Лекция 1. (Вводная). Множество. Число. Функция

В предлагаемом вниманию читателя курсе математического анализа различные определения, утверждения и теоремы зачастую формулируются посредством общепринятых логических обозначений – символов (элементов, *кванторов*) языка раздела математики, именуемого математической логикой. Использование подобной символики не является, как известно, необходимым[1], однако имеет ряд преимуществ, в особенности в небольших по продолжительности лекционных курсах. Одно из таких преимуществ – компактность и емкость формулировок, позволяющая экономить время и место. Другое состоит в том, что применение этого языка закрепляет у изучивших его читателей навыки систематического и универсального мышления, что облегчает восприятие строгих посылок, выводов и доказательств математического анализа. Следует, впрочем, сказать, что применение упомянутых символов не является в данном курсе самоцелью, и рядом с некоторым математическим предложением, «зашифрованным» подобным образом, почти всегда можно найти его «перевод» на обычный язык. Из сравнения этих *двух форм одного и того же* вдумчивый студент извлечет несомненные преимущества более глубокого проникновения в суть изучаемого математического понятия и дополнительные степени интеллектуальной свободы.

Не имея целью систематическое изучение математической логики и свойств даже тех ее простейших языковых конструкций, о которых говорилось выше, приводим ниже их сокращенный перечень с необходимыми пояснениями.

СИМВОЛИКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Символ	Смысл
«$\forall$» – квантор всеобщности	Заменяет словосочетания: «любой», «всякий», «для любого» и т.п.
«$\exists$» – квантор существования	... «существует», «найдется» и т.п.
«$\Rightarrow$» – знак импликации	... «следует», «влечет», «вытекает», «имеет

[1] Есть несколько блестящих примеров курсов математики, в которых такой подход совсем не используется. Один из них – двухтомник Н.Н.Лузина «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление».

	место», «выполняется»
«$\Leftrightarrow$» – знак равносильности или эквивалентности	... «тогда и только тогда, когда», «в том и только том случае, когда», «если и только если»
«:» – двоеточие	... «такой, что»
«|» – вертикальная черточка; сходен по смыслу и употреблению с предыдущим символом	... «при условии, что»
«{ *некоторые объекты* }» – фигурные скобки	Знак совокупности объектов (например, чисел, геометрических фигур, функций и пр.)
«$\overline{\ *\ }$» горизонтальная черта над некоторым утверждением	Знак отрицания. Означает, что данное утверждение не имеет места
$\left\{ \boxed{\textit{условия}} \right.$	Знак ***системы*** условий
$\left[\boxed{\textit{условия}} \right.$	Знак ***совокупности*** условий

Система условий выполнена $\Leftrightarrow$ [2] выполнены *все* условия системы; система не выполнена $\Leftrightarrow$ не выполнено *хотя бы одно* из ее условий[3].

Совокупность условий выполнена $\Leftrightarrow$ выполнено *хотя бы одно* из них; совокупность не выполнена $\Leftrightarrow$ одновременно не выполнены *все* ее условия[4].

I. МНОЖЕСТВО

Понятие множества – первичное (элементарное) понятие математики, не сводящееся к более простым понятиям, и потому не имеющее строгого математического определения.

[2] Логическая символика изредка будет употребляться не только в определениях и других математических высказываниях, а и в обычных предложениях для сокращения записи.

[3] Можно сказать, что в этом смысле условия в системе объединяются союзом «**и**». Наряду со знаком системы условий используют равносильный по смыслу логический символ «$\wedge$» – знак *конъюнкции*.

[4] Часто также говорят, что условия в совокупности объединяются *неисключающим* союзом «**или**» в прямом соответствии со смыслом словосочетания «хотя бы одно». Наряду со знаком совокупности условий используют равносильный по смыслу логический символ «$\vee$» – знак *дизъюнкции*.

Множество понимается как *совокупность* некоторых объектов, называемых *элементами* данного множества.

◆**Пример:** множество факультетов НФ ГУ ВШЭ; множество девушек с зелеными глазами на ЭФ, множество звезд в Галактике и т.п.

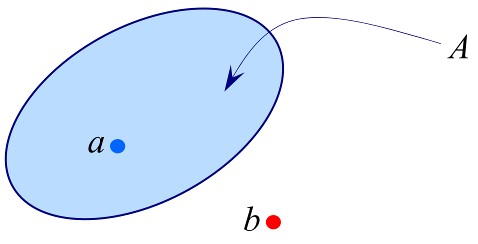
Пустое множество, обозначаемое посредством символа $\emptyset$, есть множество, не содержащее элементов.

◆**Примеры:** множество действительных корней уравнения $x^2+1=0$, множество пересекающихся параллельных прямых в школьной геометрии, множество треугольников с четырьмя сторонами.

Диаграммы Эйлера – Венна

Диаграммы Эйлера – Венна – удобное графическое средство изображения множеств, их элементов и различных соотношений между ними. Множества представляются некоторыми (часто плоскими) фигурами, а их элементы – точками этих фигур. В качестве обозначений (названий, имен) множеств традиционно используют заглавные латинские буквы $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$, а их элементы часто обозначают малыми латинскими буквами $a, b, c \ldots, x, y, z$. *Принадлежность* элемента a множеству A записывают в виде $a \in A$, а если элемент b *не принадлежит* множеству A, то пишут $b \notin A$.

Диаграмма



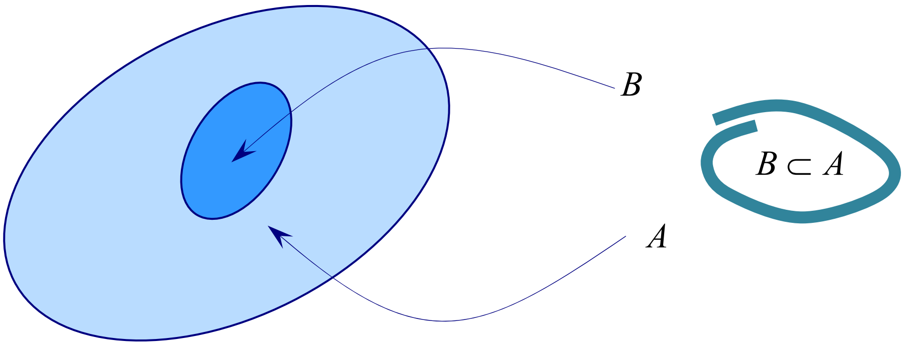
Подмножества

Понятие подмножества возникло в результате необходимости придать строгую форму тому обстоятельству, что из двух множеств одно есть в некотором смысле *часть* другого.

◀Определение▶ Множество B называют подмножеством множества A (пишут $B \subset A$ или $A \supset B$), если всякий элемент множества B есть в то же время и элемент множества A: $B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A$.

Говорят также, что множество B *включено* (или *вложено*) в множество A.

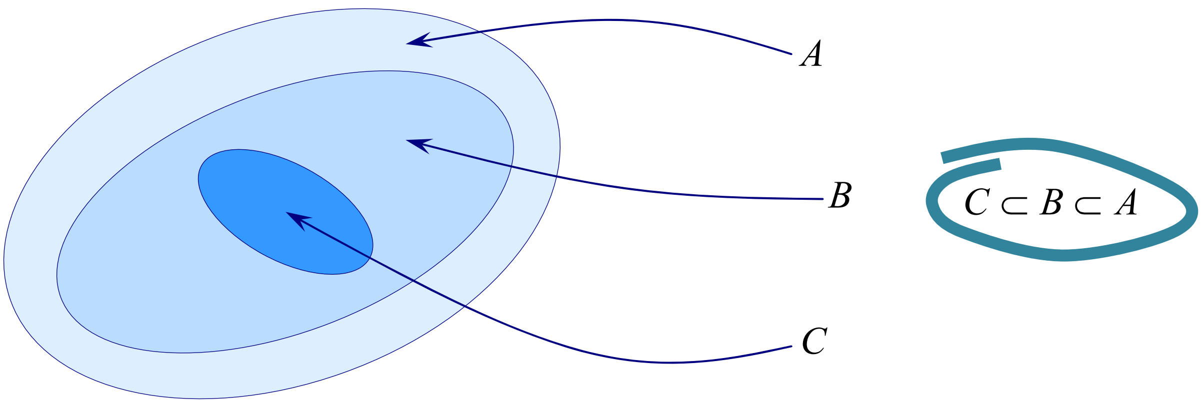
Диаграмма



В соответствии с приведенным определением для любого множества A выполняется включение $A \subset A$ (то есть любое множество включено само в себя). По определению принимают также, что $\emptyset \subset A, \forall A$ (пустое множество включено во всякое другое)[5].

Отношение включения *транзитивно*, то есть если $C \subset B$ и $B \subset A$, то $C \subset A$.

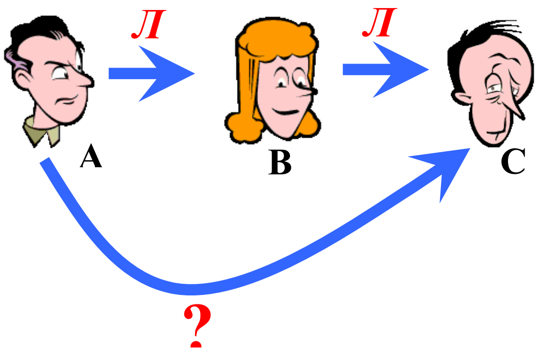
Диаграмма



[5] Если считать, что фраза «элемент x принадлежит множеству $\varnothing$», имеет смысл, то включение $\varnothing \subset A$ можно *доказать*, исходя из определения **(докажите!)**.

