

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

УДК: 517.958:5  
№ госрегистрации: 01201260801  
Инв.№:

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор НИУ ВШЭ, к.э.н.

М.М. Юдкевич

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ  
В СОЦИАЛЬНОЙ, ЭКОНОМИЧЕСКОЙ И ПОЛИТИЧЕСКОЙ СФЕРАХ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ, ТЕОРИИ ИГР  
И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ

(заключительный)

Шифр: ГЗ-83

Руководители темы:

зав. МНУЛ анализа и выбора решений,  
д.техн.н.

Ф.Т. Алескеров

гл.н.с. МНУЛ анализа и выбора решений, д.н., PhD

Э. Маскин

Москва 2012

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Соруководители темы:

зав. лабораторией, д.т.н., зав. каф., проф.	_____	Ф.Т. Алескеров	(введение, заключение)
Гл. научн. сотр., PhD	_____	Э. Маскин	(подраздел 2.1)

Исполнители темы:

Ст.-исследователь, студент	_____	М.А. Андрушко	(Приложение Г)
Вед. науч. сотр., д.т.н., проф.	_____	А.С. Беленький	(подразделы 2.2-2.4)
Науч. сотр., к.э.н., доцент	_____	В.Ю. Белоусова	(подраздел 4.1)
Ст.-исследователь, студент	_____	Ю.А. Веселова	(подразделы 1.1-1.3)
Ст.-исследователь, студент	_____	Т.В. Виткуп	(подраздел 11.4)
Ст.-исследователь, студент	_____	Ю.О. Гизингер	(подразделы 3.5, 3.6)
Ст.-исследователь, преподаватель, аспирант	_____	Л.Г. Егорова	(раздел 8)
Ст.-исследователь, студент	_____	Е.М. Загайна	(приложение А)
Ст. науч. сотр., к.э.н., доцент	_____	А.В. Захаров	(подразделы 9.2, 9.3)
Ст.-исследователь, студент	_____	И.В. Захлебин	(подраздел 11.2)
Ст.-исследователь, студент	_____	А.А. Иванов	(подраздел 1.4)
Ст.-исследователь, преподаватель, аспирант	_____	Р.У. Камалова	(подраздел 15.2)
Мл. науч. сотр., преподаватель	_____	Д.С. Карабекян	(подразделы 1.5-1.6)
Ст.-исследователь, студент	_____	И.А. Карачунский	(Приложение В)
Мл. науч. сотр., преподаватель	_____	А.В. Карпов	(подразделы 3.1-3.4)

Ст.-исследователь, студент	_____	Е.С. Катаева	(приложение Б)
Мл. науч. сотр., преподаватель, аспирант	_____	С.Г. Кисельгоф	(раздел 12)
Ст.-исследователь, студент	_____	М.Б. Левкина	(подразделы 7.3, 7.4)
Зам. зав. лаб., д.ф.-м.н., проф.	_____	А.Е. Лепский	(подразделы 7.1, 7.2)
Ст.-исследователь, студент	_____	Д.Ф. Миришли	(подраздел 11.3)
Вед. науч. сотр., д.т.н., проф.	_____	Б.Г. Миркин	(подраздел 6.1)
Ст.-исследователь, студент	_____	Е.О. Митичкин	(подраздел 14.1)
Ст.-исследователь, студент	_____	А.И. Моховиков	(пункт 14.2.1)
Ст. науч. сотр., к.э.н., ст. преп.	_____	Г.И. Пеникас	(подраздел 4.2)
Ст.-исследователь, студент	_____	В.В. Петрущенко	(подраздел 15.3)
Вед. науч. сотр., д.т.н., проф.	_____	В.В. Подиновский	(раздел 5)
Ст. науч. сотр., к.т.н., доцент	_____	А.А. Рубчинский	(подразделы 13.1-13.3)
Науч. сотр., к.ф.-м.н., доцент	_____	Т.Ф. Савина	(подразделы 10.1-10.2)
Ст. науч. сотр., к.ф.-м.н., доц.	_____	К.С. Сорокин	(подраздел 9.1)
Ст. науч. сотр., к.ф.-м.н., доц.	_____	А.Н. Субочев	(подраздел 11.1)
Ст.-исследователь, студент	_____	Б.Д. Цвелиховский	(подразделы 13.4, 13.5)
Ст.-исследователь, аспирант	_____	Е.Л. Черняк	(подраздел 6.2)
Ст.-исследователь, студент	_____	О.Н. Чугунова	(подраздел 6.3)
Мл. науч. сотр., преподаватель	_____	Д.А. Шварц	(подразделы 10.3-10.6)
Ст.-исследователь, студент	_____	С.В. Швыдун	(пункт 14.2.2, подраздел 14.3)
Ст.-исследователь, студент	_____	А.В. Шестаков	(подразделы 6.4-6.5)

## РЕФЕРАТ

Отчет 458 с., 1 ч., 65 рис., 69 табл., 330 источника.

ДИЗАЙН МЕХАНИЗМОВ, ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ, ТЕОРИЯ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА, ТЕОРИЯ ИГР, НЕТОЧНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ, АНАЛИЗ ДАННЫХ.

Объектом исследования были модели и методы принятия решений и интеллектуального анализа данных.

Цель работы – получение новых теоретических и прикладных результатов в области математического моделирования и дизайна механизмов в социальной, экономической и политической сферах с использованием методов теории принятия решений, теории игр и интеллектуального анализа данных.

В частности, целями исследований были:

- построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений;
- исследования организационных моделей и механизмов;
- исследование теоретико-игровых моделей выборов в совет директоров акционерной компании и моделей выборов, реализующих правило передачи голосов;
- анализ эффективности функционирования банковского и финансового секторов экономики;
- развитие теории важности критериев и разработка ординальных решающих правил для многокритериальных задач;
- теоретико-экспериментальные исследования по кластер-анализу и автоматической интерпретации текстовых документов;
- исследование мер информативности, определенных на множестве признаков недетерминистской системы;
- исследование моделей справедливости дележа при произвольном числе участников, делимых и неделимых пунктов;
- разработка и исследование поведенческой модели биржи;

- применение теоретико-игровых методов для моделирования коалиционных предпочтений и принятия решений политическими партиями;
- исследование и развитие модели индексов влияния как элементов проективного пространства;
- исследование способов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе;
- исследование математической модели выбора абитуриентом вуза;
- обучение ранжированию в поисковых системах;
- исследование результативности университетов.

Проект был связан, прежде всего, с исследованием теоретических проблем. Методологической основой исследований были теория рационального выбора, теория игр, теория важности критериев, теория интеллектуального анализа данных. Основными средствами и методами исследований были процедуры оптимизации, численные и комбинаторные методы, методы статистического и кластерного анализа данных, методы теории вероятностей и др.

Техническим средством исследования были электронные вычислительные машины. Для прикладных исследований использовались интернет-данные, базы данных по публикациям экономической тематики, базы данных приемной кампании в вузы и др.

В результате выполнения проекта получены следующие результаты:

- исследованы алгебраические свойства вероятностной модели IANC (Impartial Anonymous and Neutral Culture model) в задаче оценивания степени манипулируемости правил коллективного выбора, структура классов эквивалентности;
- найдено, насколько индекс манипулируемости в модели IANC отличается от индекса в базовой модели IC (Impartial Culture model); показано, в каких случаях эта разность индексов близка к нулю, а в каких достаточно велика, чтобы быть причиной изменений относительной манипулируемости правил коллективного выбора при переходе от IC к IANC;

- в случаях, когда индекс в IC равен индексу в IANC, получены более точные результаты вычислительных экспериментов в модели IANC;
- показано, что задачи организации государственно-частного партнерства по выполнению капиталоемких проектов, организации взаимодействия региональных брокеров и оценки целесообразности инвестирования капитала в перепрофилирование предприятий с целью их последующего позиционирования на интересующих инвестора рынках могут рассматриваться как игровые задачи на полиэдральных множествах допустимых стратегий игроков, и могут решаться в рамках проведения конкурсных процедур, в которых организаторы процедур могут выбирать начальные допустимые ставки игроков из решения вспомогательных задач дискретной оптимизации;
- показана возможность использования методов дискретной оптимизации и линейного программирования для обоснованного отыскания начальных цен (ставок) в конкурсных процедурах;
- показано, что при организации движения поездов на наиболее загруженных участках сети железных дорог, на которых объем заявок на перевозки превосходит пропускную способность этих участков, и при рационализации использования взлетно-посадочных полос аэропортов, конкурсные процедуры могут способствовать более равномерному распределению нагрузки на "узкие места" и повышению за счет этого экономической эффективности соответствующих систем;
- проанализированы теоретико-игровые модели выборов в совет директоров акционерной компании;
- показано, что преимущества той или иной процедуры голосования зависят от структуры собственности: при наличии доминирующего собственника прямое голосование будет сопровождаться меньшими издержками принятия решений; при 'распыленной' структуре собственности прямое голосование сопровождается издержками создания коалиций;
- показано, что кумулятивное голосование упрощает процесс формирования совета директоров, представляя всех собственников в равной мере; кумулятивное голосо-

- вание является прозрачной процедурой голосования, так как позволяет участникам заранее рассчитать гарантированное число мест и равновесное распределение;
- показано, что при наличии разнообразных механизмов защиты прав миноритариев прямое голосование может иметь преимущества в виде более согласованного и работоспособного совета директоров, защиты компании от поглощения и внутренних корпоративных конфликтов;
  - проанализирован проциклический эффект от введения системы банковского регулирования Базель II; даны рекомендации по снижению этого эффекта;
  - исследована зависимость использования деривативов европейскими банками от стоимости этих организаций;
  - показано, что эффективно использующие деривативы фирмы имеют большую стоимость; было выявлено, что влияние деривативов на стоимость банка значительно различается для системно-значимых и иных банков в части влияния доходности по хеджирующим деривативам и стоимостью банка;
  - в рамках теории важности критериев разработаны два аналитических ординальных решающих правила (основанных на предположении о существовании кардинальных коэффициентов важности) и одно алгоритмическое ординальное решающее правило (не опирающегося на такое предположение) для многокритериальных задач принятия решений, в которых все критерии упорядочены по важности и имеют шкалу первой порядковой метрики;
  - модифицирован метод анализа текстов с помощью аннотированных суффиксных деревьев;
  - модифицированный метод аннотированных суффиксных деревьев применен для установления связей между корпусами текстов и совокупностью ключевых слово-сочетаний, для установления связей между корпусами текстов и таксономией предметной области, для автоматизации построения таксономии с использованием компетентных разработок и ресурсов интернета;
  - введены и исследованы усредненные стохастические меры информативности, определенные на множестве случайных признаков недетерминистской системы;

- найдены асимптотические формулы оценок числовых характеристик геометрической меры информативности по длине относительно отношения типа шум-сигнал;
- поставлены и исследованы некоторые оптимизационные задачи нахождения минимальных и устойчивых к зашумлению представлений контурных изображений с помощью геометрической меры информативности по длине;
- в рамках исследования поведенческой модели биржи поставлена и решена оптимизационная задача нахождения порога разделения кризисных и регулярных событий;
- исследована задача о совпадении позиций кандидатов в модели вероятностного голосования в случае предельной нейтральности избирателей при конвергентных позициях;
- построены аксиоматики для основных индексов влияния в задаче голосования с квотой;
- исследована задача расширения классической модели обобщенных паросочетаний на случай предпочтений, являющихся простейшими полупорядками; показано, что всегда существует устойчивое паросочетание и, обратно, любое устойчивое паросочетание можно получить, рассмотрев некоторое линейное расширение исходных предпочтений агентов;
- в рамках применения модели обобщенных паросочетаний к анализу приемной компании, получены необходимые и достаточные условия эффективности устойчивого паросочетания с точки зрения абитуриентов;
- в рамках применения методов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе построены агрегированные ранжирования стран по уровню их демократического развития;
- в рамках применения методов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе построена классификация стран по степени их конкурентоспособности с помощью методов теории коллективного выбора;



- разработана обучающее программное обеспечение, решающее задачи оптимального выбора и ранжирования альтернатив (электронное приложение к учебнику и задачнику [251]);
- в рамках модели справедливого дележа для различных определений справедливости рассмотрена наиболее общая постановка (предполагается любое число участников при наличии как делимых, так и неделимых пунктов); установлена общая структура множества достижимости и разработан алгоритм, позволяющий найти конечное множество в пространстве доходов;
- разработаны, исследованы или модифицированы алгоритмы выбора вариантов для большого числа альтернатив (в частности, для интернет-данных);
- разработан метод классификации поисковых запросов и формирования списка наиболее релевантных страниц; модифицирован метод поиска наилучших альтернатив с помощью модели суперпозиции надпороговых процедур;
- с помощью модели оболочечного анализа данных (Data Envelopment Analysis – DEA) проанализирован потенциал российских государственных ВУЗов как в области образовательной, так и научно-учебной деятельности; выявлены группы ВУЗов с высокой, средней и низкой результативностью относительно научно-учебной деятельности.

Области применения полученных результатов – разработка механизмов государственно-частного партнерства, банковское регулирование, разработка и анализ процедур голосования, многокритериальное принятие решений, анализ текстов и интернет-данных, распознавание образов, ранжирование альтернатив и построение агрегированных рейтингов, организация приемной кампании в вузы, исследование эффективности вузов.

Все полученные результаты являются новыми. Их значимость подтверждена многочисленными апробациями на международных конференциях и авторитетных семинарах. Кроме того, практически все представленные результаты опубликованы, в том числе в реферируемых научных изданиях.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	14
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ .....	23
1 Исследование моделей вычисления степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений.....	24
1.1 Определения и обозначения для IANC .....	28
1.2 Манипулируемость в случае множественного выбора .....	31
1.3 Теоретическая основа .....	32
1.4 Оценка разности индексов в моделях IC и IANC .....	35
1.5 Индекс Нитцана-Келли для четырех правил коллективного выбора в IANC и IC.....	44
1.6 Некоторые выводы .....	46
2 Исследование организационных моделей и механизмов.....	48
2.1 Математические модели прикладных экономических систем в форме игр на полиэдральных множествах допустимых стратегий игроков.....	49
2.2 Математические модели для определения начальных цен в конкурсных процедурах.....	64
2.3 Направления дальнейших исследований .....	72
2.4 Некоторые выводы .....	73
3 Исследование теоретико-игровых моделей выборов в совет директоров акционерной компании.....	77
3.1 Пример, демонстрирующий различия прямого и кумулятивного голосований .....	78
3.2 Опыт применения кумулятивного голосования.....	80
3.3 Конфликты между акционерами.....	82
3.4 Влияние на стоимость компании .....	84
3.5 Стратегия голосования .....	87
3.6 Некоторые выводы .....	90
4 Анализ эффективности функционирования банковского и финансового секторов экономики .....	92
4.1 Оценка рисков банковской системы России .....	92
4.1.1 Основная часть.....	93
4.1.1.1 Обзор литературы .....	93
4.1.1.2 Используемые данные .....	100
4.1.1.3 Методология исследования.....	100
4.1.2 Основные результаты.....	103
4.1.3 Заключение.....	112
4.2 Оценка взаимосвязи характера операций с деривативами и стоимости европейских банков .....	113
4.2.1 Определение дериватива.....	115
4.2.2 Обзор литературы .....	119
4.2.3 Описание выборки.....	126
4.2.4 Методология исследования .....	131
4.2.5 Первичный анализ данных .....	133
4.2.6 Заключение.....	138

5 РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ И РАЗРАБОТКА ОРДИНАЛЬНЫХ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ ДЛЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ .....	141
5.1 Математическая модель и сведения из теории важности критериев .....	142
5.2 Аналитические решающие правила для задач с упорядоченными по важности критериями со шкалой первой порядковой метрики .....	146
5.3 Пример сравнения векторных оценок при помощи аналитического решающего правила .....	148
5.4 Отношения предпочтения и безразличия при качественной информации о важности критериев со шкалой первой порядковой метрики .....	149
5.5 Алгоритмическое решающее правило для задач с упорядоченными по важности критериями со шкалой первой порядковой метрики .....	152
5.6 Пример сравнения векторных оценок по предпочтительности при помощи алгоритма $\mathcal{N}_0$ .....	157
5.6 Заключение .....	159
6 Метод аннотированного суффиксного дерева АСТ для оценки релевантности строк текстовым документам и его использование в анализе текстовых коллекций .....	160
6.1 Индексирование фрагментов текста с помощью аннотированного суффиксного дерева (АСД) .....	161
6.1.1. Понятие аннотированного суффиксного дерева .....	161
6.1.2 Алгоритм построения аннотированного суффиксного дерева .....	164
6.1.3 Процедура наложения строки на АСД .....	165
6.1.4. Нормированные оценки сравнения строк с различными АСД .....	167
6.1.5 Другие направления использования суффиксных деревьев .....	167
6.2 Использование метода АСД для анализа текстов по словосочетаниям .....	168
6.2.1 ПС таблица .....	168
6.2.2 Анализ структуры корпуса публикаций путем иерархической группировки .....	170
6.2.3 Анализ связей между ключевыми словосочетаниями .....	172
6.3 Использование метода АСД для анализа связи текстов с таксономией предметной области .....	174
6.3.1 Индексирование научных статей таксономическими единицами классификации информатики АСМ-ССС .....	174
6.3.2 Анализ учебных программ математического цикла НИУ ВШЭ с использованием таксономии РЖ «Математика» .....	178
6.4 Метод автоматизации достраивания таксономии на основе ресурсов Википедии .....	179
6.5 Некоторые выводы .....	188
7 Стохастическая мера информативности и ее применение к решению задачи устойчивого выделения информативных признаков .....	190
7.1. Меры информативности как способ агрегирования информации о низкоуровневых особенностях изображений .....	191
7.1.1 Аксиоматика меры информативности дискретной плоской кривой .....	192
7.1.2 Способы определения мер информативности контура .....	195
7.2 Стохастическая монотонная усредненная мера информативности .....	196
7.3 Стохастическая мера информативности по длине .....	200
7.3.1 Числовые характеристики длин сторон зашумленного многоугольника .....	201
7.3.2 Оценки числовых характеристик стохастической меры информативности по длине .....	210

7.3.3 Нахождение наилучших представлений контура с помощью стохастических мер информативности .....	212
7.4 Некоторые выводы .....	215
8 Разработка и исследование поведенческой модели биржи .....	216
8.1 Основная часть .....	217
8.2 Некоторые выводы .....	221
9 Исследование совпадений позиций кандидатов в модели вероятностного голосования.....	223
9.1 Модель и основные результаты .....	226
9.2 Интерпретация условий симметричности .....	236
9.3 Некоторые выводы .....	238
10 Исследование аксиоматики для индексов влияния в задаче голосования с квотой.....	240
10.1 Простые игры, голосования с квотой и индексы влияния .....	241
10.1.1 Основные определения .....	241
10.1.2 Голосования с квотой.....	243
10.1.3 Аксиоматики для индексов Шепли-Шубика и Банцафа.....	246
10.2 Игры и индексы влияния, зависящие от предпочтений участников.....	247
10.3 Аксиоматика для $\alpha$ -индекса .....	250
10.4 Аксиоматики для индексов влияния в случае голосований с квотой .....	251
10.4.1 Свойства голосований с квотой .....	251
10.4.2 Адаптированные аксиомы и характеристика.....	254
10.5 Аксиоматика для $\alpha$ -индекса в случае голосований с квотой .....	257
10.6 Некоторые выводы .....	259
11 Исследование способов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе .....	260
11.1 Построение агрегированных ранжирований стран по уровню их демократического развития с помощью методов выбора и ранжирования альтернатив, представленных вершинами мажоритарного графа .....	260
11.2 Построение классификации стран по степени их конкурентоспособности с помощью методов теории коллективного выбора.....	285
11.3 Разработка обучающего программного обеспечения, решающего задачи оптимального выбора и ранжирования альтернатив (электронное приложение к учебнику и задачку Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Дискретная математика) .....	291
11.4 Сбор и обработка количественных данных, создание программного обеспечения в целях автоматизации процесса оценки (ранжирования) экономических агентов (вариантов).....	293
11.5 Некоторые выводы .....	295
12 Анализ распределения абитуриентов по вузам.....	296
12.1 Обзор классических исследований.....	296
12.2 Основные результаты.....	301
12.2.1 Существование устойчивого паросочетания .....	302
12.2.2 Устойчивые паросочетания: неоптимальность по Парето .....	304
12.2.3 Стабильные Улучшающие Циклы .....	306
12.3 Некоторые выводы .....	309
13 ОБЩАЯ ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ О СПРАВЕДЛИВОМ ДЕЛЕЖЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ СПРАВЕДЛИВОСТИ.....	311
13.1 Основные понятия и обозначения .....	313

13.2 Модифицированные условия справедливости и оптимизационные постановки задач поиска справедливых дележей.....	315
13.3 Построение универсального множества для задач оптимизации 1 – 6.....	320
13.4 Некоторые алгоритмы.....	323
13.5 Примеры.....	324
13.6 Некоторые выводы и заключение.....	328
14 Исследования правил выбора для большого числа альтернатив.....	330
14.1 Основные подходы к решению задачи выбора вариантов для большого набора альтернатив.....	330
14.2 Основная часть.....	334
14.2.1 Принципы работы современных поисковых систем.....	334
14.2.2 Анализ данных.....	341
14.2.2.1 Предварительный анализ данных.....	341
14.2.2.2 Кластеризация данных.....	343
14.2.2.3 Правила выбора.....	350
14.3 Некоторые выводы.....	365
15 Оценка результативности университетов с помощью оболочечного анализа данных.....	367
15.1 Обзор моделей оболочечного анализа данных.....	368
15.2 Анализ практики оценки эффективности университетов.....	374
15.3 Исследование российских государственных ВУЗов.....	394
15.4 Некоторые выводы.....	403
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	406
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	411
Приложение А Таблицы описательных статистик рисков банковской системы России.....	441
Приложение Б Спецификации регрессионных моделей между деривативами и стоимостью коммерческих организаций.....	444
Б.1 Дескрипторы переменных.....	444
Б.2 Описательные статистики.....	445
Б.3 Корреляции между переменными.....	447
Б.4 Анализ выборки. Стоимость деривативов.....	448
Б.5 Анализ результатов. Оценки моделей регрессионной зависимости.....	451
Приложение В Агрегированные рейтинги стран мира, построенные на основании парных сравнений стран по пяти индексам демократии с помощью правила коллективного выбора.....	453
Приложение Г Входные и выходные параметры для модели DEA.....	457

## ВВЕДЕНИЕ

Эксперты, дающие рекомендации по принятию решений в социальной, экономической и политической сферах и учитывающие результаты научных исследований в этих сферах сталкиваются со следующими трудностями:

- низкой устойчивостью исследуемых моделей к изменению условий их применения;
- необходимостью иметь механизм достижения оптимального решения (иногда даже заранее не зная самого оптимального решения);
- сложной и нестационарной структурой используемой и учитываемой информации (неоднородностью данных, иерархичностью и пр.);
- сложностью формализации критериев принятия решений, предпочтений и пр.;
- возможностью (в том числе сознательного) искажения информации;
- необходимостью анализа очень больших массивов информации (например, интернет данных);
- большой степенью неопределенности информации.

Поэтому, несмотря на многочисленные исследования в области моделирования и принятия решений в социально, политической и экономической сферах, задачи такого моделирования не теряют своей актуальности. Более того, в последнее время с развитием информационных технологий возникли новые постановки задач моделирования, связанные с обработкой больших массивов данных; решения некоторых классических задач потребовали своего переосмысления, уточнения и пр.

Моделирование в социальной, политической и экономической сферах является междисциплинарной областью, причем спектр используемых методов и подходов оказывается необычайно широким. Вместе с тем, построение математических моделей в сферах, связанных с активной ролью «человеческого фактора», делает особенно актуальным и необходимым привлечение тех теорий, где этот фактор учитывается и моделируется. Такой теорией, например, является теория игр. В данном отчете представлены результаты исследований по моделированию в социальной, политической и экономической сферах, в котором, в первую очередь, используются методы

теории игр, теории принятия решений, теории коллективного выбора и методы разработки данных.

В соответствии с техническим заданием в ходе выполнения данного проекта в следующих научных направлениях было проведено:

- построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений;
- исследование организационных моделей и механизмов;
- исследование теоретико-игровых моделей выборов в совет директоров акционерной компании и моделей выборов, реализующих правило передачи голосов;
- исследование эффективности функционирования банковского и финансового секторов экономики;
- развитие теории важности критериев и разработка ординальных решающих правил для многокритериальных задач;
- теоретико-экспериментальное исследование по кластер-анализу и автоматической интерпретации текстовых документов;
- исследование мер информативности, определенных на множестве признаков недетерминистской системы;
- исследование моделей справедливости дележа при произвольном числе участников, делимых и неделимых пунктов;
- разработка и исследование поведенческой модели биржи;
- применение теоретико-игровых методов для моделирования коалиционных предпочтений и принятия решений политическими партиями;
- исследование и развитие модели индексов влияния, как элементов проективного пространства;
- исследование способов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе;
- исследование математической модели выбора абитуриентом вуза;
- обучение ранжированию в поисковых системах;

– исследование результативности университетов.

Работа над данным проектом является продолжением исследований, проводимых в научно-учебной Лаборатории анализа и выбора решений в 2011 г. в ходе работы над двумя проектами «Конструирование экономических механизмов» и «Моделирование принятия решений в социальных и экономических системах». В частности, в 2011 г. были получены следующие новые теоретические результаты:

- предложен алгоритм генерации представителей классов эквивалентности по анонимности и нейтральности профилей предпочтений в модели независимых анонимных и нейтральных предпочтений для вычисления индекса манипулируемости;
- вычислены разности индексов манипулируемости в модели с анонимностью и нейтральностью и без них, вычислены вероятности возникновения манипулирования в профиле с заданной мерой сходства предпочтений в нем для случая трех альтернатив и числа избирателей от 3 до 10;
- показано, что при определенных предпосылках все  $q$ -Паретовские правила можно проранжировать между собой по свободе манипулируемости;
- сопоставление  $q$ -Паретовских правил с правилами Нэнсона, Блэка и относительного большинства показало, что выбор наименее манипулируемого правила сильно зависит от того, какой метод расширения предпочтений используется; в зависимости от предпосылок, числа участника и альтернатив, в большинстве случаев наименее манипулируемыми правилами становятся процедуры Нэнсона и Сильнейшее  $q$ -Паретовское правило простого большинства;
- построено обобщение различных методов, реализующих правило передачи голосов на практике в виде формальной процедуры;
- предложен новый метод голосования, основанный на правиле передачи голосов, и построено его аксиоматическое описание;
- показано, что пересчет квоты в правилах передачи голосов не вносит существенных изменений в процедуру выбора;
- при сравнительном анализе аксиоматических систем теории важности критериев и теории аддитивных функций ценности показано, что отдельные критерии и группы



- критериев могут быть упорядочены по важности, даже если структура предпочтений с функцией ценности не является аддитивной или даже если функции ценности вообще не существует, хотя отношение нестрогого предпочтения является связным;
- из результатов сравнительного анализа систем аксиом теории важности критериев и теории аддитивных функций ценности вытекает, что для упорядоченности критериев по важности вообще не обязаны выполняться аксиомы, обеспечивающие существование функций ценности, в том числе аддитивных;
  - предположение о существовании параметрического семейства аддитивных функций ценности при конечном множестве шкальных градаций и предположение о существовании количественных величин важности критериев с вычислительной точки зрения эквивалентны;
  - построены нечеткие профили публикаций массива интернет-документов 2009-2010 гг. на основе заданных экономических факторов и осуществлена мультифасетная классификация этих факторов;
  - построен граф значимых связей между экономическими факторами на основе анализа полученной мультифасетной классификации факторов;
  - построена таксономия дисциплин «Математика», «Информатика» и «Прикладная математика» на основе классификации специальностей ВАК РФ;
  - исследована задача нахождения минимального представления образа (на примере задачи нахождения минимального полигонального представления плоской дискретной кривой) методом нечеткой кластеризации с помощью отношений похожести и различия;
  - введена и исследована усредненная мера информативности, определенная на множестве признаков образа, которые в свою очередь являются случайными величинами;
  - исследована задача нахождения наиболее устойчивого представления относительно усредненной стохастической меры информативности в том случае, когда признаки являются независимыми случайными величинами;

- при исследовании манипулирования в задаче дележа для двух участников были найдены условия, при которых манипулирование лишено практического смысла или невыгодно для обоих;
- применение методов оптимального коллективного выбора и ранжирования альтернатив, основанных на коллективных предпочтениях, которые моделируются мажоритарным отношением, к построению агрегированных рейтингов научных журналов, показало, что введенные ранжирования хорошо соотносятся с совокупностью библиометрических показателей и могут служить в качестве интегральных показателей для построения рейтинга журналов; предложенный подход дает более «грубое» разбиение журналов, что больше соответствует интуитивным представлениям об их значимости;
- разработан самообучающийся ранжирующий алгоритм для фильтрации записей в поисковых системах;
- предложен способ моделирования поведения абитуриента при выборе вузов для подачи заявлений и ход приемной кампании при разной информации о неопределенности и начальных условиях; показано, что из-за ограничения количества шагов (два в 2011 г.) механизма зачисления хороших абитуриентов недобирают не только самые слабые вузы, но и вузы уровня «выше среднего».

Исследования 2012 года, выполненные в ходе реализации данного проекта, с одной стороны развивают некоторые из указанных исследований прошлого года, а с другой стороны, используют предыдущие исследования.

Методологической основой исследований служат теория игр вообще и теория конструирования экономических механизмов в частности, теория рационального выбора, теория важности критериев, теория интеллектуального анализа данных. Основными средствами и методами исследований являются процедуры оптимизации, численные и комбинаторные методы, методы статистического и кластерного анализа данных, методы теории вероятностей и др.

Техническим средством исследования служат электронные вычислительные машины. Для прикладных исследований использовались интернет-данные, базы

данных по публикациям экономической тематики, базы данных приемной кампании в вузы и др.

Данный отчет состоит из 15 разделов, соответствующих основным направлениям исследований, проводимых в ходе выполнения данного проекта и 4 приложений.

В первом разделе приведены результаты исследований по построению и применению теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений. В частности, исследованы алгебраические свойства вероятностной модели IANC (Impartial Anonymous and Neutral Culture model) в задаче оценивания степени манипулируемости правил коллективного выбора, структура классов эквивалентности. Найдено, насколько индекс манипулируемости в модели IANC отличается от индекса в базовой модели IC (Impartial Culture model).

Второй раздел отчета посвящен исследованию организационных моделей и механизмов. В этом разделе показано, что задачи организации государственно-частного партнерства по выполнению капиталоемких проектов, организации взаимодействия региональных брокеров и оценки целесообразности инвестирования капитала в репрофилирование предприятий с целью их последующего позиционирования на интересующих инвестора рынках могут рассматриваться как игровые задачи на полиэдральных множествах допустимых стратегий игроков, и могут решаться в рамках проведения конкурсных процедур, в которых организаторы процедур могут выбирать начальные допустимые ставки игроков из решения вспомогательных задач дискретной оптимизации. Кроме того, в этом же разделе решен ряд оптимизационных задач, связанных с проведением некоторых конкурсных процедур и по использованию таких процедур в задачах логистики.

В третьем разделе отчета проанализированы теоретико-игровые модели выборов в совет директоров акционерной компании. Показано, что преимущества той или иной процедуры голосования (прямое или кумулятивное) зависят от структуры собственности: при наличии доминирующего собственника прямое голосование будет сопровождаться меньшими издержками принятия решений; при распыленной структуре собственности прямое голосование сопровождается издержками создания

коалиций. Проанализированы преимущества и недостатки той или иной процедуры голосования.

Четвертый раздел отчета посвящен анализу эффективности функционирования банковского и финансового секторов экономики. В этом разделе проанализирован проциклический эффект от введения системы банковского регулирования Базель II; даны рекомендации по снижению этого эффекта, а также исследована зависимость использования деривативов европейскими банками от стоимости этих организаций.

В пятом разделе приведены результаты исследований по теории важности критериев. В частности, в этом разделе представлены разработки двух аналитических ординальных решающих правил (основанных на предположении существования кардинальных коэффициентов важности) и одного алгоритмического ординального решающего правила (не опирающегося на такое предположение) для многокритериальных задач принятия решений, в которых все критерии упорядочены по важности и имеют шкалу первой порядковой метрики.

В шестом разделе приведены результаты по разработке модифицированного метода анализа текстов с помощью аннотированных суффиксных деревьев. Этот метод применен для: а) установления связей между корпусами текстов и совокупностью ключевых словосочетаний; б) установления связей между корпусами текстов и таксономией предметной области; в) автоматизации построения таксономии с использованием компетентных разработок и ресурсов интернета;

Седьмой раздел отчета посвящен исследованию стохастических мер информативности, определенных на множестве случайных признаков недетерминистской системы. В этом разделе, в частности, исследована так называемая стохастическая мера информативности по длине, которая является удобной моделью для описания зашумленных контурных изображений. Для этой меры найдены асимптотические формулы оценок числовых характеристик относительно отношения типа шум-сигнал, поставлены и исследованы некоторые оптимизационные задачи нахождения минимальных и устойчивых к зашумлению представлений контурных изображений.

В восьмом разделе отчета в рамках исследования поведенческой модели биржи поставлена и решена оптимизационная задача нахождения порога разделения кризисных и регулярных событий.

Девятый раздел отчета посвящен применению теоретико-игровых методов для моделирования коалиционных предпочтений и принятия решений политическими партиями. В частности, в этом разделе исследована задача о совпадении позиций кандидатов в модели вероятностного голосования в случае предельной нейтральности избирателей при конвергентных позициях.

В десятом разделе отчета приведены результаты по построению аксиоматики для основных индексов влияния в задаче голосования с квотой.

Одиннадцатый раздел отчета посвящен исследованию математической модели выбора абитуриентом вуза. В частности, в этом разделе приведено исследование задачи расширения классической модели обобщенных паросочетаний на случай предпочтений, являющихся простейшими полупорядками. В частности, показано, что всегда существует устойчивое паросочетание и, наоборот, любое устойчивое паросочетание можно получить, рассмотрев некоторое линейное расширение исходных предпочтений агентов. Кроме того, в рамках применения модели обобщенных паросочетаний к анализу абитуриентской компании, получены необходимые и достаточные условия эффективности устойчивого паросочетания с точки зрения абитуриентов.

В двенадцатом разделе отчета приведены результаты по применению методов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе для построения агрегированных ранжирований стран по уровню их демократического развития, построена классификация стран по степени их конкурентоспособности. Кроме того, в этом разделе дано описание разработанного обучающего программного обеспечения по решению задач оптимального выбора и ранжирования альтернатив (электронное приложение к учебнику и задачнику [251]).

Тринадцатый раздел отчета посвящен исследованию моделей справедливого дележа в случае различных определений справедливости, в случае любого числа участников, при наличии как делимых, так и неделимых пунктов. В частности, для

таких моделей установлена общая структура множества достижимости и разработан алгоритм, позволяющий найти конечное множество в пространстве доходов.

В четырнадцатом разделе описаны разработанные и/или модифицированные алгоритмы выбора вариантов для большого числа альтернатив (в частности, для интернет-данных). В частности, описан разработанный метод классификации поисковых запросов и формирования списка наиболее релевантных страниц; описан модифицированный метод поиска наилучших альтернатив с помощью модели суперпозиции надпороговых процедур.

Наконец, последний, пятнадцатый раздел отчета посвящен исследованию результативности университетов с помощью модели оболочечного анализа данных (Data Envelopment Analysis – DEA). В частности, в этом разделе проанализирован потенциал российских государственных ВУЗов как в области образовательной, так и научно-учебной деятельности; выявлены группы ВУЗов с высокой, средней и низкой результативностью относительно научно-учебной деятельности.

