. Его разложение по $1-$й строке имеет вид

---

[7] Использована перестановочность процессов суммирования по k и i.

$$M_{i1} = \sum_{k=2}^{n} a_{1k} \cdot (-1)^{1+(k-1)} (M_{i1})_{1k} = \sum_{k=2}^{n} a_{1k} \cdot (-1)^{k} (M_{i1})_{1k} = \sum_{k=2}^{n} a_{1k} \cdot (-1)^{k} (M_{1k})_{i1},$$

поскольку при вычеркивании в $\det A$ $1-$го столбца элемент a_{1k} стоит в M_{i1} в столбце с номером $k-1$. Окончательно, с учетом п. а) получаем

►в). ● $= a_{11} \cdot M_{11} + \sum_{k=2}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} M_{i1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} M_{i1}$, так что индукционный шаг завершен и требуемое доказано.

Полученный результат используется далее при доказательстве ряда важных свойств определителей.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1°. Для любой квадратной матрицы $\det A = \det A^T$, т.е. ***транспонирование не меняет определителя***.

Доказательство (индукция по $n-$порядку матрицы)

1. $n = 1,\ A = A^T \Rightarrow$ утверждение справедливо.
2. Пусть оно верн***о*** для матриц $(n-1)-$го порядка.
3. Основываясь на этом допущении, докажем, что тогда оно будет верно и для матриц порядка n.

Пусть A_{1j} – матрица, полученная из $A \in \mathcal{M}_n$ вычеркиванием $1-$й строки и $j-$го столбца, а B_{j1} – матрица, полученная из $B = A^T$ $j-$й строки и $1-$го столбца. Тогда $B_{j1} =$ $= A_{1j}^T$: вычеркивая в A любую строку, вычеркиваем столбец с тем же номером в A^T. Это же касается столбцов A и соответствующих строк в A^T. Если любую из двух построенных таким способом матриц транспонировать, получим вторую.

Поскольку A_{1j} и B_{j1} – матрицы порядка $n-1$, то по предположению индукции $\underbrace{\det A_{1j}}_{\substack{\text{минор элемента} \\ a_{1j} \text{ в } \det A}} = \underbrace{\det B_{j1}}_{\substack{\text{минор элемента} \\ b_{ji} \text{ в } \det A^T}}$. Далее, разложение $\det A$ по $1-$й строке имеет вид

(3.5) $$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \det A_{1j}.$$

Тогда разложение $\det A^T$ по $1-$му столбцу имеет вид

$$\det A^T = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{b_{j1}}_{=a_{1j}} \cdot (-1)^{j+1} \underbrace{\det B_{j1}}_{=\det A_{1j}} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{j+1} \det A_{1j} = \det A,$$

что и завершает доказательство.

Следствие

Все утверждения, касающиеся определителей и справедливые для *строк* определителя, будут верны и для его *столбцов*.

2°. Если в определителе поменять местами какие-либо две строки (столбца), он изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Доказательство (индукция по n)

a. Рассмотрим сначала перестановку *соседних строк* определителя

1. $n=2$; $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$; $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, так что база индукции имеется.

2. Пусть утверждение верн***о*** для матриц порядка $n-1$.

3. Выведем отсюда его справедливость для матриц порядка n.

Пусть номера переставляемых строк будут k и $k+1$. Запишем разложение $\det A$ по $1-$*му столбцу*, выделив слагаемые, соответствующие переставляемым строкам

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} M_{i1} = a_{k1} \cdot (-1)^{k+1} M_{k1} + a_{k+1,1} \cdot (-1)^{k+2} M_{k+1,1} + \sum_{i \neq k,k+1} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} M_{i1}.$$

Для определителя матрицы B, полученной из A при помощи указанной перестановки строк, имеем следующее выражение

$$\det B = \underbrace{a_{k+1,1}}_{\substack{\text{стоит в } k-\text{й} \\ \text{строке } \det B}} \cdot (-1)^{k+1} N_{k1} + \underbrace{a_{k1}}_{\substack{\text{стоит в } (k+1)-\text{й} \\ \text{строке } \det B}} \cdot (-1)^{k+2} N_{k+1,1} + \sum_{i \neq k,k+1} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} N_{i1}.$$

Заметим теперь, что

∗ В миноры $M_{i\,1}$, N_{i1} строки с номерами $k, k+1$ без своего $1-$го столбца входят, но *в противоположном порядке* (они не вычеркиваются из $\det A$, $\det B$ в силу того, что в соответствующих суммах $i \neq k, k+1$). Поскольку эти миноры имеют порядок $n-1$, а остальные их строки одинаковы, то по предположению индукции $M_{i\,1} = -\,N_{i1}$.