Не следует думать, что указанное свойство отношения включения является само собой разумеющимся, т.к. *не все отношения транзитивны* (не только в математике, но и в быту**!**).

◆**Пример:** Экономисту A нравится экономистка B, а ей нравится экономист C:



Равенство множеств

◀**Определение**▶ $A \overset{\text{def}}{=} B \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \\ \forall y \in B \Rightarrow y \in A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}.$

«$\overset{\text{def}}{=}$» – знак *равенства по определению* («**def**inition»), используется для введения (определения) новых понятий, читается: «есть по определению».

При этом для обозначения равных множеств используют традиционный знак равенства «$=$» и пишут, как обычно: $A = B$.

◆**Пример:** пусть A – множество равносторонних треугольников, и B – множество равноугольных треугольников. Ясно, что $A = B$, то есть эти *множества состоят из одних и тех же элементов* и потому равны друг другу в соответствии с вышеприведенным определением **(проведите доказательство подробно по схеме, данной ниже в замечании)**.

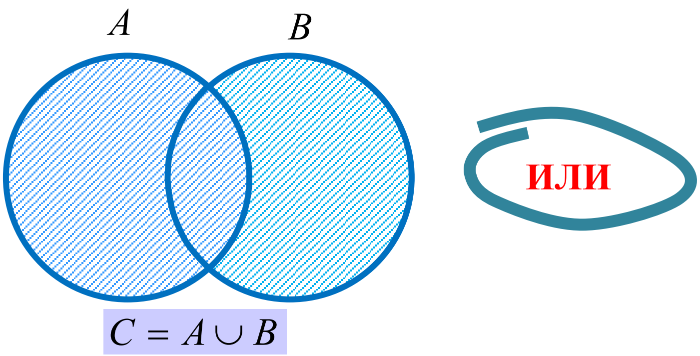
Операции над множествами

1. Объединение (аналог сложения чисел; знак операции – «$\cup$», «чашка»).

◀**Определение**▶ $C \overset{\text{def}}{=} A \cup B \Leftrightarrow C = \{\, c : \left[\begin{array}{l} c \in A \\ c \in B \end{array} \right. \}.$

Таким образом, объединение множеств состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат *хотя бы одному* из объединяемых множеств.

Диаграмма



Данное выше определение относится и к объединению *любого конечного числа* множеств.

Свойства операции «$\cup$».

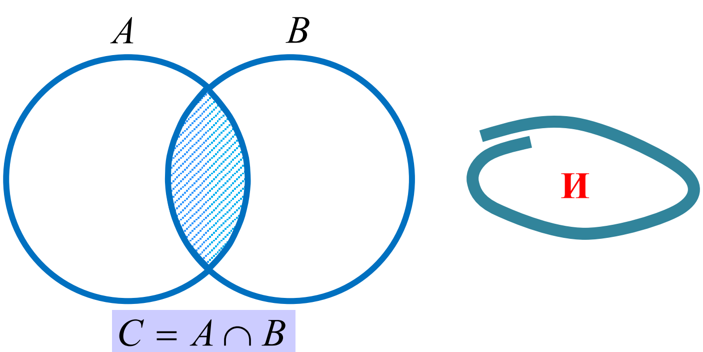
- $A \cup B = B \cup A$ – коммутативность; переместительный закон
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – ассоциативность; сочетательный закон
- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$

2. Пересечение (аналог умножения чисел; знак операции – «$\cap$», «крышка»).

◀**Определение**▶ $C \overset{\text{def}}{=} A \cap B \Leftrightarrow C = \left\{ c : \begin{cases} c \in A \\ c \in B \end{cases} \right\}.$

Таким образом, пересечение множеств состоит из тех и только тех элементов, которые *входят одновременно* в эти множества.

Диаграмма



Данное выше определение относится и к пересечению *любого конечного* их числа.

Свойства операции «$\cap$».

- $A \cap B = B \cap A$ – коммутативность; переместительный закон
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – ассоциативность; сочетательный закон
- $A \cap A = A$[6]
- $A \cap \varnothing = \varnothing$[7]

Операции объединения и пересечения *взаимно распределительны* (*дистрибутивны*)[8]:

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ – дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ – дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$.

◆**Замечание**

Доказательство всех свойств операций над множествами, представляющих собой *утверждения о равенстве некоторых множеств*, производится по следующей схеме: доказывают, что всякий элемент левой части равенства является и элементом правой, а всякий элемент правой части равенства является и элементом левой, после чего используют определение равенства множеств.

Пусть, далее, $B \subset A$. Тогда $A \cup B = A$ (объединение таких множеств есть более «широкое» из них), $A \cap B = B$ (пересечение – более «узкое»).

3. Разность множеств. Дополнение (аналог числового вычитания; знак операции – «\»).

◄**Определение**► $C \overset{\text{def}}{=} A \setminus B \Leftrightarrow C = \{ c : \begin{cases} c \in A \\ c \notin B \end{cases} \}$.

Таким образом, разность множеств A и B состоит из тех и только тех элементов множества A, которые при этом не входят в множество B.

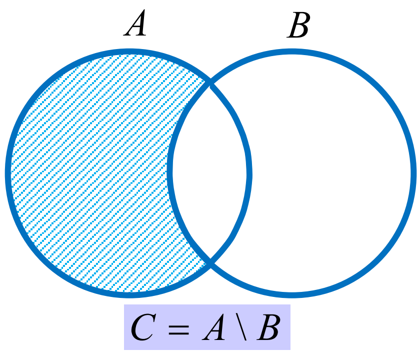
---

[6] Обратите внимание на то, что это свойство пересечения, как и свойство объединения $A \cup A = A$, отличают указанные операции над множествами от операций сложения и умножения действительных чисел.

[7] Это свойство, как и свойство объединения $A \cup \varnothing = A$, показывает, что пустое множество $\varnothing$ играет среди множеств роль, сходную с той, которую играет число «0» в множестве действительных чисел.

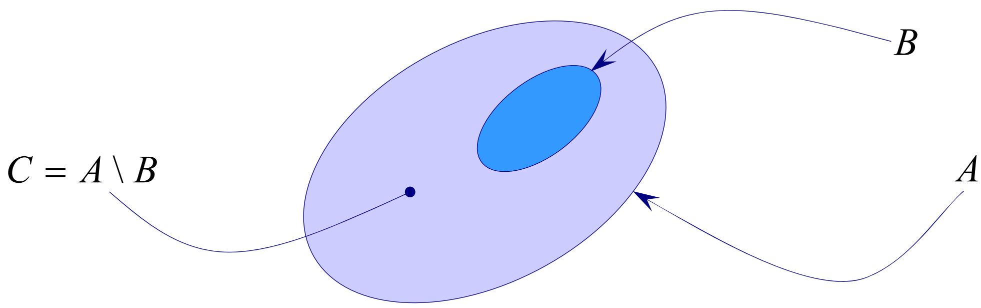
[8] В арифметике распределительно только *умножение* чисел по отношению к *сложению*.

Диаграмма



Операция «\» не является ни коммутативной, ни ассоциативной: $A \setminus B \neq B \setminus A$, $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$.

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением множества* B *в множестве* A:



Пусть $U_i \subset A,\ i = 1, \ldots, n$ – подмножества множества A. Обозначим посредством $\bigcup\limits_i U_i = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n$, объединение всех таких множеств U_i и посредством $\bigcap\limits_i U_i = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$, – их пересечение.

Имеют место важные соотношения, называемые ***формулами де-Моргана*** и выражающие так называемый *принцип двойственности* (термин «двойственность» обусловлен тем, что каждое из этих соотношений переходит во второе, если в нем поменять местами знаки операций объединения и пересечения):

$$A \setminus \left(\bigcup_i U_i \right) = \bigcap_i (A \setminus U_i)$$

$$A \setminus \left(\bigcap_i U_i \right) = \bigcup_i (A \setminus U_i)$$

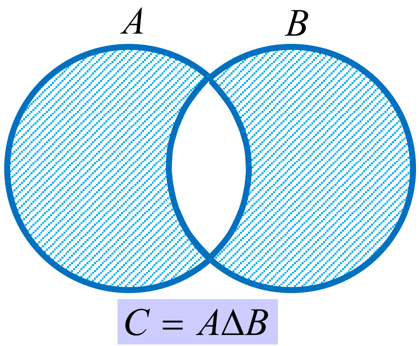
Формулы де Моргана

Таким образом, дополнение в множестве A объединения (пересечения) подмножеств множества A равно пересечению (объединению) дополнений этих подмножеств в A.

При помощи операций «$\setminus$» и «$\cup$» можно образовать так называемую *симметрическую разность* (знак операции – «Δ») множеств A и B:

◀**Определение**▶ $C \overset{\text{def}}{=} A \,\Delta\, B \Leftrightarrow C = \{\, c : \left[\begin{array}{l} c \in A \setminus B \\ c \in B \setminus A \end{array}\right. \}$.