В Заключении приведены краткие выводы по результатам выполнения НИР и даны рекомендации по конкретному использованию их результатов.

В Приложении А приведены таблицы описательных статистик рисков банковской системы России (к подразделу 4.1). В Приложении Б приведены спецификации регрессионных моделей между деривативами и стоимостью коммерческих организаций (к подразделу 4.2). В Приложение В приведены агрегированные рейтинги стран мира, построенные на основании парных сравнений стран по пяти индексам демократии с помощью правила коллективного выбора (к разделу 12). А в Приложение Г приведены входные и выходные параметры для модели DEA, предложенные в разных методиках оценивания эффективности университетов (к разделу 15).

Все полученные результаты являются новыми. Их значимость подтверждена многочисленными апробациями на международных конференциях и авторитетных семинарах. Кроме того, практически все представленные результаты опубликованы, в том числе в реферируемых научных изданиях.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В рамках заявленной темы проекта «Математическое моделирование и конструирование механизмов в социальной, экономической и политической сферах с использованием методов теории принятия решений, теории игр и интеллектуального анализа данных» были проведены исследования в следующих научных направлениях:

- исследование моделей вычисления степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений;
- исследование организационных моделей и механизмов;
- исследование теоретико-игровых моделей выборов в совет директоров акционерной компании;
- анализ эффективности функционирования банковского и финансового секторов экономики;
- развитие теории важности критериев и разработка ординальных решающих правил для многокритериальных задач;
- теоретико-экспериментальные исследования по кластер-анализу и автоматической интерпретации текстовых документов;
- исследование мер информативности, определенных на множестве признаков недетерминистской системы;
- разработка и исследование поведенческой модели биржи;
- применение теоретико-игровых методов и методов теории коллективного выбора для моделирования коалиционных предпочтений и принятия решений политическими партиями;
- исследование и развитие модели индексов влияния, как элементов проективного пространства;
- исследование способов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе;
- исследование математической модели выбора абитуриентом вуза;

- исследование моделей справедливости дележа при произвольном числе участников, делимых и неделимых пунктов;
- исследования правил выбора для большого числа альтернатив;
- исследования эффективности университетов.

## 1 ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТЕПЕНИ МАНИПУЛИРУЕМОСТИ ПРАВИЛ АГРЕГИРОВАНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

В этом разделе отчета приведены результаты исследований манипулируемости правил агрегирования предпочтений.

Правило коллективного выбора является манипулируемым, если существует, по крайней мере, один избиратель и хотя бы один набор предпочтений коллектива такие, что избиратель может достичь более выгодного для себя результата голосования, предъявляя процедуре свои неискренние предпочтения. Наиболее важный результат в исследовании манипулируемости правил – теорема Гибарда-Сатертуейта [6,13]: любая недиктаторская процедура выбора не защищена от манипулирования. Но в таком случае, как оценить, в какой степени правила выбора подвержены манипулированию со стороны избирателей?

Используемый в проекте вероятностный подход был предложен в работах [7,10]. Рассматривается сначала все множество типов предпочтений коллектива, затем считается доля таких типов коллективных предпочтений, при которых хотя бы один игрок может манипулировать. Наименее манипулируемым будет правило, которое минимизирует эту долю, получившую название индекса Нитцана-Келли. В работе [8] впервые процедуры выбора сравниваются друг с другом по вероятности манипулирования в них на основе предложенного ранее индекса.

Следующей важной публикацией в области исследования манипулируемости является работа одного из авторов проекта [2], в которой приведены результаты вычислительных экспериментов. Так как результатом правила выбора может быть не одна, а несколько альтернатив, то для устранения несравнимости в работе был использован алфавитный метод. Он является одним из самых удобных, однако, в этом



случае для коллективного выбора нарушается свойство нейтральности – равноправности всех альтернатив в голосовании. Авторами работы были также предложены новые индексы, позволяющие сравнить манипулируемость различных правил. Расширенная версия индекса – отношение числа профилей, в которых ровно  $k$  избирателей имеют возможность манипулировать, к общему количеству профилей предпочтений. Кроме того, был предложен индекс свободы манипулирования.

Продолжением серии работ, посвященных исследованию индекса Нитцана-Келли для различных правил коллективного выбора в случае множественного выбора, стала работа исполнителей проекта [1]. Авторами были предложены и использованы несколько методов расширения предпочтений, число альтернатив в вычислительных экспериментах увеличено до 5, а количество избирателей до 100.

При подсчете индекса манипулируемости Нитцана-Келли в перечисленных выше работах в качестве типов коллективных предпочтений использовались анонимные предпочтения избирателей, т.е. эксперименты проводились в условиях модели Независимых Предпочтений (Impartial Culture model, IC). Другой важной вероятностной моделью является Модель Независимых Анонимных Предпочтений (Impartial Anonymous Culture model, IAC), в которой профили избирателей неотличимы друг от друга. При этом множество профилей предпочтений разбивается на классы эквивалентности по анонимности, а в качестве типов коллективных предпочтений принимаются представители классов. В англоязычной литературе их принято называть *voting situations*. Сравнить показатели манипулируемости в модели IC и IAC позволяют работы [9,12], где была исследована и коалиционная манипулируемость правил голосования.

В рамках проекта в 2012 году было проведено теоретическое исследование вероятностной модели Независимых Анонимных и Нейтральных Предпочтений и индекса манипулируемости в этой модели, начатое в 2011 году. Особенностью данной ветви изучения манипулируемости является построение выводов о поведении индекса Нитцана-Келли аналитически, без проведения дополнительных вычислительных экспериментов.

В Модели Независимых Анонимных и Нейтральных Предпочтений (Impartial Anonymous and Neutral Culture model, IANC) не важны не только имена избирателей, но и имена альтернатив. То есть профили предпочтений, отличающиеся перестановкой избирателей и (или) перестановкой имен альтернатив, считаются эквивалентными. Получающиеся в результате классы эквивалентности считаются в этой модели равновероятными. Модель IANC была впервые предложена в [4,5]. В этих работах представлено алгебраическое описание модели, дана формула вычисления количества классов эквивалентности и предложен алгоритм равномерной генерации классов.

Тем не менее, модель достаточно новая и подробно не исследована. В базовой модели, IC, индекс Нитцана-Келли представляет собой долю манипулируемых профилей предпочтений во множестве всех возможных профилей, тогда как в модели IANC соответствующий индекс есть отношение количества манипулируемых классов эквивалентности к общему количеству классов.

Рассматриваемая модель интересна тем, что любая «непредвзятая» процедура выбора обладает свойствами анонимности и нейтральности, следовательно, профили предпочтений, принадлежащие одному и тому же классу эквивалентности, будут одновременно либо манипулируемыми, либо нет. Иначе говоря, если мы можем сказать, что профиль-представитель класса подвержен манипуляциям избирателей, тогда то же самое мы можем сказать и об остальных профилях класса. Индекс Нитцана-Келли в модели IANC показывает долю типов коллективных предпочтений, подверженных манипулированию при анонимном и нейтральном правиле выбора, где мы не учитываем один и тот же тип дважды. В практическом смысле модель полезна тем, что количество представителей классов эквивалентности намного меньше количества всех профилей предпочтений. Первая величина растет как полином от количества избирателей, а вторая – как экспонента (см. рисунок 1.1)

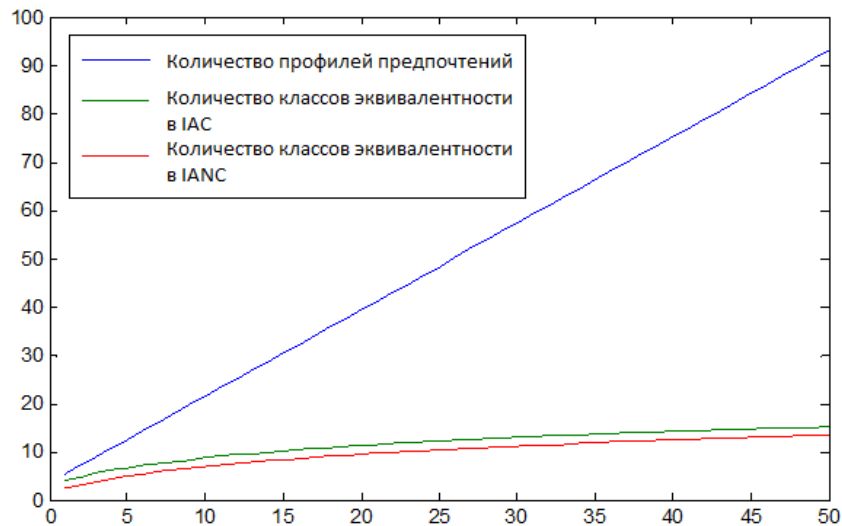


Рисунок 1.1 – Количество профилей предпочтений, количество классов эквивалентности в IAC, количество классов эквивалентности в IANC, логарифмическая шкала

Для примера, в случае четырех альтернатив и семи избирателей мы имеем 84825 классов эквивалентности и  $4.586 \cdot 10^9$  профилей предпочтений, т.е. в первом случае полный перебор представителей классов возможен, тогда как во втором уже представляет значительную трудность. В вычислительных экспериментах используется случайная генерация 10000 профилей, каждый из которых проверяется на манипулируемость. В модели IC используется простой метод Монте-Карло, а для модели IANC – алгоритм, предложенный в [5]. Следовательно, результаты вычислительных экспериментов в IANC будут иметь более высокую точность, нежели в IC.

Учитывая вышесказанное, интересно теперь ответить на вопрос: как отличается индекс манипулируемости в модели IC от индекса в модели IANC? Если верхняя граница разности индексов в моделях близка к нулю, то, с одной стороны, это означает, что вычислив манипулируемость некоторого правила для IANC, мы можем сказать, что в IC результат будет аналогичен. Так мы получим более точное значение индекса, чем если бы проводили эксперимент со случайной генерацией в IC. С другой стороны, большое количество экспериментов уже сделано для модели IC, и дополнительных вычислений для IANC не требуется. Более того, индекс в IAC также не будет отличаться от индекса в IC, так как разность индексов в IAC и IC не может быть больше, чем разность в IANC и IC.

Так как данное исследование посвящено вопросу манипулируемости правил, то под индексом подразумевается индекс манипулируемости Нитцана-Келли, но все рассуждения и результаты применимы для исследования разности и других вероятностных показателей в моделях IC и IANC. Пример такого показателя – вероятность существования победителя Кондорсе.

Используя элементы комбинаторики и теории групп, в проекте были исследованы свойства классов эквивалентности в модели IANC, классов с минимальным и максимальным числом элементов, и оценена максимальная разность индексов в IC и IANC. Показано, в каких случаях эта разность достаточно велика, чтобы быть причиной изменений в относительной манипулируемости правил, а также, когда она очень близка к нулю, и индекс в модели IC можно принять равным индексу в модели IANC.

### 1.1 Определения и обозначения для IANC

Будем использовать систему обозначений для IANC, предложенную в [4]. Пусть  $A$  – множество альтернатив, состоящее из  $m$  элементов,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  – множество избирателей, состоящее из  $n$  элементов.  $P_i$  – линейный порядок, представляющий предпочтения  $i$ -ого избирателя. Профилем предпочтений будем называть вектор индивидуальных предпочтений  $\vec{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ , который можно представить как матрицу, состоящую из  $n$  столбцов и  $m$  строк.

Общее количество профилей предпочтений  $(m!)^n$ . Модель IC предполагает, что каждый из  $(m!)^n$  профилей равновероятен с остальными. Множество профилей предпочтений для  $n$  избирателей и  $m$  альтернатив обозначим за  $\Omega(m, n)$ .

Как было отмечено во введении, в модели IANC не имеют значения ни имена избирателей, ни имена альтернатив, и множество  $\Omega(m, n)$  разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности. Например, следующие три профиля предпочтений рассматриваются в модели IANC как представители одного и того же типа коллективных предпочтений, т.е. класса эквивалентности.

$$\vec{P} = \begin{array}{cc} \underline{P_1} & \underline{P_2} \\ y & y \\ x & z \\ z & x \end{array} \quad \vec{P}' = \begin{array}{cc} \underline{P_1'} & \underline{P_2'} \\ x & x \\ y & z \\ z & y \end{array} \quad \vec{P}'' = \begin{array}{cc} \underline{P_1''} & \underline{P_2''} \\ y & y \\ z & x \\ x & z \end{array} .$$

Любой профиль предпочтений может быть взят в качестве представителя некоторого заданного класса эквивалентности. Все остальные элементы класса могут быть получены из него при помощи перестановки строк и переименования альтернатив.

Перестановку на множестве избирателей обозначим через  $\sigma$ , она является элементом симметрической группы  $S_n$ , а перестановку на множестве альтернатив - через  $\tau \in S_m$ . Пара перестановок  $\sigma$  и  $\tau$  обозначается как  $g = (\sigma, \tau)$ .  $G = S_n \times S_m$  - группа перестановок  $g = (\sigma, \tau)$ , которая действует на множестве профилей предпочтений. Всего существует  $n!$  перестановок избирателей и  $m!$  перестановок альтернатив, следовательно, количество перестановок  $g = (\sigma, \tau)$  есть

$$|G| = n!m!.$$

Разбиением  $\lambda$  множества из  $n$  элементов назовем такую слабо убывающую последовательность неотрицательных целых чисел  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_z)$ , где  $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_z$ .  $\lambda_i$  называется частью  $\lambda$ . Например,  $\lambda = (3, 2, 2)$  - разбиение множества из 7 элементов на 3 части. Если  $\lambda$  - разбиение множества мощности  $n$ , то обозначается это как  $\lambda \vdash n$ . Каждое разбиение имеет тип, обозначаемый как  $1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}$ . Эта запись означает, что разбиение имеет  $\alpha_i$  частей размер  $i$  для всех  $i$  из  $[1 \dots n]$ . Например, разбиение  $\lambda = (3, 2, 2)$  имеет тип  $1^0 2^2 3^1 4^0 5^0 6^0 7^0$ , или  $2^2 3^1$ .

Перестановка  $\sigma$  на множестве из  $n$  элементов определяет его разбиение - длины циклов перестановки - части разбиения. Например, для  $\sigma = (142)(35)(67)$  циклический тип  $2^2 3^1$ . Для разбиения  $\lambda$  определим число  $z_\lambda$ :  $z_\lambda = 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ . Число перестановок циклического типа  $1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}$  равно

$$N_\lambda = z_\lambda^{-1} \cdot n!$$

Например, в симметрической группе  $S_7$  число перестановок типа  $2^23^1$

$$\frac{7!}{2^2 3^1 2! 1!} = 210.$$

Разбиение множества избирателей, которое задает перестановка  $\sigma$ , обозначим через  $\lambda$ , а разбиение множества альтернатив, которое задает перестановка  $\tau$ , через  $\mu$ . Сумму  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$  обозначим для краткости записи за  $\alpha$  – общее количество циклов перестановки  $\sigma$ .

Пусть  $\vec{P}^g$  – образ профиля  $\vec{P} \in \Omega$  под действием перестановки  $g$ . Подмножество множества  $\Omega$ ,  $\{P^g \mid g \in G\}$  – орбита элемента  $\vec{P} \in \Omega$ . Действие группы, таким образом, делит множество  $\Omega$  на орбиты,  $\Omega$  – разделенное объединение своих орбит:  $\Omega = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_i$ .  $\theta_i$  – орбиты, они же классы эквивалентности.

Профили  $\vec{P}_1, \vec{P}_2$  называются эквивалентными, если существует такая перестановка  $g \in G$ , что  $\vec{P}_1^g = \vec{P}_2$ . Если  $\vec{P}^g = \vec{P}$ , то  $\vec{P}$  – неподвижная точка перестановки  $g \in G$ . Множество неподвижных точек для перестановки  $g \in G$  есть  $F_g = \{P \in \Omega \mid P^g = P\}$ .

Нейтральной перестановкой для профиля называется перестановка, под действием которой профиль не меняется;  $G_p = \{\sigma \in G \mid P^\sigma = P\}$  – стабилизатор, т.е. множество нейтральных перестановок для профиля  $P$ .

Логическая функция от  $S$  – утверждения

$$\chi(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \text{ – истинно,} \\ 0, & \text{если } S \text{ – ложно.} \end{cases}$$

Биномиальный коэффициент

$$\binom{x}{k} = C_x^k = \begin{cases} \frac{x!}{k!(x-k)!}, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Количество элементов в орбите профиля  $\vec{P}$  (или мощность класса эквивалентности, представителем которого является  $\vec{P}$ ) может быть вычислено по формуле

$$|\theta_{\vec{P}}| = |G| / |G_{\vec{P}}|.$$

Пусть  $НОД(\lambda)$  – наибольший общий делитель частей разбиения  $\lambda$ ,  $НОК(\lambda)$  – наименьшее общее кратное частей  $\lambda$ ,  $d = LCM(\mu)$ .

## 1.2 Манипулируемость в случае множественного выбора

В данном подразделе даны определения и обозначения по манипулируемости правил коллективного выбора в случае, когда результатом правила может быть множество альтернатив.

Профиль предпочтений, в котором все избиратели, кроме  $i$ -ого, заявляют свои искренние предпочтения, обозначим за  $\vec{P}_{-i} = \{P_1, \dots, P_{i-1}, P_i', P_{i+1}, \dots, P_n\}$ , где  $P_i'$  – неискренние предпочтения  $i$ -ого избирателя.

Результат правила коллективного выбора на профиле  $\vec{P}$  обозначим за  $C(\vec{P})$ . Как и в [1], рассматривается случай множественного выбора. Это значит, что  $C(\vec{P})$  может быть подмножеством  $A$ . Возьмем профиль предпочтений  $\vec{P}$  из рассмотренного ранее примера. Как решить, что лучше для первого избирателя: множество альтернатив  $\{x, y, z\}$  или  $\{z\}$ ? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно ввести предпочтения, расширенные на множество всех подмножеств. В данном исследовании были рассмотрены лексикографические методы расширения предпочтений, Leximin и Leximax, предложенные в [11].

По методу Leximin два подмножества альтернатив сравниваются следующим образом: сравниваются две наихудшие альтернативы в подмножествах, то подмножество, где содержится худшая альтернатива, считается худшим, если наихудшие альтернативы несравнимы, сравниваются вторые наихудшие и т.д. Метод Leximax аналогичен ему, но сравниваются альтернативы, начиная с наилучших.

Пусть, к примеру, избиратель  $i$  предпочитает альтернативу  $x$  альтернативе  $y$ , а альтернативу  $y$  альтернативе  $z$ , тогда построенные по методу Leximin расширенные предпочтения выглядят следующим образом

$$\{x\}EP_i\{x, y\}EP_i\{y\}EP_i\{x, z\}EP_i\{x, y, z\}EP_i\{y, z\}EP_i\{z\}.$$

По методу Leximax

$$\{x\}EP_i\{x, y\}EP_i\{x, y, z\}EP_i\{x, z\}EP_i\{y\}EP_i\{y, z\}EP_i\{z\}.$$

Тогда, если для некоторого правила коллективного выбора существует профиль предпочтений  $\vec{P}$  и избиратель  $i$ , такие, что  $C(\vec{P}_{-i})EP_iC(\vec{P})$ , то правило выбора называется манипулируемым. Такой профиль предпочтений  $\vec{P}$ , также будем называть манипулируемым.

Индекс Нитцана-Келли определим как отношение

$$NK = \frac{d_0}{(m!)^n},$$

где  $d_0$  - количество манипулируемых профилей предпочтений.

В модели IANC

$$NK_{IANC} = \frac{r_0}{R(m, n)},$$

индекс представляет собой отношение числа классов эквивалентности, которые допускают манипулирование,  $r_0$ , к общему количеству классов,  $R(m, n)$ .

### 1.3 Теоретическая основа

В дальнейшей работе мы будем использовать результаты следующих теорем, доказательство которых приведено в соответствующей литературе:

Теорема 1.1 [3]. Для любого элемента  $P \in \Omega$  из орбиты  $\theta_{(P)}$  выполняется соотношение  $|G| = |G_P| \cdot |\theta_{(P)}|$ , где  $G$  – группа, действующая на множестве  $\Omega$ .



Теорема 1.2 [3]. Количество орбит (классов эквивалентности) равно сумме количеств неподвижных точек по всем перестановкам из группы  $G$ , делённой на размер этой группы

$$t = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |F_{\sigma}|.$$

Теорема 1.3 (Применение леммы Бернсайда для случая действия пары перестановок, [4]). Количество классов эквивалентности вычисляется по формуле

$$R(m, n) = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{\mu \vdash m} \chi(\text{НОК}(\mu) | \text{НОД}(\lambda)) \cdot z_{\lambda}^{-1} z_{\mu}^{-1} \cdot m!^{\alpha_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n}.$$

Теорема 1.4 [4]. Преобразование суммы в биномиальный коэффициент

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ d|\lambda_i, \forall i}} z_{\lambda}^{-1} m!^{\alpha_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n} = \binom{\frac{n}{d} + \frac{m!}{d} - 1}{\frac{m!}{d} - 1}.$$

Теорема 1.5 (Объединение результатов теорем 3 и 4, [4]). Формула для вычисления количества классов эквивалентности

$$R(m, n) = \sum_{\mu \vdash m} z_{\mu}^{-1} \binom{\frac{n}{d} + \frac{m!}{d} - 1}{\frac{m!}{d} - 1}.$$

Доказательство Теоремы 3, предложенное в [4], основано на результате Теоремы 2 – Леммы Бернсайда. В свою очередь, возможность вычисления количества классов эквивалентности по анонимности и нейтральности будет использована в нашем исследовании. Количество классов эквивалентности будем обозначать далее как  $R(m, n)$ . Рассмотрим порядок вычисления  $R(m, n)$  и выпишем точные формулы для некоторых значений  $m$ .

1)  $n$  избирателей и 2 альтернативы. Для  $m = 2$  существует всего две перестановки: (12) и (1)(2), которые задают разбиения  $\mu$  двух типов: (1,1) и (2). Найдем наименьшее общее кратное частей разбиения

$$\text{НОК}(1,1)=1, \quad z_\mu = 1^2 2! = 2,$$

$$\text{НОК}(2)=2, \quad z_\mu = 2^1 1! = 2,$$

$$R(2,n) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} 2!^{\alpha_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ 2|\lambda_i}} z_\lambda^{-1} 2!^{\alpha_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n} = \frac{1}{2} \binom{n+1}{1} + \frac{1}{2} \binom{n/2}{0},$$

$$\frac{1}{2} \binom{n+1}{1} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1}{2} (n+1),$$

$$\frac{1}{2} \binom{n/2}{0} = \frac{1}{2} \frac{(n/2)!}{(n/2)!} = \frac{1}{2}, \text{ если } n - \text{ четно.}$$

Итого,

$$R(2,n) = \frac{1}{2} n + 1, \text{ если } n - \text{ четное,}$$

$$R(2,n) = \frac{1}{2} (n+1), \text{ если } n - \text{ нечетное.}$$

2)  $n$  избирателей и 3 альтернативы. Всего 3 разбиения для  $m$ : (1,1,1), (2,1), (3).

$$\text{НОК}(1,1,1)=1, \quad z_\mu = 1^3 3! = 6,$$

$$\text{НОК}(2,1)=2, \quad z_\mu = 1^2 2^1 1! = 2,$$

$$\text{НОК}(3)=3, \quad z_\mu = 3^1 1! = 3,$$

$$R(3,n) = \frac{1}{6} \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} 3^{\alpha_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ 2|\lambda_i}} z_\lambda^{-1} 3!^{\alpha_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n} + \frac{1}{3} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ 3|\lambda_i}} z_\lambda^{-1} 3!^{\alpha_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n} =,$$

$$= \frac{1}{6} \binom{n+5}{5} + \frac{1}{2} \binom{n/2+2}{2} + \frac{1}{3} \binom{n/3+1}{1}.$$

3)  $n$  избирателей и 4 альтернатив. Разбиения: (4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1).

$$\text{НОК}(4)=4 \quad z_\mu = 4^1 1! = 4,$$

$$\text{НОК}(3,1)=3 \quad z_\mu = 3^1 1^1 1! = 3,$$

$$\text{НОК}(2,2)=2 \quad z_{\mu} = 2^2 2! = 8,$$

$$\text{НОК}(2,1,1)=2 \quad z_{\mu} = 2^1 1^2 1! 2! = 4,$$

$$\text{НОК}(1,1,1,1)=1 \quad z_{\mu} = 1^4 4! = 24,$$

$$R(4,n) = \frac{1}{4} \binom{n/4+5}{5} + \frac{1}{3} \binom{n/3+7}{7} + \frac{3}{8} \binom{n/2+11}{11} + \frac{1}{24} \binom{n+23}{23}.$$

Значения количества классов эквивалентности для  $2 \leq m \leq 5$  и  $2 \leq n \leq 10$  приведены в таблице в приложении. Частный случай, когда  $m!$  и  $n$  взаимно простые, количество классов эквивалентности по анонимности и нейтральности равно количеству классов эквивалентности по анонимности, деленному на количество перестановок множества альтернатив.

4) Когда  $m!$  и  $n$  взаимно простые,

$$d = 1, \quad \mu = (1, 1, \dots, 1), \quad z_{\mu} = 1^m \cdot m! = m!,$$

$$R(m,n) = \sum_{\mu \neq m} z_{\mu}^{-1} \binom{\frac{n}{d} + \frac{m!}{d} - 1}{\frac{m!}{d} - 1} = \frac{1}{m!} \binom{n + m! - 1}{m! - 1}.$$

#### 1.4 Оценка разности индексов в моделях IC и IANC

В данном подразделе речь пойдет об оценке разности индексов манипулируемости в модели независимых анонимных и нейтральных предпочтений (IANC) и в модели независимых предпочтений (IC). Нас интересует вопрос, насколько вообще различны в этих моделях вероятности того, что случайным образом выбранный профиль предпочтений удовлетворяет тому или иному свойству, будь то существование победителя Кондорсе или возможности манипулирования, а также от чего зависит эта разность. Ответ на него естественным образом может быть дан посредством проведения точных вычислений, алгоритмы и результаты которых содержит следующий подраздел.

Вместе с тем, изучение свойств классов эквивалентности по анонимности и нейтральности позволяет нам вывести некоторые достаточно определенные утверждения для аналитической оценки максимальной разности показателей.

Разность показателей в моделях возникает из-за того, что вероятность выбора некоторого профиля, как из больших, так и из малых по мощности классов эквивалентности одинаковая. Следовательно, вероятность случайного выбора каждого конкретного профиля предпочтений убывает с ростом мощности класса эквивалентности, которому он принадлежит.

Рассмотрим на примере, как получается разность. Количество профилей и количество классов эквивалентности подобраны так, как показано на рисунке 1.2 и не соответствует какому-либо реальному случаю.

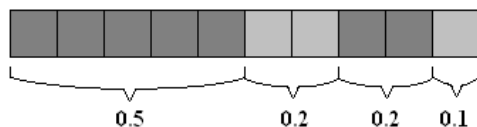


Рисунок 1.2 – Изображение и классов эквивалентности

Предположим, что некоторому свойству (например, существованию возможности манипулирования) удовлетворяют профили из самого большого по мощности класса эквивалентности. Тогда в модели IC вероятность того, что в случайно выбранном профиле выполняется это свойство, будет равна 0.5. В модели IANC профили выбираются с равной вероятностью из каждого класса, или, иначе говоря, для примера с четырьмя классами существует всего 4 различных с точки зрения анонимности и нейтральности профилей. В этом случае вероятность будет составлять уже 0.25 (1/4). Как видно, показатель вероятности в IANC меньше, чем в IC. Если же свойству удовлетворяют профили из самого малого по мощности класса эквивалентности, то показатель вероятности свойства в модели IANC будет превышать аналогичный в IC.

Исходя из вышесказанного, для определения разности показателей нам требуется знать мощность максимального и минимального классов эквивалентности, а также их количество.

Мощность орбиты (или класса эквивалентности) для данного профиля  $P$  вычисляется по формуле

$$|\theta_{(P)}| = |G| / |G_P|,$$

где  $G$  – мощность множества перестановок для профилей  $m \times n$ ,  $G_P$  – количество перестановок, нейтральных для профиля  $P$ .

Теорема 1.6. Максимальное количество нейтральных перестановок для случая  $n \geq 3$  всегда у профиля с максимальной согласованностью предпочтений, т.е. с одинаковыми предпочтениями у всех избирателей. Это количество всегда равно  $n!$ .

Доказательства приведенных утверждений могут быть найдены в работе [14].

Итак, все возможные перестановки столбцов не меняют профиль с одинаковыми столбцами. Следовательно, минимальное количество элементов в классе эквивалентности равно

$$|\theta_{\min}| = \frac{m!n!}{n!} = m!.$$

Так как все такие профили, где столбцы одинаковые, принадлежат одному классу эквивалентности, можно сделать вывод о том, что класс с минимальным количеством элементов в случае с  $n \geq 3$  единственен.

А что можно сказать про класс эквивалентности с максимальным количеством элементов? Для элементов такого класса нейтрально минимальное количество перестановок. Обращаясь к тем же самым таблицам, мы видим, что для некоторого количества представителей классов эквивалентности только одна перестановка является нейтральной. Но всегда ли то так? Рассмотрим следующие два примера профилей предпочтений (рисунок 1.3).

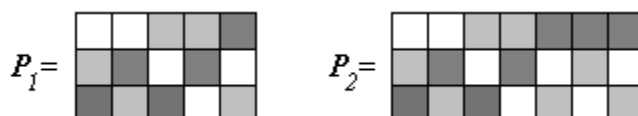


Рисунок 1.3 – Изображения двух профилей предпочтений

Разные оттенки серого означают разные альтернативы. Для первого профиля  $n = 5, m = 3$ , для второго  $n = 7, m = 3$ . Видно, что для первого профиля нейтральной

является только тождественная перестановка, не переставляющая ни столбцы, ни альтернативы. Для второго профиля нейтральны две перестановки: тождественная и перестановка  $((1)(2)(3)(4)(5\ 7)(6), (1)(2)(3))$ . Видно, что если количество столбцов в профиле превышает количество различных перестановок альтернатив, то количество нейтральных перестановок для такого профиля становится больше одного из-за повторения столбцов.

Теорема 1.7. Для случая  $m! > n$  существует профиль предпочтений, для которого нейтральной является только тождественная перестановка. Количество элементов в классе эквивалентности с максимальной мощностью равно  $m!n!$ .

Теперь пусть для профиля предпочтений выполняется  $m! = n$  или  $m! \mid n$  ( $m!$  является делителем  $n$ ). Пример такого профиля приведен на рисунке 1.4.



Рисунок 1.4 – Изображение профиля предпочтений

Для такого профиля предпочтений нейтральными являются перестановки:

- $((1)(2)(3), (1)(2)(3)(4)(5)(6)),$
- $((1\ 2)(3), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)),$
- $((1\ 3)(2), (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)),$
- $((1)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)),$
- $((1\ 2\ 3), (1\ 4\ 6)(2\ 3\ 5)),$
- $((1\ 3\ 2), (1\ 6\ 4)(2\ 5\ 3)).$

Однако, наименьшее количество нейтральных перестановок будет иметь другой профиль (рисунок 1.5):

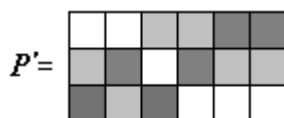


Рисунок 1.5 – Изображение профиля предпочтений

Как видно, нейтральных перестановок для этого профиля всего две: тождественная перестановка, и перестановка, меняющая местами последние два столбца. Увеличивая число столбцов от 6 до 12 в примере с тремя альтернативами, мы получим, что чем больше  $n$ , тем большее количество нейтральных перестановок имеет профиль из максимального по мощности класса эквивалентности. Так, для случая  $n = 8, m = 3$  минимальное количество нейтральных перестановок будет равно 4. Для  $n = 9, m = 3$  будет минимум 8 нейтральных перестановок. Столбцы в профилях из класса с максимальной мощностью повторяются каждый максимум по два раза. Повторение столбцов более, чем два раза,  $k$  раз, приведет нас к увеличению количества нейтральных перестановок за счет появления  $k!$  перестановок одинаковых столбцов. Итого, в если  $m! < n < 2m!$ , то количество нейтральных перестановок будет равно

$$1 + C_{n-m!}^1 + C_{n-m!}^2 + \dots + C_{n-m!}^{n-m!},$$

т.е тождественная перестановка, плюс число способов выбрать в перестановку одну пару повторяющихся столбцов из  $n - m!$ , затем две пары, и т.д.

Когда выполняется условие  $m! > n$ , а значит, в абсолютном большинстве случаев, мощность максимального класса эквивалентности равна  $|\theta_{\max}| = m!n!$ , во всех остальных  $|\theta_{\max}| \leq m!n!$ .

Но в отличие от минимального класса эквивалентности, утверждать единственность максимального класса будет неверно, в примере для  $n = 3, m = 3$ , в таблице 2.2 видно существование трех максимальных по мощности классов. Вычисление точного количества максимальных классов эквивалентности – довольно трудная комбинаторная задача, однако можно дать интервальную оценку этого количества.

Рассматривается множество профилей предпочтений, состоящих из попарно различных столбцов, обозначенное за  $\tilde{\Omega}$ . Количество классов эквивалентности в этом множестве  $\tilde{R}(m, n)$ . Наконец, пусть  $\tilde{F}_g$  - множество неподвижных точек  $\vec{P}$  из  $\tilde{\Omega}$ ,  $\tilde{F}_g = \{\vec{P} \in \tilde{\Omega} \mid \vec{P}^g = \vec{P}\}$ .

Лемма 1.1. Количество неподвижных точек в  $\tilde{\Omega}$  для некоторой перестановки  $g = (\sigma, \tau)$  равно

$$|\tilde{F}_g| = \begin{cases} \prod_{j=0}^{\alpha} (m! - j \cdot t), & \text{if } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{\alpha} = t, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

где  $t = LCM(\mu)$ .

Так профили предпочтений из максимального класса эквивалентности при  $m! > n$  всегда состоят из попарно различных столбцов, то следующим шагом будет вычисление классов эквивалентности в  $\tilde{\Omega}$ .

Теорема 1.7. Для любых  $m$  и  $n$  с таких, что  $m! > n$ , количество классов эквивалентности в  $\tilde{\Omega}$  равно

$$\tilde{R}(m, n) = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} z_{\lambda}^{-1} z_{\mu}^{-1} \chi(S(\lambda, \mu)) \prod_{j=0}^{\alpha-1} (m! - j \cdot t),$$

где  $S(\lambda, \mu) = (\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{\alpha} = t)$ .

Теорема 1.7 позволяет получить интервальную оценку количество максимальных классов эквивалентности. Этот интервал достаточно мал, а его границы сходятся при  $m$  стремящемся к бесконечности.

Следствие 1.1. Для любых  $m$  и  $n$  таких, что  $m! > n$

а) количество максимальных классов эквивалентности  $R_{\max}(m, n)$  удовлетворяет следующему неравенству

$$\frac{2(m! - 1)!}{(m! - n)! n!} - \tilde{R}(m, n) \leq R_{\max}(m, n) \leq \tilde{R}(m, n).$$

б) Если  $m$  и  $n$  таковы, что  $n > m$  и  $n$  является простым числом, то количество максимальных классов эквивалентности равно  $\tilde{R}(m, n)$ .



Однако, даже зная количество максимальных по мощности классов эквивалентности, мы не можем утверждать, что задача нахождения разности индексов решена полностью. Разность вероятностных показателей в моделях будет максимальной, если все профили предпочтений, удовлетворяющие какому-либо свойству, будут принадлежать классам эквивалентности, имеющим мощность больше средней мощности класса. В примере для  $n = 4, m = 3$ , где средняя мощность класса составляет 54 элемента, имеется 14 классов эквивалентности, чья мощность превосходит 54. К ним относятся как профили, состоящие из неповторяющихся столбцов, так и профили, имеющие два одинаковых столбца.