∗ Минор M_{k1} получен вычеркиванием в $\det A$ $k-$й строки и $1-$го столбца, а минор $N_{k+1,1}$ – вычеркиванием в $\det B$ $(k+1)-$й строки и $1-$го столбца. Поскольку матрица B получена из матрицы A перестановкой $k-$й и $(k+1)-$й строк, то эти миноры равны: $M_{k1} = N_{k+1,1}$.

∗ По той же причине $M_{k+1,1} = N_{k1}$.

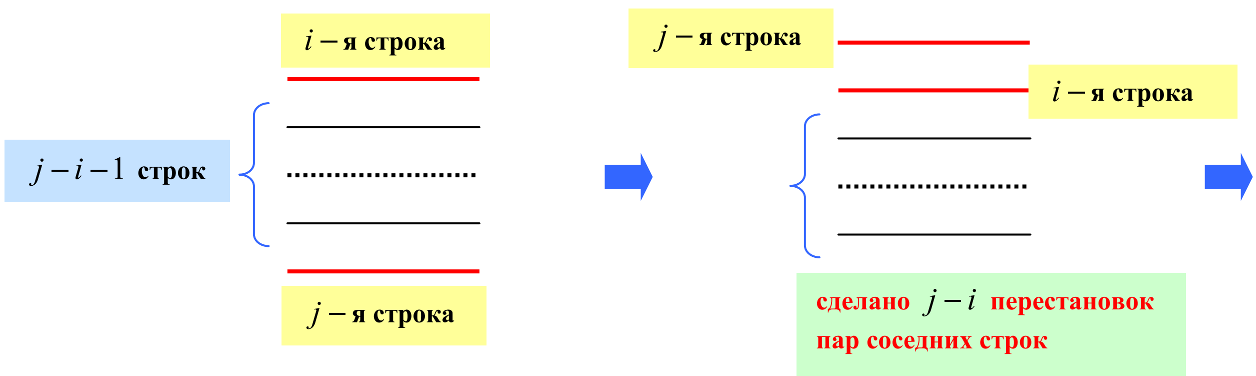
Тогда

$$\det B = a_{k+1,1}\cdot\overbrace{(-1)^{k+1}}^{=-(-1)^{k+2}}\overbrace{M_{k+1,1}}^{=N_{k1}} + a_{k1}\cdot\overbrace{(-1)^{k+2}}^{=-(-1)^{k+1}}\overbrace{M_{k1}}^{=N_{k+1,1}} - \sum_{i\neq k,k+1} a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}M_{i1} = -\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}M_{i1} =$$

$= -\det A$, то и завершает доказательство для *соседних* строк.

➔ ***б.*** Пусть теперь переставлены $i-$я и $j-$я строки определителя, причем для определенности и без ограничения общности положим $i < j$.

Поменять эти строки местами можно, меняя только пары соседних в соответствии со схемой:



$j-$я строка

....

$i-$я строка

сделано еще $j-i-1$ перестановок пар соседних строк

В соответствии с этой схемой всего будет $(j-i)+(j-i-1)=2(j-i)-1$ перестановок (*транспозиций*) пар соседних строк. Как видно, это *нечетное* число. Итак, чтобы вычислить определитель, который получается из некоторого исходного определителя транспозицией двух строк, достаточно умножить последний на -1 в нечетной степени, или просто поменять его знак.

Утверждение полностью доказано. Для столбцов доказательство аналогично.

3°. Разложение определителя по произвольной строке (столбцу)

Для любой квадратной матрицы $A \in \mathcal{M}_n$ при произвольных натуральных значениях i, j: $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$ справедливы соотношения

(3.6) $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} M_{ik}$ – разложение определителя по $i-$й строке;

(3.6)' $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot (-1)^{k+j} M_{kj}$ – его разложение по $j-$му столбцу.

Доказательство

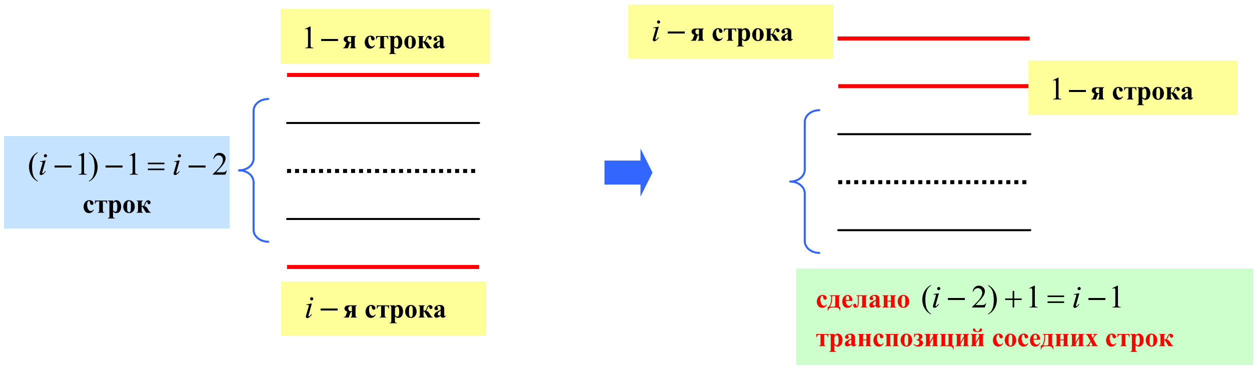
1. Для $i=1$, $j=1$ приведенные формулы **(3.6)**, **(3.6')** уже были обоснованы (первая была принята в качестве определения детерминанта, а вторая была доказана).