Диаграмма



Операция «Δ», в отличие от «\», является уже как коммутативной, так и ассоциативной **(докажите!)**. Выполняется равенство $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

4. Декартово произведение множеств (знак операции – «×»).

◀**Определение**▶ $C \overset{\text{def}}{=} A \times B \Leftrightarrow C = \{\, (x, y) : \begin{cases} x \in A \\ y \in B \end{cases} \}$.

Таким образом, декартово произведение *двух* множеств есть совокупность *упорядоченных*[9] *пар* элементов, первый из которых принадлежит первому множеству, а второй – второму.

Известно, что операция «×» не коммутативна, но ассоциативна: $A \times B \neq B \times A$, но $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

Аналогично вводится декартово произведение более чем двух множеств:

---

[9] Упорядочение означает, что числам в паре присвоены порядковые номера «1» и «2», в соответствии с которыми они перечислены внутри круглых скобок. Таким образом, пары (x, y) и (y, x) – вообще говоря, *различны*.

◀**Определение**▶ $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \overset{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}$[10] – *совокупность упорядоченных наборов*, состоящих из n элементов, причем первый из них принадлежит первому из множеств, второй – второму и т.д.

Трудности теории множеств[11]

◆**Пример:** Размышляя над понятием множества, заметим, например, следующее.

1). Множество *всех треугольников не является треугольником* и поэтому не входит само в себя в качестве элемента.

2). Множество *всех множеств* – тоже множество и поэтому, казалось бы, в отличие от первого случая, *должно входить в себя в качестве элемента*.

Обозначим теперь посредством Ω свойство множества, состоящее в том, что оно не входит в себя в качестве элемента. Как видно, множество всех треугольников обладает этим свойством, а множество всех множеств – нет. Построим, далее, множество A, включив в него те и только те множества, которые обладают свойством Ω.

Вопрос: *обладает ли само множество* A *этим свойством* Ω ?

Пусть A обладает свойством Ω. Тогда A не должно входить в A в качестве элемента. Но с другой стороны – должно входить, т.к. A состоит по построению из всех множеств, которые сами в себя в качестве элемента не входят – ***противоречие***.

Пусть A не обладает свойством Ω, то есть A есть в A, что означает по признаку входящих в A элементов-множеств, что множества A в качестве элемента в A не содержится– ***вновь противоречие***.

Итак, построенное нами множество A не может ни *обладать* свойством Ω, ни *не обладать* им.

Этот парадокс известен в теории множеств как *парадокс Б.Рассела*.

---

[10] Здесь употреблена несколько иная, чем в предыдущих определениях, система обозначений, более удобная для данного случая: системный знак заменен перечислением нескольких одновременно выполняющихся условий через запятую, вместо которой можно было также везде написать значок «$\wedge$».

[11] Продемонстрированы на общеизвестном примере, показывающем, как отсутствие логически строгого определения некоторого понятия (в данном случае – понятия множества) может приводить к противоречиям.

Преодоление: можно, например, постулировать, что *никакая совокупность не может быть частью самой себя*. Тогда следует признать понятие «множество всех множеств» внутренне противоречивым и не использовать его в дальнейших построениях[12].

Легко привести примеры внутренне противоречивых высказываний бытового свойства. Например, фраза «Я лжец» внутренне противоречива. Действительно, данное высказывание либо истинно, либо ложно. Если высказывание «Я лжец» истинно, то сказавший это – не солгал, то есть не является лжецом, что противоречит смыслу высказанной фразы. Если же это высказывание ложно, то сказанное есть неправда, то есть неправда, что человек – лжец. Однако это противоречит тому, что он сказал неправду. Итак, нельзя произнести «Я лжец», не впав при этом в логическое противоречие.

II. ЧИСЛО

Понятие числа – это также одно из элементарных понятий математики. Оно возникло и развивалось в результате практической потребности *выражать количественно* всевозможные соотношения между различными объектами внешнего мира.

Основные множества чисел

- $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ – множество ***натуральных*** чисел. Возникло из потребности *счета* предметов.

В результате формализации понятий «отсутствия количества» и «долга» множество $\mathbb{N}$ было дополнено при помощи нуля и отрицательных (противоположных натуральным) чисел до множества ***целых*** чисел (по некоторым данным это произошло в Древнем Вавилоне):

- $\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$.

Потребность оперировать с частями целого породила множество ***рациональных*** чисел:

[12] Вопросы о том, насколько верны теории, основанные на понятиях, таящих в себе внутренние противоречия, являются в математической логике предметом специальных глубоких исследований. Опыт учит, что несмотря на наличие парадоксов, подобных рассмотренному выше, математический анализ – весьма полезная теория, даже если смотреть на него чисто утилитарно, то есть только с точки зрения практической пригодности его результатов (в частности, в задачах экономики).

➢ $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \right\}, \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}$. Таким образом, рациональные числа – это дроби с целым числителем и натуральным знаменателем.

Результат любой из основных арифметических операций (« + », « – », « × », « : »), выполненной над *рациональными* операндами (деление на нуль запрещено), также является *рациональным* числом (это не так для натуральных и целых чисел**!**).

С арифметической точки зрения рациональные числа представляют собой *конечные* или *бесконечные периодические* десятичные дроби.

◆**Пример:** $-\dfrac{1}{4} = -\,0.25\,; \quad \dfrac{1}{3} = 0,333\ldots = 0,(3)\,; \quad \dfrac{1}{7} = 0,(142857)$

период

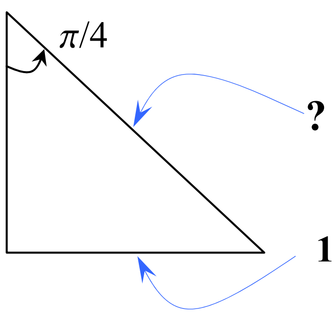
▲ Соответствуют ли каким-либо рациональным числам десятичные дроби:

$0,10100100010000\ldots; \quad 0,123456789101112\ldots?$

▲ Выясните, от чего и как именно зависит, представляется ли рациональное число конечной или бесконечной периодической десятичной дробью.

Простейшие потребности геометрии привели к открытию в Древней Греции количеств, не выражаемых рациональными числами.

◆**Пример:** Если длине катета равнобедренного прямоугольного треугольника поставить в соответствие число 1, то в множестве $\mathbb{Q}$ не найдется числа, которое бы соответствовало длине его гипотенузы **(докажите!)**. Из теоремы Пифагора следует, что квадрат этого числа равен 2.

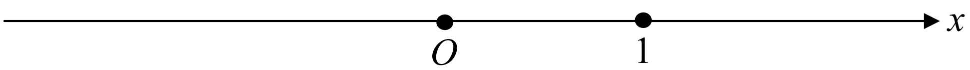


Числа указанного вида (то есть не входящие в $\mathbb{Q}$), образуют множество $\mathbb{I}$ ***иррациональных*** чисел (представляют собой *бесконечные десятичные непериодические дроби*).

◄**Определение**► Множество $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, то есть объединение множеств рациональных и иррациональных чисел, называется множеством ***действительных (вещественных)*** чисел.

Геометрический образ множества $\mathbb{R}$ – *числовая прямая* (*числовая ось*, ч.о.).

Числовая ось есть непрерывная бесконечная прямая, на которой выбраны: начало отсчета (произвольная ее точка, условно соответствующая числу 0), отмечаемое стрелкой направление возрастания чисел и масштаб – единичный отрезок от начала отсчета до точки на прямой, условно соответствующей числу 1:



Между точками ч.о. и действительными числами имеется *взаимно однозначное соответствие*: каждой точке ч.о. соответствует единственное число, для каждого числа найдется соответствующая ему точка ч.о. и разным точкам ч.о. соответствуют разные числа[13].

Действительные числа образуют *упорядоченное* множество (то есть их можно сравнивать по величине): для всяких двух чисел a, b выполнено *лишь одно* из трех возможных соотношений: $a < b, a > b, a = b$.

◄**Определение**► *Целой частью* действительного числа x (обозначения $E(x), [x]$) называется наибольшее целое число, не превосходящее x.

◆**Пример:** $[-1{,}2] = -2, \quad [0] = 0, \quad [7{,}04] = 7$.

◄**Определение**► *Дробной частью* действительного числа x (обозначение $\{x\}$) называется разность между ним и его целой частью: $\{x\} = x - [x]$.

◆**Пример:** $\{1{,}7\} = 1{,}7 - [1{,}7] = 1{,}7 - 1 = 0{,}7; \quad \{-0{,}3\} = -0{,}3 - [-0{,}3] = -0{,}3 - (-1) = 0{,}7$.

Ясно, что $0 \le \{x\} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

[13] Тем самым точки числовой прямой и действительные числа выступают в виде уникальных пар: всякая точка – в паре с ей и только ей соответствующим действительным числом и наоборот.

◄**Определение**► ***Абсолютной величиной*** (***модулем***) действительного числа x называется действительное число $|\,x\,|$, вычисляемое по формуле

$$|\,x\,| \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

(здесь фигурная скобка не имеет «системного смысла», т.к. не является первым символом выражения – ей предшествует знак равенства по определению; она обозначает совокупность равенств, определяющих величину $|\,x\,|$, а именно: модуль неотрицательного действительного числа совпадает с самим числом, тогда как модуль отрицательного числа равен противоположному действительному числу).