Следующий вопрос, возникший в процессе решения этой задачи, таков: при каких условиях возникает ситуация, когда количество классов эквивалентности, превосходящих по мощности среднее количество элементов в классе, становится больше, чем количество максимальных классов? Для  $m = 3$  такая ситуация наступает уже в случае четырех столбцов, для  $m = 4$  – в случае семи. Это число было посчитано далее: для  $m = 5$  равно 14, для  $m = 6$  – 33.

Объяснить это можно следующим образом: среднее количество элементов в классе эквивалентности растет медленнее, чем мощность второго максимального класса, то есть  $m!n!/2$  (рассматриваем случай  $m! > n$ ). Рост последнего ускоряется за счет факториала количества столбцов. Аналогичный порог наблюдается и для третьего максимального по мощности класса, количество элементов в котором, начиная с определенного  $n$ , превышает среднюю мощность классов.

Приближенно посчитать такие пороги можно с помощью формулы вычисления количества классов эквивалентности для взаимно простых  $n$  и  $m!$ :

$$R(m, n) = \frac{1}{m!} \binom{n + m! - 1}{m! - 1}.$$

Для точного вычисления средней мощности класса необходимо, конечно, использовать формулу  $R(m, n)$  для общего случая из теоремы 5, но для простоты вычислений и записи, без больших потерь, мы воспользуемся следующей формулой

$$\frac{(m!)^n}{\frac{1}{m!} \binom{n+m!-1}{m!-1}},$$

– среднее количество элементов в классе. Количество элементов в классе, в  $k$  раз меньше, чем максимальный (класс, для которого нейтральны  $k$  подстановок)

$$\frac{m!n!}{k}.$$

Нас интересует  $n$ , при котором среднее количество элементов в классе становится меньше мощности класса, для которого нейтральны  $k$  подстановок, т.е.

$$\frac{(m!)^n}{\frac{1}{m!} \binom{n+m!-1}{m!-1}} < \frac{m!n!}{k}.$$

Преобразуя это неравенство, получаем следующее

$$k \cdot (m!)^n < \frac{(n+m!-1)!}{(m!-1)!},$$

которое нетрудно решить, считая  $m$  заданным. Левая часть данного неравенства – степенная функция, в точке 0 принимающая значение  $k$ . Функция правой части в нуле принимает значение 1. Последняя функция возрастает значительно быстрее, и на некотором  $n$  значение степенной функции становится меньше факториальной. Те значения  $n$ , при которых  $k \cdot (m!)^n$  становится меньше факториальной функции, обозначим за  $\bar{n}_k$ . По мере роста  $k$  значения  $\bar{n}_k$  становятся все ближе друг к другу.

Заметим, что  $\bar{n}_2$  для заданного  $m$  всегда меньше  $m!$ . Следовательно, при  $n < \bar{n}_2$  для вычисления максимальной разности показателей в моделях достаточно посчитать мощность максимальных классов эквивалентности и их количество. Разность показателей

$$\max \Delta_{IANC} = \left| \frac{R_{\max}(m, n)}{R(m, n)} - \frac{R_{\max}(m, n) \cdot m!n!}{(m!)^n} \right|$$

представляет собой модуль разности отношения количества максимальных классов к общему количеству классов (показатель в модели IANC) и отношения количества профилей в максимальных классах к общему количеству профилей (показатель в модели IC).

Следующие графики на рисунках 1.6 и 1.7 иллюстрируют значения максимальной разности индексов манипулируемости в моделях IC и IANC для числа избирателей и альтернатив от 3 до 10. В случае 3 и 4 альтернатив эта разность достаточно велика, чтобы быть причиной изменений в относительной манипулируемости правил выбора. Начиная с 6 альтернатив, максимальная разность становится практически нулевой.

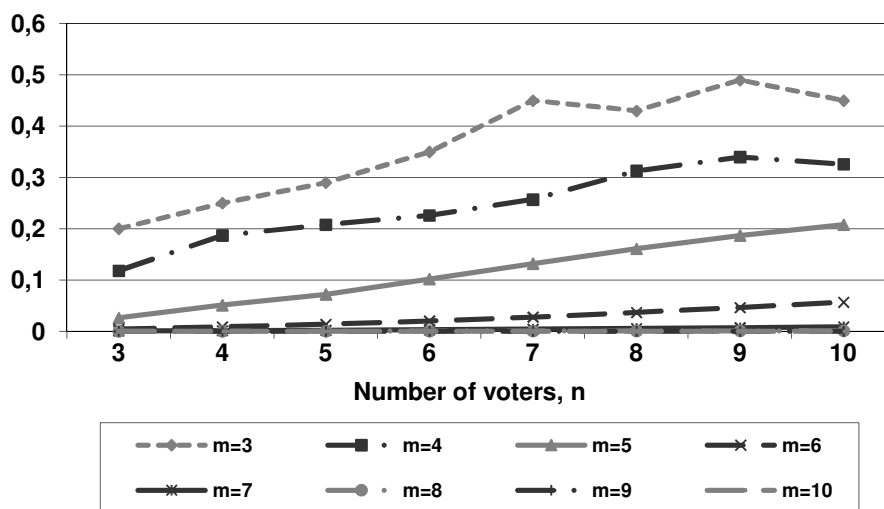


Рисунок 1.6 – Максимальная разность индексов в моделях IC и IANC

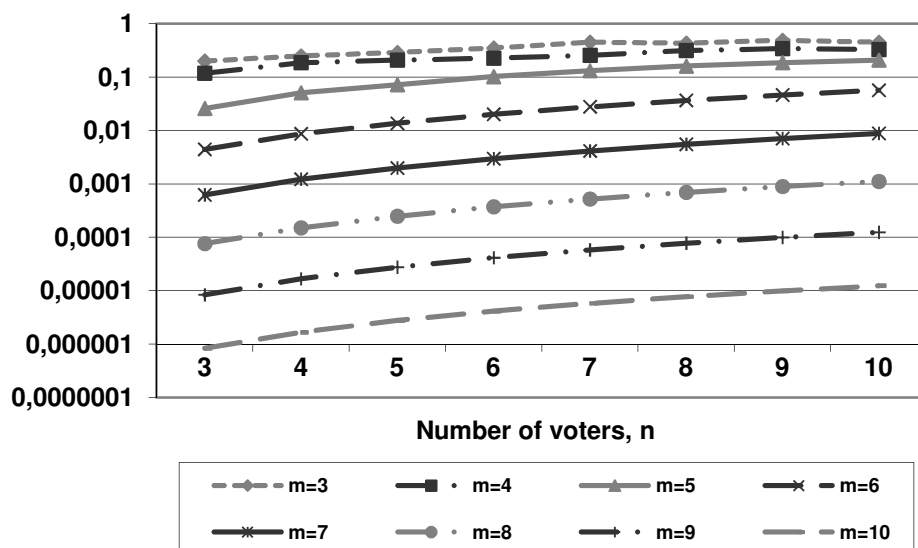


Рисунок 1.7 – Максимальная разность индексов в моделях IC и IANC в логарифмической шкале

Максимальная разность стремится к нулю при  $m$  стремящемся к бесконечности. Однако при возрастании числа избирателей разность не уменьшается, но стремится к некоторому строго положительному значению.

### 1.5 Индекс Нитцана-Келли для четырех правил коллективного выбора в IANC и IC

В этом подразделе покажем, как изменяется относительная манипулируемость правил коллективного выбора при переходе от модели IC к модели IANC. Рассмотрим случай с тремя альтернативами. Используя теоретическое исследование, описанное в предыдущем разделе, были найдены максимальные разности индексов для практически важного случая трех альтернатив и выяснено, что манипулируемость правил в моделях может существенно отличаться.

Вычислим значение индекса Нитцана-Келли для следующих четырех правил коллективного выбора в IC и IANC.

1. Правило относительного большинства. Это правило выбирает альтернативы, которые являются наилучшими для максимально числа избирателей.

$$a \in C(\vec{P}) \Leftrightarrow [\forall x \in A \quad n^+(a, \vec{P}) \geq n^+(x, \vec{P})],$$

где  $n^+(a, \vec{P}) = \text{card}\{i \in N \mid \forall y \in A \ a P_i y\}$ .

2. Правило одобряющего голосования с квотой  $q$ . Правило выбирает альтернативы, которые находятся среди  $q$  наилучших для максимального числа избирателей.

$$a \in C(\vec{P}) \Leftrightarrow [\forall x \in A \ n^+(a, \vec{P}, q) \geq n^+(x, \vec{P}, q)],$$

где  $n^+(a, \vec{P}) = \text{card}\{i \in N \mid \forall y \in A \ a P_i y\}$ .

3. Правило Борда. Для каждой альтернативы рассчитывается ранг в предпочтениях  $i$ -ого избирателя

$$r_i(x, \vec{P}) = \text{card}\{b \in A : x P_i b\}.$$

Сумма рангов  $r_i(a, \vec{P})$  по всем  $i \in N$  называется рангом Борда альтернативы  $a$ .

$$r(a, \vec{P}) = \sum_{i=1}^n r_i(a, \vec{P}).$$

Правило Борда выбирает альтернативы с максимальным рангом Борда:

$$a \in C(\vec{P}) \Leftrightarrow [\forall b \in A, \ r(a, \vec{P}) \geq r(b, \vec{P})].$$

4. Процедура Блэка. Правило выбирает победителя Кондорсе, если он существует, в противном случае выбирает победителя по правилу Борда.

Вычисляется значение индекса Нитцана-Келли для каждого из приведенных правил коллективного выбора в случае метода расширения предпочтений Leximin и Leximax для трех альтернатив и количества избирателей от 3 до 10. Правило относительного большинства имеет наибольшее значение разности индексов, в то время как для правила одобряющего голосования эта разность близка к нулю. Это и служит причиной того, что манипулируемость этих правил друг относительно друга меняется при переходе от IC к IANC (см. рисунки 1.8 и 1.9). Тем не менее, процедура Блэка является наименее манипулируемой среди рассматриваемых правил в обеих моделях.

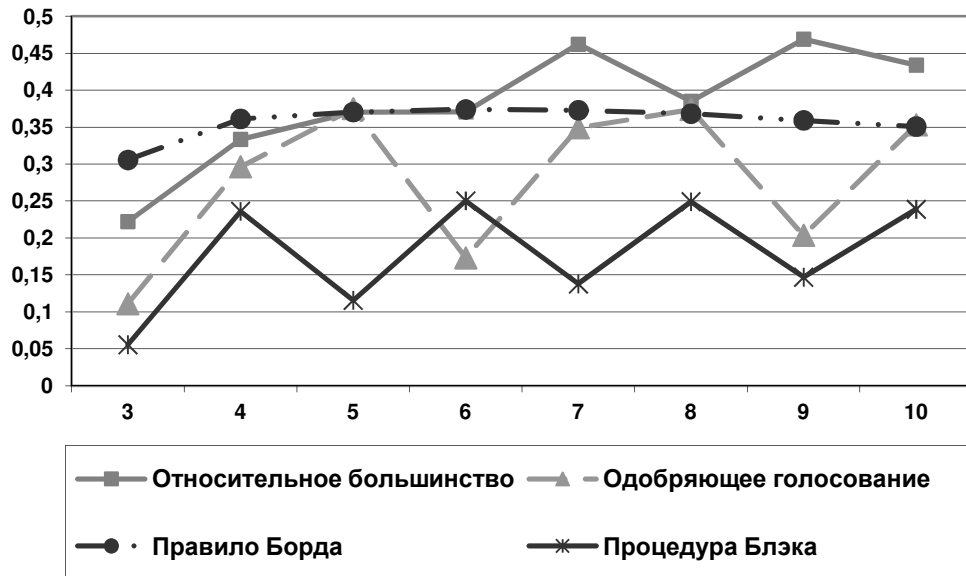


Рисунок 1.8 – Индекс Нитцана-Келли в модели IC для Leximin

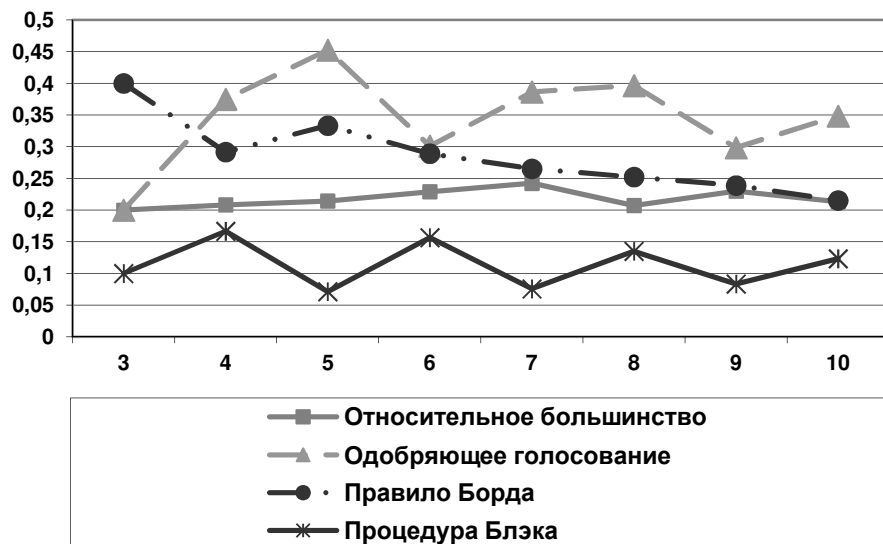


Рисунок 1.9 – Индекс Нитцана-Келли в модели IANC для Leximin

### 1.6 Некоторые выводы

Анонимность и нейтральность являются основными аксиомами правил коллективного выбора. Построенная на этих аксиомах модель IANC предполагает, что ни имена избирателей, ни имена альтернатив не имеют значения. Представители классов эквивалентности в модели IANC могут рассматриваться как «типы» коллективных предпочтений, поэтому минимизируя индекс Нитцана-Келли в модели IANC,

мы фактически ищем правило, минимизирующее количество «типов» предпочтений коллектива, допускающих манипулирование.

Исследованы алгебраические свойства вероятностной модели IANC, структура классов эквивалентности, найдены количество и мощность минимальных классов эквивалентности, дана оценка количества и найдена мощность максимальных классов эквивалентности в случае  $m! > n$ .

Найдено, насколько индекс манипулируемости в модели IANC отличается от индекса в базовой модели, IC. Для этого подробно рассмотрена алгебраическая структура классов эквивалентности в модели IANC, найдены мощности максимальных и минимальных классов эквивалентности, дана оценка для количества максимальных классов.

Показано, в каких случаях эта разность индексов близка к нулю, а в каких достаточно велика, чтобы быть причиной изменений в относительной манипулируемости правил коллективного выбора при переходе от IC к IANC. Приведен пример такого случая.

Так как количество классов эквивалентности значительно меньше общего количества профилей предпочтений, то в случаях, когда индекс в IC равен индексу в IANC, можно получить более точные результаты вычислительных экспериментов в модели IANC.

Таким образом, данное теоретическое исследование отвечает на вопрос, какие различия в показателях манипулируемости могут существовать в моделях IC, IAC и IANC и позволяет сократить время, затрачиваемое на получение результатов вычислений.

Результаты исследования отражены в работе [14]:

Veselova Y. The difference between manipulability indexes in IC and IANC models // EC “Economics”, Higher School of Economics, preprint, 2012.

## 2 ИССЛЕДОВАНИЕ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ И МЕХАНИЗМОВ

Принятие решений в системах организационного управления, как в государственном, так и в частном секторе экономики всегда являлось и по-прежнему остается одной из ключевых проблем управления в экономике. Одним из важнейших аспектов этой проблемы, безусловно, является изучение возможности использования мощного математического аппарата количественного исследования организационных математических моделей, прежде всего, с помощью методов оптимизации, как для выявления новых общих экономических закономерностей, так и для отыскания оптимальных управленческих решений в конкретных экономических системах.

В данном разделе отчета представлены результаты исследований по выявлению классов математических моделей в прикладных экономических системах, допускающих формулировку задач принятия решений с использованием этих моделей в форме а) игр на полиэдральных множествах допустимых стратегий игроков и б) задач отыскания оптимальных стратегий аукционера и участников аукционов. В отчете приводятся математические формулировки задач:

- взаимодействия двух региональных брокеров при поиске возможности заключения ими, так называемого форвардного контракта для двух групп клиентов, каждая из которых находится в одном из двух регионов и ищет партнеров по сделке с помощью соответствующего регионального брокера (одного из рассматриваемых двух региональных брокеров);
- оценки потенциальными инвесторами целесообразности репрофилирования предприятия и возможности его последующего эффективного позиционирования на рынках товаров и услуг;
- организации государственно-частного партнерства по выполнению набора проектов, представляющих интерес для государства, в условиях ограниченного бюджета, не позволяющего государству финансировать эти проекты или полностью или частично;



- определения начальной цены при проведении конкурсных процедур при выборе исполнителя работы или набора работ в рамках размещения государственных заказов;
- выбора начальных ставок в аукционах на право использования элементов транспортной инфраструктуры с ограниченной пропускной способностью.

Для всех рассмотренных организационных моделей указаны подходы к отысканию решений задач управления соответствующими системами с использованием известных методов оптимизации, а также сформулированы направления исследования для тех из рассмотренных задач, для которых представляется возможным построение новых методов решения, учитывающих специфику задачи и, возможно, более эффективных, чем известные методы.

Все математические модели, представленные в настоящем разделе, разработаны исполнителем проекта, внс МЛАВР, профессором А.С. Беленьким при участии студентов НИУ ВШЭ в рамках выпускных квалификационных работ, выполненных ими под руководством А.С. Беленького.

## 2.1 Математические модели прикладных экономических систем в форме игр на полиэдральных множествах допустимых стратегий игроков

Задача 2.1.1. Рассмотрим процесс взаимодействие двух региональных брокеров, которые предоставляют интересы своих клиентов из двух разных стран на товарной бирже. Пусть один из брокеров реализует торговые сделки через Нью-Йоркскую товарную биржу (New-York Commodity Exchange), а другой – через Лондонскую (London Futures and Options Exchange). Вообще говоря, предметами торговли являются некоторые товары, однако, в настоящее время, торговля непосредственно самими товарами на современных биржах производится крайне редко и фьючерсные контракты на поставку определенных количеств товаров в определенное время являются основным предметом биржевой торговли в [22]. Обычно, услуги каждого из двух брокеров состоят в организации набора фьючерсных контрактов на производимые

их клиентами товары, продажа которых обеспечила бы их клиентам желаемый ими уровень прибыли (если, разумеется, эти пожелания достижимы).

Подобное взаимодействие брокеров возникает на финансовых рынках, если, например, клиенты или группы клиентов одного из брокеров в одном регионе, скажем, в США, заинтересованы в продаже некоторых товаров, производимых ими в «своем» регионе, в другой регион, скажем, в Великобритании. При этом клиенты из США заинтересованы в покупке определенных товаров, производимых в этом другом регионе (Великобритании), в то время как англичане заинтересованы продать произведенные ими товары в США. На основе представления о конкретном размере суммарной прибыли, которую клиент хотел бы получить от продажи своих и от покупки нужных ему товаров, каждый клиент в каждой из стран предлагает брокеру товары в таких объемах, в которых он готов поставлять эти товары для продажи в течение определенного периода времени в будущем. Брокеру необходимо сформировать из предлагаемых товаров (или из какой-либо их части) фьючерсные контракты, ориентируясь на текущие и предполагаемые цены на фьючерсы на рынке, на котором он работает.

Хотя, как правило, оба брокера продают товары, предложенные клиентами, на бирже, посредством фьючерсных контрактов, торговая сделка может осуществиться ими и через так называемые форвардные контракты [22]. Вопрос о целесообразности перехода к форвардным сделкам решается брокерами в зависимости от степени их уверенности в надежности стороны, с которой подписывается форвардный контракт, с точки зрения выполнения ею контрактных обязательств. Однако желание рискнуть даже при возможном отказе одного или нескольких клиентов от исполнения своих обязательств также является одним из факторов в принятии такого решения.

Задача формирования и продажи фьючерсных контрактов может быть сформулирована как оптимизационная задача с системой ограничений в виде линейных неравенств, структура которых идентична тем, которые рассмотрены в похожей задаче взаимодействия двух региональных брокеров, продающих товары, произведенные их клиентами, непосредственно [26]. Эта идентичность становится почти очевидной,

если заметить, что объем товара  $k$ , производимого предприятием  $i$  в регионе 1 и поставляемого предприятию  $j$  в регион 2 (в терминологии, использованной при формулировке задачи из [26]) в задаче составления и продажи фьючерсных контрактов, можно рассматривать как фьючерсный контракт, предложенный клиентом  $i$  из первого региона (например, из США) клиенту  $j$  из второго региона (например, из Великобритании).

Пусть [20, 29]:

$m$  – число клиентов в регионе 1, готовых продать товары в регион 2 и купить определенные товары из региона 2, пользуясь услугами регионального брокера (в дальнейшем брокера 1);

$n$  – число клиентов в регионе 2, готовых продать товары в регион 1 и купить определенные товары из региона 1, пользуясь услугами регионального брокера (в дальнейшем брокера 2);

$\theta$  – число товаров, производимых или предлагаемых к продаже клиентами брокера 1 в регионе 1;

$\sigma$  – число товаров, производимых или предлагаемых к продаже клиентами брокера 2 в регионе 2;

$x_{kj}^i$  – объем товара  $k$ , предлагаемый клиентом  $i$  из региона 1 для продажи в регион 2 через брокера 1, который формирует фьючерсный контракт, который может быть заключен с клиентом  $j$  из региона 2, как результат сделки,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $k \in \overline{1, \theta}$ ;

$y_{li}^j$  – объем товара  $l$ , предлагаемый клиентом  $j$  из региона 2 для продажи в регион 1 через брокера 2, который формирует фьючерсный контракт, что может быть заключен с клиентом  $i$  из региона 1, как результат сделки,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $l \in \overline{1, \sigma}$ ;

$a_{kj}^i$  – цена, по которой брокер 1, договариваясь с брокером 2, может продать фьючерсный контракт на товар  $k$ , предоставленный клиентом  $i$  из региона 1 клиенту  $j$  из региона 2,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $k \in \overline{1, \theta}$ ;

- $b_{li}^j$  – цена, по которой брокер 1, договариваясь с брокером 2, может купить фьючерсный контракт на товар  $l$ , предлагаемый клиентом  $j$  из региона 2, для клиента  $i$  из региона 1,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $l \in \overline{1, \sigma}$ ;
- $c_{kj}^i$  – цена, по которой брокер 2, договариваясь с брокером 1, может купить фьючерсный контракт на товар  $k$ , предлагаемый клиентом  $i$  из региона 1, для клиента  $j$  из региона 2,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $k \in \overline{1, \theta}$ ;
- $d_{li}^j$  – цена, по которой брокер 2, договариваясь с брокером 1, может продать фьючерсный контракт на товар  $l$ , предлагаемый клиентом  $j$  из региона 2, для клиента  $i$  из региона 1  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $l \in \overline{1, \sigma}$ ;
- $\omega_{kj}^i$  – затраты на транспортировку и страховку (CIF price) единицы товара  $k$ , в котором заинтересован клиент  $j$  из региона 2, покрываемые клиентом  $i$  из региона 1,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $k \in \overline{1, \theta}$ ;
- $\nabla_{li}^j$  – затраты на транспортировку и страховку единицы товара  $l$ , в котором заинтересован клиент  $i$  из региона 1, покрываемые клиентом  $j$  из региона 2,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $l \in \overline{1, \sigma}$ ;
- $\chi_{kj}$  – спрос на товар  $k$ , производимый в регионе 1, со стороны клиента  $j$  из региона 2 согласно фьючерсному контракту,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $k \in \overline{1, \theta}$ ;
- $\varepsilon_{li}$  – спрос на товар  $l$ , производимый в регионе 2, со стороны клиента  $i$  из региона 1, согласно фьючерсному контракту,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $l \in \overline{1, \sigma}$ ;
- $\pi_k^i$  – объем товара  $k$ , предоставляемого клиентом  $i$  из региона 1 и доступного к продаже по фьючерсным контрактам,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $k \in \overline{1, \theta}$ ;
- $\gamma_l^j$  – объем товара  $l$ , предоставляемого клиентом  $j$  из региона 2 и доступного к продаже по фьючерсным контрактам,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $l \in \overline{1, \sigma}$ ;

- $\eta_i^1$  – размер процента комиссионных, которые брокер 1 получит от клиента  $i$  из региона 1 в результате фьючерсных сделок по продаже товаров,  $i \in \overline{1, m}$ ;
- $\eta_j^2$  – размер процента комиссионных, которые брокер 2 получит от клиента  $j$  из второго региона в результате фьючерсных сделок по продаже товаров,  $j \in \overline{1, n}$ ;
- $\lambda_i^1$  – размер процента комиссионных, которые брокер 1 получит от клиента  $i$  из региона 1 в результате фьючерсных сделок по покупке товаров,  $i \in \overline{1, m}$ ;
- $\lambda_j^2$  – размер процента комиссионных, которые брокер 2 получит от клиента  $j$  из региона 2 в результате фьючерсных сделок по покупке товаров,  $j \in \overline{1, n}$ ;
- $\xi^1$  – суммарный размер комиссионных, который брокер 1 хочет получить от продажи товаров из региона 1 в результате заключения фьючерсной сделки с брокером 2;
- $\xi^2$  – суммарный размер комиссионных, который брокер 2 хочет получить от продажи товаров из региона 2 в результате заключения фьючерсной сделки с брокером 1;
- $\mu^1$  – суммарный размер комиссионных, который брокер 1 хочет получить от покупки товаров из региона 2 в результате заключения 2 фьючерсной сделки с брокером;
- $\mu^2$  – суммарный размер комиссионных, который брокер 2 хочет получить от продажи товаров из региона 1 в результате заключения фьючерсной сделки с брокером 1;
- $p_i > 0$  – суммарный уровень прибыли, который хочет получить клиент  $i$  из региона 1,  $i \in \overline{1, m}$  в результате продажи своих и покупки нужных ему товаров;
- $q_j > 0$  – суммарный уровень прибыли, который хочет получить клиент  $j$  из региона 2,  $j \in \overline{1, n}$  в результате продажи своих и покупки нужных ему товаров.

Для того чтобы сделка могла состояться, необходимо, чтобы выполнялись следующие очевидные ограничения:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m x_{kj}^i &\geq \chi_{kj}, \quad k \in \overline{1, \theta}, \quad j \in \overline{1, n}, \\
\sum_{j=1}^n y_{li}^j &\geq \varepsilon_{li}, \quad l \in \overline{1, \sigma}, \quad i \in \overline{1, m}, \\
\sum_{j=1}^n x_{kj}^i &\leq \pi_k^i, \quad k \in \overline{1, \theta}, \quad i \in \overline{1, m}, \\
\sum_{i=1}^m y_{li}^j &\leq \gamma_l^j, \quad l \in \overline{1, \sigma}, \quad j \in \overline{1, n}, \\
\sum_{i=1}^m \eta_i^1 (\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\theta} a_{kj}^i x_{kj}^i) &\geq \xi^1, \\
\sum_{i=1}^m \lambda_i^1 (\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{\sigma} b_{li}^j y_{li}^j) &\geq \mu^1, \\
\sum_{j=1}^n \eta_j^2 (\sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{\sigma} d_{lj}^i y_{lj}^i) &\geq \xi^2, \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 (\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{\theta} c_{kj}^i x_{kj}^i) &\geq \mu^2.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Заметим, что, например, брокер 1 может купить фьючерсный контракт для клиента  $i$  (договорившись с брокером 2), вообще говоря, необязательно по той же цене, по которой брокер 2 предлагает этот контракт клиенту  $j$ . Тем не менее, это предположение не влияет на структуру модели, описывающей взаимодействие брокеров, анализ которой был предметом исследования, отраженного в настоящем отчете. В дальнейшем предполагается, что справедливы неравенства:

$$a_{kj}^i \leq c_{kj}^i, \quad d_{li}^j \leq b_{li}^j, \quad i \in \overline{1, m}, \quad j \in \overline{1, n}, \quad k \in \overline{1, \theta}, \quad l \in \overline{1, \sigma}.$$

Прибыль, полученную клиентом  $i$  из региона 1, благодаря совершению сделки, можно описать как линейную функцию векторных аргументов:

$$\langle a_i, x \rangle - \langle b_i, y \rangle, \quad i \in \overline{1, m};$$

аналогично, прибыль, полученную клиентом  $j$  из региона 2, благодаря совершению сделки, можно также описать линейной функцией векторных аргументов:

$$-\langle c_j, x \rangle + \langle d_j, y \rangle, \quad j \in \overline{1, n},$$

где

$$x = (x_{11}^1, \dots, x_{\theta n}^1, x_{11}^2, \dots, x_{\theta n}^2, \dots, x_{11}^i, \dots, x_{\theta n}^i, \dots, x_{11}^m, \dots, x_{\theta n}^m) \in R_+^{mn\theta},$$

$$y = (y_{11}^1, \dots, y_{\sigma m}^1, y_{12}^1, \dots, y_{\sigma m}^1, \dots, y_{1i}^1, \dots, y_{\sigma m}^1, \dots, y_{1m}^1, \dots, y_{\sigma m}^1) \in R_+^{mn\sigma}$$

и

$$a_i, c_j \in R_+^{mn\theta}, \quad b_i, d_j \in R_+^{mn\sigma}.$$

Здесь ненулевые компоненты вектора  $a_i$ , которые являются разностями  $a_{kj}^i(1 - \eta_i^1) - \omega_{kj}^i$ ,  $k \in \overline{1, \theta}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , занимают места с номерами  $\overline{(i - 1)\theta n + 1, i\theta n}$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , в то время как ненулевые компоненты вектора  $b_i$ , которые являются числами  $b_{li}^j(1 + \lambda_i^1)$ ,  $l \in \overline{1, \sigma}$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , занимают позиции с номерами  $\sigma m(j - 1) + i, \sigma m(j - 1) + m + i, \dots, \sigma m(j - 1) + (\sigma - 1)m + i$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $i \in \overline{1, m}$ . Аналогично, нулевые компоненты вектора  $c_j$ , которые являются числами  $c_{kj}^i(1 + \lambda_i^2)$ ,  $k \in \overline{1, \theta}$ ,  $j \in \overline{1, n}$  занимают позиции с номерами  $\theta n(i - 1) + j, \theta n(i - 1) + n + j, \dots, \theta n(i - 1) + (\theta - 1)n + j$ ,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , в то время как ненулевые компоненты вектора  $d_j$ , которые являются разностями  $d_{li}^j(1 - \eta_j^2) - \nabla_{li}^j$ ,  $l \in \overline{1, \sigma}$ ,  $i \in \overline{1, m}$  занимают позиции с номерами  $\overline{\sigma m(j - 1) + 1, \sigma mj}$ ,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ .

Для того чтобы сделка состоялась, брокерам следует, прежде всего, попытаться выяснить, может ли каждый из клиентов получить желаемый уровень прибыли:  $p_i > 0, i \in \overline{1, m}$  для клиентов из региона 1, и  $q_j > 0, j \in \overline{1, n}$  для клиентов из региона 2. С этой целью брокеры могут решить следующую задачу линейного программирования [20,29]:

$$\begin{aligned} \langle a_i, x \rangle - \langle b_i, y \rangle + \langle e_i, u \rangle &\geq p_i, \quad i \in \overline{1, m}, \\ -\langle c_j, x \rangle + \langle d_j, y \rangle + \langle \delta_j, v \rangle &\geq q_j, \quad j \in \overline{1, n}, \\ \langle \tau, u \rangle + \langle \rho, v \rangle &\rightarrow \min, \\ x \in M, \quad y \in S \end{aligned} \tag{2.2}$$

где  $e_i \in R_+^m$  и  $\delta_j \in R_+^n$  – орты в пространствах  $R^m$  и  $R^n$ , соответственно,  $u \in R_+^m$ ,  $v \in R_+^n$ ,  $\tau = (1, 1, \dots, 1) \in R_+^m$ ,  $\rho = (1, 1, \dots, 1) \in R_+^n$  и  $M \in R_+^{mn\theta}$ ,  $S \in R_+^{m\sigma}$  – выпуклые многогранники, определяемые системой линейных ограничений (2.1).

Если значение задачи (2.2) равно нулю, то все сформированные брокерами фьючерсные контракты обеспечивают желаемый уровень прибыли для каждого из клиентов из региона 1 и региона 2. В противном случае, если значение задачи (2.2) отлично от нуля (больше нуля), брокеры пытаются найти такие наборы фьючерсных контрактов, которые смогут обеспечить каждому из клиентов уровень прибыли наи-

более близкий к желаемому этими клиентами уровню прибыли. С этой целью брокеры могут решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} \max_{i \in \overline{1, m}} \frac{\langle e_i, u \rangle}{p_i} &\rightarrow \min_{(x, y, u, v) \in M \times S \times R_+^m \times R_+^{n'}} \\ \max_{j \in \overline{1, n}} \frac{\langle \delta_j, v \rangle}{q_j} &\rightarrow \min_{(x, y, u, v) \in M \times S \times R_+^m \times R_+^{n'}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

которая может быть переписана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle a_i, x \rangle - \langle b_i, y \rangle + \langle e_i, u \rangle &\geq p_i, \quad i \in \overline{1, m}, \\ -\langle c_j, x \rangle + \langle d_j, y \rangle + \langle \delta_j, v \rangle &\geq q_j, \quad j \in \overline{1, n}, \\ x &\in M, \quad y \in S, \\ \langle e_i, u \rangle &\leq p_i z_1, \quad i \in \overline{1, m}, \\ \langle \delta_j, v \rangle &\leq q_j z_2, \quad j \in \overline{1, n}, \\ z_1, z_2 &\in R_+^1, \quad u \in R_+^m, \quad v \in R_+^n, \\ z_1 &\rightarrow \min, \\ z_2 &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{x} = (x, u, z_1) &\in R_+^{mn\theta+m+1}, \quad \tilde{y} = (y, v, z_2) \in R_+^{mn\sigma+n+1}, \\ \pi = (0^x, 0^u, 1) &\in R_+^{mn\theta+m+1}, \quad \omega = (0^y, 0^v, 1) \in R_+^{mn\sigma+n+1}, \end{aligned}$$

где  $0^x, 0^u, 0^y, 0^v$  – нулевые векторы в пространствах  $R_+^{mn\theta}, R_+^m, R_+^{mn\sigma}, R_+^n$  соответственно. Тогда задачу (2.4) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \langle \pi, \tilde{x} \rangle &\rightarrow \min_{\tilde{x}: (\tilde{x}, \tilde{y}) \in H}, \\ \langle \omega, \tilde{y} \rangle &\rightarrow \min_{\tilde{y}: (\tilde{x}, \tilde{y}) \in H}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $H = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq 0: \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{y} \geq \tilde{h}\}$ , и  $\tilde{A}$  – матрица, составленная из компонент векторов  $a_i$  и  $c_j$  и из единиц и нулей,  $\tilde{B}$  – матрица, составленная из компонент векторов  $b_i, d_j$ , из единиц и нулей,  $\tilde{h}$  – вектор, компонентами которого являются числа  $p_i$  и  $q_j$ , и нули.



Задача (2.5) является некооперативной игрой двух лиц на множестве связанных стратегий  $H$ ; естественно попытаться найти равновесие в этой игре, т.е. пару векторов  $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ , для которых справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \langle \pi, \tilde{x}^* \rangle &\leq \langle \pi, \tilde{x} \rangle, \quad \forall (\tilde{x}, \tilde{y}^*) \in H, \\ \langle \omega, \tilde{y}^* \rangle &\leq \langle \omega, \tilde{y} \rangle, \quad \forall (\tilde{x}^*, \tilde{y}) \in H. \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательную некооперативную игру двух лиц на множестве связанных стратегий  $H$  с платежной функцией вида:

$$\langle \pi, \tilde{x} \rangle - \langle \omega, \tilde{y} \rangle. \quad (2.6)$$

Предложение 2.1 [20,29]. Пара векторов  $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$  образует равновесную точку в игре (2.5) тогда и только тогда, когда эта же пара векторов является точкой равновесия в игре (2.6).