2. Пусть $i \ge 2$. Переместим $i-$ю строку в $\det A$ на $1-$е место, не меняя расположения других строк. Разложение получившегося определителя $\det B$ по $1-$й строке имеет вид

$$\det B = \sum_{k=1}^{n} b_{1k} \cdot (-1)^{1+k} N_{1k} \ ,$$

где минор N_{1k} получен вычеркиванием в определителе $\det B$ $i-$й строки и $k-$го столбца, так что он совпадает с $M_{ik}-$минором, полученным в определителе $\det A$ вычеркиванием $i-$й строки (это $1-$я строка в $\det B$) и $k-$го столбца.

С другой стороны, описанная перестановка получена при помощи $(i-1)-$й транспозиции соседних строк:



Поэтому $\det A = (-1)^{i-1}\cdot\det B = (-1)^{i-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}\underbrace{b_{1k}}_{=a_{ik}}\cdot(-1)^{1+k}\underbrace{N_{1k}}_{=M_{ik}} = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot(-1)^{i+k}M_{ik}$, что и требовалось доказать (формула **(3.6)**).

Формула **(3.6)’** доказывается аналогично при помощи разложения определителя $\det A$ по $1-$му столбцу, после того, как на го место перемещен $j-$й столбец. Перед нами еще одно свидетельство указанной выше равноправности строк и столбцов во всех утверждениях, связанных со свойствами определителей.

Следствие

Если в определителе есть *нулевая* строка (столбец), то такой определитель равен нулю.

4°. Линейность определителя по строке (столбцу)

Пусть $i-$я строка ($i-$й столбец) матрицы A есть линейная комбинация строк (столбцов) p и q вида $\alpha\cdot p+\beta\cdot q;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Тогда $\det A=\alpha\cdot\det A_p+\beta\cdot\det A_q$, где матрицы A_p, A_q получаются заменой в A $i-$й строки ($i-$го столбца) на строку (столбец) p,q соответственно.

Доказательство (приводится для строк)

Поскольку по условию $a_{ik} = \alpha \cdot p_k + \beta \cdot q_k$, $k = 1,\dots n$, где p_k, q_k – k–е элементы строк p и q соответственно, то

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha p_k + \beta q_k) \cdot (-1)^{i+k} M_{ik} = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (-1)^{i+k} M_{ik} +$$

$$+\beta \cdot \sum_{k=1}^{n} q_k \cdot (-1)^{i+k} M_{ik} \overset{8}{=} \alpha \cdot \det A_p + \beta \cdot \det A_q,$$ что и требовалось доказать.

◆**Замечание**

Доказанное свойство сохраняется при любом конечном числе слагаемых в линейной комбинации, выражающей строку определителя через некоторые вектор-строки: если $a_{ik} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \cdot p_{jk}$, $k = 1,\dots n$, то $\det A = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \cdot \det A_j$, где матрица A_j получается заменой в A строки с номером j на строку p_j.

Следствие

При умножении строки (столбца) определителя на число, он умножается на это число. Можно сказать и так: ***постоянный множитель выносится из любой его строки (любого столбца) за знак определителя***.[9]

5°. Если в определителе $\det A$ (матрице A) строки (столбцы) линейно зависимы, то $\det A = 0$.

В самом деле, раз строки в $\det A$ линейно зависимы, то это, как мы знаем, означает, что одна из них – линейная комбинация остальных. Заменив ее такой комбинацией, применим свойство линейности определителя по строкам и сведем дело к вычислению линейной комбинации определителей, в каждом из которых есть две одинаковые строки.

Каждый из них равен нулю (если одинаковые строки поменять местами, то с одной стороны определитель не изменится, а с другой – поменяет знак по свойству **2°**, вследст-

---

[8] Как видно, p_k, q_k играют здесь роль элементов i – й строки матриц A_p, A_q соответственно.