Основные свойства модуля

1°. Модуль есть величина неотрицательная: $|\,x\,| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

2°. Модули противоположных величин равны: $|\,x\,| = |-x\,|,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3°. Модуль не меньше самой величины и ей противоположной: $|\,x\,| \geq x,\ |\,x\,| \geq -x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

4°. ***Геометрический смысл модуля***

Число $|\,a-b\,|$ равно *расстоянию* между точками ч.о., соответствующими числам a и b. В частности, $|\,x\,| = |\,x-0\,|$ есть расстояние от точки x до начала отсчета на ч.о.

5°. ***Неравенство треугольника***

Модуль суммы не превосходит суммы модулей слагаемых: $|\,x+y\,| \leq |\,x\,| + |\,y\,|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Следствия:

a). $|\,x_1 + x_2 + \ldots + x_n\,| \leq |\,x_1\,| + |\,x_2\,| + \ldots + |\,x_n\,|$, или $\left|\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |\,x_j\,|$, где $\sum\limits_{j=1}^{n}$ – знак (символ) *суммирования по индексу* j от 1 до n **(докажите!)**.

b). $\big|\,|\,x\,| - |\,y\,|\,\big| \leq |\,x-y\,|$ – модуль разности модулей двух чисел не превосходит модуля их разности **(докажите!)**.

6°. $|\,x\cdot y\,| = |\,x\,|\cdot|\,y\,|$ – модуль произведения равен произведению модулей сомножителей; верно для любого числа сомножителей $\Rightarrow$ $|\,x^n\,| = |\,x\,|^n$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|\,x\,|}{|\,y\,|}$, $y\neq 0$ – модуль частного равен частному модулей делимого и делителя.

7°. $\sqrt{x^2} = |\,x\,|$ – правило извлечения *арифметического квадратного корня* из квадрата действительного числа.

Числовые промежутки на числовой оси. Несобственные элементы

1. Отрезок $\begin{cases} x\geq a \\ x\leq b\end{cases} \Leftrightarrow a\leq x\leq b$

$[a;b]$

2. Интервал $\begin{cases} x> a \\ x< b\end{cases} \Leftrightarrow a< x< b$

$(a;b)$

3. Полуотрезок (полуинтервал)

$\begin{cases} x\geq a \\ x< b\end{cases} \Leftrightarrow a\leq x< b$

$[a;b)$

$\begin{cases} x> a \\ x\leq b\end{cases} \Leftrightarrow a< x\leq b$

$(a;b]$

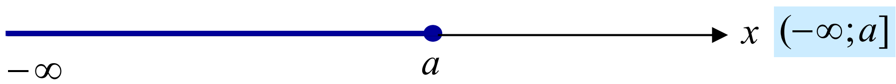
Несобственными элементами числовой оси называют символы $+\infty$ и $-\infty$. Им не соответствуют никакие точки ч.о., что обусловливает термин «несобственные» по отношению к этим символам. Выше были изображены лишь *конечные* промежутки[14] ч.о., то есть такие, для которых расстояние от их точек до начала отсчета ограничено некоторой величиной $R > 0$ (такие промежутки имеют конечную длину). Несобственные символы $+\infty$ и $-\infty$ связаны отношениями порядка с действительными числами следующим образом: $+\infty$ $(-\infty)$ больше (меньше) *любого* действительного числа. Это позволяет применить сходные с упомянутыми выше обозначения и для *бесконечных* промежутков числовой прямой.

А именно:

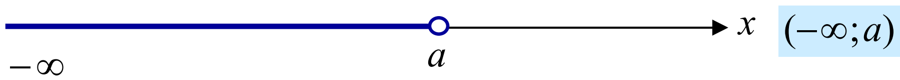
$x \geq a \Leftrightarrow x \in [a;+\infty)$

$x > a \Leftrightarrow x \in (a;+\infty)$

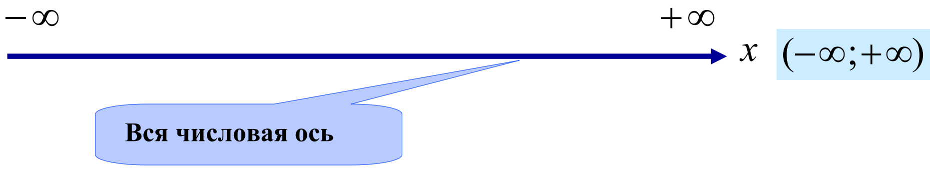
$x \leq a \Leftrightarrow x \in (-\infty;a]$



$x < a \Leftrightarrow x \in (-\infty;a)$



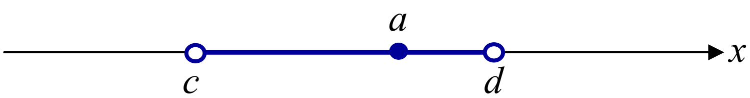
$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\infty < x < +\infty \Leftrightarrow x \in (-\infty;+\infty)$



[14] Объединяющий термин для отрезков и интервалов (полуинтервалов) числовой прямой.

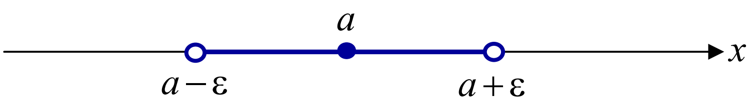
Окрестности

◀**Определение**▶ Окрестность действительного числа a есть произвольный интервал ч.о., содержащий точку a:



$a \in (c;d)$

Важную роль в дальнейшем будут играть окрестности, для которых точка a – середина интервала $(c;d)$. Если длину такого интервала обозначить, следуя традиции, как 2ε, (ε – «эпсилон», буква греческого алфавита; $\varepsilon > 0$) то получим $c = a - \varepsilon$, $d = a + \varepsilon$:



Такие окрестности называют $\varepsilon -$*окрестностями* точки a и обозначают $U_\varepsilon(a)$. Таким образом, $U_\varepsilon(a) = \{x : |x - a| < \varepsilon\}$.

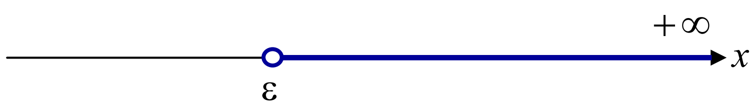
◆**Пример:** интервал $(-1\,;5)$ есть $3-$окрестность точки $x = 2$.

Если окрестность точки a не содержит самой этой точки, то она называется *проколотой* ее окрестностью: $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a) = \{x : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$.

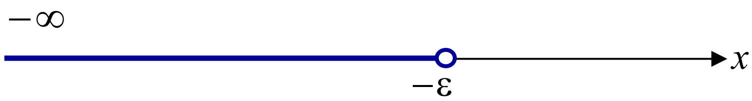
Для единообразного изложения формулировок и доказательств многих теорем математического анализа удобно ввести понятие $\varepsilon-$окрестностей и для несобственных символов числовой оси. Это делается следующим образом.

◀**Определение**▶ $\varepsilon-$окрестностью символа $+\infty$ называют промежуток $(\varepsilon\,;+\infty)$. Аналогично, $\varepsilon-$окрестность символа $-\infty$ – это промежуток $(-\infty\,;-\varepsilon)$:

$U_\varepsilon(+\infty)$:

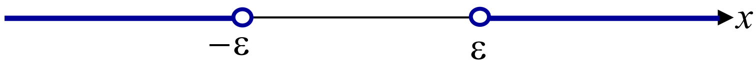


$U_\varepsilon(-\infty)$:



Симметричное множество $(-\infty\,;-\varepsilon)\cup(\varepsilon\,;+\infty)$ можно рассматривать как $\varepsilon-$окрестность еще одного несобственного символа ч.о. – так называемой *беззнаковой бесконечности* ∞, которая уже не связана отношениями «>» или «<» с действительными числами. Эта окрестность обозначается посредством $U_\varepsilon(\infty)$:

$U_\varepsilon(\infty):$



Как видно, $U_\varepsilon(\infty)=\{x:\ |\,x\,|>\varepsilon\}$, то есть представляет совокупность точек ч.о., расстояние от которых до начала отсчета превосходит ε. Ясно, что $U_\varepsilon(\infty)=\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon\,;\varepsilon\,]$, так что $\varepsilon-$окрестность символа ∞ является дополнением отрезка $[-\varepsilon\,;\varepsilon\,]$ в множестве всех действительных чисел[15].

Из множества $\mathbb{R}$ можно при помощи операции декартова умножения образовать множества $\mathbb{R}_2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (обозначается также $\mathbb{R}^2$),..., $\mathbb{R}_n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$ (n раз).

◄**Определение**► Множество $\mathbb{R}_n$ называют $n-$*мерным координатным пространством*. Оно представляет собой совокупность *упорядоченных наборов* $(x_1,\ldots,x_n)$ действительных чисел. Всякий такой набор называют *точкой* пространства $\mathbb{R}_n$, а числа $x_1,\ldots,x_n$ – ее координатами. Такие наборы называют также *векторами* пространства.

Если представить себе плоскость, в которой введена, например, декартова прямоугольная система координат Ox_1x_2, то каждая точка плоскости однозначно определяется парой чисел (x_1,x_2), так что между точками плоскости и точками пространства $\mathbb{R}_2$ возникает взаимно однозначное соответствие (рассуждение остается в силе для любого числа n).

