Оптимизация страхования для процесса риска при различных ограничениях на риски страхователей

А.Ю. Голубин
Москва, МИЭМ

Рассматривается задача оптимального управления процессом риска Лундберга-Крамера (см., например [2]) для двух разных типов ограничений на риски страхователей: на среднее значение и с вероятностью единица. Классический процесс риска (без управления) имеет вид

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

где x –начальный капитал, $\{N_t\}$ есть Пуассоновский процесс исков с параметром λ, $\{Y_i\}$ – независимые одинаково распределенные страховые выплаты (риски) с функцией распределения $F(x)$ и конечным вторым моментом $E\,Y^2 < \infty$. Скорость накопления премии страховщика определяется принципом среднего значения, $c = (1+\alpha)\lambda E\,Y$, с заданным коэффициентом нагрузки $\alpha > 0$.

Пусть теперь в момент выплаты $t = t_i$ ($i \geq 0$, $t_0 = 0$) страховщик выбирает дележ риска $I_t(\cdot)$, так что $I_t(Y_{i+1})$ – доля следующей выплаты, возмещаемая клиенту, а скорость накопления премии становится равной $c_t = (1+\alpha)\lambda E\,I_t(Y)$ вплоть до следующей выплаты. Управляемый процесс риска тогда

$$X_t = x + \int_0^t c_s ds - \sum_{i=1}^{N_t} I_{t_i}(Y_{i+1}), \tag{1}$$

где в качестве допустимых стратегий $I = \{I_t\}$ рассматриваются измеримые и предсказуемые относительно естественной фильтрации $\{\mathcal{F}_t\}$ управления, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq I_t(x) \leq x$. Интервал функционирования процесса бесконечен, в качестве минимизируемого критерия оптимальности используется функционал, который по аналогии с известным в теории риска термином можно назвать "стационарным коэффициентом вариации"

$$J[I] = \overline{\lim_{t\to\infty}} D\,X_t / E\,X_t. \tag{2}$$

Задача с ограничением на средний риск. Введем дополнительное ограничение: допустимыми считаются только те дележи страхования

I, которые удовлетворяют ограничению сверху на средний риск, остающийся у клиента (страхователя) после страхования, $E\{Y - I_t(Y)\} \le C$, где t – момент выплаты (фиксированный), $C \in [0, E\,Y]$ – заданная константа. Эквивалентное ограничение на риск страховщика можно записать в виде $E\,I_t(Y) \ge M$, где $M = E\,Y - C$. Исследуемая задача имеет вид

$$J[I] \to \min,\; E\,I_t(Y) \ge M. \tag{3}$$

Теорема 1 *Минимум в задаче* (3) *достигается на стационарной стратегии, не зависящей от текущего состояния процесса,* $I^*_{t,x}(\cdot) \equiv I^*(\cdot)$. *Оптимальная функция дележа есть stop-loss страхование* $I^*(x) = x \wedge k^*$, *параметр* k^* *является единственным корнем уравнения* $\int_0^k \bar{F}(x)dx = M$, *где* $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

Найденная форма оптимального дележа является ожидаемой в свете результатов [1], где аналогичная функция дележа была получена в одной статической модели со средней полезностью в качестве критерия оптимальности.

Задача с "жестким"ограничением. Пусть допустимыми считаются только те дележи, которые удовлетворяют ограничению сверху на риск клиента, выполняющемуся с вероятностью единица: $Y - I_t(Y) \le q$. Эквивалентное ограничение на риск страховщика можно записать как $I_t(x) \ge (x - q)_+$, $x \in [0, \infty)$.

Теорема 2 *Минимум в задаче*

$$J[I] \to \min, \quad I_t(x) \ge (x - q)_+, \tag{4}$$

достигается на стационарной стратегии, не зависящей от текущего состояния процесса, $I^*_{t,x}(\cdot) \equiv I^*(\cdot)$. *Оптимальная функция дележа есть комбинация stop-loss страхования и франшизы,* $I^*(x) = (x \wedge k^*) \vee (x - q)$, *где* k^* *является единственным корнем уравнения*

$$\int_0^k (k - x)\bar{F}(x)dx + \int_k^\infty (k - x)\bar{F}(x + q)dx = 0.$$

Полученная функция $I^*(x)$ есть своего рода обобщение франшизы $I(x) = (x - q)_+$, поскольку "хвост"распределения ущерба остается страховщику; при этом мелкие ущербы делятся в соответствии со stop-loss страхованием, $I(x) = x \wedge k$.

Задачи с иными стационарными критериями оптимальности. Аналоги задачи (3) с ограничением на средний риск

$$J_1[I] = \underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{t}[E\,X_t - \rho D\,X_t] \to \max,\ E\,I_t(Y) \geq M \tag{5}$$

$$J_2[I] = \underline{\lim}_{t\to\infty}P\left\{\left|\frac{X_t - E\,X_t}{\sqrt{t}}\right| \leq \delta\right\} \to \max,\ E\,I_t(Y) \geq M \tag{6}$$

и задачи с "жестким"ограничением

$$J_1[I] \to \max,\ I_t(x) \geq (x-q)_+ \tag{7}$$

$$J_2[I] \to \max,\ I_t(x) \geq (x-q)_+. \tag{8}$$

Теорема 3 *1) Максимумы в задачах* (5)-(8) *достигаются на стационарных стратегиях, не зависящих от текущего состояния процесса. Оптимальные дележи в* (5)-(6) *есть, соответственно, stop-loss дележи*

$$I_1^*(x) = x \wedge [k^* \vee (\alpha/2\rho)] \ \ и \ \ I_2^*(x) = x \wedge k^*,$$

где k^* *определен в Теореме 1.*

2) Оптимальные дележи в (7)-(8) *есть, соответственно,*

$$I_1^{**}(x) = [x \wedge (\alpha/2\rho)] \vee (x-q) \ \ и \ \ I_2^{**}(x) = (x-q)_+.$$

Список литературы

[1] Голубин А.Ю., Гридин В.Н., Газов А.И. Оптимизация дележа риска в статической модели с перестрахованием. // Автоматика и телемеханика, 2009, т. 70, в. 8 (в печати).

[2] *Panjer H.H., Willmot G.E.* Insurance Risk Models. Schaumburg, Illinois: The Society of Actuaries, 1992.