Таким образом, решение задачи (2.4) сводится к нахождению точек равновесия в задаче (2.6), которая является игрой двух лиц на множестве связанных стратегий с функцией выигрыша, представляющей собой сумму двух линейных функций векторных аргументов. Метод нахождения равновесий в играх двух лиц на множестве связанных стратегий с платежной функцией более общего вида

$$\langle p, x \rangle + \langle x, Dy \rangle + \langle q, y \rangle, \quad (2.7)$$

где  $(x, y) \in H \subset R^{m+n}$ ,  $p \in R^m$ ,  $q \in R^n$ ,  $D - (m \times n)$ -матрица и  $H$  – выпуклое многогранное множество (вообще говоря, ограниченное), предложен в [25]. Стратегия брокера в случаях, когда в игре (2.6) не существует точек равновесия, рассмотрены в [29].

Задача 2.1.2. Инвестор или группа инвесторов рассматривает вопрос о целесообразности инвестиций в некоторое предприятие с целью его перепрофилирования и последующего позиционирования на нескольких рынках, представляющих интерес для инвестора или для группы инвесторов. С этой целью заинтересованные стороны пытаются оценить: а) в каких объемах и в какой номенклатуре перепрофилирован-

ное предприятие должно производить продукцию с тем, чтобы быть конкурентоспособным на тех рынках, на которых планируется позиционировать это предприятие; б) каковы должны быть объемы потребляемых ресурсов и производственных мощностей перепрофилированного предприятия, которые позволили бы производить продукцию соответствующего качества в конкурентоспособных объемах, упомянутых в а).

Как известно [26], математические модели многих предприятий реального сектора экономики могут быть описаны в виде систем линейных неравенств вида

$$\begin{aligned} A_1 x &\geq b_1, & x &\in R_+^n, \\ A_2 x &\leq b_2, \\ A_3 x &\leq b_3, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где второе и третье из трех матричных неравенств задают технологические ограничения и ограничения на объемы потребляемых ресурсов, соответственно, так, что множество допустимых решений этих двух систем неравенств определяет некоторый выпуклый многогранник  $M$  в пространстве  $R_+^n$ . Образом этого выпуклого многогранника  $M$  при линейном операторе, заданном матрицей  $A_1$ , также является некоторый выпуклый многогранник  $A_1(M)$ .

Конкурентоспособность перепрофилированного предприятия на рынках может быть оценена заинтересованными инвесторами лишь в том случае, когда они имеют представление о производственных возможностях потенциальных конкурентов, работающих на этих рынках. Однако такая информация может быть известна инвесторам лишь приближенно, например, в форме некоторого выпуклого многогранника или объединения конечного числа выпуклых многогранников, который (или каждый из которых) обычно строится экспертом (или группой экспертов) [19,29,30]. При этом необходимость рассмотрения объединения выпуклых многогранников возникает в случае, если конкурентоспособность перепрофилированного предприятия оценивается на нескольких рынках, на которых работают его потенциальные конкуренты.

Конкурентоспособность перепрофилированного предприятия можно понимать в смысле способности предоставления этим предприятием товаров и услуг в объемах, не ниже тех, которые могут предоставляться его конкурентами на рынке. Ясно, что целесообразно перепрофилировать это предприятие так, чтобы оно могло выпускать продукцию в объемах, определяемых векторами, лежащими на сфере  $V_r(p^*)$ , где  $p^*$  – вектор, часть компонент которого соответствует объемам выпускаемых до перепрофилирования продуктов. Эта сфера описана вокруг выпуклых многогранников  $A_1^s(M^s)$ ,  $s \in \overline{1, S}$ , где  $S$  – число конкурентов,  $A_1^s(M^s)$  – многогранники производственных возможностей конкурента  $s$ ,  $s \in \overline{1, S}$ , и  $M^s$  описываются выпуклыми многогранниками, определяемыми второй и третьей системой неравенств в (2.8), и ее радиус равен максимальному расстоянию от точки  $p^*$  до точек множества  $\bigcup_{s=1}^S A_1^s(M^s)$  в соответствующем конечномерном пространстве.

Пусть  $q^* = p^* + r$  – вектор, определяет набор объемов выпусков продуктов перепрофилированного предприятия, который обеспечивает конкурентоспособность этого предприятия на интересующих инвестора рынках. Тогда производственные возможности перепрофилированного предприятия могут быть описаны системой неравенств вида [19,26,29]

$$\begin{aligned} B_1 y &\geq q^*, \quad y \in R_+^k, \\ B_2 x &\leq b_2, \\ B_3 x &\leq b_3, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где в структуре матриц  $B_2$  и  $B_3$  учитывается то, что перепрофилирование предприятия потребует капитальных затрат, связанных с приобретением нового оборудования и технологий, строительством новых помещений (цехов), увеличением расходов на содержание персонала, оплатой коммунальных услуг, увеличением объемов поставок сырья и т.д. При этом соответствующие соотношения балансового типа строятся так же, как и при составлении математической модели действующего предприятия [26] с учетом оценок экспертов для всех упомянутых выше факторов.

Пусть система линейных неравенств  $B_1 y \geq q^*$ ,  $y \in R_+^k$  совместна, что легко устанавливается путем решения некоторой вспомогательной задачи линейного программирования [26]. Для того чтобы перепрофилированное предприятие могло выпускать продукцию в объемах не ниже тех, которые определяются вектором  $q^*$ , необходимо обеспечить совместность системы линейных неравенств вида (2.9), для чего возможно, потребуется изменить (увеличить) по крайней мере некоторые компоненты векторов  $b_2$  и  $b_3$ , предложенных экспертами на стадии формирования модели вида (2.9), и отражающих некоторые базовые объемы инвестиций. С этой целью следует решить следующую задачу математического программирования

$$\begin{aligned}
& B_1 y \geq q^*, \quad y \in R_+^k, \\
& B_2 y \leq b_2 + u, \quad u \in R_+^{m_2}, \\
& B_3 y \leq b_3 + v, \quad v \in R_+^{m_3}, \\
& \max_{i \in \overline{1, m_2}} \frac{\langle e_i, u \rangle}{\langle e_i, b_2 \rangle} \rightarrow \min, \\
& \max_{j \in \overline{1, m_3}} \frac{\langle e_j, v \rangle}{\langle e_j, b_3 \rangle} \rightarrow \min,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где  $B_2 - (m_2 \times k)$  и  $B_3 - (m_3 \times k)$  матрицы с действительными элементами, а  $e_i, e_j$  – орты в пространствах  $R^{m_2}$  и  $R^{m_3}$ , соответственно. Эта задача может быть переписана в форме

$$\begin{aligned}
& B_1 y \geq q^*, \quad y \in R_+^k, \\
& -B_2 y \geq -b_2 - u, \quad u \in R_+^{m_2}, \\
& -B_3 y \leq b_3 - v, \quad v \in R_+^{m_3}, \\
& E_{m_2} u \leq b_2 z_1, \\
& E_{m_3} v \leq b_3 z_2, \\
& z_1 \rightarrow \min, \\
& z_2 \rightarrow \min,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

которая совершенно идентична по структуре задаче (2.4). Пусть  $\tilde{y} = (y, u, z_1) \in R_+^{k+m_2+1}$ ,  $\tilde{v} = (y, v, z_2) \in R_+^{k+m_3+1}$ ,  $\theta = (0^y, 0^u, 1) \in R^{k+m_2+1}$ ,  $\rho = (0^y, 0^v, 1) \in R^{k+m_3+1}$ , где  $0^y, 0^u$  и  $0^v$  – нулевые векторы в пространствах  $R_+^k$ ,  $R_+^{m_2}$  и  $R_+^{m_3}$ , соответственно. Тогда задача (2.11) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \langle \theta, \tilde{u} \rangle &\rightarrow \min_{\tilde{u}: (y, \tilde{u}, \tilde{v}) \in \Omega'} \\ \langle \rho, \tilde{v} \rangle &\rightarrow \min_{\tilde{v}: (y, \tilde{u}, \tilde{v}) \in \Omega'} \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\Omega = \{(y, \tilde{u}, \tilde{v}) \geq 0: \tilde{T}y + \tilde{Q}\tilde{u} + \tilde{H}\tilde{v} \geq \tilde{q}\}$ ;  $\tilde{T}, \tilde{Q}, \tilde{H}$  – матрицы и  $\tilde{q}$  – вектор, составленные из элементов матриц  $B_1, B_2, B_3, E_{m_2}, E_{m_3}$ , векторов  $q^*, b_2, b_3$ , нулей и единиц;  $0^x, 0^u, 0^y, 0^v$  – нулевые векторы в пространствах  $R_+^{mn\theta}, R_+^m, R_+^{mn\sigma}, R_+^n$  соответственно.

Также как задача (2.5), задача (2.12) сводится к отысканию точек равновесия в некооперативной игре с платежной функцией  $\langle \theta, \tilde{u} \rangle - \langle \rho, \tilde{v} \rangle$  на множестве связанных стратегий игроков  $\Omega$ , которая, как и задача (2.6), является частным случаем игры (2.7).

Задача 2.1.3. Государство хотело бы осуществить  $n$  проектов в рамках партнерства (ГЧП) с частным бизнесом (называемым далее строительной компанией) и частным капиталом (называемым далее инвестором (финансистом)).

Пусть [15,30]:

$x_i$  – объем финансирования, предлагаемый государством для финансирования проекта  $i, i \in \overline{1, n}$ ;

$p_i$  – требуемый (по оценке государства) объем финансирования по проекту  $i, i \in \overline{1, n}$ ;

$q_i$  – доход, генерируемый проектом  $i$  в течение какого-либо периода времени после окончания проекта, в течение которого государство собирается возместить убытки и разделить прибыль с привлеченными партнерами в рамках ГЧП;

$z_i$  – объем финансирования, требуемый строительной компании для выполнения проекта  $i \in \overline{1, n}$ ;

$u_i$  – объем финансирования, предоставляемый инвестором (финансистом) для выполнения проекта  $i, i \in \overline{1, n}$ ;

$\theta_i$  – коэффициент, «регулирующий» долю дохода финансиста по проекту  $i$ , определяемый государством  $i, i \in \overline{1, n}$ ;

$\gamma_i$  – коэффициент, «регулирующий» долю дохода проекта по проекту  $i$ , определяемый государством  $i, i \in \overline{1, n}$ ;

$b$  – суммарный объем средств, который финансист может привлечь для выполнения всех проектов;

$d$  – суммарный объем средств, которое государство может выделить для финансирования всех проектов;

$c_i$  – минимальный объем средств, требуемых строительной компании для выполнения работ по проекту  $i, i \in \overline{1, n}$ .

Доходы каждого из участников ГЧП описываются следующими функциями:

1. Доход государства:

$$\sum_{i=1}^n \{q_i(1 - \beta_i u_i - \gamma_i + \Delta_i z_i) - x_i\}, \text{ где } \beta_i = \frac{\xi_i}{p_i} \text{ и } \Delta_i = \frac{\gamma_i}{p_i}, i \in \overline{1, n}.$$

2. Доход финансиста:

$$\sum_{i=1}^n \{q_i \beta_i u_i - u_i\}, i \in \overline{1, n}.$$

3. Доход строителя:

$$\sum_{i=1}^n \{z_i + \gamma_i q_i - q_i \Delta_i z_i\}, i \in \overline{1, n}.$$

Далее предполагается, что:

а) доля дохода государства  $v_i$ , получаемая строительной компанией, зависит от объема требуемых строителем средств  $z_i, i \in \overline{1, n}$  следующим образом:

$$v_i = \frac{p_i - z_i}{p_i} \gamma_i = \gamma_i - \Delta_i z_i;$$

б) ресурсные ограничения государства и финансиста описываются следующими соотношениями:

$$\sum_{i=1}^n u_i \leq b, \quad \sum_{i=1}^n x_i \leq d;$$

в) требования строительной компании описываются неравенством

$$z_i \geq c_i \quad i \in \overline{1, n};$$

г) все средства, выделяемые государством и финансистом, идут на покрытия расходов строительной компании, что обеспечивается выполнением следующего соотношения:

$$\sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n z_i = 0.$$

Математически взаимодействие государства, финансиста и строителя может быть описано следующей игрой тех лиц [15,30]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n q_i - \sum_{i=1}^n q_i \beta_i u_i - \sum_{i=1}^n q_i \gamma_i + \sum_{i=1}^n q_i \Delta_i z_i - \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \max_{(x_1, \dots, x_n)}, \\ \sum_{i=1}^n q_i \beta_i u_i - \sum_{i=1}^n u_i \rightarrow \max_{(u_1, \dots, u_n)}, \\ \sum_{i=1}^n z_i + \sum_{i=1}^n q_i \gamma_i - \sum_{i=1}^n q_i \Delta_i z_i \rightarrow \max_{(z_1, \dots, z_n)}, \\ z_i \geq c_i, i \in \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n u_i \leq b, \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq d, \\ \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n z_i = 0. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Пусть:

$$q_i \beta_i = \theta_i, q_i \Delta_i = \nabla_i, q_i \gamma_i = \delta_i, \sum_{i=1}^n q_i - \sum_{i=1}^n q_i \gamma_i = a, \sum_{i=1}^n q_i \gamma_i = g$$

и пусть  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ ;  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ ;  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ ;  $\nabla = (\nabla_1, \dots, \nabla_n)$ ;  $c = (c_1, \dots, c_n)$ ;  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ;  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ;  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $(\theta, -\nabla) = \omega$ ;  $(u, z) = w$ ;  $\theta - \varepsilon = \pi$ ;  $\varepsilon - \nabla = \tau$ .

Рассмотрим игру двух лиц

$$\begin{array}{l} \langle \omega, w \rangle + \langle \varepsilon, x \rangle, \\ T = \{(w, x): Aw + Bx \geq h\}, \end{array} \quad (2.14)$$

где  $A$  и  $B$  – матрицы и  $h$  – вектор соответствующих размеров, элементы которых образованы соответствующими коэффициентами в соотношениях (2.13).

Предложение 2.2 [15,29,30]. Точка  $(u^*, z^*, x^*)$  является точкой равновесия в игре (2.13) тогда и только тогда, когда точка  $(w^*, x^*)$  является точкой равновесия в игре (2.14).

Таким образом, исследование задач 2.1.3 сводится к отысканию равновесий в игре вида (2.7), с которой связан также анализ задач 2.1.1 и 2.1.2, рассмотренных выше.

## 2.2 Математические модели для определения начальных цен в конкурсных процедурах

Задача 2.2.1. Одной из сложнейших эксплуатационных проблем ОАО Российские железные дороги (РЖД) является чрезмерная загруженность некоторых участков железнодорожной сети, на которых спрос на грузовые перевозки в определенное время суток превышает их пропускную способность (при существующих тарифах). Сеть железных дорог России нуждается в более равномерном распределении потоков вагонов в пиковые временные промежутки, по крайней мере, на отдельных ее участках. Ясно, что если увеличить цены на перевозку грузов по какому-либо загруженному сегменту сети, владельцы некоторых транспортных компаний, возможно, не смогут себе позволить платить такую сумму для проезда по этому сегменту, по крайней мере, в наиболее напряженное время пиковых нагрузок на нем и возможно будут подавать в ОАО РЖД заявки на проезд в те периоды времени, в которые этот сегмент дороги менее загружен. По существу, в попытке отыскания более равномерного распределения потока вагонов через наиболее загруженные участки железнодорожной сети ОАО РЖД сталкивается с необходимостью согласования интересов своих клиентов и собственных интересов. Известно, что проведение аукционов представляет собой один из способов подобного согласования. В рамках таких аукционов операторы поездов (участники аукциона) могут предлагать платить какую-то сумму за право поехать по определенному загруженному участку в напряженное время суток, и это право может рассматриваться как аукционный лот. При этом ОАО РЖД (аукционер), выставяющее это право на торги, будет стремиться провести аукцион так, чтобы получить наибольшую прибыль.

Разумеется, если ОАО РЖД может так распределить все заявки при существующих тарифах, что спрос на использование рассматриваемого сегмента дороги каждого из заявителей окажется удовлетворенным, то не возникнет никакой необ-



ходимости в проведении аукциона. По этой причине, интерес представляет рассмотрение случая, когда такое распределение невозможно.

Может оказаться, что на каком-либо конкретном участке дороги имеется более одного сегмента, на каждом из которых спрос на проезд (по крайней мере, в определенное время суток) превышает его пропускную способность. Поэтому, вообще говоря, следует рассматривать всю совокупность сегментов дороги (или участка дороги), на которых спрос на проезд превышает их пропускную способность. Хотя представляется, что именно такая задача согласования интересов может наиболее эффективно решаться в рамках проведения комбинаторных аукционов, в настоящем отчете рассматривается лишь простейший случай одного одноколейного сегмента рельсовой дороги. Именно для этой задачи предлагается подход к выбору начальных ставок в комбинаторном аукционе, в котором предметом аукциона являются несколько временных лотов на право проезда по этому сегменту, выставляемых на торги. Ожидается, что предложенный подход удастся распространить и на указанный выше общий случай.

Рассмотрим одноколейный сегмент рельсовой дороги, соединяющий две узловые станции, к каждой из которых подходят  $J$  путей. Будем говорить, что некоторый поезд является поездом типа  $j$ , если он ожидает своего проезда по сегменту на подъездном пути  $j \in J$ . Пусть  $\omega$  общее количество поездов, ожидающих проезда по сегменту, и пусть  $s \in \omega$  номер конкретного поезда. Прежде всего, ОАО РЖД необходимо выяснить, можно ли в принципе каким-либо образом обеспечить проезд по рассматриваемому сегменту пути всем поездам, заявленным на проезд по этому сегменту в течение какого-либо промежутка времени, например, суток? Здесь необходимо иметь в виду, что наряду с заявками на проезд по сегменту пути в течение суток, могут существовать некоторые обязательные перевозки, например, пассажирские, расписание движения которых не подлежит изменениям.

Представляется целесообразным разделить рассматриваемый период времени на несколько частей, например, на части одинаковой длины по шесть часов каждый: 0ч. – 5ч. 59 мин., 6ч. – 11ч. 59 мин., 12ч. – 17ч. 59 мин., 18ч. – 23ч. 59 мин. Пусть общее число промежутков равно  $K$  и пусть  $\alpha_k$  – количество свободного времени в

промежутке  $k \in K$ . Пусть далее булева переменная  $x$  определена для каждого поезда  $s$ , для каждого варианта ожидания поезда на подъездном пути  $j$  и для каждого промежутка времени  $k$  и равна единице, если поезд  $s$ , который ожидает поезда на подъездном пути  $j$ , назначается на прохождение сегмента в промежутке  $k$  и равна нулю в противном случае. Пусть теперь  $q_{sjk}$  доход, который ОАО РЖД получит, если поезд  $s$ , ожидающий поезда по сегменту на подъездном пути  $j$ , назначается на прохождение сегмента в промежутке  $k$  и пусть  $h_{sj}$  время, требуемое для поезда по сегменту пути.

Ясно, что значение  $q_{sjk}$  можно рассматривать как цену (тариф), которую готов заплатить оператор поезда  $s$ , ожидающего поезда по сегменту и находящегося на подъездном пути  $j$ , за проезд в  $k$ -й временной интервал, и которую можно рассматривать как начальную ставку в конкурсной процедуре (например, в аукционе) за получение права поезда по сегменту пути. Ясно также, что один и тот же оператор может подавать заявку на прохождение нескольких поездов в течение одного и того же промежутка времени.

Поскольку каждый поезд, ожидающий поезда по сегменту, может быть назначен для поезда только в один из  $K$  временных интервалов, отыскание оптимального распределения поездов для поезда по сегменту (в предположении о том, что такое распределение возможно в принципе) может быть найдено из решения следующей оптимизационной задачи [17]

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\omega} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K q_{sjk} x_{sjk} &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^{\omega} h_{sj} x_{sjk} &\leq \alpha_k, \quad k \in \overline{1, K}, \\ \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K x_{sjk} &\leq 1, \quad s \in \overline{1, \omega}, \quad x \in \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Задача (2.15) составления расписания поезда поездов на заданном сегменте пути по ценам, предлагаемым операторами поездов, представляет собой модифицированную задачу о рюкзаке [27], в рамках которой «упаковывается» проезд поездов, каждый из которых имеет конкретную временную продолжительность и стоимость.

Сформулированная задача позволяет ОАО РЖД определять так называемые резервные ставки (цены) за проезд по сегменту в каждый из выделенных (например,

четырёх) промежутков времени, объявить их до начала конкурсной процедуры и не принимать ставки, которые ниже этих резервных ставок. Если же распределение поездов на проезд по сегменту на выделенных временных промежутках, получаемое из решения этой задачи, не устраивает какого-либо из операторов поездов, ставки за проезд поездов по конкретным промежуткам могут повышаться, и, в соответствии с правилами конкурсной процедуры, задача (2.15) может решаться вновь.

Задача 2.2.2. Проблема, аналогичная рассмотренной в задаче 2.2.1, существует в аэропортах, которые могут организовывать конкурсные процедуры за право использования взлетно-посадочных полос в определенные временные промежутки, называемые слотами. Здесь каждая авиакомпания может быть заинтересована в приобретении права на использование нескольких слотов как в одном и том же аэропорту, так и в разных аэропортах. Действительно, авиакомпания, эксплуатирующая воздушное судно, взлетевшее в одном из аэропортов, и направляющееся в другой аэропорт, должна обеспечить как взлет, так и посадку этого воздушного судна в определенное (расчетное) время.

Пусть  $s \in \overline{1, S}$  номер воздушного судна,  $j \in \overline{1, J}$  номер авиакомпании и  $k \in \overline{1, K}$  номер слота и пусть общее число слотов равно  $K$ , а  $\alpha_k$  длина слота (т.е. временного интервала, определяющего этот слот)  $k \in K$ . Пусть далее булева переменная  $x$  определена для каждого воздушного судна  $s$ , для каждой авиакомпании  $j$  и для каждого слота  $k$  и равна единице, если воздушное судно  $s$  авиакомпании  $j$ , назначается на слот  $k$  и равна нулю в противном случае и пусть  $h_{sj}$  время, требуемое для воздушного судна  $s$  авиакомпании  $j$  на взлетно-посадочной полосе.

Поскольку на каждый слот может быть назначено только одно воздушное судно, отыскание распределения слотов, которое обеспечивает обслуживание максимального числа воздушных судов, может быть найдено из решения следующей оптимизационной задачи [18]

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S h_{sj} x_{sjk} \leq \alpha_k \\
& \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K x_{sjk} \leq 1, \\
& \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K x_{sjk} \rightarrow \max, \\
& x_{sjk} \in \{0,1\}, k \in \overline{1, K}, s \in \overline{1, S}, j \in \overline{1, J}.
\end{aligned}$$

Пусть теперь  $q_{sjk}$  доход, который аэропорт получит, если воздушное судно  $s$  авиакомпании  $j$ , назначается на слот  $k$ .

Как и в случае с железными дорогами, значение  $q_{sjk}$  представляет собой цену (тариф), которую готова заплатить авиакомпания  $j$  за использование слота  $k$  воздушным судном  $s$  и которую можно рассматривать как начальную ставку в конкурсной процедуре (например, в аукционе) за получение права на использование слота  $k$ . Задача определения начальных цен (ставок) за использование слотов может быть сформулирована в виде следующей задачи линейного программирования [18]

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K q_{sjk} x_{sjk} \geq \theta, \\
& \gamma_{sjk} \leq q_{sjk} \leq \pi_{sjk} \\
& \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K q_{sjk} x_{sjk} \rightarrow \max, \\
& x \in \{0,1\}, k \in \overline{1, K}, s \in \overline{1, S}, j \in \overline{1, J},
\end{aligned}$$

где  $x_{sjk}$  значения переменных, найденные из решения предыдущей задачи,  $\theta$  минимальный приемлемый объем дохода аэропорта, а переменными в задаче являются  $q_{sjk}$ ,  $k \in \overline{1, K}$ ,  $s \in \overline{1, S}$ ,  $j \in \overline{1, J}$ .

Задача 2.2.3. Государство намеревается осуществить ряд проектов в рамках бюджета, выделенного на государственные закупки. Каждый проект включает в се-

бя две составляющие: а) собственно выполнение некоторого объема работ по созданию некоторого объекта; б) эксплуатацию этого проекта.

Для выполнения каждого из этих проектов государство ищет исполнителей, способных и желающих выполнить каждую из составляющих проекта. Такой поиск может осуществляться, например, в рамках конкурса (в частности, одношагового закрытого конкурса), в рамках аукциона (какого-либо типа) или в рамках какой-либо другой процедуры. Возможно также, что для каждой части каждого такого проекта имеется единственный исполнитель, обладающий квалификацией и опытом, необходимыми для выполнения соответствующих работ.

Как в первом, так и во втором случае государство пытается организовать выполнение всех проектов на наиболее выгодных для себя условиях. В случае проведения конкурсных процедур при размещении заказов на выполнение проектов, государство заинтересовано в определении стартовой (начальной) цены за выполнение каждой из составляющих каждого из проектов. В случае переговоров с единственным потенциальным исполнителем каждой составляющей каждого из проектов, государство заинтересовано в отыскании приемлемых для всех сторон условий выполнения работ, включая цены на эти работы, которые позволили бы государству минимизировать свои суммарные расходы на выполнение всех проектов. При этом государство может исходить из некоторых сведений о потенциальных исполнителях работ, характеризующих их «производственные возможности».

Если первая составляющая (создание объекта) требует от государства финансовых затрат, то вторая составляющая (эксплуатация созданного объекта) может приносить государству некоторый доход, например, в форме налогов, отчисляемых исполнителем этой составляющей, в форме отчислений за доленое участие в проекте и т.д. Существуют, однако, проекты, являющиеся для государства полностью затратными и не генерирующими каких-либо средств в процессе эксплуатации объекта, созданного в рамках проекта; примером такого рода проектов могут служить муниципальные медицинские учреждения, зоны отдыха, школы, профессиональные учреждения и т.д.

Пусть [21,31]:

$n$  – число проектов, которые государство намерено осуществить в течение некоторого периода времени  $T$ ;

$y_i$  – объем работ по созданию проекта  $i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ;

$x_i$  – стоимость выполнения одной единицы объема работ по проекту  $i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ;

$u_i$  – стоимость эксплуатации единицы объема функционирующего проекта  $i$  после завершения его строительства,  $i \in \overline{1, n}$ ;

$k$  – доля затрат государства на эксплуатацию каждого из построенных объектов, предоставляемых государством исполнителю первой составляющей проекта;

$b_i$  – потребность государства в объектах, создаваемых в рамках проекта  $i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ;

$\omega_i$  – затраты государства, связанные с невыполнением проекта  $i$  в объеме  $b_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ;

$\gamma_i$  – объем затрат, связанных с эксплуатацией объекта, созданного в результате выполнения проекта  $i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ .

Пусть далее  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$ ,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  векторы в  $R^n$  и пусть  $y \in \Omega$ ,  $x \in M$ ,  $u \in H$ , где  $\Omega$ ,  $M$ ,  $H$  – выпуклые многогранники в  $R^n$ , описываемые совместными системами линейных неравенств.

Взаимодействие государства с потенциальными исполнителями проектов  $i$ ,  $i \in \overline{1, n}$  можно представить в виде игры  $2n + 1$  участников, в которой государство исходит из имеющихся у него представлений (предположений) о виде выпуклых многогранников  $M$  и  $H$ . При определении начальной цены в конкурсной процедуре государство может оценить те минимальные затраты, которые оно могло бы понести, если бы оно должно было достичь договоренности с единственным исполнителем составляющей а) и с единственным исполнителем составляющей б) всех проектов, считая, что множества допустимых стратегий этих исполнителей описываются выпуклыми многогранниками  $M$  и  $H$ , соответствующими представлениям государства о производственных возможностях исполнителей.

В простейшем случае, являющимся предметом рассмотрения в настоящей работе, государство рассматривает взаимодействие с (или реально может иметь дело с) единственным исполнителем первой составляющей каждого из  $n$  проектов (например, специализированной строительной организацией) и с единственным исполнителем второй составляющей каждого из проектов (например, управляющей компанией).

В этом случае государство рассматривает игру трех лиц, в которой игроки имеют следующие платежные функции:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, u) &= \langle y, u \rangle + \langle y, x \rangle + \langle \omega, b - y \rangle \rightarrow \min_{y \in \Omega}, \\ f_2(x, y, u) &= \langle y, x \rangle + k \langle y, u \rangle - \langle \gamma, y \rangle \rightarrow \max_{x \in M}, \\ f_3(x, y, u) &= (1 - k) \langle y, u \rangle \rightarrow \max_{u \in H}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $f_1(x, y, u)$ ,  $f_2(x, y, u)$ ,  $f_3(x, y, u)$  – платежная функция государства, исполнителя первой составляющей всех проектов, исполнителя второй составляющей всех проектов соответственно. Государство стремится выяснить: существуют ли равновесные состояния в этой игре, и как такие состояния (если они существуют) могут быть найдены? В частности, если  $(y^*, x^*, u^*)$  – точка равновесия, то  $x_i^*$ ,  $y_i^*$  и  $u_i^*$ ,  $i \in \overline{1, n}$  могут рассматриваться, как начальные цены в упомянутых выше конкурсных процедурах.

Предложение 2.3 [21,31]. Точка  $(y^*, x^*, u^*)$  является равновесием по Нэшу в игре трех лиц (2.16) тогда и только тогда, когда точка  $(y^*, (u^*, x^*))$  является точкой равновесия (седловой) точкой во вспомогательной антагонистической игре двух лиц  $A$  и  $B$  с платежной функцией:

$$\langle y, u \rangle + \langle y, x \rangle - \langle \omega, y \rangle \quad (2.17)$$

на множествах допустимых значений игроков  $\Omega$  (игрок  $A$ ) и  $M \times H$  (игрок  $B$ ).

Таким образом, анализ существования равновесия в исходной игре трех лиц (2.16), а также отыскание точек равновесия в разрешимых играх вида (2.16) сводит-

ся соответственно к анализу существования равновесия в игре (2.17) и к отысканию точек равновесия в разрешимых играх вида (2.17).

Игра (2.17) является частным случаем антагонистической игры двух лиц с платежной функцией

$$\langle p, \tilde{x} \rangle + \langle \tilde{x}, D\tilde{y} \rangle + \langle q, \tilde{y} \rangle \quad (2.18)$$

на выпуклых многогранниках  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{\Omega}$ , где  $\tilde{M}$  и  $\tilde{\Omega}$  могут быть представлены в виде  $\tilde{M} = \{ \tilde{x} \in R_+^m : A\tilde{x} \geq b \}$ ,  $\tilde{\Omega} = \{ \tilde{y} \in R_+^n : B\tilde{y} \geq d \}$ , где  $A$  и  $B$  матрицы и  $p$ ,  $q$ ,  $b$ ,  $d$  векторы соответствующих размеров. Метод отыскания равновесий в (разрешимых) играх типа (2.18) предложен в [24].

### 2.3 Направления дальнейших исследований

Одна из целей работы 2012 г. в области исследование организационных моделей и механизмов, состояла в выявлении класса задач организационного управления, математическое моделирование которых целесообразно осуществлять в форме игровых задач статического типа (игр трех лиц на полиэдральных множествах допустимых стратегий игроков) и динамического типа (конкурсных процедур). Однако практическое использование указанных моделей возможно лишь, если равновесные стратегии в рассматриваемых играх могут быть найдены известными или новыми численными методами за приемлемое время.

В играх двух лиц на полиэдральных множествах связанных стратегий вида (2.7), к которой сводятся рассмотренные с настоящим отчете задачи 2.1.1-2.1.3, точки равновесия находятся из решения системы нелинейных неравенств, состоящей из системы линейных неравенств и двух равенств с квадратичными функциями, для которой в [25] предлагалось использовать общий метод решения задач с квадратичными ограничениями, разработанный Н.З. Шором [23]. В тоже время можно попытаться использовать специфику структуры этой системы для построения специальных методов, которые могут оказаться более эффективными с вычислительной точки зрения, чем общий метод, предложенный в [23].



При описании задачи 2.1.2 указывалось, что конкурентоспособность перепрофилированного предприятия может быть обеспечена, если объемы производства, которые предприятие может выпускать, образуют векторы, лежащие на или вне сферы с центром в некоторой точке в конечномерном пространстве. В этом пространстве заинтересованные инвесторы рассматривают производственные возможности конкурентов перепрофилированного предприятия в виде выпуклых многогранников, заданных совместными системами линейных неравенств, причем эта сфера охватывает все эти выпуклые многогранники.

Задача отыскания такой сферы легко сводится к задаче отыскания вектора минимальной нормы на некотором вспомогательном выпуклом многограннике, которая является NP-полной задачей комбинаторной оптимизации [32,33]. В [19] были получены необходимые и достаточные условия локального максимума в этой задаче, с использованием которых проверка вершины выпуклого многогранника на наличие в ней локального экстремума может быть осуществлено конечным методом направленного перебора ребер этого многогранника, выходящих из этой вершины. Поскольку максимум квадрата нормы вектора на выпуклом многограннике достигается в крайней точке этого многогранника, можно попытаться построить метод направленного перебора локальных максимумов функции квадрата нормы с целью отыскания глобального максимума этой функции на выпуклом многограннике.

## 2.4 Некоторые выводы

1. Показано, что ряд задач принятия решений в экономических системах может изучаться на основе моделирования функционирования этих систем в виде игровых задач на полиэдральных множествах допустимых стратегий игроков и в рамках проведения конкурсных процедур, в которых организаторы процедур могут выбирать начальные допустимые ставки игроков из решения вспомогательных задач дискретной оптимизации. В частности, показано, что задачи организации государственно-частного партнерства по выполнению капиталоемких проектов, организации взаимодействия региональных брокеров и оценки целесообразности инвестирования

капитала в перепрофилирование предприятий с целью их последующего позиционирования на интересующих инвестора рынках могут формулироваться в виде игровых задач указанного класса. Тот факт, что анализ разрешимости этих игр и отыскание точек равновесия в разрешимых играх может осуществляться с использованием методов линейного и квадратичного программирования, обладающих огромными вычислительными возможностями, позволяет говорить о существенном расширении класса прикладных оптимизационных задач большого размера, которые быть исследованы и практически решены на основе использования стандартного программного обеспечения.

2. Показана возможность использования методов дискретной оптимизации и линейного программирования для обоснованного отыскания начальных цен (ставок) в конкурсных процедурах, которые могут проводиться как в частном, так и в государственном секторе при размещении государственных заказов на выполнение работ и оказание услуг, а также с целью "расширки" узких мест в экономических системах с ограниченными «пропускными способностями» отдельных ее элементов, влияющими на работу этих систем в целом. В частности, показано, что при организации движения поездов на наиболее загруженных участках сети железных дорог, на которых объем заявок на перевозки превосходит пропускную способность этих участков, и при рационализации использования взлетно-посадочных полос аэропортов, конкурсные процедуры могут способствовать более равномерному распределению нагрузки на такого рода "узкие места" и повышению за счет этого экономической эффективности соответствующих систем.