Рассмотренные выше множества чисел находятся друг с другом в соотношении

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\ldots$ можно ли продолжить этот ряд вложений?

Оказывается, что понятие числа можно расширять и дальше. Одно из таких важнейших расширений – расширение до множества так называемых *комплексных чисел* $\mathbb{C}$ (пред-

[15] Иногда $\varepsilon-$окрестности символов $-\infty,+\infty,\infty$ определяют как множества $(-\infty,-1/\varepsilon)$, $(1/\varepsilon,+\infty)$ и $(-\infty,-1/\varepsilon)\cup(1/\varepsilon,+\infty)$ соответственно. Тогда, как и для $\varepsilon-$окрестностей собственных точек числовой оси, при $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ будет $U_{\varepsilon_1}(*)\subset U_{\varepsilon_2}(*)$, где «$*$» означает любой из этих несобственных символов.

ставляющих собой систему плоских векторов, подчиненных определенным правилам при выполнении над ними алгебраических операций).

О непрерывности множества действительных чисел

В данной лекции в ходе изложения основ математического анализа предполагается, что главные свойства действительных чисел известны читателю из курса школьной математики. О свойстве упорядоченности множества $\mathbb{R}$ уже упоминалось выше. Расширенная формулировка этого свойства, а также свойства, связанные с выполнением над действительными числами основных арифметических операций, еще раз перечислены в целях напоминания ниже[16]. Предполагается, что $a,b,c \in \mathbb{R}$.

► I. Свойства порядка

1). для любых двух действительных чисел a,b имеется единственная из трех возможностей: $a=b$, $a<b$, $a>b$.

2). $\begin{cases} a<b \\ b<c \end{cases} \Rightarrow a<c$ – ***транзитивность*** отношения «$<$» («меньше»).[17]

3). $\forall a,b: a<b \Rightarrow \exists c: a<c<b$ – между двумя действительными числами имеется действительное число.

► II. Свойства операций сложения и вычитания

1). $a+b=b+a$ – переместительный закон (***коммутативность*** *сложения*).

2). $(a+b)+c=a+(b+c)$ – сочетательный закон (***ассоциативность*** *сложения*).

3). $a+0=a$.

4). $a+(-a)=0$.

5). $a<b \Rightarrow a+c<b+c, \forall c$.

► III. Свойства операций умножения и деления

1). $ab=ba$ – переместительный закон (***коммутативность*** *умножения*).

2). $(ab)c=a(bc)$ – сочетательный закон (***ассоциативность*** *умножения*).

---

[16] Эти свойства приводятся здесь без доказательств, за которыми читатель отсылается к расширенным курсам математического анализа.

[17] Отношения «больше» («$>$») и «равно» («$=$») также транзитивны (**докажите**).

3). $a \cdot 1 = a$.

4). $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1,\ a \neq 0$.

5). $(a+b)c = ac + bc$ – распределительный закон (***дистрибутивность*** *умножения по отношению к сложению*).

6). $a < b \Rightarrow ac < bc,\ \forall c > 0$.

В полной системе свойств действительных чисел к уже приведенным добавляются еще два.

► IV. Архимедово свойство

$\forall c > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : n > c$ – для всякого положительного действительного числа найдется большее его натуральное число. Отсюда вытекает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists n : \dfrac{1}{\varepsilon} < n$, или, после умножения обеих частей неравенства на $\dfrac{\varepsilon}{n} > 0$ и использования свойства III, 6), $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ – для любого положительного действительного числа отыщется такое натуральное число, что обратное к нему будет меньше взятого числа.

► V. Непрерывность множества действительных чисел

Последнее пятое свойство отражает представление о действительных числах как точках непрерывной, сплошной числовой прямой. Несмотря на простоту и кажущуюся интуитивную понятность, для его строгого доказательства школьного математического аппарата уже недостаточно. В данном курсе математического анализа оно обсуждается по необходимости кратко, см. сноску 16 на стр.19.

Свойство непрерывности может быть определено несколькими различными способами в форме эквивалентных утверждений. Ниже приведены три такие формулировки.

V$_\text{I}$. Лемма о вложенных отрезках. Пусть задана последовательность (система) отрезков вида $s_n = [a_n, b_n],\ n = 1, 2, \ldots$, *вложенных* друг в друга: $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow s_{n+1} \subset s_n$. При этом выполнено дополнительно следующее условие: каково бы ни было положительное число ε, начиная с некоторого номера n_0 длины $l_n = b_n - a_n$ всех таких отрезков меньше ε. Это принято записывать в виде $l_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и говорить: «переменная l_n стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности».[18]

Тогда существует и притом единственное число (точка), принадлежащее всем этим отрезкам: $\exists! a : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in s_n$.[19]

V$_{\text{II}}$. Пусть множество $\mathbb{R}$ разбито на две непустые непересекающиеся части A, B: $\mathbb{R} = A \cup B$, $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$, причем любое число из множества A меньше любого числа из множества $B : \forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a < b$ **(докажите, что вследствие этого $A \cap B \neq \varnothing$).**

Тогда либо в A есть наибольшее число, а в B нет наименьшего, либо в A нет наибольшее число, а в B есть наименьшее.

◆**Примеры:**

1). $A = (-\infty; 2010]$, $B = (2010; +\infty) \Rightarrow \exists \gamma = \max\limits_{x\in A} x = 2010$, $\nexists \min\limits_{x\in B} x$.

2). $A = (-\infty; p)$, $B = [p; +\infty) \Rightarrow \nexists \max\limits_{x\in A} x, \exists \gamma = \min\limits_{x\in B} x = p$.

►Говорят, что множества A, B, удовлетворяющие условиям **V$_{\text{II}}$**, образуют *сечение* $A|B$ множества $\mathbb{R}$. Множество A называют нижним классом этого сечения, а множество B – его верхним классом.

►О числе γ, существование которого утверждается в рассматриваемой формулировке свойства непрерывности (γ – либо наибольшее в нижнем классе сечения, либо наименьшее в его верхнем классе) говорят, что оно производит (осуществляет) данное сечение и пишут $\gamma = A|B$.

Таким образом, непрерывность множества действительных чисел означает, что *не существует иных сечений множества $\mathbb{R}$ помимо тех, каждое из которых производится некоторым действительным числом.*

---

[18] В **Лекции 2** дано систематическое изложение теории пределов числовых последовательностей. Читателю настоятельно рекомендуется сравнить соответствующую терминологию и усмотреть сходство.

[19] Значок $\exists!$ иногда используют для краткого обозначения словосочетания «существует и единственно».

Предварим третью формулировку свойства **V** следующими определениями.

◀Определение▶ Множество A действительных чисел называется ограниченным снизу (сверху), если найдется такое число $m(M)$, что все числа из A не меньше m (не больше M). Коротко говоря, $\exists m\,(M): \forall a \in A \Rightarrow a \geq m\;(a \leq M)$. При этом число $m(M)$ называется *нижней (верхней) гранью* множества A.

◀Определение▶ Множество A называется ограниченным, если оно одновременно ограничено и сверху и снизу[20].

Отсюда нетрудно вывести, что ограниченность множества A означает: $\exists M > 0:$ $\forall a \in A \Rightarrow |\, a \,| \leq M$ (последнее неравенство может быть и строгим).

◀Определение▶ Число $m(M)$ называется ***точной*** *нижней (верхней) гранью* множества A, если выполнены условия:

1). $m(M)-$ нижняя (верхняя) грань множества A, то есть $\forall a \in A \Rightarrow a \geq m\;(a \leq M)$;

2). ни одно из чисел, б**о**льших m (меньших M), не является нижней (верхней) гранью множества A. Иначе говоря, $\forall \varepsilon > 0\; \exists a \in A: a < m + \varepsilon\;(a > M - \varepsilon)$.

Пишут: $m = \inf A = \inf\limits_{a \in A} a$, $M = \sup A = \sup\limits_{a \in A} a$ [21]

Можно сказать, что точная нижняя (верхняя) грань числового множества есть наибольшая (наименьшая) из его нижних (верхних) граней.

В третьей формулировке свойства непрерывности множества действительных чисел утверждается наличие точных граней у ограниченных числовых множеств. Именно,

V_{III}. Любое числовое множество, ограниченное снизу (сверху), имеет точную нижнюю (верхнюю) грань.

О непрерывности множества $\mathbb{R}$ говорится также при дальнейшем изложении в ряде мест данного курса лекций; в той или иной формулировке она используется как вспомогательное средство при доказательстве некоторых утверждений.

---

[20] Сравните это определение с определениями ограниченной сверху (снизу) и ограниченной числовой последовательности, **Лекция 2**.

[21] От «infinum» – наименьший и «supremum» – наибольший, лат.