[9] Не следует путать это свойство *определителей* с правилом умножения *матрицы* на число, которое, как известно, выполняется поэлементно, т.е. распространяется *сразу на все элементы* матрицы.

вие чего он и равен нулю), а тогда и $\det A = 0$. Все сказанное в полной мере относится и к столбцам.

6°. Докажем следующие важные соотношения теории определителей

(3.7) $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot D_{jk} = \begin{cases} \det A, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} = \det A \cdot \delta_{ij},$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot D_{ki} = \begin{cases} \det A, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} = \det A \cdot \delta_{ij}$$[10].

Действительно, при $i = j$ эти формулы, в которых $D_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в $\det A$, переходят в **(3.6)**, **(3.6)’** соответственно.

Если же $i \neq j$, то, например, сумма $s = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot D_{jk}$ *не зависит от элементов* j*–й строки матрицы* A, так как при вычислении D_{jk} эта строка вычеркивается. Поэтому s не изменится, если в $\det A$ j–ю строку заменить i–й. В результате эта сумма окажется разложением по j–й строке определителя, в котором две одинаковые строки – i–я и j–я. Такой определитель, как мы видели выше, равен нулю. Для столбцов доказательство вполне аналогично.

7°. Детерминант матрицы не изменится, если к его строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов)[11].

Достаточно учесть линейность определителя по строкам (столбцам) и обращение в нуль определителя с двумя одинаковыми строками (столбцами).

➔ В частности, определитель не меняется, если к какой-либо его строке прибавить любую другую строку, умноженную на любое число. Конечно, это же относится и к столбцам определителя.

Свойство **7°** используется при вычислении определителей вручную. ***Идея здесь та-***

[10] В этих формулах индексы i, j можно поменять местами, а δ_{ij} – символ Кронекера.

[11] Ясно, что слово «остальных» здесь можно заменить словом «некоторых».

кова: при помощи комбинирования строк (столбцов) в исходном определителе, «накопить» в некотором его столбце (строке) $n-1$ нуль (если на некотором шаге преобразований в $\det A$ возникнет нулевая строка ил нулевой столбец, то $\det A = 0$) и разложить определитель по этому столбцу (строке). Тем самым дело сведется к вычислению *одного* определителя порядка $n-1$, с которым следует поступить аналогично и применять эту процедуру до получения окончательного ответа.

8°. Если $A, B \in \mathcal{M}_n$, то $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Это замечательное свойство определителей нам удобнее будет доказать позже, в **Лекции 8** об инвариантных подпространствах. Пока же оно будет лишь подтверждено примерами.

◆**Примеры:**

1). Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = (\text{пояснения ниже}) =$

$$\underset{a)}{=} \begin{vmatrix} 246 & 100 & 327 \\ 1014 & 100 & 443 \\ -342 & 100 & 621 \end{vmatrix} \underset{b)}{=} 100 \cdot \begin{vmatrix} 246 & 1 & 327 \\ 1014 & 1 & 443 \\ -342 & 1 & 621 \end{vmatrix} \underset{c)}{=} 100 \cdot \begin{vmatrix} 246 & 1 & 327 \\ 768 & 0 & 116 \\ -588 & 0 & 294 \end{vmatrix} \underset{d)}{=} -100 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 768 & 116 \\ -588 & 294 \end{vmatrix} =$$

$$= -294 \cdot 100 \cdot \begin{vmatrix} 768 & 116 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -29400 \cdot (768 + 232) = -2{,}94 \cdot 10^7 :$$

►a). из предпоследнего столбца вычли последний;

►b). из $2-$го столбца вынесли общий множитель 100 за знак определителя;

►c). вычли $1-$ю строку из обеих нижележащих;

►d). разложили определитель по $2-$му столбцу.

2). Числа $1081, 1403, 2093$, 1541 делятся нацело на 23. Объясните без вычислений, почему на 23 делится следующий определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

В самом деле, по свойству 7° определитель не изменится, если к последнему его столбцу прибавить линейную комбинацию столбцов с $1-$го по $3-$й с коэффициентами 10^3, 10^2, 10 соответственно. Тогда последний столбец приобретет вид $\begin{pmatrix}1081\\1403\\2093\\1541\end{pmatrix}$ и из него можно будет вынести за знак определителя как множитель число 23, так как все его элементы кратны этому числу. Поскольку оставшийся определитель составлен из целых чисел, то равен тоже целому числу, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