3. Показана целесообразность как дальнейшего расширения классов задач, решение которых можно осуществлять методами оптимизации, обладающими значительными вычислительными возможностями, так и исследования новых классов математических задач, к которым приводят попытки такого расширения. В частности, для решения рассмотренных задач выпуклой оптимизации целесообразно попытаться найти проверяемые необходимые и достаточные условия экстремума, на основе которых могут быть построены (возможно) конечные методы решения, более эффективные, чем разработанные на сегодняшний день методы. Например, построение

таких методов для задач с квадратичными ограничениями, имеющими определенную специфику, например, представляющих собой системы линейных неравенств и двух квадратичных векторных равенств, позволило бы существенно продвинуться в области отыскания равновесия в играх на полиэдральных множествах связанных стратегий игроков как в задачах, рассмотренных в настоящем отчете, так и в других задачах, ранее исследованных автором, например, задаче отыскания конкурентоспособных тарифов на перевозки железнодорожным транспортом [16], оценки числа избирателей, которые могут прийти на конкретный избирательный участок [28] и т.д.

Результаты исследования отражены в работах [15,28-31,18,19,21]:

1. Belenky A. Understanding the Fundamentals of the U.S. Presidential Election System. Springer, New York, 2012.
2. Belenky A. Two games with connected player strategies in systems economic studies// Computers and Mathematics with Applications (to appear in 2013-2014).
3. Belenky A. Finding equilibriums in game public-private partnership problems on polyhedral player strategies// Mathematical and Computer Modelling (to appear in 2013-2014).
4. Belenky A. Optimal allocation of financial resources in public procurement by mathematical programming techniques// Доклад на Втором Российском Экономическом Конгрессе, Суздаль (принят к публикации в феврале 2013 г.).
5. Петров А.Ф. Теоретико-игровой подход к математическому моделированию государственно-частного партнерства// ВКР, ВШЭ, Факультет бизнес-информатики, 2012, Научный руководитель А.С. Беленький.
6. Катенко Е.А. Конструирование экономического механизма, стимулирующего авиакомпанию к выбору расписания использования взлетно-посадочной полосы, наиболее выгодного для аэропорта федерального значения// ВКР, НИУ ВШЭ, Факультет государственного и муниципального управления, 2012, Научный руководитель А.С. Беленький.

7. Королев Ю.М. Об одной задаче выпуклого программирования, ее обобщении и приложениях// ВКР, НИУ ВШЭ, Факультет бизнес-информатики, 2012, Научный руководитель А.С. Беленький.
8. Смирнова М.Н. Разработка и исследование свойств математической модели для анализа механизма государственно-частного партнерства в государственных закупках// ВКР, ВШЭ, Факультет бизнес-информатики, 2012, Научный руководитель А.С. Беленький.

### 3 ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫХ МОДЕЛЕЙ ВЫБОРОВ В СОВЕТ ДИРЕКТОРОВ АКЦИОНЕРНОЙ КОМПАНИИ

Одним из фундаментальных принципов корпоративного управления является представительство акционеров в совете директоров. По сути, формирование совета директоров является единственным для акционеров способом влияния на управление компанией. Деятельность совета директоров включает в себя назначение и контроль высшего менеджмента компании, определение стратегии развития компании и т.д. [88]<sup>1</sup>. Советы директоров в российских компаниях обычно превосходят по влиянию собрание акционеров [35]. Зачастую директора принимают участие в текущем управлении компании [33], что отличается от традиционного понимания функций совета директоров. С учетом высокой значимости совета директоров в российских условиях изучение процедуры выборов в совет директоров имеет большое значение. При дальнейшем движении в сторону западных стандартов корпоративного управления анализ американского опыта является актуальной задачей и может быть полезен для российской практики. В области корпоративного управления исследования, посвященные процедурам голосования, очень редки, а теоретико-игровое направление данного исследования отражает новизну работы.

В подразделе 3.1 рассмотрен пример, демонстрирующий различия прямого и кумулятивного голосований. В подразделе 3.2 описывается практика использования кумулятивного голосования. В подразделе 3.3 исследуется взаимосвязь корпоративных конфликтов и процедуры голосования. Подраздел 3.4 посвящен влиянию кумулятивного голосования на результаты деятельности компании. В подразделе 3.5 изучается стратегическое поведение акционеров при голосовании. В подразделе 3.6 сделаны некоторые выводы из исследования теоретико-игровых моделей выборов в совет директоров акционерной компании.

---

<sup>1</sup> В России полномочия совета директоров описаны в Федеральном законе «Об акционерных обществах» от 26.12.1995 № 208-ФЗ [41].

### 3.1 Пример, демонстрирующий различия прямого и кумулятивного голосования

Существуют две основные процедуры голосования при формировании совета директоров: прямое голосование и кумулятивное голосование<sup>2</sup>. При прямом голосовании акционер голосует своими акциями за каждого кандидата в отдельности. В результате миноритарии не могут иметь своих представителей в совете директоров, так как при голосовании за каждого кандидата они оказываются в меньшинстве. При кумулятивном голосовании число голосов, принадлежащих каждому акционеру, умножается на число мест в совете директоров, и акционер вправе отдать полученные таким образом голоса полностью за одного кандидата или распределить их между двумя и более кандидатами. Кандидаты с наибольшим числом голосов образуют совет директоров. При кумулятивном голосовании миноритарии получают возможность иметь своего представителя, так как в этом случае они могут сконцентрировать голоса для поддержки небольшого количества кандидатов.

Для демонстрации различий двух процедур рассмотрим пример из [52]. Рассмотрим компанию с двумя акционерами: мажоритарный акционер, обладающий 1000 голосами, и миноритарный акционер с 550 голосами. При шести местах в совете директоров мажоритарный акционер выдвигает шесть кандидатов A, B, C, D, E, F и миноритарный акционер выдвигает своих шесть кандидатов U, V, W, X, Y, Z.

При прямом голосовании каждый из акционеров будет голосовать за своих кандидатов, и не будет голосовать за чужих кандидатов, что отражено в Таблице 3.1. В результате совет директоров будет полностью состоять из кандидатов мажоритарного акционера, так как они получают большинство голосов.

Таблица 3.1 – Прямое голосование [52]

Голоса мажоритарного акционера	Кандидаты	Голоса миноритарного акционера
1000	A	0
1000	B	0
1000	C	0
1000	D	0

<sup>2</sup> Обсуждение альтернативной процедуры см. в [85].

1000	E	0
1000	F	0
0	U	550
0	V	550
0	W	550
0	X	550
0	Y	550
0	Z	550

Кумулятивное голосование позволяет перераспределять голоса (мажоритарный акционер имеет 6000 голосов, а миноритарный – 3300), поэтому в этом случае возможны различные стратегии акционеров, представленные в Таблице 3.2. Акционер может отдать все голоса одному кандидату, тогда он будет претендовать на не более чем одно место, или может разделить голоса между всеми шестью кандидатами, но тогда на каждого кандидата будет слишком малое количество голосов и часть мест могут быть потеряны.

Таблица 3.2 – Кумулятивное голосование [52]

Голоса мажоритарного акционера						Кандидаты	Голоса миноритарного акционера					
Возможные стратегии разделения голосов							Возможные стратегии разделения голосов					
6000	3000	2000	1500	1200	1000	A	0	0	0	0	0	0
0	3000	2000	1500	1200	1000	B	0	0	0	0	0	0
0	0	2000	1500	1200	1000	C	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1500	1200	1000	D	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1200	1000	E	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1000	F	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	U	550	660	825	1100	1650	3300
0	0	0	0	0	0	V	550	660	825	1100	1650	0
0	0	0	0	0	0	W	550	660	825	1100	0	0
0	0	0	0	0	0	X	550	660	825	0	0	0
0	0	0	0	0	0	Y	550	660	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	Z	550	0	0	0	0	0

Если миноритарии разделят голоса поровну между двумя кандидатами, то на каждого кандидата будет приходиться по 1650 голосов. Мажоритарный акционер при любой своей стратегии не может дать пяти кандидатам более чем 1650 голосов, следовательно, миноритарный акционер может гарантировать себе два места (подробнее см. подраздел 3.4). В отличие от прямого голосования при кумулятивном голосовании миноритарий будет представлен в совете директоров.

### 3.2 Опыт применения кумулятивного голосования

По данным [55] использование кумулятивного голосования началось в 1853 в Капской колонии (Южная Африка), что зафиксировано в её конституции. В США кумулятивное голосование впервые было применено в 1870 г. для избрания представителей от штата Иллинойс в Конгресс США, потом оно распространилось и на выборы в советы директоров.

Уже в 1872 году в Иллинойсе было утверждено право компаний штата применять кумулятивное голосование для избрания совета директоров [61]. Дальнейшее распространение кумулятивного голосования для выборов совета директоров шло постепенно. В США национальные банки обязаны иметь кумулятивное голосование, для остальных компаний выборы в советы директоров акционерных компаний регулируются на уровне штатов [47]. В некоторых штатах было введено обязательное требование к использованию кумулятивного голосования, в других штатах у компаний оставлено право выбора (см. дискуссию об обязательном и добровольном использовании кумулятивного голосования в [86]). Постепенно количество штатов с обязательным требованием достигло 23, но во второй половине 20 века взгляды изменились, и к концу века количество штатов с обязательным кумулятивным голосованием сократилось до шести [66]. На уровне компаний также происходит снижение доли кумулятивного голосования в пользу прямого (см. Таблицу 3.3).

Таблица 3.3 – Доля американских компаний, использующих кумулятивное голосование

Год	Доля	Источник
1982	24%	Bhagat, Brickley, 1984
1996	14,4%	Mishra, 2008
2002	9,2%	Personick, 2003
2003-2005	10%	Cai et al, 2009
2006	8,1%	Mishra, 2008

Тип голосования не всегда постоянен. Возможна практика контингентных избирательных прав. Привилегированные акции в случае какого-либо события, например, невыплаты дивидендов, получают право голоса. Это право может быть зафиксировано в виде права на избрание фиксированной доли совета директоров или



права голосовать наравне с обыкновенными акциями или с неравным соотношением голосов на акцию. Выбор процедуры голосования может быть также контингентным, то есть кумулятивное голосование может использоваться, если реализуются контингентные избирательные права [80].

Кумулятивное голосование, допускающее до управления компанией миноритариев, представляет собой форму пропорционального представительства. В реальном применении пропорциональность часто нарушается в пользу мажоритарного акционера. Мажоритарный акционер может выбрать такое время и место проведения годового собрания, которое неудобно миноритариям, или сделать несовершеннолетним распространение информации о собрании. Для противодействия этому вводятся условия кворума (явки), но это не решает проблему полностью [46]. Практика ротации директоров, к примеру, каждые 3 года, что означает ежегодное переизбрание только трети совета, вносит искажение в пользу доминирующего собственника [83]. По сути, в таком случае уменьшается число мест распределяемых при голосовании, что уменьшает пропорциональность. Также нарушение принципов кумулятивного голосования происходит при замене выбывшего по каким-либо причинам одного из членов совета директоров [69]. Фелсентал [59] показал, что в случае избрания только одного кандидата кумулятивное голосование не имеет преимуществ перед системой один человек – один голос, более того оно способствует стратегическим ошибкам, так как множество стратегий избирателя расширяется.

В России согласно Федеральному закону «Об акционерных обществах» от 26.12.1995 № 208-ФЗ [41] выборы членов совета директоров (наблюдательного совета) общества осуществляются кумулятивным голосованием. Требование обязательного использования кумулятивного голосования появилось только в 2004 после принятия Федерального закона №5-ФЗ от 24.02.2004 [43], до этого некоторые акционерные общества могли не использовать кумулятивное голосование. Одновременно с этим был зафиксирован минимальный размер совета директоров из пяти человек, что также защищает интересы миноритариев. Для компаний с числом акционеров – владельцев голосующих акций общества более одной тысячи закон устанавливает минимальный размер совета директоров семь человек, а для компаний с бо-

лее десятию тысячами акционеров – девять человек [41]. Согласно обследованию 2005 года в среднем совет директоров включал 6,7 человек [35], т.е. находился практически на минимальном уровне. Общее собрание акционеров правомочно (имеет кворум), если в нем приняли участие акционеры, обладающие в совокупности более чем половиной голосов размещенных голосующих акций общества [41]. В случае отсутствия кворума назначается новое собрание акционеров.

Кроме акционерных обществ кумулятивное голосование применяется также при избрании членов совета директоров (наблюдательного совета) общества, членов коллегиального исполнительного органа общества и (или) членов ревизионной комиссии обществ с ограниченной ответственностью [42].

В некоторых странах, например в Великобритании, кумулятивное голосование на выборах в советы директоров не разрешено [77].

### 3.3 Конфликты между акционерами

Подавляющее число российских компаний (по данным [35] 87% компаний) имеет доминирующего собственника или группу собственников. В таких компаниях наличие кумулятивного голосования может сопровождаться дополнительными издержками, так как миноритарные акционеры зачастую злоупотребляют своими правами. С другой стороны в последние время стали проявляться появились новые риски для доминирующих собственников: передача собственности наследникам или партнерам и распад партнерских коалиций [34]. Новая структура собственности может иметь нескольких игроков с сопоставимыми долями собственности. Таким примером является борьба за контроль над советом директоров в ОАО «ГМК «Норильский Никель»» (подробнее в [37]). В каждом таком конфликте один из акционеров пытается усилить свое влияние в совете директоров или даже захватить контроль над советом. В условиях плохой защищенности прав собственности из-за такой борьбы возникают экономические потери [36]. Так как большинство компаний имеют доминирующего собственника, то ситуации с высокой неопределенностью в результатах голосования и распределении сил в совете директоров нечасты (в США

их число тоже невелико [87]). В этом разделе проанализировано влияние процедуры голосования на корпоративные конфликты.

В работах [45,56,70] выявлено положительное влияние кумулятивного голосования на успешность попыток захватить контроль над советом директоров, с другой стороны Дод и Варнер [54] не обнаружили значимого различия. В то же время изменение процедуры голосования практикуется менеджментом для защиты от корпоративных захватов (см. [47,57]), что является косвенным свидетельством того, что процедура голосования имеет значение при корпоративных конфликтах.

Обычно в конфликте акционеров миноритарии пытаются добиться изменений в управлении компании, что должно влиять на стоимость акций. В работе [62] были измерены изменения цен акций в день после закрытия реестра акционеров (списка акционеров, имеющих право голоса на данном собрании). Если был повышенный спрос, связанный с желанием получить право голоса, то после закрытия реестра цена должна вернуться к нормальному уровню. Действительно, в эти периоды происходило снижение стоимости акции. Значимое различие наблюдалось в случае голосования на выборах в совет директоров по сравнению с голосованием по общим вопросам. Голосование по смене состава совета директоров имеет долгосрочные последствия для компании, поэтому имеет большую ценность, чем голосование по общим вопросам. Среди событий, вызванных выборами в совет директоров, только для компаний с кумулятивным голосованием имело место статистически значимое изменение цен, что отражает большую ценность права голоса в случае кумулятивного голосования.

Жао и Брем [89] использовали голосования по предложениям, выдвинутыми акционерами как прокси-переменную для конфликтов между акционерами и советом директоров. Если миноритарным акционерам удастся собрать высокую долю голосов «за» по своим предложениям, это свидетельствует о наличии конфликта, так как совет директоров обычно выступает против предложений акционеров. Показав, что кумулятивное голосование не имеет значимой статистической связи с различными показателями деятельности, Жао и Брем с помощью МНК оценивания выявили значимое отрицательное влияние наличия кумулятивного голосования на долю

голосов «за», что интерпретируется авторами как свидетельство сглаживания конфликтной ситуации. С другой стороны, данный анализ не разрешает вопрос причинности, поэтому можно говорить только о связи кумулятивного голосования и конфликта. Там, где есть кумулятивное голосование, конфликтность ниже.

Кумулятивное голосование, с одной стороны, сглаживает конфликты, предоставляя миноритариям возможность войти в совет директоров, с другой стороны ослабляет доминирующего собственника, что стимулирует миноритариев на попытки захватить контроль над советом директоров. Предложения по изменению процедуры голосования являются частью стратегии защиты (в случае отмены кумулятивного голосования) и переход к прямому голосованию, вероятно, не случаен, а происходит тогда, когда опасения о разрастании внутрикорпоративных конфликтах небеспочвенны. Миноритарии, заботящиеся о собственном выигрыше, а не об интересах компании, приводят к неэффективным решениям и снижают общий уровень благосостояния [84]. Вопрос о влиянии процедуры голосования на стоимость компании рассмотрен в следующем разделе.

### 3.4 Влияние на стоимость компании

Бхагат и Брикли [47] отмечают следующие механизмы, посредством которых кумулятивное голосование может влиять на результаты деятельности компании. Во-первых, при кумулятивном голосовании увеличивается вероятность смены контроля над советом директором. Угроза смены и конкурентность стимулирует совет директоров лучше работать. Во-вторых, представительство миноритариев в совете директоров снижает агентские издержки по делегированию полномочий по управлению компанией. С другой стороны, неоднородность совета директоров усложняет его работу и снижает эффективность менеджмента, так как из-за различий в предпочтениях членов совета директоров их коллективный выбор может быть непоследовательным [58].

В качестве признаков изменения процедуры в сторону увеличения кумулятивности Бхагат и Брикли отмечают принятие кумулятивного голосования, возврат от

практики поэтапного переизбрания совета директоров к обычной регулярной замене, увеличение количества членов совета директоров<sup>3</sup>. Для проверки гипотезы о влиянии кумулятивного голосования были измерены изменения цен акций в период оглашения предложений по изменению уровня кумулятивности голосования. Были отобраны только те события, в которых предложения были сделаны менеджментом, так как они с высокой вероятностью будут приняты (современные данные о принятии предложений менеджмента см. в [71,74]). Авторы выявили слабое положительное влияние кумулятивного голосования на цену акций, в тоже время нашли свидетельства того, что менеджмент через ограничение представительства миноритариев уменьшает стоимость компании.

Упразднение кумулятивного голосования является одним из средств, используемых против поглощения, наряду с другими мерами, ослабляющих позиции миноритариев, поэтому влияние кумулятивного голосования нужно рассматривать в более общем контексте. В [81] исследуется вопрос как характеристики совета директоров и структура собственности влияют на принятие мер противодействующих поглощению, в том числе переход к процедуре прямого голосования. Лояльность независимых директоров по отношению к менеджменту и уровень владения акциями менеджментом положительно влияют на принятие мер, а доля акция институциональных инвесторов отрицательно. Это свидетельствует о том, что принятии решения о смене процедуры голосования во многом является результатом борьбы заинтересованных сторон. Такой механизм принятия решений не обязательно соответствует максимизации стоимости компании. В [82] изучается влияние принятия мер противодействующих поглощению на стоимость акций. Показано, что общее влияние отрицательно, но существуют значимые различия, зависящие от характеристик компании. При прочих равных условиях кумулятивное голосование имеет положительное влияние на стоимость.

Среди мер по защите от поглощения упразднение кумулятивного голосования является наиболее популярным [67]. Среди всех изменений, касающихся корпора-

---

<sup>3</sup> Увеличение совета директоров не всегда выгодно миноритариям [52]. Это зависит от того, кому достанется дополнительное место. Рост числа мест может не вести к росту пропорциональности.

тивного управления, отказ от кумулятивного голосования является третьим по значимости фактором при исследовании методом главных компонент [53]. Обычно эта мера сопровождается поэтапной заменой членов совета директоров, утверждением правила супербольшинства и перерегистрацией фирмы в штате Делавэр, где есть особые условия, в частности, разрешено не использовать кумулятивное голосование.

В некоторых работах не найдено значимого влияния кумулятивного голосования. Так, в [60] исследуется влияние предложений акционеров по утверждению кумулятивного голосования и значимых изменений доходностей акций в связи с этим не выявлено. Жао и Брем [89], сравнивая две совокупности компаний с различными видами процедур, также не выявили значительных отличий в результатах деятельности компаний (доходы и прибыльность).

В работах [47,82] было получено положительное влияние кумулятивного голосования по компаниям, где было соответствующее голосование по изменению процедуры. Так как наличие голосования само по себе не случайно [76], то такая оценка могла быть смещенной. Кроме того, принятие решения об изменении процедуры не является независимой переменной [81], на это решение влияют многие факторы, которые также оказывают влияние на стоимость компании. Возникает проблема эндогенности, которая не решена в исследованиях по данной тематике. Вероятно, для выявления эффекта надо изучить не одномоментные изменения процедуры или сравнение различных совокупностей компаний, а проследить динамику. Так как процедура кумулятивного голосования применяется регулярно, то её влияние распространяется на деятельность избранных советов директоров компании в течение длительного времени, то есть, эффект, если он есть, должен быть распределен во времени и усиливаться с ростом продолжительности периода использования или отказа от кумулятивного голосования.

### 3.5 Стратегия голосования

Ещё до начала активного использования кумулятивного голосования на выборах в советы директоров Друпом [55] был проведен тщательный анализ возможных стратегий использования своих голосов на примере выборов в школьные советы и законодательные органы. В случае, когда у избирателей достаточно большое количество голосов, чтобы побороться за выдвижение своих кандидатов, игроки сталкиваются с проблемой выбора количества кандидатов, которых будут поддерживать. Разделение голосов между слишком большим количеством кандидатов может привести к их неизбранию и потере голосов, которые при другой стратегии могли бы быть использованы для поддержки какого-либо кандидата. Друп [55] нашел количество кандидатов, которое может гарантировать себе игрок при любом соотношении голосов среди остальных игроков. Условие гарантированной победы одного кандидата в том, что никакие другие  $S$  (размер совета) кандидатов не могут набрать больше. Это логика приводит к определению квоты Друпа

$$q = \left\lfloor \frac{V}{S+1} \right\rfloor + 1.$$

Игрок, обладающий данным количеством голосов, гарантированно проводит в совет одного кандидата при любых стратегиях других игроков. Соответственно, чтобы гарантированно иметь  $R$  кандидатов в совете, необходимо иметь количество голосов, равное

$$V_i = \left\lfloor \frac{VR}{S+1} \right\rfloor + 1.$$

Стоит заметить, что сумма мест, которые гарантированно могут получить игроки, обычно меньше размера совета. Некоторые игроки могут побороться за эти места, выстраивая свои стратегии с учетом стратегий остальных игроков.

Если избиратель имеет небольшой пакет голосов и намерен поддержать одну из сторон, выдвинувших нескольких кандидатов, то у него есть две стратегии. Первая – отдать все голоса одному кандидату; вторая – разделить их между несколькими кандидатами. Друп отмечает, что на выборах в законодательные органы большинство

выбирают первую стратегию. Такая стратегия увеличивает вероятность того, что голоса не будут потеряны (отданы за проигравшего кандидата). Следствием такой стратегии является получение одним кандидатом слишком большого количества голосов, которое, возможно, является достаточным для избрания нескольких кандидатов. Этот эффект преодолевается высокой партийной дисциплиной, когда партии заранее просчитывают лучшую стратегию и рекомендуют своим сторонникам голосовать определенным образом [68].

При голосовании на выборах в совет директоров акционеры с небольшими пакетами, скорее всего, будут отдавать свои голоса одному кандидату, иначе они рискуют потратить свои голоса впустую. Деление голосов между несколькими кандидатами является косвенным свидетельством того, что была распространена некоторая информация, способствовавшая координации. Например, это может быть рекомендация консалтингового агентства голосовать за двух независимых директоров. В таком случае деление голосов поровну между двумя кандидатами является разумным, так как такие же действия ожидаются и от других акционеров.

Коул [49] и Миллз [72] в 20 веке переоткрывают формулы Друпа. Эти формулы не дают гарантированного числа мест при конкретном соотношении голосов, а отражают наихудший вариант, когда все остальные голоса находятся у одного игрока. Первое решение, являющееся равновесием в игре с конкретным распределением голосов, было получено Глассером [63]<sup>4</sup>. В случае игры двух лиц выборы в совет директоров представляют собой чистую антагонистическую игру, в которой может быть найдено равновесие в минимаксных стратегиях. Оказалось, что в игре для двух лиц гарантированные выигрыши не отличаются от выигрышей, рассчитанных Друпом.

В работе [64] решена проблема для любого количества игроков. Показано, что количество мест в совете директоров при использовании оптимальных стратегий совпадает с распределением мест по методу д'Ондта решения задачи пропорционального представительства.

---

<sup>4</sup> Культина в [39] исследовала игру, описывающую выборы в совет директоров, соответствующую прямому голосованию, рассматривая различные модели формирования коалиций.



Таблица 3.4 – Метод д’Ондта

Акционеры	Голоса	V/1	V/2	V/3	V/4	V/5	Количество мест
Мажоритарный	6000	6000 (1)	3000 (3)	2000 (4)	1500 (6)	1200	4
Миноритарный	3300	3300 (2)	1650 (5)	1100	825	660	2

Согласно методу д’Ондта голоса акционеров делятся на последовательность 1, 2, 3 и т.д. Таким образом, находится число голосов, приходящихся на одного кандидата, если акционер разделит акции между соответствующим количеством кандидатов. Все эти последовательности записываются в одну таблицу, как представлено в Таблице 3.4. Места распределяются последовательно: первое место достается игроку с наибольшим числом в данной таблице, второе – следующему по размеру и т.д. При распределении шести мест мажоритарный акционер получит 4 места, а миноритарий – 2 места. Данный метод можно применить для любого числа акционеров и любого размера совета директоров. По таблице видно, что у акционеров нет стимулов деления голосов между большим количеством кандидатов. При попытке голосовать за большее число кандидатов, чем рассчитанное по методу д’Ондта, количество голосов, приходящиеся на одного кандидата будет ниже, чем у остальных акционеров, они сохранят своих представителей, и дополнительного места акционер не получит.

На практике существуют множество акционеров с небольшими пакетами и расчет мест по методу д’Ондта приходится проводить сценарно, предполагая различные уровни явки миноритариев, степень их координации между собой, возможность возникновения коалиций.

Близкий результат к [64] был получен Коксом [51] для выборов в многомандатных округах. Купер [50] нашел связь кумулятивного голосования и метода д’Ондта в виде неравенства (количество мест, рассчитанное по методу д’Ондта, всегда не меньше). Карпов [37] доказал, что в игре, описывающей выборы в совет директоров, не существует других равновесий по Нэшу, кроме реализующих распределение мест по методу д’Ондта. При этом существует множество равновесий по Нэшу как с равным разделением голосов между кандидатами, так и при использовании более

сложных стратегий. Таким образом, получено, что данная игра реализует известный метод распределения мест.

В исследованиях, посвященных кумулятивному голосованию на выборах в законодательные органы, также показывается множественность равновесий с одинаковыми выигрышами [65,78]. Эмпирические данные демонстрируют соответствие выбранных стратегий (количество кандидатов, участвовавших от одной партии в округе) теоретическим равновесиям по Нэшу. С другой стороны, гипотеза о выборе равновесия дрожащей руки (усиление концепции равновесия по Нэшу [79]) не нашла поддержки [65].

Проблема нахождения оптимальных стратегий игроков и расчет равновесного распределения мест полностью решена. Решение не выражается конкретной формулой, но описывается легко реализуемым методом д'Ондта [37,64]. Хотя в теории сохраняется множественность равновесий, выбор стратегии соответствующей разделению голосов поровну между рассчитанным по д'Ондту количеством кандидатов представляется наиболее вероятным, так как при этом у игроков не появляется потерянных голосов.

### 3.6 Некоторые выводы

В этом разделе отчета приведены результаты анализа теоретико-игровых моделей выборов в совет директоров акционерной компании.

1. Показано, что преимущества той или иной процедуры голосования зависят от структуры собственности: при наличии доминирующего собственника прямое голосование будет сопровождаться меньшими издержками принятия решений. В этом случае излишняя защита миноритариев ущемляет права доминирующего собственника и может привести к потерям стоимости компании. При распыленной структуре собственности прямое голосование сопровождается издержками создания коалиций [39]. Кумулятивное голосование упрощает процесс формирования совета директоров, представляя всех собственников в равной мере.

2. В России в 1990е годы принятие кумулятивного голосования в качестве базовой процедуры являлось естественным, так как институциональные реформы предполагали широкое распространение акционерной собственности [44]. Кумулятивное голосование, таким образом, являлось ещё одним инструментом, создающим возможность миноритарным акционерам участвовать в управлении компании. Сложившаяся в конце 1990-х структура собственности со значительной концентрацией собственности и контроля [40,44] приводила к частому нарушению прав миноритариев. Принятие в 2001 году обязательного использования кумулятивного голосования явилось одной из мер по улучшению защиты прав миноритариев.

3. Кумулятивное голосование является прозрачной процедурой голосования, так как позволяет участникам заранее рассчитать гарантированное число мест и равновесное распределение. Миноритарии имеют больше возможностей влиять на ситуацию, что приводит к более частым изменениям в составе совета директоров, в том числе связанным с недружественными поглощениями.

4. При наличии разнообразных механизмов защиты прав миноритариев прямое голосование может иметь преимущества в виде более согласованного и работоспособного совета директоров, защиты компании от поглощения и внутренних корпоративных конфликтов. В США с развитыми институтами защиты прав миноритариев происходит постепенный отказ от кумулятивного голосования. Это происходит из-за распространения практики злоупотребления правами миноритариев, корпоративного шантажа (greenmail), угроз поглощения.

Результаты исследования нашли отражения в работе [38]:

Карпов А.В. Влияние процедуры выборов в совет директоров на деятельность компании// Журнал Новой экономической ассоциации, 2012. № 4(16). С. 10-25.

## 4 АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ БАНКОВСКОГО И ФИНАНСОВОГО СЕКТОРОВ ЭКОНОМИКИ

В этом разделе отчета два подраздела, посвященные оценке рисков банковской системы России (подраздел 4.1) и оценка взаимосвязи характера операций с деривативами и стоимости европейских банков (подраздел 4.2).

### 4.1 Оценка рисков банковской системы России

Финансовый кризис 2007-2009 выявил недостатки существующих подходов к банковскому регулированию по всему миру. В частности, это касается использования базельских методологий для оценки требований к капиталу. Данный вопрос особенно важен для российской банковской системы в связи с планируемым введением<sup>5</sup> Базель II.

Цель исследования – смоделировать динамику рисков, а также проанализировать циклический эффект при введении Базель II в российской банковской системе, что особенно *актуально* в виду разработанного проекта Банка России по внедрению Базель III в России. Работа впервые исследует данную проблему на российских данных. Проведенный анализ раскрывает недостатки подходов Базель II при использовании в развивающихся странах, такие как повышенная волатильность и проциклическость требований к капиталу. Полученные результаты имеют важное значение для разработки предложений по модификации базельских подходов и их применению в развивающихся экономиках.

В исследовании рассматриваются две гипотезы. Первая гипотеза заключается в том, что оценка капитала по моделям Базель II ведет к проциклическому поведению коэффициента достаточности капитала, то есть коэффициент растет в периоды бума и падает в периоды рецессии. Вторая гипотеза касается поведения отдельных рисков и предполагает, что вклад кредитного и рыночного рисков имеет также процикличе-

---

<sup>5</sup> В начале 2008 года ЦБ начал реализацию программы по вопросам банковского надзора и внутреннего аудита совместно с Европейским Центральным Банком. Одной из целей программы является содействие введению Базель II в РФ. Завершение программы планируется в 2011 году. Как показали результаты последнего исследования, опубликованного 21 июля 2010 г. (см. [93]), российские банки пока не соответствуют минимальным требованиям и стандартам IRB подхода.

ский характер. Их вклад увеличивается в периоды подъема, тогда как вклад операционного риска падает.

Для оценки рисков используется подход внутренних рейтингов (IRB), в основе которого лежит эмпирическое распределение совокупного риска по системе. В работе рассчитываются взвешенные по риску активы, и анализируется уровень достаточности капитала в соответствии с Базель II.

#### 4.1.1 Основная часть

##### 4.1.1.1 Обзор литературы

Финансовая система играет важную роль в развитии всей экономики. Тем не менее, она также является одним из источников усиления бизнес циклов (см. [102]), что связано с реакцией участников финансовых рынков на изменение риска с течением времени. Риск недооценивается в периоды бума, и переоценивается в периоды рецессии.

С введением базельских подходов к оценке достаточности капитала вопрос цикличности получил особое внимание. Эмпирические результаты подтверждают проциклический характер методологии Базель II. В статье [122] авторы показали, что Базель II создает дополнительную процикличность требований к капиталу (в сравнении с Базель I) в банковских системах Европы и Северной Америки. В работе рассматривается период 1998-2002, а риски моделируются с использованием трех типов моделей (модель на основе S&P рейтингов, модель KMV и внутренняя модель Deutsche Bank). Схожие выводы, но для банковской системы Канады, были получены в статье [120]. Авторы анализируют портфели корпоративных и суверенных кредитов за период 1984-2003. Полученные результаты говорят о том, что уровень цикличности требований к капиталу существенно не меняется для портфеля корпоративных кредитов при введении Базель II (по сравнению с Базель I), если используются вероятности дефолта, оцененные методом ТТС<sup>6</sup>. Тем не менее, если применять

---

<sup>6</sup> От английского through-the-cycle (ТТС) – рейтинговая система, которая использует средневзвешенные оценки вероятности дефолта за рассматриваемый период.

PIT<sup>7</sup> подход, волатильность возрастает в 2-3 раза по сравнению с Базель I. Тогда как для портфеля суверенных кредитов уровень достаточности капитала, оцененный в соответствии с Базель II, в среднем выше чем в соответствии с Базель I, но менее волатилен. Более того, авторы показали наличие негативной корреляции между экономическим циклом (в терминах ВВП) и минимально требуемым капиталом, оцененным в соответствии и с Базель II, и с Базель I. Этот результат подтверждает наличие проциклическости базельского регулирования.

Более поздние эмпирические работы по данной тематике приходят к несколько иным выводам. В статье [101] авторы исследуют зависимость между объемом кредитования, уровнем капитала и ВВП в 16 странах ОЭСР за период 1990-2007. Результаты не выявили наличия зависимости между капиталом и ВВП, а также между капиталом и объемами кредитования.

Моделирование рисков и анализ циклического эффекта при введении Базель II рассматривается и в теоретических работах. Такие исследования разрабатывают модель или репрезентативный портфель для оценки поведения уровня достаточности капитала в течение бизнес цикла. Например, [130] предлагает модель динамического равновесия на рынке банковских услуг. Авторы рассматривают банки (у которых существуют ограничения по привлечению капитала, что заставляет их создавать буфер капитала), предпринимателей и инвесторов. Условное (в зависимости от состояния экономики) распределение вероятности дефолта базируется на однофакторной модели, которая также легла в основу IRB подхода, предложенного в Базель II. Эта же модель используется в работе [115]. В данной статье риск рассчитывается для простого кредитного портфеля (состоящего из однородных кредитов), определенного значения порога доходности активов заемщика (если доходность становится ниже заданного порога, то заемщик оказывается неплатежеспособным) и для срока кредита равного одному году. Потери при дефолте принимаются равными 100%. Вероятность дефолта зависит от порога доходности, и оценивается, используя предположение о стандартном нормальном распределении доходностей. Кроме того, автор

---

<sup>7</sup> От английского point-in-time (PIT) – рейтинговая система, которая использует оценки вероятности дефолта на каждый момент времени.

вводит макроэкономический фактор, который характеризует состояние бизнес цикла. Фактор меняется со временем и влияет на порог доходности (в растущей экономике он уменьшается). Это, в свою очередь, отражается в расчете вероятности дефолта и, соответственно, в расчете уровня достаточности капитала. В обеих статьях результаты показали, что чувствительные к риску требования к капиталу приводят к увеличению процикличности кредитования банками. Возможность предоставлять кредиты у банков снижается в периоды рецессии даже, несмотря на создание буфера капитала в периоды роста экономики (как в модели [130]).

Существуют различные методы по снижению процикличности требований к капиталу. Прежде всего, можно модифицировать входные параметры формулы IRB (см. Базель II, ст. 272). В частности, это относится к оценке вероятности дефолта. В исследовании [110] авторы пришли к выводу, что использование рейтинговой системы ТТС является эффективным методом для снижения цикличности. Тогда как в соответствии с [128] имеет смысл применять РИТ подход, а потом корректировать результаты в зависимости от фазы цикла.