◆Замечания

1). Сравнения и некоторые из бинарных[22] арифметических операций, свойства которых приведены выше, можно осуществлять не только над числами из $\mathbb{R}$, а и над несобственными символами $+\infty, -\infty$ и ∞ числовой прямой, или над парами $a, *$, где $a \in \mathbb{R}$, а $*$ – один из этих символов, в соответствии с соглашениями

$-\infty < +\infty$; $-\infty < a < +\infty$;

$(+\infty)+(+\infty) = +\infty$; $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$; $(+\infty)-(-\infty) = +\infty$; $(-\infty)-(+\infty) = -\infty$,

$(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$; $(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$,

$a+(+\infty) = +\infty + a = +\infty$; $a+(-\infty) = -\infty + a = -\infty$,

если $a > 0$, то $a(+\infty) = (+\infty)a = +\infty$; $a(-\infty) = (-\infty)a = -\infty$,

если $a < 0$, то $a(+\infty) = (+\infty)a = -\infty$; $a(-\infty) = (-\infty)a = +\infty$,

$a+(\infty) = (\infty)+a = \infty$; $(\infty)(\infty) = \infty$,

если $a \neq 0$, то $a(\infty) = (\infty)a = \infty$.

Операции $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $(\infty)\pm(\infty)$, $0(*)$, $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (комбинация знаков – произвольная) не определены.

Наделение несобственных символов приведенными свойствами, так сказать, теснее роднит их с собственными элементами $\mathbb{R}$ – действительными числами и в ряде случаев делает оправданным пополнение (расширение) множества $\mathbb{R}$ путем добавления к нему бесконечно удаленных точек.

Известны два способа такого пополнения: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, либо $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. В обоих случаях получившееся множество $\overline{\mathbb{R}}$ называют *расширенной* или *замкнутой числовой прямой*. Если во введенных ранее окрестностях символов $+\infty, -\infty$ и ∞ сами они отсутствовали, то их окрестности в множестве $\overline{\mathbb{R}}$ получаются добавлением к прежним соответствующей бесконечно удаленной точки, так что будут уже содержать ее. На письме это отражается заменой круглой скобки, соседствующей с $+\infty, -\infty$, ∞, на квадратную: $U_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon; +\infty]$, $U_\varepsilon(-\infty) = [-\infty; -\varepsilon)$, $U_\varepsilon(\infty) = [-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty]$.

[22] Результат ***би***нарной операции получается из значений ***двух*** операндов: $a, b \Rightarrow a+b$ и т.п.

2). В противоположность культивируемому в средней школе и развиваемому далее на младших курсах университетов истолкованию действительных чисел как десятичных дробей (конечных и периодических, представляющих рациональные числа, или апериодических, представляющих иррациональные) существует и так называемый аксиоматический подход к построению понятия числа.

Его суть состоит в том, что действительные числа трактуются как абстрактные математические объекты (сущности, вещи), для которых отношения порядка и арифметические операции определяются как соответствия, обладающие свойствами **I–V**.

Например, каждой паре чисел a, b ставится в соответствие число, обозначаемое как $a+b$ (ab) и называемое их суммой (произведением), причем такое соответствие удовлетворяет свойствам **II** (**III**).

Далее, постулируется существование чисел, обозначаемых как 0 и 1, называемых нулем и единицей и удовлетворяющих для всякого числа a условиям $a+0=0$, $a \cdot 1 = a$, доказывается единственность нуля и единицы и т.д.

При таком подходе свойства **I–V** называются ***аксиомами*** *действительного числа*. Заметим, что определяя описанным способом систему действительных чисел, необходимо проверить совместность аксиом **I–V** и мотивировать их количество и состав. Указанный круг вопросов, ввиду их принципиальной важности как фундамента для построения прочих разделов высшей математики, излагается с исчерпывающей подробностью в углубленных курсах математического анализа.

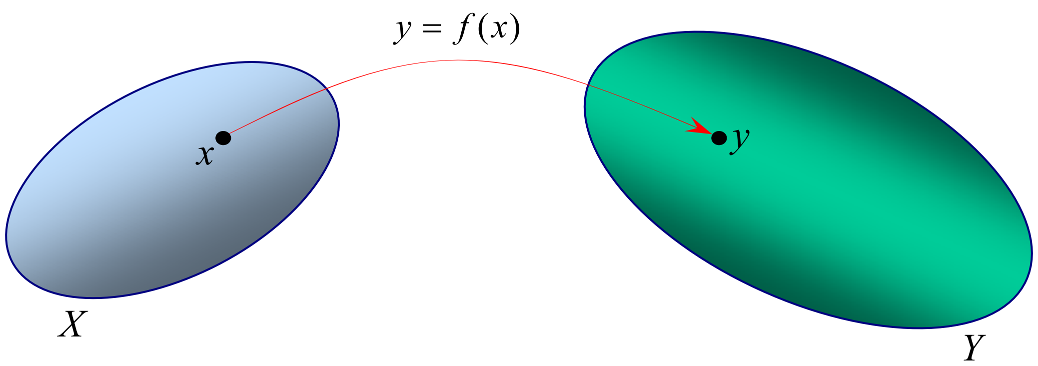
Подчеркнем в заключение, что система свойств **I–V** оказывается *непротиворечивой* и *полной* в том смысле, что множество $\mathbb{R}$ не может быть расширено до некоторого включающего $\mathbb{R}$ множества таким образом, чтобы его элементы и операции над ними обладали всеми свойствами **I–V**. Поэтому описанные выше в данной лекции расширения понятия числа возможны лишь как результат некоторых, если можно так выразиться, «жертвоприношений», выражающихся в отказе от некоторых из свойств действительных чисел. Так, операции сложения и умножения над компл*е*ксными числами (элементами множества $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, см. стр.18) являются коммутативными и ассоциативными при том, что умножение дистрибутивно относительно сложения. Однако сами эти числа уже не образуют упорядоченного множества.

III. ФУНКЦИЯ

Понятие функциональной зависимости (функции) принадлежит к числу первичных математических понятий наряду с уже рассмотренными выше понятиями множества и числа. Подобные понятия не имеют строгого определения, а смысл их, за неимением лучшего, *лишь разъясняется*. Итак, функция понимается в математике в широком смысле как *соответствие* между элементами двух множеств. Далее нас будут интересовать в основном *числовые* математические функций. Это соответствия между элементами числовых множеств, то есть между числами.

Пусть каждому элементу x числового множества X по определенному правилу f приводится в соответствие *единственное* число y. Тогда говорят, что на множестве X задана функция $f: \ y = f(x)$. Множество X, обозначаемое также $D(f)$, называют при этом *множеством определения* (*областью определения*), а совокупность значений y, обозначаемую Y или $E(f)$, – *множеством значений* (*областью значений* или *областью изменения*) функции f[23]. Число x называют *аргументом* функции f.

Говорят еще, что числа y соответствуют числам x *при помощи* (*или посредством*) *функции* f, или что функция f *отображает* x в y.



Приведенная трактовка понятия функциональной зависимости исторически приписывается Лобачевскому и Дирихле.

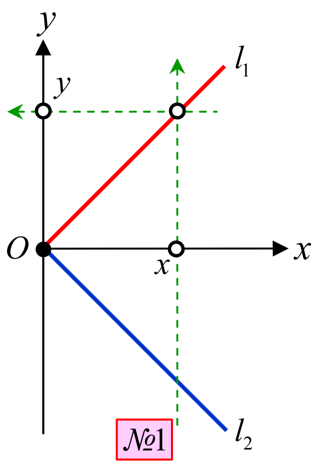
[23] При помощи логических символов множество значений функции $y = f(x)$ можно описать следующим образом: $Y = E(f) = \{ y : \exists x \in X$ такой, что $y = f(x)\}$.

Несмотря на то, что в некоторых учебниках данное выше описание функциональной зависимости называют ее определением, в нем остается не формализованным и никак не объясняется смысл термина «правило», при помощи которого каждому $x \in D(f)$ ставится в соответствие $y \in E(f)$.

В самом деле, является ли правилом, о котором идет речь выше, следующий набор инструкций, устанавливающий соответствие (для примера) между числами множеств $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty)$ и $\mathbb{R}$:

1). изобразите оси д.п.с.к. на плоскости;

2). проведите прямые $l_1 : y = x,\, x \geq 0$ и $l_2 : y = -x,\, x \geq 0$;



3). приведите в соответствие всякому $x \geq 0$ действительное число y путем «физического» проведения через точку $(x;0)$ на оси абсцисс прямой, параллельной оси ординат так: если проводимая прямая имеет нечетный номер (каждая проведенная прямая нумеруется и остается навсегда в плоскости Oxy), то y, соответствующий взятому x, есть ордината точки пересечения этой прямой с l_1, а если номер проводимой прямой четный, то y, отвечающий этому x, равен ординате точки пересечения этой прямой с l_2.

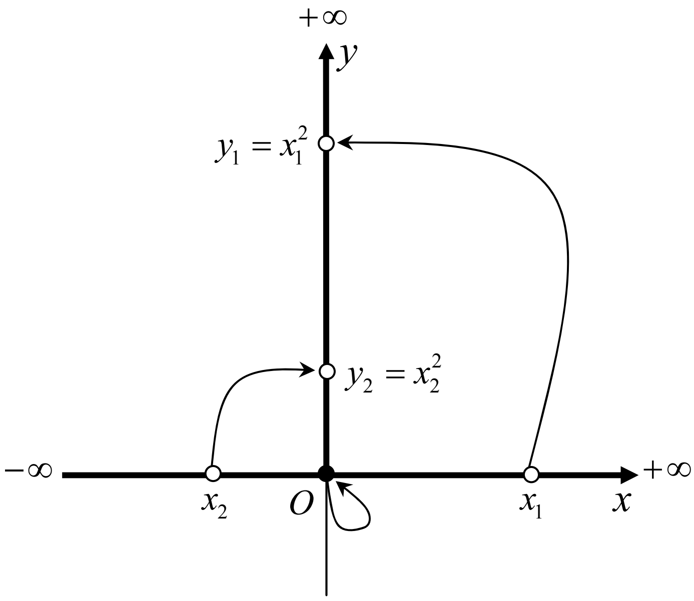
Если это – правило, то отвечайте на вопросы: «каково значение функции $y = f(x)$ в точке $x = 1$?», «каково значение функции $y = f(x)$ в точке $x = 1$?» и т.д.