3). Вычислим так называемый определитель Вандермонда

$$V=V(a_1,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\bullet$$

Начиная с последнего столбца определителя, вычтем из каждого его столбца предыдущий столбец, умноженный на a_1 (по свойству 7° величина определителя при этом не изменится):

$$\bullet=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 1 & a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & \ldots & a_2^{n-3}(a_2-a_1) & a_2^{n-2}(a_2-a_1)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & \ldots & a_n^{n-3}(a_n-a_1) & a_n^{n-2}(a_n-a_1)\end{vmatrix}=\bullet$$

разложим получившийся определитель по $1-$й строке и вынесем из каждой строки оставшегося определителя общий множитель a_2-a_1, a_3-a_1, $\ldots$, $a_{n-1}-a_1, a_n-a_1$ соответственно

$$\bullet\,(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdot\ldots\cdot(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-3} & a_2^{n-2}\\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-3} & a_3^{n-2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-3} & a_n^{n-2}\end{vmatrix}}_{V_{n-1}(a_2,\ldots a_n)}=$$

$$=\prod_{j=2}^{n}(a_j-a_1)\cdot\prod_{j=3}^{n}(a_j-a_2)\cdot V_{n-2}(a_3,\ldots,a_n)=\ldots=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

Можем теперь утверждать, что определитель Вандермонда обращается в нуль лишь в случае, когда среди его аргументов $a_1,\ldots,a_n$ есть равные.

4). $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \bullet$

заметим, что альтернативой накоплению нулей в какой-либо строке или некотором столбце определителя при его вычислении может служить диагонализация, с которой мы прежде неоднократно встречались

$$\bullet=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 10 & 3 \\ 0 & -9 & -11 & -1 \\ 0 & 11 & 13 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 11 & 1 \\ 0 & 8 & 10 & 3 \\ 0 & 11 & 13 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 10 & 3 \\ 0 & 11 & 13 & 6 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 2 & 28 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}=1\cdot1\cdot2\cdot9=18.$$

5). Вычислим следующий определитель[12]

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\bullet$$

[12] Такой определитель называется *трехдиагональным*.

разложим Δ_n по $1-$й строке, а затем получившийся определитель $(n-1)-$го порядка также разложим по его $1-$й строке:

$$\bullet = 2\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_{n-1} - (1\cdot\Delta_{n-2} - 1\cdot 0) = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

Из этого рекуррентного соотношения выводим равенство $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$, из которого видно, что разность двух определителей рассматриваемого типа, порядок первого их которых на единицу превосходит порядок второго, одна и та же для всех значений натурального индекса n.

Найдем эту разность при $n = 3$:

$\Delta_3 - \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = [2\cdot(4-1) - 1\cdot(2-0)] - (4-1) = 4 - 3 = 1$, так что окончательно получаем

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = 1 \Rightarrow \Delta_n = \Delta_{n-1} + 1 = \Delta_{n-2} + 2 = \dots = \Delta_{n-(n-1)} + (n-1) = \Delta_1 + n - 1 = |\,2\,| + n - 1 = n+1.$$

6). $\Delta = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ x+3 & 1 & x+5 \\ x+6 & 1 & x+8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x+3 & 1 & 2 \\ x+6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x+3 & 1 & 0 \\ x+6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

7). Решить неравенство $\Delta(x) > 0$, где $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix}$. Вычислим определитель:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 2 & x & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -8 & x \end{vmatrix} = -x\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & x \end{vmatrix} + 8\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -x(x+10) + 8(-4+1) = -x^2 - 10x - 24.$$

Следовательно, $\Delta(x) > 0 \Leftrightarrow$ $x^2 + 10x + 24 < 0$ $\Leftrightarrow$ $-6 < x < -4$.

8). Проверить выполнение равенства $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$ для $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Имеем

► $\det A = 4 - 6 = -2$, $\det B = 40 - 42 = -2 \Rightarrow$ $\det A \cdot \det B = 4$.

► $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A\cdot B) = 19\cdot 50 - 22\cdot 43 = 950 - 946 = 4$.

Таким образом, $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$.

б). То же задание для матриц $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

► $\det A = -a - bc$, $\det B = 5d \Rightarrow$ $\det A \cdot \det B = -5d(a + bc)$.

► $A \cdot B = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ad + b & 5b \\ cd + 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A\cdot B) = 5(-ad + b) - 5b(cd + 1) =$

$= 5(-ad + b - bcd - b) = -5d(a + bc)$.

Вновь убеждаемся, что детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов сомножителей: $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$.

в). То же задание для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 6 & -7 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 10 & 12 \\ -8 & -7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Читателю предлагается самостоятельно убедиться, что

► $\det A = -689$, $\det B = -126$, так что $\det A \cdot \det B = -689 \cdot (-126) = 86814$.

► $A \cdot B = \begin{pmatrix} -85 & -35 & -61 & -25 \\ -33 & -3 & -29 & -27 \\ 133 & 65 & 124 & 97 \\ 15 & 0 & 33 & 54 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\det(A\cdot B) = 86814 = \det A \cdot \det B$.