Для анализа того, какой подход (РИТ или ТТС) дает лучшие результаты [129] предложили модель общего равновесия экономики обмена. Модель включает банковский сектор (два коммерческих банка и один центральный регулятор), корпоративный сектор (две компании) и одно домохозяйство. Авторы показали, что выбор рейтинговой системы зависит от характеристик банка и от ожиданий касательно бизнес цикла. Например, банк, который является нетто заемщиком, предпочитает систему ТТС, тогда как банк-нетто кредитор выбирает систему РИТ, если он ожидает рецессию. Кроме того, использование ТТС подхода приводит к более низким прибылям в периоды спада.

Еще одним возможным методом снижения процикличности чувствительных к риску требований к капиталу является модификация выходного результата формулы IRB. В работе [110] рассматривается использование авторегрессионного фильтра (autoregressive filter (AC)) и контрциклического сглаживания (counter-cycle smoothing (правило CC)). Идея подхода AC заключается в том, что шоки (например, резкое повышение вероятностей дефолта из-за ухудшения макроэкономической си-

туации) не сразу отражаются в минимально требуемом уровне капитала, рассчитываемом в соответствии с подходом IRB, а скорее в течение нескольких лет. Тогда, как правило, СС заключается в использовании мультипликатора, величина которого меняется в зависимости от фазы цикла (увеличивается в периоды подъема и уменьшается в периоды спада). Мультипликатор применяется для корректировки выходного значения формулы IRB, и его уровень определяется регулятором. Авторы показали, что для финансовых систем, в которых преобладают небольшие банки, наиболее подходящим методом является АС. Основным достоинством этого подхода является то, что он предполагает анализ банками собственных временных рядов и не требует от регулятора принятия решений касательно макроэкономической ситуации. Тем не менее, он может применяться, только если кредитная политика банка стационарна. Тогда, как правило, СС, в свою очередь, не зависит от изменений в деятельности банка. В данном случае регулятор должен принимать решение относительно значения мультипликатора. Таким образом, этот метод может использоваться только в странах с развитыми финансовыми рынками.

Сравнение этих двух подходов (модификация входных параметров и выходного результата) на основе эмпирических данных проведено в работе [131]. Авторы анализируют логистическую модель, в которой в качестве зависимой переменной выступает вероятность дефолта по коммерческим кредитам. В работе рассматривается банковская система Испании за период 1986-2007. Для оценки вероятности дефолта в соответствии с подходом ТТС макроэкономические переменные, которые входят в модель, принимаются равными их средним значениям за исследуемый период. Тогда как для модификации выходного значения формулы IRB авторы применяют мультипликативный подход (где в качестве характеристики фазы бизнес цикла выступает темп роста<sup>8</sup> ВВП) и авторегрессионный фильтр. Полученные результаты сравниваются с трендом требований к капиталу (рассчитанных в соответствии с Базель II), полученного с использованием фильтра Ходрик-Прескотт (Hodrick-Prescott). Авторы приходят к выводу, что наиболее эффективным методом является мультип-

---

<sup>8</sup> Такие показатели как рост объемов кредитования или рыночная доходность ценных бумаг оказались неэффективными характеристиками фазы бизнес-цикла.



ликативный подход. В периоды подъема мультипликатор увеличивается на 7.2% на каждое стандартное отклонение темпа роста ВВП.

Другие подходы к снижению уровня процикличности чувствительных к риску требований к капиталу включают использование нескольких «рисковых кривых» (от английского «risk curves»), когда требования к капиталу снижаются в периоды рецессии для всех значений вероятности дефолта (см. [122]), модификацию уровня доверия в зависимости от фазы цикла (см. [104]), создание контрциклических “пруденциальных резервов”, которые определяются регулятором на основе объективных критериев, таких как: темп роста объемов кредитования, уровень кредитования секторов, характеризующихся систематическим риском и т.д.) (см. [127]), создание буфера капитала в периоды подъема экономики (см. [102], [120], [104], [108], [99]), введение минимально допустимых и нечувствительных к риску оценок достаточности капитала с целью избежания чрезмерного уровня леввереджа (см. [108]), установление максимально допустимого значения отношения суммы займа к величине обеспечения этого займа для ипотечного кредитования (см. [99])

Интересными являются методы расчета буфера капитала. В документе [104] авторы предлагают определять буфер капитала как разницу между требованиями к капиталу, рассчитанными с использованием текущего уровня вероятностей дефолта и вероятностей дефолта, соответствующими периодам рецессии. Помимо этого, можно использовать зависящий от фазы цикла уровень доверия. Идея такого подхода заключается в изменении уровня доверия таким образом, что в каждый момент времени минимально требуемый капитал равен его значению в период рецессии. Таким образом, в периоды подъема уровень доверия должен быть выше чем 99.5%. В документе [100] предлагается рассчитывать буфер капитала в зависимости от отклонения показателя «кредиты в отношении к ВВП» от своего тренда, который определяется с использованием фильтра Ходрик-Прескотт. Устанавливаются нижний и верхний порог отклонения, между которыми размер буфера капитала находится в линейной зависимости от величины отклонения. Если отклонение становится меньше нижнего порога, то буфер капитала равен нулю. Если же отклонение превышает верхний порог, то буфер капитала равен своему максимальному значению. Уровень

порогов и величина максимального буфера капитала определяются для каждой страны в зависимости от данных по ВВП, объемов кредитов и т.д. Тогда как в рамках предложенной модификации<sup>9</sup> Базель II (или другими словами, Базель III) буфер капитала предлагается создавать в периоды подъема просто как 2.5% над уровнем минимально требуемого размера капитала. И состоять буфер должен из обыкновенных акций.

Кроме того, в соответствии с [105] для снижения процикличности необходимо создавать капитал в той валюте, в которой осуществляется кредитование. По мнению авторов в развивающихся странах введение чувствительных к риску требований к капиталу усиливает процикличность, вызванную обменным курсом. Например, усиление иностранной валюты может привести к недостаточному уровню капитала в банке, тем самым усугубляя ситуацию.

Важной задачей при оценке требований к капиталу является определение методологии расчета совокупного риска внутри отдельного банка и внутри банковской системы в целом. Этот вопрос рассматривается в таких работах, как: [133], [132], [107].

В исследовании [133] авторы предлагают использование подхода «строительных блоков» (от английского «building block» approach). В данном случае риск агрегируется на трех уровнях: первый уровень включает отдельные риски внутри каждого фактора риска (например, кредитный риск в портфеле коммерческих кредитов), второй уровень состоит из разных факторов риска внутри каждого вида бизнеса (например, кредитный, рыночный и операционный риски в банке), и, наконец, третий уровень объединяет риски по всем видам бизнеса (например, по банковскому и страховому). Авторы предполагают, что все риски совместно нормально распределены. Основываясь на этой предпосылке и используя разные уровни корреляции (взятые из предыдущих исследований других авторов) и соответствующие веса отдельных рисков, авторы получают значение экономического капитала.

Для ухода от предпосылки о совместном нормальном распределении авторы [132] разработали методологию по оценке совокупного риска с использованием ко-

---

<sup>9</sup> [100].

пул. Анализ проводился для выборки из 17 американских банков за период 1994-2002 (ежеквартальные данные). Для симулирования частных распределений по кредитному и рыночному рискам авторы моделируют доходность каждого риска как функцию от наблюдаемых факторов риска. Для операционного риска берется экспоненциальное распределение. С целью агрегирования рисков используется нормальная копула и копула Стьюдента с 5 и 10 степенями свободы. Далее, основываясь на полученном совместном распределении, рассчитывается совокупный риск (применяется методология VaR с 99.9% уровнем доверия). Интересным является сравнение предложенного метода с альтернативными подходами, широко используемыми на практике. Авторы показали, что методология Add-Var, когда частные распределения просто суммируются, существенно переоценивает экономический капитал. С другой стороны, Нормальный VaR (Normal VaR), когда все предельные распределения полагаются нормальными, недооценивает риск. Наконец, Гибридный VaR (Hybrid-Var), который основывается на формуле эллиптического распределения, дает довольно аккуратные результаты.

На сегодняшний момент лишь несколько стран ввели контрциклическое регулирование. Основные примеры – это Испания и Колумбия. Работа [112] рассматривает случай Испании, где начиная с 2004 года применяется новый контрциклический метод резервирования. Для расчета резервов используются потери по кредитному портфелю в «нейтральный» год (нейтральный по отношению к циклу). Таким образом, в периоды спада резервы получаются на 40% ниже (чем обычный уровень резервов в такие времена), тогда как в периоды подъема резервы получаются выше уровня обычного для таких фаз цикла. Тем не менее, в работе [103] автор показал, что зависимость между объемам кредитования и уровнем ВВП в Испании не изменилась.

Данные Колумбии, где регулятор ввел контрциклические требования к оценке потерь (в частности, банки должны рассчитывать контрциклические резервы, уровень которых зависит от состояния экономики), также не свидетельствуют о существенном изменении уровня процикличности.

#### 4.1.1.2 Используемые данные

Для проведения анализа используется ежеквартальная финансовая отчетность всех российских банков за период 2004-2010. Вся информация публикуется Центральным Банком России. Основываясь на доступности и предполагаемой достоверности данных, рассчитывается количество выбросов (около 1.5% на каждую дату). Для определения выбросов использовались следующие критерии: величина просроченных долгов превышает размер кредитного портфеля; наличие прибылей (убытков) по торговому портфелю ценных бумаг при условии, что торговая позиция на отчетную дату почти равна нулю; совокупная прибыль или убыток в три раза выше акционерного капитала. Банк принимался выбросом при обозначенных условиях, смотря на значение доходности по конкретному риску, только если его активы по данному риску не превышали 0.1% от среднего значения активов по этому риску для банков, не являющихся выбросами.

#### 4.1.1.3 Методология исследования

В данной статье частично используются подходы, предложенные в работе [132]. Для проведения анализа вводятся следующие предпосылки. Во-первых, предполагается, что все банки применяют одинаковые модели внутренних рейтингов<sup>10</sup>. Во-вторых, кредитная политика банков не меняется после введения Базель II. Безусловно, это довольно сильное предположение, особенно учитывая результаты таких работ как [118], [123], [125], [117], которые свидетельствуют об изменении поведения банков после введения базельских требований. Тем не менее, рассматривается наихудший сценарий. Если не принимать в учет возможности изменения поведения банков в сторону обеспечения более высокого уровня достаточности капитала, в наихудшем варианте капитал потребуется только под текущие операции. Поэтому берутся фактические данные, и на их основе проводится расчет.

---

<sup>10</sup> Предпосылка имеет смысл в силу того, что эти модели должны быть рекомендованы и утверждены Центральным Банком.

Полученные значения требований к капиталу (в соответствии с Базель II) сравниваются с существующими уровнями достаточности капитала, рассчитанными в соответствии с Базель I<sup>11</sup> (см. [117]).

На каждый квартал строятся эмпирические частные и совместные распределения рисков на основе наблюдений по всем банкам России. Введем обозначения, используемые в исследовании:

$Risk(t)$  – совокупный риск в момент времени  $t$ , то есть  $Risk(t)$  является случайной величиной, принимающей значения вероятных прибылей (убытков) по всей банковской системе в зависимости от реализации трех рассматриваемых рисков (кредитного, рыночного и операционного);

$A_{ij}(t)$  – величина активов под риском (базы риска) для  $j$ -го риска и  $i$ -го банка; для кредитного риска эта величина равна объему кредитного портфеля, для рыночного риска – объему торгового портфеля ценных бумаг, для операционного – совокупным активам;

$R_{ij}(t)$  – доходность по  $j$ -му риску  $i$ -го банка.

Для расчета кредитного риска принимается во внимание только просроченная задолженность (более 180 дней). Так как оцениваются непредвиденные убытки, то процентный доход не рассматривается. Кроме того база кредитного риска уменьшается на величину резервов, которые созданы для покрытия ожидаемых потерь. Доходность по кредитному риску тогда рассчитывается как отношение просроченной задолженности к объему кредитного портфеля.

Для оценки рыночного риска учитываются прибыли и убытки, возникающие от переоценки торгового портфеля (который включает только инструменты, удерживаемые для продажи). На данном этапе не рассматриваются забалансовые позиции. Анализ таких позиций на уровне всей банковской системы требует разработки отдельной методологии. Таким образом, доходность рыночного риска рассчитывается как отношение прибылей и убытков от переоценки к объему торгового портфеля.

---

<sup>11</sup> Инструкция ЦБР №110-И «Об обязательных нормативах банков» (16.01.2010), на основе которой происходит расчет требований к капиталу российскими банками, базируется на методологии Базель I.

Доходность операционного риска, в свою очередь, принимается равной отношению чистой прибыли к совокупным активам. Такой подход делает результаты сопоставимыми с выводами, полученными в других работах (см. [120], [132]).

Тогда величина совокупных прибылей (убытков)  $Z(t)$  по банковскому сектору, включающая все три риска, рассчитывается как:

$$Z(t) = \sum_j \sum_i R_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t). \quad (4.1)$$

Принимая во внимание предпосылку о том, что все банки руководствуются одними и теми же принципами стресс-тестирования, то есть  $R_{ij}(t) = R_j(t)$ , (1) можно выразить следующим образом:

$$Z(t) = \sum_j R_j(t) \sum_i A_{ij}(t). \quad (4.2)$$

Величина совокупного риска при заданном уровне доверия  $\alpha$  на квартальном горизонте получается как:

$$Risk(t) = q_\alpha \left( \sum_j R_j(t) \sum_i A_{ij}(t) \right), \quad (4.3)$$

где  $q_\alpha$  – квантиль функции для уровня доверия  $\alpha$ .

На основе полученных эмпирических распределений на каждую дату рассчитывается совокупный риск по системе, принимая уровень значимости, равным 99.5%. Тогда коэффициент достаточности капитала (CAR) оценивается как отношение текущего уровня капитала по системе к полученному совокупному риску, умноженному на коэффициент  $\beta$ , значение которого зависит от результатов бэк-тестирования:

$$CAR(t) = \frac{K(t)}{\beta \cdot Risk(t)}. \quad (4.4)$$

На данном этапе  $\beta = 3$ .

#### 4.1.2 Основные результаты

Прежде всего, интересно проанализировать поведение индивидуальных рисков. Как видно из таблицы описательных статистик в Приложении А, самые высокие средние значения доходности наблюдаются для рыночного риска. Необходимо отметить, что волатильность рыночного риска значительно выше, чем для кредитного и операционного: стандартное отклонение достигает 200% (Приложение А). Для кредитного риска стандартное отклонение не превышает 7%, для операционного риска – 20%.

Важным вопросом является корреляция между рисками. Как видно из рисунков А.1 и А.2 (Приложение А), корреляция между кредитным и рыночным рисками и между операционным и рыночным рисками меняется в течение рассматриваемого периода, но остается в пределах  $\pm 10\%$ . Тогда как корреляция между кредитным и операционным рисками (Приложение А) увеличилась с -5% (в начале периода) до 20% (в конце периода). Наиболее высокий уровень (21.4%) пришелся на середину 2009, в самый разгар кризиса.

Теперь перейдем к анализу динамики распределения рисков. Прежде всего, стоит отметить, что на основе исследования распределение кредитного риска характеризуется асимметрией влево. Распределение же рыночного риска является относительно симметричным и имеет наиболее тяжелые хвосты из всех трех рассматриваемых рисков (см. рисунки 4.1, 4.2, 4.3).

Полученные результаты подтверждают вторую из выдвинутых ранее гипотез в части кредитного и рыночного рисков. Как видно из рисунка 4.1, в течение периода 2008-2009 хвосты распределения стали тяжелее, свидетельствуя о повышении уровня риска.

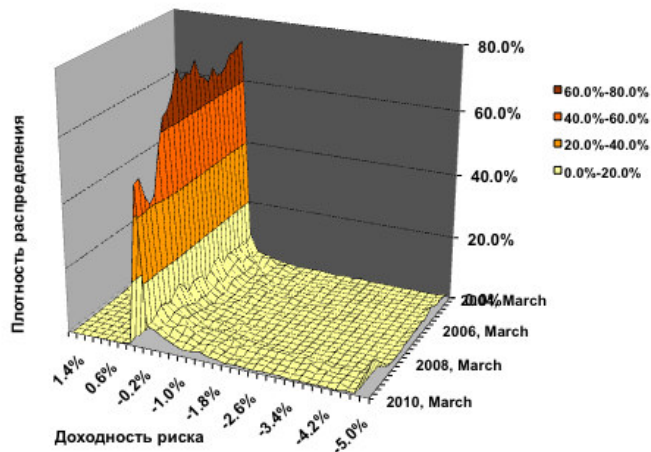


Рисунок 4.1 – Распределение кредитного риска

Такая же динамика наблюдается и для рыночного риска (см. рисунок 4.2). Хвосты его распределения также стали тяжелее в период 2008-2009. Это время характеризовалось существенным ухудшением макроэкономической ситуации. Таким образом, результаты подтверждают наличие процикличности в этих рисках.

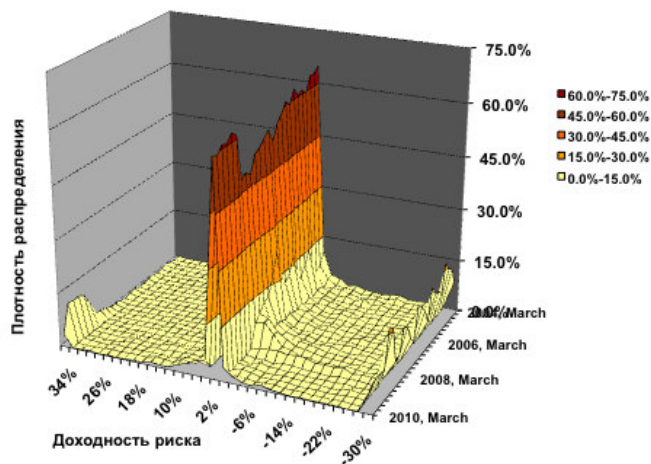


Рисунок 4.2 – Распределение рыночного риска

Поведение операционного риска, в свою очередь, не имеет ярко выраженного проциклического характера. Как видно из рисунка 4.3, распределение смещено в положительную область, и динамика распределения не зависит от фазы цикла.



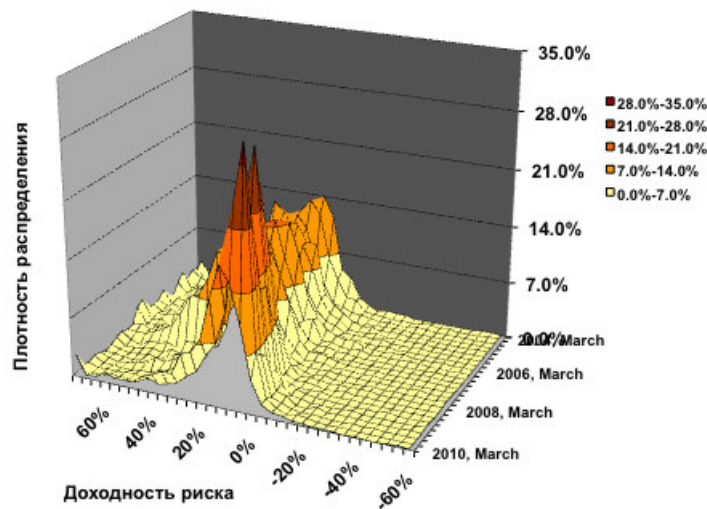


Рисунок 4.3 – Распределение операционного риска

Что касается вклада каждого риска в суммарный риск, то, как видно из рисунка 4.4, доля операционного и кредитного рисков существенно возрастает в период рецессии, тогда как доля рыночного риска падает. Динамика рыночного риска вызвана обесценением торгового портфеля банков и сокращением лимитов в кризис. Доля операционного риска достигла 60% в марте 2010 года, что сопоставимо с результатами работы [132]. Авторы показали, что доля операционного риска составляет 67.8%. Тем не менее, другие исследования приходят к иным выводам. Например, в работе [133] авторы нашли, что доля операционного риска составляет лишь 25%. Еще меньший размер вклада операционного риска (10.4%) приводится в [124].

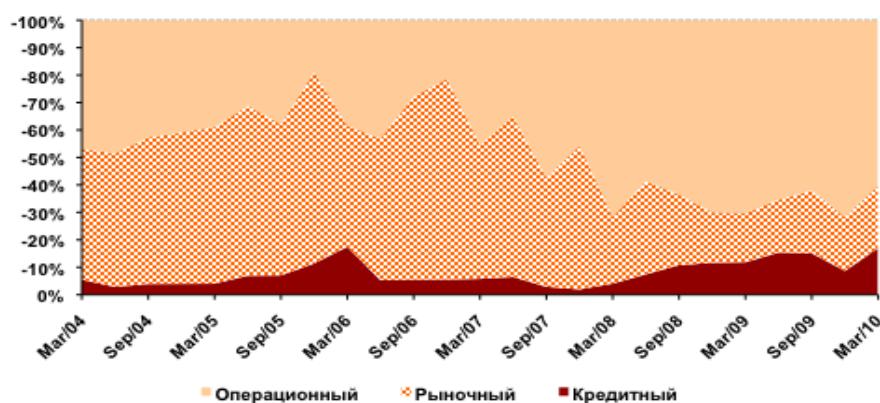


Рисунок 4.4 – Вклад отдельных рисков в суммарный риск

Важно подчеркнуть, что VaR оценки кредитного риска существенно возрастают в период рецессии, тогда как по операционному риску увеличение происходит в базе риска (см. рисунок 4.5).

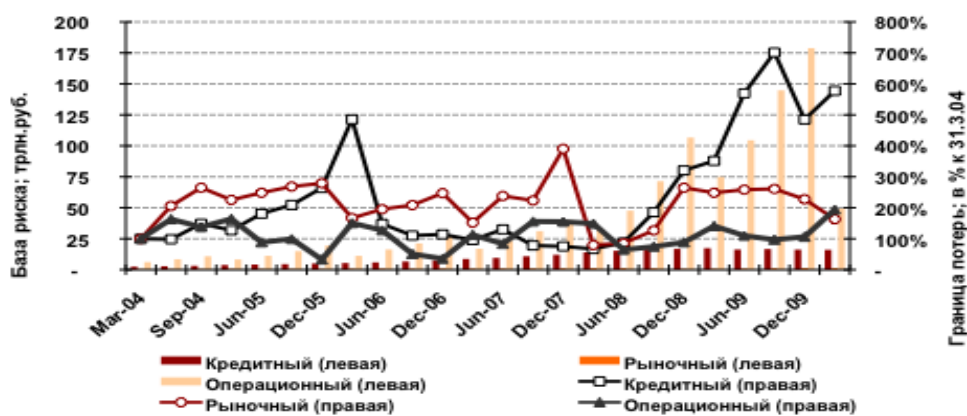


Рисунок 4.5 – Динамика VaR оценок и базы риска

Как видно из рисунка 4.5, с середины 2007 по начало 2008 граница потерь (VaR) рыночного риска существенно возросла. Причина заключается в сокращении доступа к финансированию на западных рынках. Российские банки были вынуждены переключиться на внутренние рынки, в результате чего они стали использовать рублевые процентные ставки для переоценки своих портфелей. В силу того, что рублевые процентные ставки существенно выше ставок на западных рынках, обесценение торговых портфелей оказалось значительным.

Для анализа первой гипотезы, которая говорит о том, что Базель II усиливает проциклическое поведение коэффициента достаточности капитала, необходимо рассмотреть динамику совокупного риска.

Как видно из рисунков 4.6 и 4.7, совокупный риск имеет ярко выраженную проциклическую динамику. В периоды подъема (2006 – начало 2007) распределение смещено вправо (см. рисунок 4.6). Когда же макроэкономическая ситуация ухудшилась, левый хвост распределения стал тяжелее (см. рисунок 4.7).

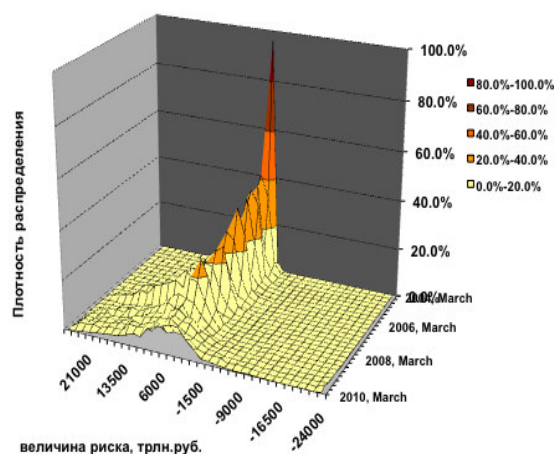


Рисунок 4.6 – Распределение агрегированного риска

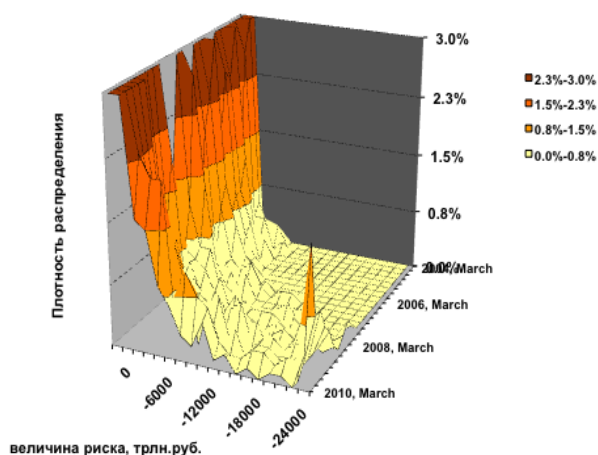


Рисунок 4.7 – Распределение агрегированного риска (левый хвост)

Динамика коэффициента достаточности капитала и взвешенных по риску активов к совокупным активам также свидетельствует о проциклическом характере Базель II. В противоположность фактическим значениям вышеупомянутых показателей (которые рассчитываются в соответствии с Базель I и остаются сравнительно стабильными на протяжении всего периода) рассчитанные в данной работе оценки демонстрируют волатильную и проциклическую динамику (см. рисунки 4.8 и 4.9). Они высоки в период подъема и существенно понижаются в период спада (2007-2009).

Интересно отметить, что до ухудшения макроэкономической ситуации темп роста капитала превышал темп роста совокупного риска. Это, в свою очередь, означает, что банки стремились нарастить капитал заблаговременно.

Динамика коэффициента достаточности капитала и взвешенных по риску активов к совокупным активам также свидетельствует о проциклическом характере Базель II. В противоположность фактическим значениям вышеупомянутых показателей (которые рассчитываются в соответствии с Базель I и остаются сравнительно стабильными на протяжении всего периода) наши оценки демонстрируют волатильную и проциклическую динамику (см. рисунки 4.8 и 4.9). Они высоки в период подъема и существенно понижаются в период спада (2007-2009).

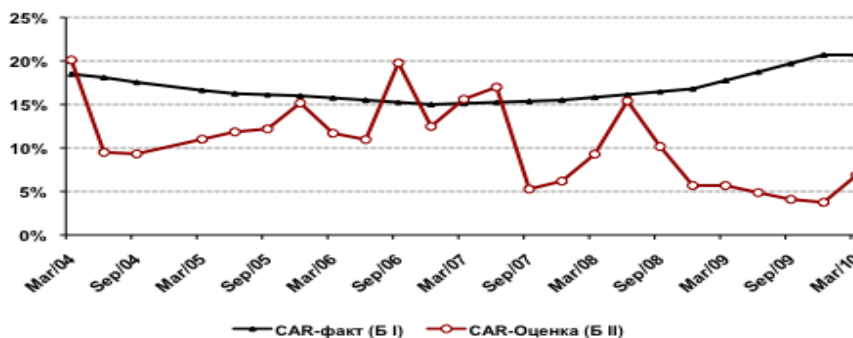


Рисунок 4.8 – Динамика коэффициента достаточности капитала (CAR)

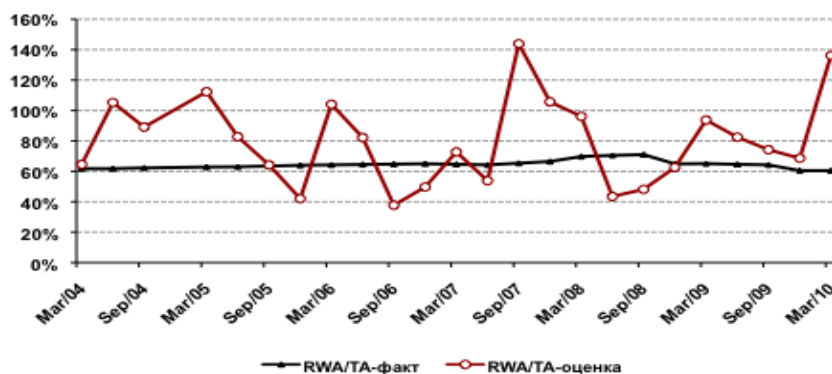


Рисунок 4.9 – Динамика отношения взвешенных по риску активов к совокупным активам (RWA/TA)

Интересно отметить, что до ухудшения макроэкономической ситуации темп роста капитала превышал темп роста совокупного риска (см. рисунок 4.10). Это, в свою очередь, означает, что банки стремились нарастить капитал заблаговременно.

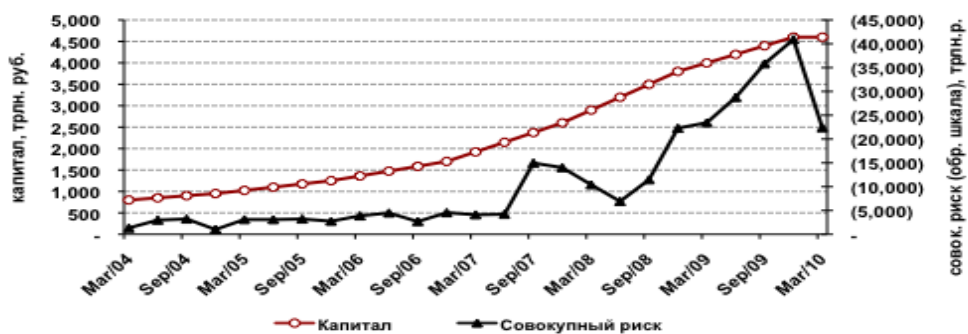


Рисунок 4.10 – Темп роста капитала и совокупного риска

После исследования эмпирического совместного распределения рисков проводится оценка совместного распределения с помощью моделей «копула».

Перед оценкой совокупного риска банковской системы России был оценен момент структурного сдвига в копуле совместного распределения кредитного, рыночного и операционного рисков на основе методологии, разработанной в работе [95].

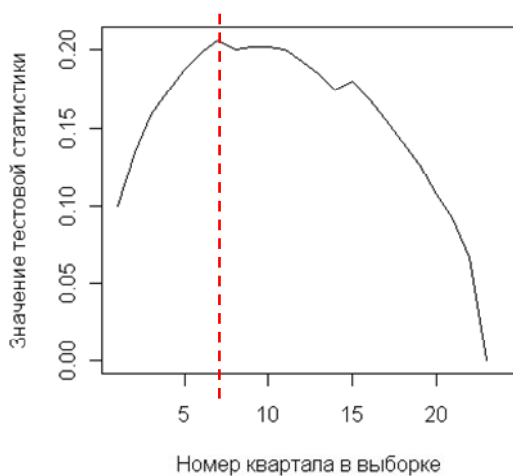


Рисунок 4.11 – График поиска момента структурного сдвига в зависимости рисков банковской системы России.

Пунктирной линией на рисунке 4.11 обозначена дата сдвига, которая соответствует седьмому кварталу в выборке, т.е. 30 сентября 2005 г. Как видно из Таблицы 4.1, оценка параметра копулы после даты сдвига уменьшилась для всех моделей, что характеризует уменьшение степени взаимосвязи рисков, т.е. повышение устойчивости банковской системы. Важно отметить, что у выявленной даты структурного сдвига имеется содержательное экономическое объяснение. Именно к этому момен-

ту ведущие рейтинговые агентства повысили кредитный рейтинг России до инвестиционного уровня.

На следующем этапе моделирования достаточности капитала банковской системы России была выбрана копула Клейтона, позволяющая смоделировать наиболее неблагоприятную взаимосвязь рисков.

Таблица 4.1 – Оценка копул совместного распределения рисков банковской системы России

Копула	До сдвига	После сдвига	Полная выборка
Гауссовская	0.61	0.48	0.54
Клейтона	2.04	1.17	1.37
Гумбеля	2.02	1.58	1.68
Франка	5.76	3.59	4.11

На рисунке 4.12 ниже приведена динамика достаточности капитала банковской системы России, рассчитанная ЦБ РФ в соответствии с Базель I (*Факт (Б I)*); соответствующая нормативу Инструкции ЦБ РФ № 110-И (*Норматив 110-И*); полученная на основе эмпирического совместного распределения (*Б II: IRB+ECDF*) и на основе восстановленного с помощью копулы распределения (*Б II: IRB+Copula*).

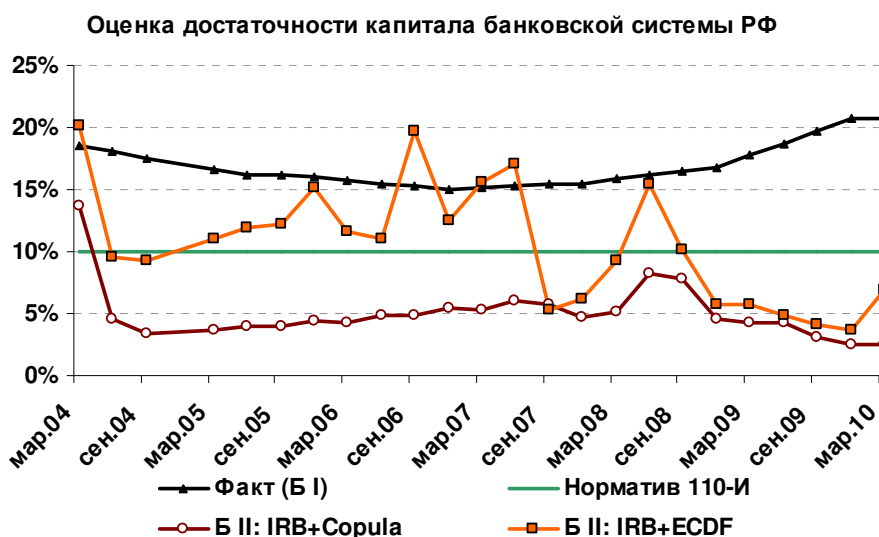


Рисунок 4.12 – Оценка достаточности капитала для разных подходов

Среди возможных мер по снижению процикличности требований к капиталу, которые могут быть использованы регулируемыми органами. Рассматриваются два подхода: корректировка уровня доверия и создание буфера капитала.

Результаты показывают (см. рисунок 4.13), что изменение уровня значимости не является существенным. В периоды подъема он может достигать 99.83%, а в периоды спада – опускаться до 98.15%.



Рисунок 4.13 – Динамика уровня доверия и темпа роста ВВП

(источник: РОССТАТ, [www.gks.ru](http://www.gks.ru))

Важный вопрос заключается в том, на основе чего стоит изменять уровень значимости. Возможным решением может служить учет макроэкономических переменных (например, темпа роста ВВП). Как видно из рисунка 4.13, темп роста ВВП может выступать сигналом для соответствующей корректировки уровня значимости. В работе [106] авторы предлагают использовать показатель «кредиты в отношении к ВВП» для определения периода экономического подъема и уровень совокупных потерь банковского сектора для определения периода экономического спада. Авторы показали, что показатель «кредиты в отношении к ВВП» растет и превышает свой долгосрочный тренд перед серьезными финансовыми потрясениями. Тем не менее, он не всегда может верно указать начало финансового кризиса, падая с запозданием и слишком медленно.