А если это не правило, то **что есть правило?**

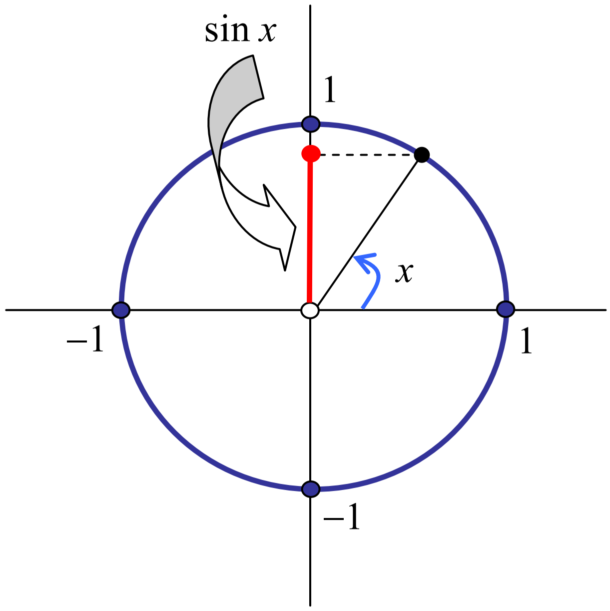
◆**Примеры:**

1). Функция $y = x^2$ ставит в соответствие $\forall x \in \mathbb{R}$ неотрицательное число y, равное

$x^2 = x \cdot x$. Следовательно, $X = (-\infty\,;+\infty)$ – область ее определения, а $Y = [0\,;+\infty)$ – область значений:



2). Функция $y = \sin x$ ставит в соответствие $\forall x \in \mathbb{R}$ проекцию на вертикальный диаметр единичного круга радиуса этого круга, повернутого на угол x (в радианах**!**), отсчитываемый от его положительного горизонтального полудиаметра (положительное направление отсчета угла – *против часовой стрелки*):



Таким образом, $X = (-\infty\,;+\infty)$, $Y = [-1\,;1\,]$.

3). Функция $y = \log_a x$ ставит в соответствие $\forall x > 0$ действительное число y, удовлетворяющее условию $x = a^y$, где $a > 0,\ a \neq 1$. Здесь $X = (0\,;+\infty)$, $Y = (-\infty\,;+\infty)$. **(Сколько раз каждая из рассмотренных функций принимает каждое свое значение из Y ?)**

Элементарные функции

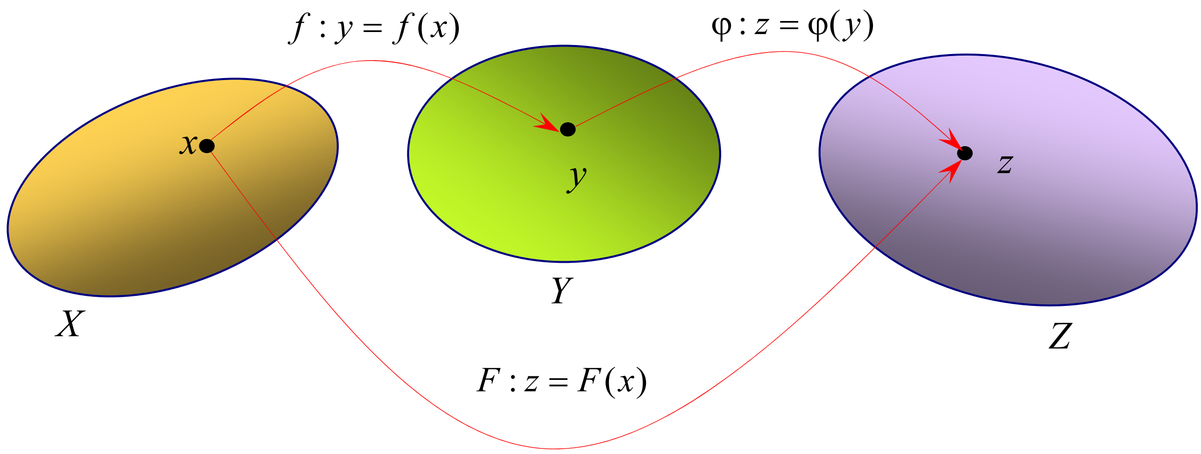
Часто употребляемые в приложениях типы функциональных зависимостей выделяют в класс ***основных элементарных функций***. Это:

- $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ – степенная функция;
- $y = a^x,\ a > 0, a \neq 1$ – показательная функция;
- $y = \log_a x$ – логарифмическая функция;
- $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \sin x / \cos x = \mathrm{tg}\, x,\ y = \cos x / \sin x = \mathrm{ctg}\, x$ – основные тригонометрические функции;
- $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \mathrm{arctg}\, x,\ y = \mathrm{arcctg}\, x$ – обратные тригонометрические функции.

Суперпозиция функций

Пусть задана функция $y = f(x)$, причем число y является в свою очередь аргументом другой функции φ: $z = \varphi(y)$. Тем самым устанавливается соответствие чисел x числам z, которое осуществляет функция F: $z = \varphi[f(x)] = F(x)$, которая называется *сложной функцией*, или *суперпозицией* (*композицией*) функций φ и f: $F = \varphi \circ f$. Суперпозиция может «состоять» и более чем из двух функций: $F(x) = w\{\,v\,[\,u\,(x)\,]\,\}$[24] и т.п.

[24] Для устранения недоразумений в записях подобного рода использование квадратных и фигурных скобок для обозначения целой и дробной частей соответствующих выражений должно быть оговорено специально. В суперпозициях с числом вложений, бо́льшим трех, часто используются только круглые скобки. Иногда при записи суперпозиций скобки не употребляются вовсе: $y(x) = \ln\cos\mathrm{arctg}\,\mathrm{sh}\,2x$ и т.п.



◄**Определение**► Все функции, образуемые из основных элементарных функций при помощи *конечного числа* арифметических операций и суперпозиций, называются ***элементарными функциями***.

◆**Пример:** $|x| = \sqrt{x^2}$ – элементарная функция; является суперпозицией двух степенных функций: $y = x^2$ и $z = \sqrt{y}$.

Классификация элементарных функций

Подобно тому, как классифицируются, то есть подразделяются на определенные типы или классы, вещественные числа, могут быть классифицированы и элементарные функции. Такая классификация оказывается полезной в ряде разделов математического анализа при выработке теоретических основ и технических приемов решения некоторых ключевых задач дифференциального и интегрального исчисления. Оказывается, что такие приемы можно естественным образом связать со свойствами функций, над которыми осуществляются те или иные математические операции с целью получения решения поставленной задачи общего содержания. Именно различие в характере, специфике зависимости функции от ее аргумента (аргументов) и служит основой для обсуждаемой классификации.

Одним из ярких примеров является здесь техника вычисления первообразных (неопределенных интегралов), изучаемая далее в предлагаемом курсе лекций (см. **Лекцию 15**).

Элементарные функции разбивают на перечисляемые ниже классы в соответствии со следующими определениями, первое из которых носит вспомогательный характер.

◀Определение▶ Многочленом от переменных x, y называется функция $P(x, y) = a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_0(x)$, где $n \in \mathbb{N}$, $a_n(x) - a_0(x)$ – многочлены от переменной x, причем $a_n(x) \not\equiv 0$[25]. Уравнение относительно двух переменных вида $P(x, y) = 0$ называется алгебраическим[26]. Число n называется степенью многочлена $P(x, y)$ *относительно переменной* y.

◀Определение▶ Элементарная функция $y = f(x)$ называется ***алгебраической***, если она удовлетворяет на некотором промежутке Δ алгебраическому уравнению $P(x, y) = 0$, то есть $P(x, f(x)) \equiv 0$, $x \in \Delta$.

◆**Примеры:**

1). Функции $y = \pm\sqrt{2010 - x^3}$ – алгебраические, поскольку они удовлетворяют тождественно по x в данном случае на всей числовой оси алгебраическому уравнению $P(x, y) = y^2 + x^3 - 2010 = 0$.

2). Если $P(x)$, $Q(x)$ – некоторые многочлены относительно переменной x, то как они сами, так и их отношение $P(x)/Q(x)$, $Q(x) \not\equiv 0$, называемое ***рациональной функцией***, являются алгебраическими функциями.

В самом деле, $y = P(x) \Leftrightarrow P(x, y) = 1 \cdot y - P(x) = 0$ и $y = P(x)/Q(x) \Leftrightarrow P(x, y) = Q(x)y - P(x) = 0, x : Q(x) \neq 0$.