◆Замечание

На современном этапе развития компьютерных технологий многие задачи линейной алгебры, в том числе рассмотренные в данном курсе лекций, могут быть решены с привлечением таких вычислительных сред, как Mathcad, MATLAB, Maple, MuPad, Mathematica и др. Эти развитые пакеты математических вычислений содержат встроенные средства как символьного, так и численного решения указанных задач. Читателю настоятельно рекомендуется приобщиться к овладению этими средами и решать встречающиеся задачи как аналитически (вручную), так и на компьютере, повышая свою квалификацию и конкурентоспособность.

▲ Вычислите определители

а). $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$. б). $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$.

в). $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

г). Элементы определителя $a_{ij} = \min(i, j)$, где $i, j = \underline{1, n}$.

д). Элементы определителя $a_{ij} = \max(i, j)$, где $i, j = \underline{1, n}$.

д). $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ c & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

ж). $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

▲ Как изменится определитель, если его повернуть на 90° против часовой стрелки?

МЕТОД КРАМЕРА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Этот метод опирается на разработанную технику определителей и представляет собой альтернативу методу Гаусса в одном частном случае, а именно, при решении ***невырожденных «квадратных» линейных систем***.

Итак, пусть дана система линейных уравнений $A\cdot X = B$, где $A \in \mathcal{M}_n$ (иными словами, уравнений в системе столько же, сколько и неизвестных x_j, $j=\underline{1,n}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$).

Обозначим столбцы матрицы системы посредством $a_1,\dots,a_n$ перепишем е в равносильной форме

$$a_1\cdot x_1+\ldots+a_n\cdot x_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot x_k = B\,.$$

Рассмотрим теперь определитель, который получается из $\Delta=\det A$ заменой в нем $j-$го столбца столбцом свободных членов B. Применяя выписанное выше представление вектора B в виде линейной комбинации столбцов матрицы A и используя свойство **4°** определителей, можем написать

$$\Delta_j = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{j-1} & B & a_{j+1} & \dots & a_n \end{pmatrix} =$$

$$= \det\left(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{j-1} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k\cdot x_k \quad a_{j+1} \quad \dots \quad a_n \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{j-1} & x_k\cdot a_k & a_{j+1} & \dots & a_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k\cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{j-1} & a_k & a_{j+1} & \dots & a_n \end{pmatrix}}_{\Delta_{kj}} = \bullet$$

учтем, что $\Delta_{kj} = \Delta\cdot\delta_{kj} = \begin{cases} \Delta, & k=j \\ 0, & k\neq j \end{cases}$, поскольку при $k\neq j$ в определителе Δ_{kj} имеется два одинаковых столбца, а при $k=j$ он, очевидно, совпадает с $\det A$.

● $= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \delta_{kj} \cdot \Delta = \Delta \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \delta_{kj} = \Delta \cdot x_j$.

Отсюда следует, что при $\Delta \neq 0$, т.е. в случае, когда матрица системы A невырождена (обратима) неизвестные x_j, $j = \underline{1,n}$ можно найти по формулам

(3.8) $$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ j = \underline{1,n}.$$

Формулы **(3.8)** называют *формулами Крамера*, а определитель Δ_j в них – j – *м вспомогательным определителем*.

◆**Замечание**

Можно сказать, что решение системы n линейных уравнений с n неизвестными в случае $\Delta \neq 0$, *единственно по построению*. Более детальное доказательство единственности выглядит так: пусть $\{\tilde{x}_j\}, \{\hat{x}_j\}$, $j = \underline{1,n}$ – два решения системы $A \cdot X = B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j = B. \text{ Тогда } \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \tilde{x}_j = B \\ \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \hat{x}_j = B \end{cases} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot (\tilde{x}_j - \hat{x}_j) = B - B = \theta.$$

Если $\{\tilde{x}_j\}, \{\hat{x}_j\}$ – *разные* решения системы, то по крайней мере одно из чисел $\tilde{x}_j - \hat{x}_j$ отлично от нуля. В этом случае в предыдущем равенстве нетривиальная линейная комбинация столбцов матрицы A обращается в нуль-вектор. Отсюда вытекает, что эти столбцы линейно зависимы и поэтому $\det A = 0$, что исключено по условию.

Вывод: $\tilde{x}_j = \hat{x}_j$, $j = \underline{1,n}$, так что решение **(3.8)** *единственно*.

К недостаткам обсуждаемого способа отыскания x_j в сравнении с методом Гаусса обычно относят следующие:

- метод «не работает» в случае, когда число неизвестных и связывающих эти неизвестные уравнений в линейной системе *различны*;
- метод «не работает» в случае, когда матрица системы вырожденная, т.е. $\det A = 0$.