Для расчета же буфера капитала необходимо сравнить полученный нами минимально требуемый уровень капитала с фактическим размером капитала по системе. Полученное нами значение коэффициента достаточности капитала на 31.03.2010 составляет 6.9%, а фактический капитал равен 4.6 трлн. рублей. Чтобы достичь уровня 10% (который предписывается Центральным Банком России) совокупный капитал должен быть увеличен на 2.1 трлн. рублей. Данная величина и является буфером капитала.

#### 4.1.3 Заключение

В данном исследовании проанализирован проциклический эффект от введения Базель II и возможные меры по его снижению. Эта тема является актуальной для России в силу планируемого введения Базель II. Возможные изменения в поведении банков после введения Базель II на данном этапе не рассматривались.

Для уменьшения проциклическости можно использовать следующие регулятивные меры: корректировка уровня доверия при использовании моделей внутренних рейтингов в интервале 98.1%-99.9% и создание буфера капитала в размере 45% от текущего уровня капитала по системе.

Анализ возможностей по снижению проциклического эффекта регулятивных требований нуждается в дополнительном изучении, как с точки зрения опыта западных стран, уже работающих по Базель II, так и в свете тенденций, происходящих в российской экономике. В частности, необходимо учесть текущие процессы консолидации кредитных учреждений и нарушение механизма кредитования экономики через посредничество банков, получающих кредиты Банка России.

Как следует из динамики смоделированного норматива достаточности капитала, в период кризисного периода 2009-2010 гг. показатель достигал своего минимального значения в 4%. Осознавая консервативность полученной оценки, важно понимать, что введение Базель II в России требует проведения дополнительного исследования и калибровки предлагаемых в соглашении моделей и принятие мер по воздействию на банки, характеризующиеся высоким уровнем рисков в терминах Базель II. Таким образом, нет возможности однозначно утверждать о том, что Базель II будет иметь проциклический характер для российской банковской системы.



#### 4.2 Оценка взаимосвязи характера операций с деривативами и стоимости европейских банков

За последние три десятилетия деривативы приобрели большое значение в финансовом мире. Разновидности производных финансовых инструментов торгуются как на биржах, так и напрямую, без посредства бирж. Уже в 2006 году номинальная стоимость всех внебиржевых деривативов составила чуть более 400 триллионов долларов, превысив совокупный выпуск всех стран мира в 8 раз. Рынок деривативов привлекает всё большее количество участников благодаря высокой ликвидности – любому участнику рынка не составляет труда найти контрагента для совершения сделки. Всех участников рынка можно разделить на две группы: одни используют деривативы для хеджирования рисков, в то время как другие занимают компенсирующие позиции с целью извлечения прибыли от торговли.

В большинстве случаев конечной целью коммерческой организации является максимизация ее стоимости. В связи с этим возникает разумное предположение о том, что её стоимость так или иначе связана с характером её операций с деривативами, а так же с тем, насколько глубоко она вовлечена в эти операции. Таким образом, цель данного исследования заключается в изучении взаимосвязи стоимости коммерческих организаций (в первую очередь, банков) и характера их операций с деривативами.

В данном исследовании изучаются финансовые показатели 130 европейских банков из разных стран в динамике с 2005 по 2010 гг. Данные взяты из базы данных Bankscore, а так же собраны вручную из годовых отчетностей компаний.

Постановка цели данного исследования отнюдь не нова. В [97] авторы исследуют влияние операций с валютными деривативами на стоимость 720 крупнейших нефинансовых американских компаний. В качестве измерителя стоимости компании они берут  $q$ -Тобина, поэтому увеличение стоимости компании авторы отождествляют с тем, что инвесторы вознаграждают компанию за использование деривативов более высокой рыночной стоимостью. В другой работе [98] авторы исследуют влияние использования деривативов на риск и рыночную стоимость компаний. Стои-

мость компании в этой работе, как и во многих других (см., например, [113]), так же измеряется величиной  $q$ -Тобина. Практически во всех исследованиях детерминантом операций с деривативами являются фиктивные переменные, указывающие на сам факт использования или не использования фирмами деривативов. Такие переменные позволяют строить логистические регрессии и выявлять круг факторов, увеличивающих вероятность использования фирмами производных финансовых инструментов. Кроме этого авторы сравнивают средние значения интересующих переменных для двух подвыборок – фирм, использующих и не использующих деривативы, и на основе этого делают некоторые выводы и выдвигают гипотезы, в том числе и о влиянии деривативов на стоимость компании. Например, фирмы с большими возможностями для роста, которые измеряются расходами на НИОКР, вероятней используют деривативы [109].

В соответствии с поставленной целью предполагается проверка следующих гипотез:

- хеджирующие банки характеризуются ненулевой премией за риск;
- использование хеджирующих деривативов положительно связано со стоимостью банка;
- использование торговых деривативов может негативно быть связано со стоимостью банка;
- характер влияния деривативов на стоимость банка различен для системно-значимых и иных банков.

Структура этого подраздела, в котором проверяются указанные гипотезы, следующая. Вначале в пункте 4.2.1 даются базовые определения в соответствии со стандартами отчетности. Далее в пункте 4.2.2 приводится обзор литературы. Описание данных и методологии исследования приведены в пунктах 4.2.3 и 4.2.4. Исследование данных и построение моделей даны в пунктах 4.2.5 и 4.2.6. Завершает работу пункт 4.2.7 с ключевыми выводами.

#### 4.2.1 Определение дериватива

Все европейские банки ведут учет в соответствии с международными стандартами финансовой отчетности МСФО. Эти стандарты регламентируют порядок учета и отражения операций с финансовыми инструментами (в том числе и с деривативами) в отчетности, а так же содержат определения понятий, которые имеют прямое отношение к предмету исследования. Так как в определении дериватива фигурируют и другие понятия из стандартов [119], следует обозначить наиболее важные из них: финансовый актив, финансовое обязательство, справедливая цена, финансовый инструмент, дериватив, форвардный и фьючерсный контракты, опционы и свопы. Дополнительно описываются операции хеджирования.

*Финансовый актив* – это любой из следующих активов:

- наличность;
- *долевой инструмент* другого объекта (организации);
- право по контракту (получить наличность или другой *финансовый актив* от другого объекта, на обмен *финансовых активов* или *финансовых обязательств* с другим объектом на условиях);
- контракт/договор/соглашение, которое будет или может быть урегулировано в собственном долевом инструменте объекта и: а) не является деривативом, по нему объект обязан получить некоторое количество *долевых инструментов* объекта; б) является деривативом, который будет или может быть установлен не обменом фиксированного количества наличности или другого *финансового актива* на фиксированное число *долевых инструментов* объекта, а по-другому. По этой причине *долевые инструменты* объекта не включают *возвратные финансовые инструменты* (классифицируемые как *долевые инструменты* в соответствии с параграфами 16А и 16В [119]). Так же не включаются инструменты, которые налагают на объект обязательство предоставить другой стороне пропорциональную долю чистых активов объекта только в случае ликвидации (классифицируемые как *долевые инструменты* в соответствии с параграфами 16С и 16D [119]), или контракты на будущие получения или поставки *долевых инструментов* объекта.

Финансовое обязательство – противоположность финансовому активу.

Справедливая цена – это стоимость, по которой могут быть проданы активы или установлены обязательства между одинаково осведомленными и готовыми для этого участниками в независимой, совершаемой сделке «на расстоянии вытянутой руки», то есть сделке между сторонами, которые не имеют ни юридических, ни финансовых связей, что требуется для избегания конфликта интересов.

Финансовый инструмент – это контракт/договор/соглашение, которое увеличивает финансовый актив одного экономического объекта и финансовое обязательство или долевой инструмент другого экономического объекта.

Таким образом, дериватив – это финансовый инструмент или другой контракт в рамках Стандарта с тремя следующими характеристиками:

- его стоимость меняется в ответ на изменение цены базового актива (конкретной процентной ставки, цены финансового инструмента, цены товара, валютного курса, индекса цен или ставок, кредитного рейтинга или кредитного индекса, или другой переменной);
- он не требует каких-либо чистых начальных инвестиций или чистых начальных инвестиций, которые меньше тех, что потребуются для других типов контрактов, от которых ожидается схожая реакция на изменение рыночных факторов;
- он исполняется на будущую дату.

Необходимо кратко рассмотреть основные типы деривативов, которые используют коммерческие организации [116]: форвардные и фьючерсные контракты, опционы и свопы.

*Форвардный контракт* – это соглашение о продаже или покупке актива в определенный момент в будущем по определенной цене. Особенно популярны форварды на валюту, которые используются как для торговли, так и для хеджирования валютного риска (подробнее о хеджировании смотреть ниже).

*Фьючерсный контракт* – это тот же форвардный контракт, только торгуемый на биржах. У фьючерсного контракта существует много разных форм базового актива: процентные ставки, валютный курс, ценные бумаги, товары. Так как деятель-

ность коммерческих банков не связана с товарной продукцией, банки используют товарные фьючерсы исключительно для торговли.

Существует два основных вида *опционов* – *call* и *put*. Опцион *call* (*put*) дает владельцу право купить (продать) базовый актив в определенный момент в будущем по заранее определенной цене. Вопросы расчета маржинальных требований (гарантийных обязательств) выходят за рамки данной работы.

*Своп* – это соглашение между двумя сторонами об обмене денежными потоками в будущем. Обычно расчет потоков зависит от будущих значений рыночных переменных.

Указанные выше деривативы активно используются в операциях хеджирования.

В соответствии со Стандартом №39 [119] существует три вида операций хеджирования.

*Хеджирование справедливой стоимости актива* – хеджирование подверженности к изменению справедливой стоимости какого-либо актива или обязательства, находящегося на балансе компании. Это изменение может возникать вследствие зависимости стоимости актива или обязательства от некоторых финансовых величин (например, ставка процента или валютный курс), которые являются источником риска.

*Хеджирование денежных потоков* аналогично хеджированию справедливой стоимости актива, когда в роли стоимости актива выступает будущий денежный поток к компании или от неё;

Хеджирование чистых инвестиций в активы за рубежом – хеджирование инвестиций в зарубежные компании;

На практике хеджирование признается эффективным, если изменение цены хеджируемого инструмента составило 80-125% изменения цены хеджирующего. Доходы или убытки, удовлетворяющие условию эффективного хеджирования, отражаются в Прочем совокупном доходе, т.е. в капитале. Остальная часть идет в Отчет о прибылях и убытках.

Многие участники рынка деривативов прибегают к хеджированию с целью снижения определенного риска, который может относиться к цене нефти, валютному курсу или биржевому индексу.

Следует рассмотреть принципы хеджирования деривативами на примере фьючерсного рынка. Банку необходимо занять позицию, которая нейтрализует риск. Если предполагается, что банк получит (потеряет)  $a$  долларов из-за увеличения (снижения) цены некоторого актива на 1 доллар, то банку необходимо занять короткую фьючерсную позицию так, чтобы она влияла на денежные потоки банка ровно противоположенным образом, и, таким образом, устраняла риск. К примеру, американский банк ожидает некоторые денежные поступления в евро, однако он не имеет представления о будущем валютном курсе пары доллар/евро и, следовательно, о долларовом эквиваленте этих денежных поступлений. Валютный фьючерсный контракт позволяет избавиться от этой неопределенности и получить точное представление о размере будущего денежного потока.

Часто возникает вопрос о том, зачем вообще компании нужно прибегать к хеджированию, когда это могут сделать акционеры самостоятельно? Хеджирование рисков всей компанией имеет ряд преимуществ. Во-первых, менеджмент компании гораздо более осведомлен о рисках, с которыми сталкивается компания. Во-вторых, комиссионные и транзакционные издержки в расчете на один доллар меньше при крупных сделках. Кроме того большой размер фьючерсных контрактов не позволяет индивидуальным инвесторам совершать сделки. Однако акционерам гораздо проще диверсифицировать риск. Они могут составить портфель из акций компаний, производящих нефть и тех, которые используют ее в своем производстве. Таким образом, они устраняют подверженность риску, связанному с ценой нефти. Поэтому остается актуальным вопрос использования деривативов в компаниях и банках, не на уровне акционеров. Далее приводится обзор предыдущих исследований, посвященных данной теме.

#### 4.2.2 Обзор литературы

Авторы [109] изучают 372 нефинансовые фирмы из списка Fortune 500 по данным 1990 года. Это наиболее крупные по продажам компании в США. 41% этих фирм используют валютные свопы, форварды, фьючерсы, опционы и их комбинации. Авторы находят, что фирмы с большими возможностями для роста и более жесткими финансовыми ограничениями вероятней используют валютные деривативы. Это согласуется с тем, что фирмы используют деривативы, чтобы уменьшить изменчивость денежных потоков, что в противном случае может препятствовать прибыльному инвестированию.

Авторы провели одномерные тесты. Они сравнили средние значения различных переменных для 154 использующих и 218 не использующих деривативы компаний.

Различия во всех переменных, отвечающих за возможности роста, оказались значимыми. У использующих деривативы компаний отношение расходов на НИОКР к продажам больше, а отношение капитальных расходов к размеру компании и отношение бухгалтерской к рыночной стоимости меньше. Другие значимые различия включают следующие:

- 1) краткосрочная ликвидность – отношение денежных средств и краткосрочных инвестиций к текущим обязательствам – меньше у использующих деривативы;
- 2) стимулы менеджеров – логарифм рыночной стоимости акций, которые могут быть присвоены с помощью имеющихся опционов – больше у использующих деривативы;
- 3) большая информационная асимметрия – доля обыкновенных акций, которыми владеют институциональные собственники и количество инвестиционных компаний, работающих с фирмой – больше у использующих деривативы.

Незначимые различия наблюдаются по следующим показателям:

- 1) богатство управляющих – логарифм совокупной рыночной стоимости акций, которыми владеют акционеры и директора компании;

- 2) заменители хеджирования деривативами – отношение балансовой стоимости конвертируемого долга к размеру компании и отношение балансовой стоимости конвертируемого долга к размеру;
- 3) привилегированный налоговый режим - чистые убытки от основной деятельности к общим активам;
- 4) стимулы владельцев облигаций – отношение EBIT к расходам по выплате процентов и отношение остаточной стоимости долгосрочного долга к размеру.

Кроме этого компании должны иметь различия в издержках осуществления стратегии работы с деривативами. В среднем использующие деривативы фирмы оказались значительно больше: \$8.24 млн. против \$7.13 млн. (показатель – логарифм рыночной капитализации, выраженной в миллионах долларов). Так же они обладают большей подверженностью к валютному риску: различия почти во всех переменных значимы. В качестве переменных, описывающих подверженность к валютному риску, выступают отношения краткосрочного и долгосрочного иностранного долга к активам; отношение дохода от иностранных операций до вычета налогов к иностранным продажам; отношение иностранных и экспортных продаж к общим продажам. Средние значения этих переменных значимо больше у использующих деривативы фирм.

Авторы применяют логистическую регрессию для выявления факторов, влияющих на решения об использовании деривативов. Изучается взаимосвязь между вероятностью использования деривативов и стимулами к их использованию, подверженностью к валютному риску. Последнее возникает в том случае, если фирма имеет доход в иностранной валюте, продажи за рубежом, иностранный долг или имеет высокое значение доли импорта в общем производстве (импорт и внутреннее производство) в своей отрасли.

Таким образом, авторы рассмотрели детерминанты использования компаниями валютных деривативов с позиции менеджеров, держателей долговых обязательств и акций. Было выявлено, что фирмы с широкими возможностями для роста и слабыми возможностями внутреннего и внешнего финансирования наиболее вероятно ис-



пользуют деривативы. В общем, фирмы, использующие деривативы больше тех, что не используют деривативы. Так же они характеризуются большим вниманием со стороны инвестиционных компаний, большим институциональным владением и большим количеством опционов, находящихся в собственности менеджеров.

Предрасположенность фирмы к валютному риску влияет на возможные выгоды использования валютных деривативов и издержки осуществления стратегии использования деривативов. И эти выгоды, и издержки влияют на общее решение об использовании деривативов и на выбор их видов. В среднем, фирмы из выборки применяли деривативы для хеджирования, а не для торговли.

В эмпирической работе [97] авторы исследуют влияние операций с валютными деривативами на стоимость нефинансовых компаний. В выборку попали 720 крупнейших американских нефинансовых компаний. В качестве измерителя стоимости взят показатель  $q$ -Тобина. В статье авторы задаются вопросом: «Увеличивают ли операции с деривативами рыночную стоимость компании?» Это увеличение они отождествляют с тем, что инвесторы вознаграждают компанию за использование деривативов более высокой рыночной стоимостью.

Сначала авторы изучают различия в стоимости использующих и не использующих деривативы компаний. Они заключают, что первые обладают большими средними и медианными значениями величины  $q$ . Медианное значение выгоды (премии) от хеджирования составляет 0.07 (безразмерная величина). Медианная фирма из всей выборки обладает стоимостью \$2.07 млрд.  $q=0.95$ . Таким образом, разница в 0.07 говорит о том, что стоимость компаний, не оперирующих деривативами, меньше на \$152.5 млн., считая восстановительную стоимость активов постоянной.

Фирмы в выборке представляют совершенно разные отрасли экономики, в соответствии с этим авторы скорректировали величину  $q$ . Это было сделано для каждой фирмы путем вычитания из значения  $q$  этой фирмы медианного значения  $q$  среди всех компаний, оперирующих в той же области. Так же компании различаются по их отношению к риску, связанному с валютным курсом. Некоторые фирмы обладают значительной дебиторской задолженностью в иностранной валюте, поэтому

важность использования деривативов для хеджирования рисков повышается. Многомерные тесты выявили то, что премия от хеджирования у таких компаний (их около 90% в выборке) больше, чем в целом по всей выборке.

Валютные деривативы наиболее используемы и если уж компания проводит хоть какие-то операции с деривативами, то среди них, скорее всего, присутствуют валютные – так объясняют авторы причину исследования именно валютных деривативов.

Выборка в исследовании [97] состоит из всех нефинансовых компаний из базы COMPUSTAT, взятых за период с 1990 по 1995 гг., что дает 4320 наблюдений – по 6 наблюдений на каждую из 720 фирм. Авторы исключили финансовые компании, так как в большинстве они являются маркетмейкерами рынка деривативов и движущие ими силы могут быть совсем другими.

Уровень вовлеченности в хеджирование отражает показатель суммарной стоимости используемых валютных деривативов, в том числе и свопов. Эту информацию фирмы отражают в своей годовой отчетности.

В течение периода количество фирм, использующих деривативы, монотонно растет. Такая же тенденция наблюдается в отношении фирм, ведущих продажи за рубежом. Кроме этого, наблюдается общая тенденция к снижению количества компаний, не использующих деривативы, независимо от их зарубежной активности. Так же с течением времени растет общая стоимость деривативов.

Авторы провели одномерный тест – сравнение характеристик использующих и не использующих деривативы фирм. Рассчитали премию за хеджирование как разницу в значениях коэффициента отношения стоимости деривативов к стоимости зарубежных активов. Для шести средних величин и трех медианных эта разница оказалась статистически значимой. Это позволяет сделать вывод о том, что инвесторы оценивали фирмы, использующие деривативы, выше.

Авторы рассчитали средние и медианные значения величины  $q$ . В результате по некоторым годам разница получилась отрицательной и почти всегда статистически незначимой. Таким образом, в этом случае гипотеза авторов о наличии премии за хеджирование не находит своего подтверждения.

Был проведен многомерный тест – построение регрессий с исследованием влияния контрольных переменных на величину  $q$ . В результате авторы пришли к тому, что премия за хеджирование составляет 5.75% стоимости компании, то есть компании, проводящие операции хеджирования, стоят на 5.75% дороже не проводящих.

Так же авторы исследовали еще один вопрос: «Оценивают ли инвесторы выше те компании, которые ведут операции за рубежом?» Авторы проверяют эту гипотезу только в рамках тех компаний, которые имеют продажи за рубежом и, следовательно, более чувствительны к изменениям валютного курса. Результаты похожи на предыдущие: знаки коэффициентов те же самые, а премия за хеджирование еще выше – 8.8%. Инвесторы выше оценивают интернациональные компании, использующие деривативы. Все коэффициенты остаются значимыми даже на 1% уровне значимости.

Используя  $q$ -Тобина в качестве приближенного значения рыночной стоимости компании, авторы нашли значительные подтверждения того, что использование деривативов положительно сказывается на рыночной стоимости компании. Они обнаружили, что премия за использование деривативов составляет в среднем 5.7% стоимости, причем эта премия больше у тех компаний, которые работают в нескольких странах. Качественно результаты нечувствительны к многочисленным контрольным переменным, к способам определения и подсчета  $q$  и рыночной стоимости компании и к различным спецификациям модели. Помимо этого, авторы не отвергают гипотезу о том, что фирмы хеджируются оптимально, обладая при этом совершенно разными значениями коэффициента хеджирования (независимо от их стоимости).

Авторы считают свои результаты согласующимися со многими теориями. Так, следуя [126], хеджирование увеличивает стоимость фирмы посредством снижения ожидаемых налогов, издержек финансовой неустойчивости или других агентских издержек. Это происходит за счет выпуклой налоговой функции, снижения колебания стоимости компании и контроля над проблемой недоинвестирования – ситуацией, когда акционеры отклоняют положительные NPV проекты из-за последней очередности в выплате средств в случае банкротства фирмы. При том, что авторы [97]

считают свои результаты согласующимися с теоретическими предположениями, они ставят свою работу в отдельный ряд от других, так как в ней они отвечают на более фундаментальный вопрос: «Увеличивает ли хеджирование стоимость компании?», — тогда как большинство работ по данной тематике просто ищут и исследуют факторы, влияющие на решения о хеджировании.

В другой работе [98] авторы исследуют влияние использования деривативов на риск и рыночную стоимость компаний. Выборка состоит из 6888 нефинансовых фирм, размещенных в 47 странах. Авторы отдельно рассматривают валютные деривативы (FX), деривативы на процентные ставки (IR), товарные деривативы (CM) и исследуют воздействие от их использования на волатильность денежного потока, стандартное отклонение доходности по акциям, рыночную стоимость компании и коэффициент  $\beta$ .

Применяя тест Манна-Уитни-Вилкоксона<sup>12</sup>, авторы сравнивают средние значения переменных у фирм, использующих и не использующих деривативы. Различия во всех переменных, отвечающих за валовую подверженность к риску, оказались значимыми. То есть фирмы вероятней будут прибегать к хеджированию, если они обладают высокой валовой подверженностью к риску. Авторы утверждают, что результаты не меняются, если рассматривать использование деривативов по отдельности (валютные, процентные и товарные).

Риски активов и обязательств взаимосвязаны. Авторы используют данные фондового рынка и модель CAPM для исследования чистой подверженности к риску — того риска, с которым компания сталкивается после хеджирования. Если деривативы используются для хеджирования, то фирмы с изначально большой подверженностью (валовой) к риску вероятней будут использовать деривативы. В результате они будут демонстрировать такую же (по сравнению с не использующими), или даже ниже, чистую подверженность к риску. Получилось, что все показатели волатильности у не использующих выше, среднее значение  $\beta$  тоже выше. Таким образом, фирмы используют деривативы скорее для хеджирования, чем для торговли. Примеча-

---

<sup>12</sup> Суть теста состоит в ранжировании элементов сопоставляемых выборок и последующем суммировании рангов с расчетом специальной статистики, имеющей нормальное распределение.

тельно, что среднее значение  $q$  у использующих на 17% ниже (например, в [97] было иначе: у не использующих деривативы компаний  $q$  было ниже на 8-10%, чем у использующих).

Различия между странами могут влиять на склонность к хеджированию или торговле. Здесь результаты противоречивые. С одной стороны, в странах с высоким уровнем финансового риска фирмы используют деривативы чаще. С другой стороны, деривативы используются чаще в странах с низким уровнем экономического риска. Как и ожидалось авторами [98], фирмы вероятней будут прибегать к хеджированию, если рынок деривативов развит хорошо.

Фирмы вероятней прибегают к хеджированию, если они больше; если они чаще выплачивают дивиденды и если они отражают в отчетности опционы на акции. Для использующих деривативы доля материальных активов, расходы на НИОКР и капитальные расходы получились меньше – фирмы, использующие деривативы, обладают меньшими возможностями для роста (хотя в работе [109] обнаружена положительная взаимосвязь между расходами на НИОКР и использованием деривативов).

Изучив данные по каждому году, авторы [98] пришли к выводу, что хеджирование более полезно в период экономических спадов.

Использование деривативов превалирует у тех фирм, которые обладают большей подверженностью к риску процентных ставок, валютному риску и риску, связанному с ценами товаров. Несмотря на это, использующие деривативы фирмы обладают меньшими значениями общего и систематического рисков, что сигнализирует о том, что преобладает использование деривативов с целью хеджирования. Хеджирующие фирмы обладают меньшей волатильностью денежных потоков и сталкиваются с меньшим систематическим риском.

Авторы [98] не исключают возможности влияния смещения отбора и неучтенных переменных на их выводы. Это влияние должно быть довольно значительным, чтобы опровергнуть вывод, что у использующих деривативы фирм риск ниже. Напротив, эффекты влияния использования деривативов на стоимость фирмы довольно чувствительны к смещению.

Таким образом, все рассмотренные работы (включая [109],[97],[126],[98]) завершаются выводом о положительном влиянии деривативов на стоимость фирмы. Авторы этих работ соглашаются, что для целей хеджирования деривативы более активно используют фирмы, в большей степени подверженные соответствующим рискам. Тем не менее, в указанных работах приводятся разные оценки количественного влияния деривативов на стоимость фирм, а так же делается выбор в пользу разных детерминант, влияющих на решения об использовании деривативов в целом и о хеджировании в частности.

Недостатком же описанных работ является исключение из рассмотрения банков, что могло быть вызвано сложностью доступа и сбора требуемых данных. Поэтому далее будет описано, как была решена проблема сбора данных для целей настоящего исследования, поскольку актуальность задачи анализа влияния деривативов на деятельность банков сохраняется.

#### 4.2.3 Описание выборки

Большинство предыдущих исследований (см., например, [126] и [98]) по влиянию использования деривативов на стоимость компании основывались лишь на информации о том, использовали ли фирмы деривативы или нет. В этих исследованиях применялись модели бинарного выбора, где в качестве зависимых переменных выступали фиктивные переменные, отражающие сам факт использования или неиспользования деривативов. Такой подход не позволяет оценить степень вовлеченности компаний в операции с деривативами. Для этого необходимы данные по номинальным и справедливым стоимостям деривативов.

Кроме этого, в роли источников информации об использовании компаниями деривативов выступали данные опросов этих компаний. Опросы проводились авторами, например, через электронную почту, в результате чего большая доля компаний проигнорировала информационные запросы. Опять же, запросы предполагали лишь ответ на вопрос о том, использует ли компания деривативы или нет.

В данном исследовании выборка состоит из 300 крупнейших публичных европейских коммерческих банков. По сути, это первое исследование, охватывающее данные об операциях с деривативами по европейским банкам. Оно основывается на двух массивах данных.

Первый массив – это бухгалтерские данные из отчетов о балансе и о прибыли и убытках банков по 2005-2010 гг.. Данные получены из Bankscore и представляют собой значения следующих показателей в каждом году из рассматриваемого периода: чистая прибыль, активы, собственный капитал, депозиты, займы, торговые активы и обязательства, операционная прибыль, объем выплаченных дивидендов, количество акций, стоимость одной акции и другие (всего 69 переменных).

Второй массив – это данные из примечаний раскрытий к финансовой отчетности, собранные вручную по каждому банку в отдельности. Бухгалтерские данные из Bankscore собраны из этих же отчетностей автоматически благодаря тому, что баланс и отчет о прибылях и убытках представлены в финансовой отчетности в унифицированном виде, что позволяет автоматизировать поиск необходимых показателей и его представление в общей базе. Однако ситуация с деривативами осложняется тем, что детализированная по ним информация находится в примечаниях к отчетности. Эта часть отчетности, в зависимости от того, какие операции более существенны для банка, различается по каждому банку. В связи с этим представляется единственный способ извлечения необходимой информации по деривативам – это сбор данных вручную. Именно так были получены данные.

Форма раскрытия информации об использовании деривативов не унифицирована. По этой причине возникли сложности при сборе данных. Некоторые банки раскрывают информацию не самым детализированным способом, а некоторые вообще умалчивают об использовании деривативов в виду их нематериальности, то есть объем операций с деривативами этих банков относительно мал, и аудиторы принимают решение опускать эту информацию. В результате из имеющихся 300 банков, только по 130 удалось собрать данные, что с учетом временного периода в шесть лет дает 780 точек. Таким образом, в основе исследования лежит сбалансиро-

ванная панель данных. В итоге, удалось разработать единый формат, в котором численные показатели представлены в базе данных в следующих разрезах.

Во-первых, деривативы разделяются на торговые и хеджирующие. Хеджирующими деривативы признаются в том случае, если хеджирование признано эффективным. В остальных случаях деривативы признаются торговыми.

Во-вторых, деривативы разделяются в соответствии с базовым активом. Были выделены деривативы на процентные ставки (IR), на валюту (FX), на акции (EQ), кредитные деривативы (CR) и товарные (CM).

В-третьих, имеет место разделение по типу контракта: свопы, фьючерсы, опционы, форварды.

В итоге, такая спецификация практически полностью покрыла все направления использования деривативов. В тех случаях, когда эта форма не позволяла однозначно отнести данные к какой-то категории, данные приписывались к наиболее часто используемым всеми остальными банками деривативам. Эта методика не оказывает качественного влияния на выводы, так как, во-первых, при анализе модели деривативы были агрегированы по типу контракта, и, во-вторых, зачастую в спорных случаях значения показателей были относительно малы.

Стоимость деривативов определяется номинальной стоимостью контрактов, а так же справедливой стоимостью в активах (положительная переоценка) и справедливой стоимостью в обязательствах (отрицательная переоценка). В случае денежных нетто-поступлений по контракту они относятся к активам, а в случае нетто-выплат убытков – к обязательствам.

Таким образом, второй массив на основе примечаний к финансовой отчетности представляет собой набор из 75 переменных, структура которых представлена в Таблицах 4.2 и 4.3 ниже.

Таблица 4.2 – Хеджирующие деривативы

	Interest Rate	Foreign Exchange	Credit	Equity
Swap	•	•	•	•
Futures	•			
Options	•	•		•



Forward	•	•		
---------	---	---	--	--

Примечание: точка соответствует факту сбора соответствующих данных.

Таблица 4.3 – Торговые деривативы

	Interest Rate	Foreign Exchange	Credit	Equity	Commodities
Swap	•	•	•	•	
Futures	•	•		•	•
Forward	•	•			
Options	•	•		•	
Other	•		•		

Примечание: точка соответствует факту сбора соответствующих данных.

Банки в своих отчетностях представляют стоимости в валюте той страны, где они зарегистрированы. Для корректного исследования необходимо, чтобы все показатели были представлены в единой валюте. Поэтому показатели, представленные в таких валютах как британский фунт, доллар США, датская крона и др., переводились в евро по историческому курсу<sup>13</sup>. Причем для номинальных стоимостей, как показателей запаса, использовались валютные курсы на дату конца отчетного периода, а для справедливых стоимостей, как показателей потока, брались средние валютные курсы за отчетный период.

Суммарная величина активов банков в выборке составляет 51% от суммарной величины активов всей банковской системы Европы в 2010 году. Для того чтобы делать выводы о наличии эффектов типичных для генеральной совокупности, необходимо убедиться, что полученная выборка репрезентативна, т.е. в достаточной мере охватывает и представляет генеральную совокупность всех банков Европы. Ниже в Таблице 4.4 представлены аналогичные показатели для каждой из стран в 2010 году.

Таблица 4.4 – Репрезентативность данных относительно активов банковских систем выбранных стран

№	Страна	Банковских активов, млрд. евро.		% активов от общего
		Всего	Выборка	
1	Швеция	1398	1259	90%
2	Италия	2765	2485	90%

<sup>13</sup> Источник – [www.oanda.com](http://www.oanda.com)

3	Греция	493	424	86%
4	Бельгия	1151	962	84%
5	Англия	10187	7093	70%
6	Испания	3808	2647	70%
7	Словения	16	10	67%
8	Португалия	532	332	62%
9	Франция	6385	3863	60%
10	Кипр	144	85	59%
11	Дания	912	516	57%
12	Австрия	1131	527	47%
13	Польша	300	124	41%
14	Венгрия	120	35	29%
15	Ирландия	1179	313	27%
16	Чехия	162	28	17%
17	Финляндия	464	77	17%
18	Словакия	54	9	16%
19	Румыния	82	12	14%
20	Германия	7897	1074	14%
21	Мальта	51	6	11%
22	Болгария	38	0	0%
23	Эстония	31	0	0%
24	Литва	26	0	0%
25	Люксембург	820	0	0%
26	Латвия	29	0	0%
27	Нидерланды	2707	0	0%
	Итого	42881	21881	51%

Практически все страны с наиболее крупными банковскими системами представлены более 50%, за исключением Германии и Нидерландов, занимающих соответственно второе и шестое места по величине активов национальных банков. Тем не менее, поскольку в силу недостаточной представленности данных в выборке относительно совокупных банковских активов по странам, фокус исследования был смещен с анализа всех европейских банков к торгуемым европейским банкам, что нашло свое отражение в названии темы.

#### 4.2.4 Методология исследования

Влияние использования деривативов на стоимость банков исследуется посредством оценки регрессионной зависимости между переменными, характеризующими деятельность и стоимость банка и описывающими операции с деривативами.

Множество объясняемых переменных, характеризующих деятельность и стоимость банка, состоит из двух частей. Первая – это показатели рентабельности, рассчитанные как отношение прибыли к активам и собственному капиталу. В качестве прибыли берутся балансовые значения чистой прибыли и операционной прибыли. Значения по активам и собственному капиталу взяты на дату, соответствующую концу отчетного периода. Так же взяты средние значения активов и собственного капитала, рассчитанные как полусумма значений двух соседних периодов. Это сделано для учета того факта, что справедливые стоимости деривативов отражают результаты операции с деривативами в течение отчетного периода, а значения активов и собственного капитала в базе данных описывают лишь ситуации на конкретную дату.

Вторая группа переменных характеризует рыночную оценку стоимости банка, то есть то, во сколько инвесторы оценивают банк. Эти переменные связаны с одним показателем – ценой акции в конце отчетного периода. К ним относятся сама цена акции, доходность по этой цене и капитализация компании, которая нормируется на величину активов. Таким образом, количество зависимых переменных составляет одиннадцать показателей.

По причине того, что стоимость деривативов измеряется триллионами долларов и зависимые переменные рассчитаны как относительные показатели, представляется разумным для целей согласованности подхода в качестве объясняющих переменных использовать так же относительные показатели. Благодаря такому подходу – исследованию относительных показателей – учитывается эффект масштаба, который заключается в том, что более крупные банки используют деривативы в большем абсолютном объеме (данный факт подтверждается высокими значениями коэффициентов парной корреляции между стоимостью деривативов и объемом активов).

Зависимые переменные также подразделяются на две группы – переменные потока и запаса. К переменным запаса относятся отношения номинальных стоимостей деривативов (являются показателями запаса) к объемам активов на конец отчетного периода. Эти переменные характеризуют степень вовлеченности банка в операции с деривативами, так как они отражают то, как между собой соотносятся номинальные стоимости деривативов и объем активов, то есть размер банка. Эта группа насчитывает девять переменных (пять на торговые и четыре на хеджирующие деривативы), каждая из которых соответствует деривативам с одним из пяти базовых активов. Такое разделение позволяет определить, большая активность в использовании каких деривативов положительно связана со стоимостью банка.