В рамках такой терминологии многочлены принято называть ***целыми рациональными функциями***. В обоих приведенных только что примерах уравнение, которым определена рациональная функция, есть алгебраическое уравнение первой степени относительно переменной y. Однако, это необязательно. Так, например, рациональная функция $y = x$ определяется, помимо уравнения $1 \cdot y - x = 0$ еще и уравнениями $y^2 - x^2 = 0$, $y^{11} - x^{11} = 0$ и т.п.

---

[25] В этом определении буквы x и y можно поменять ролями.

[26] Это «родовое» наименование класса уравнений с нулевой правой частью, левая часть которых есть некоторый многочлен. Так, в средней школе систематически изучаются алгебраические уравнения первой и второй степеней относительно одной переменной – линейные и квадратные.

◀**Определение**▶ Алгебраическая функция, не являющаяся рациональной, называется ***иррациональной***.

◆**Примеры:**

1). Функция $y=\sqrt{x}$ есть алгебраическая иррациональная функция, определяемая, например, алгебраическим уравнением $P(x,y)=y^2-x=0,\, x\geq 0$.

2). Алгебраическое уравнение $P(x,y)=y^3-x^2=0$ определяет при $x\geq 0$ иррациональную функцию $y=\sqrt[3]{x^2}$.

В подтверждение того обстоятельства, что множество алгебраических функций не исчерпывается алгебраическими функциями, покажем, что функция $y=\sqrt{x}$ не может быть представлена в виде отношения двух многочленов от переменной x.

Действительно, если это не так, то $\sqrt{x}=\dfrac{P(x)}{Q(x)},\, x\geq 0$. Не ограничивая общности допустим, что у многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ нет общего множителя в виде многочлена степени $k\geq 1$. Далее, $\sqrt{x}=\dfrac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow x\cdot Q^2(x)=P^2(x)$, так что $P^2(x)\,\vdots\, x$. Но тогда и $P(x)\,\vdots\, x$ **(обоснуйте это утверждение)**, и тогда справедливо представление $P(x)=x\cdot T(x)$, где $T(x)-$многочлен на единицу меньшей степени, чем $P(x)$, который сам имеет степень не меньше единицы.

Отсюда $xQ^2(x)=P^2(x)=x^2\cdot T^2(x)$, или $Q^2(x)=x\cdot T^2(x)$, что повлечет $Q^2(x)\,\vdots\, x$ и, следовательно, $Q(x)\,\vdots\, x$. Как видно, многочлены $P(x)$, $Q(x)$ одновременно кратны x, что противоречит предположению об отсутствии у них общего множителя в виде многочлена степени не ниже первой.

◀**Определение**▶ Элементарные функции, не являющиеся алгебраическими, называются ***трансцендентными***[27].

---

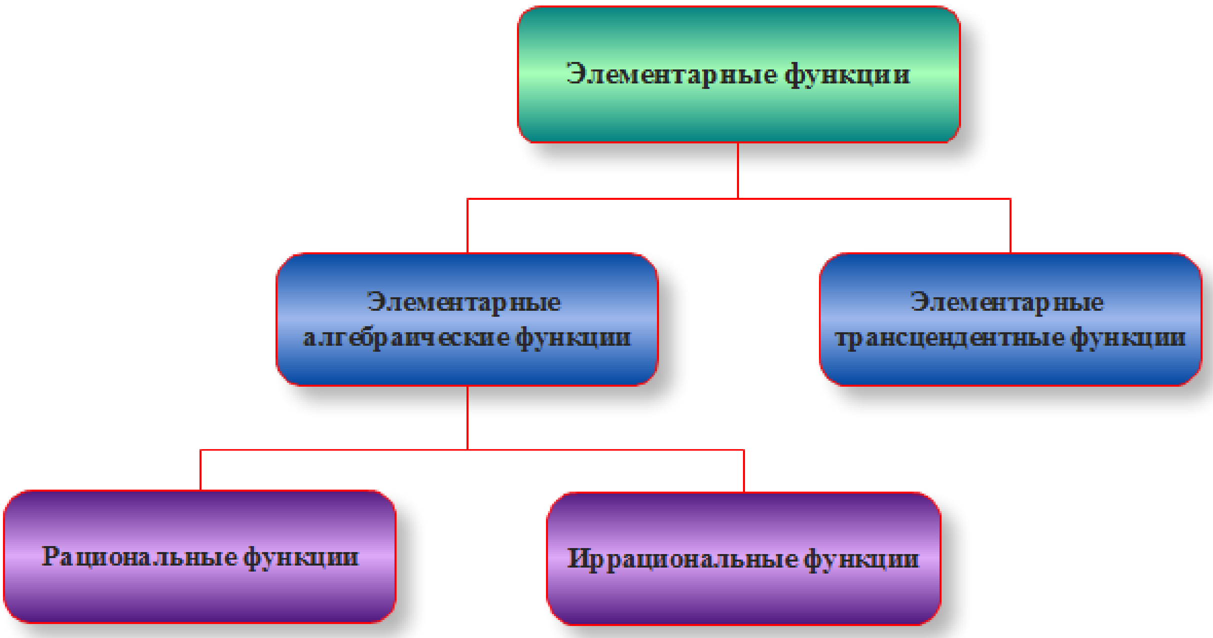
[27] Трансцендентный (от transcendo, лат. – переступать, перешагивать) – запредельный по отношению к какой-либо определенной сфере. В данном контексте – не могущий быть описанным «силами» алгебраических функций, предполагающих выполнение над аргументом только основных арифметических действий и операции извлечения корня в конечном числе.

Иными словами, трансцендентные функции – это такие, которые не удовлетворяют алгебраическим уравнениям вида $P(x, y) = 0$.

В углубленных курсах математического анализа доказывается, что показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции являются трансцендентными.

Пример такого доказательства можно найти в **Лекции 8**.

Описанная выше классификация элементарных функций отражена на приводимой схеме.



◆**Замечание**

Как уже говорилось выше, описанная классификация элементарных функций фактически повторяет разделение на классы множества $\mathbb{R}$ действительных чисел. В соответствии с принятой терминологией *алгебраическими* действительными числами называют те из них, которые являются корнями алгебраических уравнений относительно одной переменной с целыми коэффициентами. Алгебраические числа в свою очередь подразделяются на *рациональные* ($0, -1, 5/7, -9/5, \sqrt[4]{81}$ и т.п.) и *иррациональные* ($\sqrt{2}, -\sqrt[7]{13}, 5/\sqrt[3]{3}$ и т.п.). Первые представимы, а вторые – непредставимы в виде отношения целого числа к натуральному (или двух целых чисел при условии, что делитель отличен от нуля).

Действительные числа, не являющиеся алгебраическими, называют *трансцендентными*. Примером трансцендентных действительных чисел являются мировые константы π и e. Их невозможно «сконструировать» из целых чисел при помощи конечного числа арифметических операций и извлечений корня.

▲ Докажите взаимную дистрибутивность операций «$\cup$» и «$\cap$».

▲ Докажите равенства $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

▲ Докажите, что если для множества X и любого множества A выполнено включение

$X \subset A$, то $X = \varnothing$.

▲ Докажите следующие свойства символа суммирования $\sum\limits_{j=1}^{n}$:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j, \ \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_j) = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_j, \ \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\right).$$

▲ Приведите пример системы вложенных *интервалов* $\omega_n = (a_n, b_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\omega_{n+1} \subset \omega_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $l_n = b_n - a_n \underset{n \to \infty}{\to} 0$, не имеющих общей точки.

▲ Приведите пример системы вложенных интервалов (см. предыдущий пункт), имеющих общую точку.

▲ Постройте графики *всех типов* основных элементарных функций, а также графики функций: $y = |\,x\,|$, $y = [\,x\,]$, $y = \{\,x\,\}$, $y(x) =$ расстоянию от точки x до ближайшего целого числа,

$y = \Big|\big|\,|\,|\,x - 1\,| - 1\,| - 2\,\big| - 1\Big|$, $y = [\,\sin x\,]$, $y = \{\,\sin x\,\}$, $y = [\,\sin x\,] + \{\,\sin x\,\}$.

▲ Решите уравнение $f(f(f(f(f(x))))) = 0$, где $f(x) = x^2 + 12x + 30$.

Для визуализации результатов можно использовать компьютерную программу **Advanced Grapher**[28].

Краткая биографическая справка

■ Леонард Эйлер (1707–1783 г.г.) – знаменитый швейцарский математик, механик и физик.

■ Джон Венн (1834–1923 г.г.) – английский логик.

■ Огастес де Морган (1806–1871 г.г.) – шотландский математик и логик.

■ Бертран Артур Уильям Рассел (1872–1970 г.г.) – английский математик, логик и философ.

■ Николай Иванович Лобачевский (1792–1856 г.г.) – великий русский математик, творец неевклидовой геометрии.

■ Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле (1805–1859 г.г.) – немецкий математик, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел.

[28] Программа предназначена в основном для визуализации различных функциональных зависимостей и обладает в своем классе одним из высших соотношений возможностей к размеру (< 1Мб) . Она является бесплатной для жителей бывшего СССР и часто будет применяться в данном курсе лекций как средство получения графической информации в рассматриваемых задачах. Сайт программы http://www.alentum.com.

Аналогичные показатели и условия распространения имеет программа построения графиков функций двух переменных 3DGrapher, использовавшаяся в данном курсе при визуализации поверхностей в трехмерном пространстве. Сайт программы http://www.romanlab.com.