Можно лишь утверждать, что в этом случае *для совместности системы необходимо, чтобы **все** вспомогательные определители* Δ_j, $j = \overline{1,n}$ *обращались в нуль*. При этом выражение для x_j представляет собой своего рода неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и удается избежать деления на 0 «в чистом виде», т.е. когда $\Delta_j \neq 0$ при каком-либо значении индекса $j \in \overline{1,n}$[13].

• в расширенных курсах линейной алгебры с уклоном в вычислительные е аспекты показывают, что метод Крамера более трудоемок, чем метод Гаусса (при больших значениях n требует б**о**льшего числа арифметических операций).

Несмотря на указанные недостатки, этот метод нередко используют при решении линейных систем вручную, если $\det A \neq 0$, а порядок системы n – не слишком велик (≤ 4). Кроме того, метод бывает полезен при некоторых теоретических построениях, например, при нахождении методов обращения матриц, не основанных на методе Гаусса (см. далее).

◆**Примеры:**

1). Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2ax - 3by = 0 \\ 3ax - 6by = ab \end{cases}$.

Используя метод Крамера, находим

$$\bullet\ \Delta = \begin{vmatrix} 2a & -3b \\ 3a & -6b \end{vmatrix} = 3ab \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3ab \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases};$$

$$\bullet\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -3b \\ ab & -6b \end{vmatrix} = 3ab^2;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 3a & ab \end{vmatrix} = 2a^2b \Rightarrow$$

$$\bullet\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3ab^2}{-3ab} = -b;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2a^2b}{-3ab} = -\frac{2a}{3}.$$

Итак, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ -\frac{2a}{3} \end{pmatrix}$.

[13] Возникновение такой ситуации есть *достаточный признак несовместности системы*.

2). Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=-3 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4=-6 \\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4=-8 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4=-8 \end{cases}$.

Имеем

$$\bullet\ \Delta=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-6;$$

$$\bullet\ \Delta_1=-\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & -7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}==4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4\cdot(4-7)=-12;$$

$$\bullet\ \Delta_2=-\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=-6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=12\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=12;$$

$$\bullet\ \Delta_3=-\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 5 \\ 6 & 8 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}=-3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}=-3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-3\cdot(4-2)=-6;$$

$$\bullet\ \Delta_4=-\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \\ 6 & 8 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6.$$

Таким образом,

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-12}{-6}=2;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{12}{-6}=-2;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-6}{-6}=1;\ x_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}=\frac{6}{-6}=-1 \text{ и}$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}$$ – единственное решение данной системы.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Свойство 6° определителей лежит в основе еще одного способа нахождения обратной матрицы. Этот способ демонстрирует, что в случае, когда для заданной матрицы $A \in \mathcal{M}_n$ имеет место равенство, обратная матрица A^{-1} не существует. Вместе с тем, условие $\det A \neq 0$ есть достаточное условие обратимости. Тем самым получаем простую числовую характеристику (индикатор) вырожденности матрицы, которой не было при использовании метода диагонализации Гаусса–Жордана.

В самом деле, по формуле **(3.7)** (можно взять любую из двух написанных там формул) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot D_{jk}=\det A\cdot\delta_{ij}$. Если обозначить элемент матрицы A^{-1} посредством α_{ij}, то, как известно, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot\alpha_{kj}=\delta_{ij}$ – элемент единичной матрицы $\mathbb{E}_n$.

Сравнив это с предыдущим равенством, заключаем, что при $\det A \neq 0$

(3.9) $$\alpha_{kj}=\frac{D_{jk}}{\det A} \Leftrightarrow A^{-1}=\frac{D^T}{\det A},$$

откуда вытекает следующий ***алгоритм построения искомой обратной матрицы***:

а). Для заданной квадратной матрицы $A \in \mathcal{M}_n$ вычислить $\det A$; $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$;

б). Построить матрицу $D \in \mathcal{M}_n$ из алгебраических дополнений элементов определителя $\det A$;

в). Транспонировать построенную в предыдущем пункте матрицу D;

г). Для нахождения обратной матрицы в соответствии с формулой **(3.9)** умножить D^T на число, обратное к $\det A$.

◆**Примеры:** (найти матрицы, обратные к заданным)

1). $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -7 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & -27 & -38 \end{vmatrix} =$

$= -\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -27 & -38 \end{vmatrix} = 189 - 190 = -1.$

Далее,

• $D_{11} = +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - (-8) = -1$; $D_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(-18 - 20) = 38$;

$D_{13} = +\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27$; • $D_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -[-15 - (-14)] = 1$;

$D_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 35 = -41$; $D_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 25) = 29$;

• $D_{31} = +\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1$; $D_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 42) = 34$;

$D_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24.$

Следовательно, $D = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{D^T}{\det A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$

∗**Проверка:** $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} =$ ●

$2 \cdot 1 + 5 \cdot (-38) + 7 \cdot (27) = 2 - 190 + 189 = 1;$

$2 \cdot (-1) + 5 \cdot (41) + 7 \cdot (-29) = -2 + 205 - 203 = 0;$

$2 \cdot 1 + 5 \cdot (-34) + 7 \cdot (24) = 2 - 170 + 168 = 0;$

$6 \cdot 1 + 3 \cdot (-38) + 4 \cdot (27) = 6 - 114 + 108 = 0;$

$6 \cdot (-1) + 3 \cdot (41) + 4 \cdot (-29) = -6 + 123 - 116 = 1;$

$6\cdot 1+3\cdot(-34)+4\cdot(24)=6-102+96=0$;

$5\cdot 1-2\cdot(-38)-3\cdot(27)=5+76-81=0$;

$5\cdot(-1)-2\cdot(41)-3\cdot(-29)=-5-82+87=0$;

$5\cdot 1-2\cdot(-34)-3\cdot(24)=5+68-72=1$.

$$\bullet=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathbb{E}_3 .$$

2). $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=1^5=1$. Алгебраические дополнения:

• $D_{11}=+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$; $D_{12}=D_{13}=D_{14}=D_{15}=0$;

• $D_{21}=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-1$; $D_{22}=+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$; $D_{23}=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=0$;

$D_{24}=+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=0$; $D_{25}=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}=0$;

• $D_{31}=0$; $D_{32}=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-1$; $D_{33}=+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$; $D_{34}=D_{35}=0$

и далее по аналогии

• $D_{41}=D_{42}=0$; $D_{43}=-1$; $D_{44}=1$; $D_{45}=0$;

• $D_{51} = D_{52} = D_{53} = 0$; $D_{54} = -1$; $D_{55} = 1$, так что $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

С учетом того, что $\det A = 1$, получаем: $A^{-1} = D^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Результат остается верным при $\forall n \in \mathbb{N}$.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ВЗГЛЯД НА ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

В заключение остановимся кратко на еще одном полезном подходе к определению детерминанта, основанном на изученных в этой лекции свойствах определителей. Выделим среди этих свойств следующие три: линейность определителя по строкам (столбцам), его антисимметричность по строкам (столбцам) и условие нормировки, состоящее в том, что определитель единичной матрицы равен единице.

Оказывается, что этими тремя условиями детерминант ***однозначно определяется*** как числовая функция, заданная на множестве квадратных числовых матриц. А именно, справедлива следующая (приводимая здесь без доказательства)

•ТЕОРЕМА•

1. Существует и единственна функция $f(A)$, определенная на множестве квадратных числовых матриц A, обладающая следующими свойствами:

a). если некоторую строку (столбец) s матрицы A можно представить в виде линейной комбинации строк (столбцов) s_1, s_2: $s = \alpha \cdot s_1 + \beta \cdot s_2$, то

$$f(A) = \alpha \cdot f[A(s \leftarrow s_1)] + \beta \cdot f[A(s \leftarrow s_2)],$$

где матрицы $A(s \leftarrow s_1)$, $A(s \leftarrow s_2)$ получаются из матрицы A указанной заменой строки (столбца) s на s_1 или s_2: $s \leftarrow s_1$, $s \leftarrow s_2$;

b). $f(A \rightleftarrows) = -f(A)$, где матрица $A \rightleftarrows$ получена из матрицы A перестановкой двух строк (столбцов);

c). $f(\mathbb{E}) = 1$, где $\mathbb{E}$ – единичная матрица.

2. Значение этой функции на матрице A численно равно ее определителю: $f(A) = \det A$.

Эта теорема позволяет определить детерминант матрицы как ее числовую функцию, имеющую указанные свойства, после чего вывести как следствия все рассматривавшиеся ранее факты теории определителей. Такая трактовка определителя, принятая в некоторых руководствах по линейной алгебре, является более отвлеченной и абстрактной в сравнении с традиционным подходом, который строится в соответствии с принципом «от простого к сложному» и отталкивается от правила вычисления детерминанта по элементам матрицы. Однако, именно она вскрывает глубинный функциональный смысл определителя и универсальную природу свойств а) – с), гарантирующих однозначность соответствия $A \to \det A$.

Краткая биографическая справка

- Вандермонд Александр Теофиль (1735–1796 г.г.) –французский математик.
- Крамер Габриэль (1704–1752 г.г.) – швейцарский математик.