Переменные потока представлены двумя наборами переменных. Первый – это отношения справедливых стоимостей в активах и обязательствах (являются переменными потока) к номинальным стоимостям. Эти отношения характеризуют доходность операций с деривативами, так как отражают величину денежных потоков относительно общего объема используемых деривативов. Если по некоторым наблюдениям номинальная стоимость составляет ноль, то из-за проблем деления на ноль доходность принимается нулевой, то есть предполагается, что реализуемая доходность от неиспользования деривативов составляет ноль.

Второй набор объясняемых переменных состоит из отношений разностей между справедливыми стоимостями в активах и обязательствах к номинальным стоимостям деривативов. Они характеризуют чистую доходность по операциям с деривативами.

В связи с тем, что по переменным потока имеется большое количество нулевых значений, то для целей дальнейшего исследования эти переменные разделяются лишь на торговые и хеджирующие, без привязки к базовому активу. Таким образом, переменные потока разделяются на две группы, где в одной группе четыре переменные ( $H\_FVA$ ,  $H\_FVL$ ,  $T\_FVA$  и  $T\_FVL$ ), в другой – две ( $H\_FVA\_FVL$  и  $T\_FVA\_FVL$ ).

Для учета временного эффекта добавлено пять фиктивных переменных, отвечающих за годы, каждая из которых принимает значение единицы в конкретном году и ноль в других.

Чтобы учесть межстрановые различия применяются две группы переменных. Первая состоит из пяти фиктивных переменных, отвечающих за принадлежность страны к одному из пяти регионов: Еврозона, Великобритания, Центральная и Восточная Европа, Северная Европа и Южная Европа. Такое агрегирование было введено по причине того, что некоторые страны представлены малым количеством банков. Вторая группа состоит из трех макроэкономических переменных – ВВП страны, темп прироста ВВП и темп инфляции в стране за год. Эти макроэкономические переменные так же могут описывать межстрановые различия, и их главное преимущество перед фиктивными переменными заключается в их широкой изменчивости. Необходимо отметить, что в отдельной модели использовались либо фиктивные переменные регионов, либо макроэкономические переменные, но не все одновременно.

Таким образом, 11 зависимых переменных, 3 группы объясняющих переменных и 2 группы переменных стран дают 66 различных спецификаций регрессионных моделей без константы, которые были рассмотрены. Для оценки регрессионной зависимости используется метод наименьших квадратов. Наиболее интересные 12 итоговых спецификаций приведены в Приложении Б.

В ноябре 2011 года Совет по Финансовой Стабильности опубликовал список 29 системно-значимых банков – финансовых институтов, устойчивость которых играет важную роль во всей экономике. Поэтому за этими банками осуществляется более строгий контроль, и более жесткие требования предъявляются к уровню капитала. С учетом того, что из этих 29 банков 10 присутствуют в выборке, возникает необходимость проверить рассматриваемую выборку на однородность, для чего будет проведен тест Чоу, проверяющий нулевую гипотезу о равенстве коэффициентов в модели на двух подвыборках: системно-значимых банков и всех остальных.

#### 4.2.5 Первичный анализ данных

Сначала была рассмотрена динамика вовлеченности банков в операции с деривативами. В период с 2005 по 2010 годы растет количество банков, использующих

деривативы (см. рисунок 4.14). Кроме этого, так же растет суммарная номинальная стоимость деривативов как в абсолютном значении, так и в относительном (см. Приложение Б.4). Интересно отметить падение номинальной стоимости хеджирующих и рост торговых деривативов в кризис 2008 года.

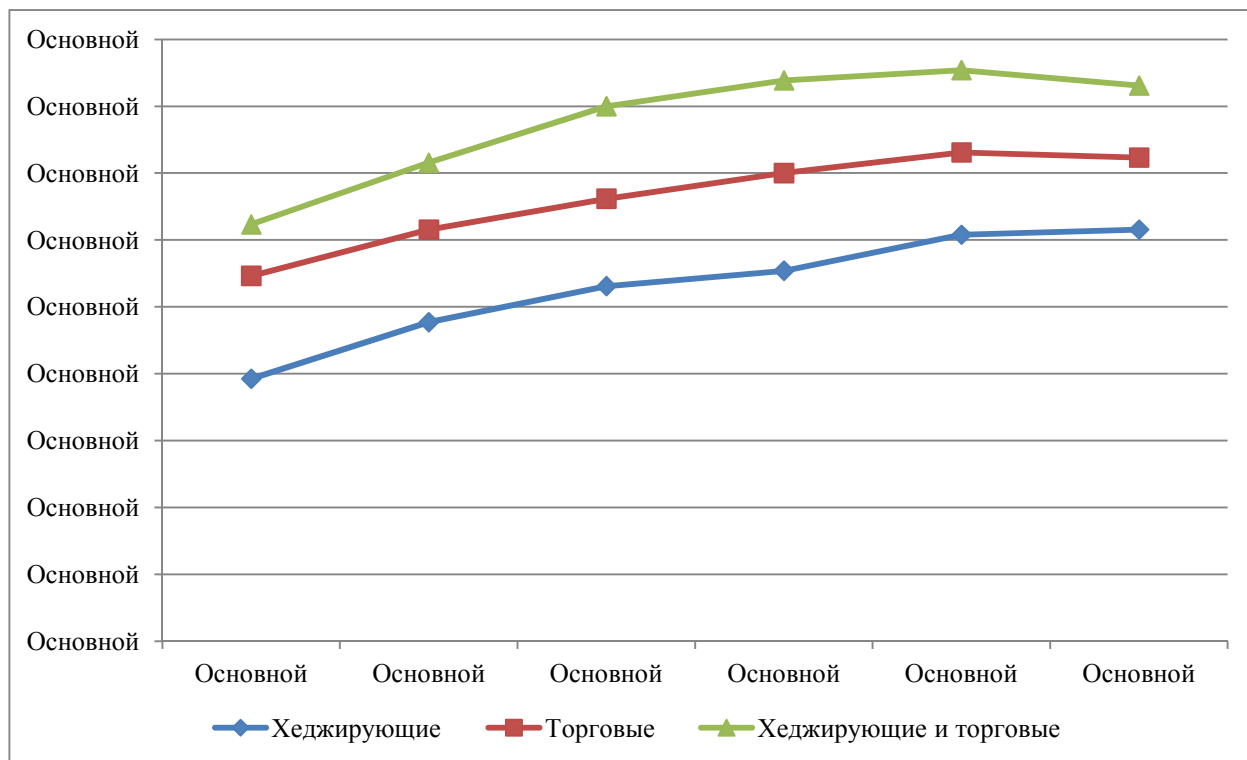


Рисунок 4.14 – Доля банков, использующих деривативы

Отдельный интерес представляет премия за хеджирование, которая представляет собой разницу в значениях рентабельности или доходности между банками, которые хеджируют и не хеджируют свои риски при помощи деривативов. Отметим, что число банков, использующих хеджирующие деривативы, растет с 51 в 2005 году до 80 в 2010 году.

Были рассчитаны средние значения показателей рентабельности (*ROAA*, *ROAE*), доходности (*Return*) и риска (*Risk*) (см. Приложение Б.1):

Таблица 4.5 – Сравнение показателей хеджирующих и нехеджирующих банков

	Хеджирующие банки	Не хеджирующие банки	t-статистика
<i>ROAA</i>	1.23%	1.28%	0.22
<i>ROAE</i>	10.51%	10.51%	0
<i>Risk</i>	2.4%	2%	3.19*
<i>Return</i>	0.26%	6.55%	-1.82*
<i>q</i>	1.04	1.03	0.2461

Примечание: \* Значимо на 5%.

Видно, что хеджирующие банки характеризуются более низкой доходностью акций (0.26% против 6.55%) и более высокой волатильностью прироста цены акции (2.4% против 2%). Данное наблюдение частично противоречит результатам, описанным ниже и ожиданию того, что хеджирующие банки будут демонстрировать более устойчивую динамику цены.

В Приложении Б.3 представлены рассчитанные коэффициенты корреляции, значимые из которых выделены жирным. В части деривативов присутствует высокие положительные значения коэффициентов корреляции между номиналами и всеми переменными, отвечающими за стоимость компании: балансовую (*ROAA*, *ROAE*, *NI*) и рыночную (*Cap*, *q*). В частности, отношения номиналов торговых деривативов и капитализация положительно взаимосвязаны.

В Приложении Б.4 для наглядности представлено несколько диаграмм разброса переменных, участвующих в спецификациях модели.

Таким образом, в рассмотренных регрессиях (см. Приложение Б.5) наблюдается взаимосвязь между балансовыми показателями стоимости банка и объясняющими переменными потока: доходность по торговым деривативам отрицательно связана с рентабельностью собственного капитала (регрессия 6) и положительно с доходностью акций (регрессии 3 и 4). Кроме этого видна обратная взаимосвязь между доходностью по хеджирующим деривативам и величинами *q* и *Risk* (регрессии 1, 2 и 5). Так же переменные запаса демонстрируют взаимосвязь со всеми объясняемыми переменными. Из них значимыми чаще всего являются переменные, отражающие операции с процентными деривативами, при это знаки коэффициентов различаются для разных базовых активов. Степень вовлеченности в использование торговых деривативов положительно связана с риском (регрессия 9).

Положительные коэффициенты в регрессиях 3 и 4 могут говорить о том, что инвесторы, видя высокую степень вовлеченность банка в операции с деривативами, выше оценивают акции этой компании. Знаки коэффициентов можно интерпретировать следующим образом: использование хеджирующих деривативов снижает риск, что соответствует меньшей доходности. Напротив, участие в операциях с целью из-

влечения прибыли способствует увеличению риска. Следует отметить, что знаки полученных коэффициентов перед доходностями по дериватам не противоречат знакам коэффициентов перед чистой доходностью по дериватам. Коэффициент перед чистой доходностью по хеджирующим дериватам получился отрицательным, а перед торговыми дериватами – положительным. Такая зависимость прямо подтверждает рассчитанные ранее средние значения переменных для двух подвыборок – хеджирующих и не хеджирующих банков. Следуя расчетам, первым свойственна меньшая доходность акций и более высокая волатильность прироста цены акции. Таким образом, можно предположить двоякую интерпретацию: сам факт хеджирования дериватами положительно связан с волатильностью цен акций; влияние же чистой доходности по дериватам ровно противоположенное. Данный аргумент подтверждается тем, что при оценке регрессии 15 только по хеджирующим банкам коэффициенты сохраняют знаки и становятся еще более значимыми (t-статистики находятся на уровне 6-9). Кроме того, степень вовлеченности в хеджирование отрицательно коррелирует с переменной *Risk*, что свидетельствует о более низкой волатильности цен акций банков, активно вовлеченных в операции хеджирования. Таким образом, вопрос о влиянии хеджирования на волатильность цен акций компаний требует дальнейшего исследования.

Для учета временного эффекта в модель были включены годовые фиктивные переменные. Сопоставляя значения коэффициентов, можно сравнивать рентабельности и доходности по годам. Например, в 11-й спецификации коэффициенты по 2006 и 2007 годам соответственно равны 1.82 и 2.07. Значит, при прочих равных условиях, рентабельность в 2006 году была меньше, чем рентабельность в 2007 году, а последняя, в свою очередь, меньше чем в рентабельность в 2010 году. В регрессиях рентабельности коэффициент 2008 года незначим, а в регрессиях рыночных показателей меньше коэффициентов других годов. Это объясняется тем, что в 2008 году компании получали высокие как положительные, так и отрицательные прибыли, а цены акций преимущественно в этот год падали. Таким образом, был учтен временной эффект, что позволяет оценивать влияние использования деривативов компа-



ниями на их стоимость, невзирая на то, что данные относятся к различным временным периодам.

Чтобы исключить влияние фактора принадлежности к определенной стране были включены переменные, отражающие межстрановые различия. Значимость коэффициентов перед фиктивными переменными регионов меняется от регрессии к регрессии, причем чаще всего они значимы в регрессиях риска (5, 9-10). Аналогично можно сравнивать регионы по тому, какой вклад в стоимость компании они вносят. Во всех регрессиях темп прироста ВВП и инфляцию являются значимым фактором. Уровень ВВП значим чуть реже.

Ниже представлены уравнения двух регрессий с комментариями к оцененным коэффициентам.

### Спецификация 13

$$\widehat{ROAE} = 13.24 * h_{ir_{nas}} - 15.37 * h_{fx_{nas}} - 245.5 * h_{cr_{nas}} - 0.027 * t_{ir_{nas}} + 1.76 * t_{fx_{nas}} + 3.63 * t_{eq_{nas}} - 4.9 * t_{cr_{nas}} + 20.63 * t_{cm_{nas}} + 7.46 * Year_{2005} + 9.37 * Year_{2006} + 10.33 * Year_{2007} + 2.6 * D_{euro} + 6 * D_{north} + 10 * D_{south} + 10 * D_{cee} + 6.7 * D_{gb}.$$

Из значений коэффициентов следует, что рост номинальной стоимости по отношению к величине активов на единицу ведет к росту рентабельности на 13.24% для хеджирующих валютных деривативов; падению на 15.37% для хеджирующих валютных деривативов; падению на 245.5% для хеджирующих кредитных и аналогично для остальных показателей.

### Спецификация 5

$$\widehat{return} = 206 * t_{fvafvl} + 83.75 * Year_{2005} + 83.33 * Year_{2006} + 49.07 * Year_{2007} + 84.11 * Year_{2009} + 50.14 * Year_{2010} - 59 * D_{euro} - 49 * D_{north} - 50 * D_{south} - 43 * D_{cee} - 54 * D_{gb}.$$

Рост величины чистой доходности в размере 1% от номинала ведет к росту годовой доходности акции на 2.06% для торговых деривативов.

Была отклонена гипотеза об однородности выборки, что свидетельствует о неоднородности всей выборки и специфичности системно-значимых банков. Так же

были проведены тест Уайта на гетероскедастичность ошибок и тест Вулдриджа [136] на автокорреляцию ошибок. В половине регрессий нулевая гипотеза отвергается, поэтому необходим учет гетероскедастичности и автокорреляции в моделях, что будет дано в расширении текущего исследования. Кроме этого была отклонена гипотеза о нормальности остатков с использованием статистики Харке-Бера при всех спецификациях.

В Приложении Б.5 представлены результаты расчета F-статистики для теста Чоу, а так же оценки коэффициентов в трех спецификациях по общей выборке (POOLED) и двух подвыборках (GSIB, NON-GSIB). В спецификациях 1 и 3 не отвергается гипотеза об однородности всей выборки, даже, несмотря на то, что оценки коэффициентов меняют свои знаки в регрессиях системно-значимых банков. Однако в спецификации 2 гипотеза была отклонена, что свидетельствует о неоднородности всей выборки и специфичности системно-значимых банков. Поэтому необходимо принимать во внимание то, что влияние эффективности доходности на риск у системно-значимых банков больше, чем у остальных (значение коэффициента -5.67 против -2.19).

#### 4.2.6 Заключение

В данном подразделе отчета приведены результаты исследования влияние использования деривативов европейскими банками на их стоимость.

Ценность данного исследования заключается в том, что оно основано на уникальной базе данных по использованию деривативов европейскими банками. Эта база данных позволяет оперировать количественными показателями использования деривативов, таких как номинальная стоимость, положительная и отрицательная переоценка. Все деривативы классифицированы по нескольким параметрам:

- по цели использования - торговые или хеджирующие;
- по базовому активу;
- по типу дериватива.

Благодаря такой базе данных есть возможность рассматривать эффект от влияния использования деривативов с разными базовыми активами на стоимость компаний в разрезе стран и с учетом различных лет.

В качестве переменных отражающих стоимость банка выступают рыночные показатели, а так же различные показатели доходности на капитал и на активы. Сам объем активов не является конечной целью управления банком. Менеджмент банка стремится к высоким показателям прибыли и высокой оценке компании со стороны инвесторов.

Из анализа 66 спецификаций регрессий можно сделать вывод: эффективно использующие деривативы фирмы имеют большую стоимость, что согласуется с работами [109] и [126]. В соответствии с описательными статистиками, хеджирующие фирмы показывают меньшую доходность по акциям (ниже на 6.29 процентных пункта), при этом среднее значение волатильности цены акции выше (2.4% против 2). Так же использование торговых деривативов положительно связано с ростом доходности акций банков, а хеджирующих, наоборот, отрицательно связано с величиной  $q$ . Поэтому можно предположить, что инвесторы положительно оценивают активное ведение банками операций торговли. В исследовании был учтен временной эффект и межстрановые различия в качестве контрольных переменных, что позволяет считать результаты устойчивыми. Дополнительно было выявлено, что влияние деривативов на стоимость банка значимо различается для системно-значимых и иных банков в части влияния доходности по хеджирующим деривативам и стоимостью банка.

Предполагается несколько направлений дальнейшего развития данного исследования.

Во-первых, возможно ежегодное пополнение базы данных в связи с выходом новых финансовых отчетов.

Во-вторых, возможно исследовать решение банков о хеджировании или использовании деривативов вообще при помощи моделей бинарного выбора, как это сделано в большинстве имеющихся работ по данной тематике (см., например, [126] и [98]).

В-третьих, представляет интерес выявление групп банков, однородных в терминах характера операций с деривативами.

В-четвертых, наличие временного разреза позволяет применять методы работы с панельными данными, где выбор оптимальной модели основан на сопоставлении тестовых статистик Лагранжа и Хаусмана.

Результаты исследования, представленные в этом разделе, нашли отражение в работе [92] и препринте [96]:

1. Andrievskaya I.K., Penikas H.P. Copula-application to modeling Russian banking system capital adequacy according to Basel II IRB-approach// Model Assisted Statistics and Applications, Vol.7, 2012, pp.267-280.
2. Gomayun N., Penikas H., Titova Y. Do Hedging and Trading Derivatives Have the Same Impact on Public European Bank's Value and Share Performance?, WP BRP 09/FE/2012.

## 5 РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ И РАЗРАБОТКА ОРДИНАЛЬНЫХ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ ДЛЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

В этом разделе отчета приведены результаты исследований по теории важности критериев.

подавляющее большинство применяемых на практике методов анализа многокритериальных задач принятия решений используют информацию об относительной важности критериев, однако само понятие важности критериев не определяется [137],[138],[151],[152]. Математическая теория важности критериев была создана в России (историю и библиографию см. [148],[149]). Её первый раздел – теория качественной важности критериев – опирается на строгие определения понятий «один критерий важнее другого» и «критерии равноважны». На основе этих определений были разработаны, помимо всего прочего, решающие правила, т.е. методы построения отношений предпочтения и безразличия, порождаемые всей имеющейся информацией о важности критериев – совокупностью сообщений о равенстве или превосходстве в важности одних критериев над другими.

В общем случае эти решающие правила являются комбинаторными [143],[145],[146],[154],[155] и потому достаточно сложны с вычислительной точки зрения. Однако для задач, в которых все критерии упорядочены по важности, удалось разработать аналитические решающие правила [142],[144]. Но при этом предполагалось, что шкала критериев – порядковая, т.е. известно лишь, что предпочтения вдоль шкалы возрастают.

Однако на практике часто имеется информация о характере изменения предпочтений вдоль шкалы критериев. Ранее были разработаны решающие правила, использующие такую информацию, только для случая количественной важности. Поэтому актуальной является задача разработки решающих правил для случая качественной информации о важности критериев.

В отчете представлены аналитические решающие правила, разработанные в предположении существования количественной важности для случаев, когда допол-

нительно известно, что рост предпочтений вдоль шкалы критериев замедляется или же, наоборот, ускоряется, а также алгоритмическое решающее правило, не использующее указанного предположения.

### 5.1 Математическая модель и сведения из теории важности критериев

Дальнейшее изложение опирается на следующую математическую модель ситуации принятия (индивидуального) решения в условиях определенности при многих критериях:

$$M = \langle \tau, X, f_1, \dots, f_m, Z_0, R \rangle,$$

где  $\tau$  – тип постановки задачи (выбрать один наилучший вариант или же заданное число лучших вариантов, упорядочить все варианты по предпочтительности и т.д.);  $X$  – множество вариантов (число вариантов не менее двух),  $f_1, \dots, f_m$  – критерии ( $m \geq 2$ ),  $Z_0 = \{1, \dots, q\}$  – множество шкальных градаций, или, кратко, шкала критериев ( $q \geq 2$ ),  $R$  – отношение нестрогого предпочтения. Под критерием  $f_i$  понимается функция, определенная на  $X$  и принимающая значения из  $Z_0$ . Отметим, что критерии с общей шкалой называются *однородными* [142],[148]. Критерии  $f_i$  образуют *векторный критерий*  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Каждый вариант  $x$  из множества  $X$  характеризуется его *векторной оценкой*  $y(x) = f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ . Множество всех векторных оценок есть  $Z = Z_0^m$ . Поэтому сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их векторных оценок.

Отношение нестрогого предпочтения  $R$  определяется на множестве  $Z$ :  $yRz$  означает, что векторная оценка  $y$  не менее предпочтительна, чем векторная оценка  $z$ . Отношение  $R$  порождает отношение безразличия  $I$  и (строгого) предпочтения  $P$ :  $yIz \Leftrightarrow yRz \wedge zRy$ ;  $yPz \Leftrightarrow yRz \wedge z \not R y$  (запись  $z \not R y$  означает, что  $zRy$  неверно). Далее полагается, что отношение  $R$  есть частичный квазипорядок (оно рефлексивно:  $yRy$  верно для любого  $y \in Z$ , и транзитивно: для любых  $y, z, u \in Z$  из  $yRz$  и  $zRu$  следует  $yRu$ ), так что отношение  $P$  – строгий частичный порядок (оно иррефлексивно:  $y \not R y$  для любого  $y \in Z$ , и транзитивно), а отношение  $I$  – эквивалентность (оно рефлексивно, транзи-

тивно и симметрично: для любых  $y, z \in Z$  из  $yRz$  следует  $zRy$ ). При разработке математической модели  $M$  отношение  $R$  строится (выявляется полностью или только частично) на основе информации о предпочтениях лица, принимающего решение (ЛПР). Правило, задающее указанным образом отношение  $R$ , называется *решающим правилом*.

Предполагается, что каждый из критериев независим по предпочтению от остальных и его бóльшие значения предпочтительнее мéньших. Другими словами, если  $v_k$  – (неизвестная) ценность градации  $k \in Z_0 = \{1, \dots, q\}$ , то

$$v_1 < v_2 < \dots < v_q \quad (5.1)$$

(это и означает, что предпочтения возрастают вдоль шкалы критериев). Таким образом, если о ценностях градаций известно лишь, что выполнены неравенства (5.1), то шкала критериев является порядковой, а числа  $k$  в  $Z_0$  отражают лишь упорядоченность градаций по предпочтительности.

Далее для векторов из  $\text{Re}^n$  (при  $n \geq 2$ ) будем использовать следующие обозначения:

$$a \geq b \Leftrightarrow (a_i \geq b_i, i = 1, \dots, n); \quad a \geq b \Leftrightarrow (a \geq b, a \neq b); \quad a > b \Leftrightarrow (a_i > b_i, i = 1, \dots, n).$$

Если никакой информации о предпочтениях ЛПР нет, то в роли отношения  $R$  выступает отношение Парето  $R^0$ , которое с учетом принятого допущения о том, что с ростом номера градации растет ее ценность, определяется на  $Z$  следующим образом:

$$yR^0z \Leftrightarrow y \geq z.$$

Отметим, что отношение нестрогого предпочтения  $R^0$  порождает отношение безразличия  $I^0$ , являющееся отношением равенства векторов, и отношение (строгого) предпочтения  $P^0$ , определяемое так:  $yP^0z \Leftrightarrow y \geq z$ .

Пусть имеется качественная информация о важности критериев  $\Omega$ , состоящая из сообщений вида  $i \approx j$  (критерии  $f_i$  и  $f_j$  равноважны) и  $i \succ j$  (критерий  $f_i$  важнее критерия  $f_j$ ). Точные определения этих понятий даны в [143],[145],[154],[155]. Решающее

правило, задающее отношение  $R^\Omega$  с использованием информации о важности  $\Omega$ , в общем случае является комбинаторным.

Информации  $\Omega$  соответствуют *коэффициенты важности*  $\alpha_i$  – положительные числа, в сумме равные единице и удовлетворяющие условиям:

$$i \succ j \in \Omega \Rightarrow \alpha_i > \alpha_j, \quad i \approx j \in \Omega \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j. \quad (5.2)$$

Далее будем полагать, что информация  $\Omega$  является полной и непротиворечивой, т.е. она упорядочивает по важности все критерии. Для простоты записи будем считать, что все критерии упорядочены и перенумерованы в порядке невозрастания их относительной важности (так что наиболее важен критерий  $f_1$ , а  $f_m$  – наименее важный критерий). При такой информации соответствующие ей коэффициенты важности (они называются *порядковыми*, или *ординальными*) удовлетворяют неравенствам:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_m > 0; \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1, \quad (5.3)$$

где каждое нестрогое неравенство является строгим неравенством или же равенством в соответствии с (5.2).

Для рассматриваемой информации  $\Omega$  при порядковой шкале критериев (5.1) в теории важности критериев было разработано аналитическое решающее правило [144],[145], [154]. Чтобы его описать, введем в рассмотрение числа

$$\alpha_{ik}(y) = \begin{cases} \alpha_i, & y_i > k, \\ 0, & y_i \leq k, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, q - 1. \quad (5.4)$$

Эти числа составляют  $(m \times (q - 1))$ -матрицу

$$A(y) = (\alpha_{ik}(y)), \quad (5.5)$$

соответствующую векторной оценке  $y$ . Если  $y_i = k$ , то первые  $k - 1$  элементов  $i$ -й строки этой матрицы равны  $\alpha_i$ , а следующие  $q - k$  её элементов равны нулю. Через  $\alpha^k(y)$  обозначим вектор, составленный из элементов  $k$ -го столбца матрицы  $A(y)$ :

$$\alpha^k(y) = (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{mk}). \quad (5.6)$$



Пусть  $\psi^{(n)}(a)$  – вектор-функция, упорядочивающая компоненты вектора  $a \in \text{Re}^n$  в порядке их невозрастания (так что  $\psi_1^{(n)}(a) = \max_i a_i$ ,  $\psi_n^{(n)}(a) = \min_i a_i$ ).

Аналитическая форма решающего правила, задающего отношение  $R^\Omega$ , выглядит так:

$$yR^\Omega z \Leftrightarrow \psi^{(m)}(\alpha^k(y)) \geq \psi^{(m)}(\alpha^k(z)), \quad k=1, \dots, q-1, \quad (5.7)$$

причем если в (5.7) хотя бы одно нестрогое векторное неравенство  $\geq$  выполняется как  $\geq$ , то  $yP^\Omega z$ ; в противном случае (когда все  $\geq$  выполняются как равенства)  $yI^\Omega z$ .

Пусть имеется количественная информация о важности  $\Theta$ , состоящая из сообщений типа «Критерий  $f_i$  важнее критерия  $f_j$  в  $h_{ij}$  раз». Точное определение этого понятия дано в [156]. Информация  $\Theta$  называется полной и непротиворечивой, если на её основе можно задать *количественные*, или *кардинальные коэффициенты важности критериев*  $\alpha_i$  – положительные числа, в сумме равные единице и обладающие свойством  $h_{ij} = \alpha_i/\alpha_j$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ . Информация  $\Theta$  *уточняет* информацию  $\Omega$ , если выполнены условия:

$$i \succ j \in \Omega \Rightarrow h_{ij} > 1, \quad i \approx j \in \Omega \Rightarrow h_{ij} = 1.$$

Пусть дополнительно известно, что рост предпочтений вдоль  $Z_0$  замедляется или же ускоряется, т.е. выполняются первые или же вторые цепочки неравенств соответственно:

$$v_2 - v_1 > v_3 - v_2 > \dots > v_q - v_{q-1}; \quad (5.8)$$

$$v_2 - v_1 < v_3 - v_2 < \dots < v_q - v_{q-1}. \quad (5.9)$$

Такая шкала называется шкалой первой порядковой метрики [153]. Разумеется, при этом число градаций  $q \geq 3$ . Информацию (5.1), (5.8) (соответственно (5.1), (5.9)) о ценности шкальных градаций обозначим  $D\downarrow$  (соответственно  $D\uparrow$ ).

Для формулировки решающих правил, использующих информацию  $\Theta$  в виде соответствующего вектора коэффициентов важности  $\alpha$ , а также информацию  $D\downarrow$

или  $D^\uparrow$ , и задающих отношения  $R^{\alpha D^\downarrow}$  и  $R^{\alpha D^\uparrow}$  соответственно, для векторной оценки  $y$  вводятся в рассмотрение суммы:

$$B_k^\downarrow(y) = \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^m \alpha_{it}(y), \quad B_k^\uparrow(y) = \sum_{t=k}^{q-1} \sum_{i=1}^m \alpha_{it}(y), \quad k = 1, \dots, q-1. \quad (5.10)$$

Решающие правила, задающие отношения  $R^{\alpha D^\downarrow}$  и  $R^{\alpha D^\uparrow}$ , можно представить следующим образом [147]:

$$yR^{\alpha D^\downarrow} z \Leftrightarrow B_k^\downarrow(y) \geq B_k^\downarrow(z), \quad k = 1, \dots, q-1; \quad (5.11)$$

$$yR^{\alpha D^\uparrow} z \Leftrightarrow B_k^\uparrow(y) \geq B_k^\uparrow(z), \quad k = 1, \dots, q-1. \quad (5.12)$$

5.2 Аналитические решающие правила для задач с упорядоченными по важности критериями со шкалой первой порядковой метрики

Решающие правила (5.11) и (5.12) соответствуют случаю полной информации  $\Theta$ , однозначно задающей вектор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ . Если же для вектора  $\alpha$  известно лишь (непустое) множество возможных значений  $A$ , то векторная оценка  $y$  не менее предпочтительна, чем  $z$ , тогда и только тогда, когда неравенства в решающих правилах (5.11) и (5.12) выполняются при любых  $\alpha \in A$  или, что равносильно:

$$yR^{AD^\downarrow} z \Leftrightarrow \inf_{\alpha \in A} (B_k^\downarrow(y) - B_k^\downarrow(z)) \geq 0, \quad k = 1, \dots, q-1; \quad (5.13)$$

$$yR^{AD^\uparrow} z \Leftrightarrow \inf_{\alpha \in A} (B_k^\uparrow(y) - B_k^\uparrow(z)) \geq 0, \quad k = 1, \dots, q-1. \quad (5.14)$$

Решающие правила (5.13) и (5.14) являются оптимизационными, а уже при относительно небольшом числе вариантов (несколько десятков) это затрудняет их практическое применение. С другой стороны, при численной реализации этих правил возникают ошибки округления.

Оказывается, однако, что если множество  $A$  допустимых значений вектора  $\alpha$  задается линейной системой (5.3), то возможно представление аналитических решающих правил (5.13) и (5.14) в форме, обобщающей решающее правило в форме (5.7) для порядковой шкалы на случай шкалы первой порядковой метрики.

Обозначим через  $\alpha^{[1,k]\downarrow}(y)$  вектор, составленный из первых  $k$  векторов  $\alpha^k(y)$  (см. (5.6)), т.е. из первых  $k$  столбцов матрицы  $A(y)$  векторной оценки  $y$ :

$$\begin{aligned} \alpha^{[1,k]\downarrow}(y) = (\alpha^1(y), \dots, \alpha^k(y)) = (\alpha_{11}(y), \dots, \alpha_{m_1}(y), \alpha_{12}(y), \dots, \alpha_{m_2}(y), \dots \\ \dots, \alpha_{1(k-1)}(y), \dots, \alpha_{m(k-1)}(y), \alpha_{1k}(y), \dots, \alpha_{m_k}(y)). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Аналитическая форма решающего правила (5.13) представляется следующим утверждением.

Теорема 5.1. Соотношение  $yR^{AD\downarrow}z$ , где множество задается системой (5.3), справедливо тогда и только тогда, когда выполняются векторные неравенства

$$\psi^{(mk)}(\alpha^{[1,k]\downarrow}(y)) \geq \psi^{(mk)}(\alpha^{[1,k]\downarrow}(z)), \quad k = 1, \dots, q-1; \quad (5.16)$$

при этом если в (5.16) все нестрогие неравенства  $\geq$  выполняются как равенства, то верно  $yI^{AD\downarrow}z$ , а если хотя бы одно из  $\geq$  выполняется как  $>$ , то верно  $yP^{AD\downarrow}z$ .

Обозначим через  $\alpha^{[1,k]\uparrow}(y)$  вектор, составленный из последних  $q-k$  векторов  $\alpha^k(y)$  (см. (5.6)), т.е. из последних  $q-k$  столбцов матрицы  $A(y)$  векторной оценки  $y$ :

$$\begin{aligned} \alpha^{[1,k]\uparrow}(y) = (\alpha^k(y), \dots, \alpha^{q-1}(y)) = (\alpha_{1k}(y), \dots, \alpha_{m_k}(y), \alpha_{1(k+1)}(y), \dots, \alpha_{m(k+1)}(y), \dots \\ \dots, \alpha_{1(q-2)}(y), \dots, \alpha_{m(q-2)}(y), \alpha_{1(q-1)}(y), \dots, \alpha_{m(q-1)}(y)). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Аналитическая форма решающего правила (5.14) представляется следующим утверждением.

Теорема 5.2. Соотношение  $yR^{AD\uparrow}z$ , где множество задается системой (5.3), справедливо тогда и только тогда, когда выполняются векторные неравенства

$$\psi^{(mk)}(\alpha^{[1,k]\uparrow}(y)) \geq \psi^{(mk)}(\alpha^{[1,k]\uparrow}(z)), \quad k = 1, \dots, q-1; \quad (5.18)$$

при этом если в (5.18) все нестрогие неравенства  $\geq$  выполняются как равенства, то верно  $yI^{AD\uparrow}z$ , а если хотя бы одно из  $\geq$  выполняется как  $>$ , то верно  $yP^{AD\uparrow}z$ .

Примечание. Очевидно, что решающие правила, представляемые теоремами 5.1 и 5.2, свободны от ошибок округления.

### 5.3 Пример сравнения векторных оценок при помощи аналитического решающего правила

Для иллюстрации «работы» решающего правила (5.16) разберем следующий расчетный пример. Пусть  $m = 3$ ,  $\Omega = \{1 \succ 2, 1 \succ 3, 2 \approx 3\}$ , так что ограничения (5.3), задающие множество  $A$ , имеют вид:

$$\alpha_1 > \alpha_2 = \alpha_3 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

Пусть  $q = 5$  и рост предпочтений замедляется вдоль шкалы критериев (информация  $D \downarrow$ ). Рассмотрим векторные оценки  $y = (5, 2, 2)$  и  $z = (1, 5, 3)$ . Для них  $(3 \times 4)$ -матрицы (5.5) выглядят так:

$$A(y) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$\alpha^1(y) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha^2(y) = (\alpha_1, 0, 0), \quad \alpha^3(y) = (\alpha_1, 0, 0), \quad \alpha^4(y) = (\alpha_1, 0, 0);$$

$$\alpha^1(z) = (0, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha^2(z) = (0, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha^3(z) = (0, \alpha_2, 0), \quad \alpha^4(z) = (0, \alpha_2, 0).$$

Поэтому

$$\psi^{(3)}(\alpha^1(y)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \psi^{(3)}(\alpha^1(z)) = (\alpha_2, \alpha_3, 0),$$

$$\psi^{(3)}(\alpha^2(y)) = (\alpha_1, 0, 0), \quad \psi^{(3)}(\alpha^2(z)) = (\alpha_2, \alpha_3, 0),$$

$$\psi^{(3)}(\alpha^3(y)) = (\alpha_1, 0, 0), \quad \psi^{(3)}(\alpha^3(z)) = (\alpha_2, 0, 0),$$

$$\psi^{(3)}(\alpha^4(y)) = (\alpha_1, 0, 0), \quad \psi^{(3)}(\alpha^4(z)) = (\alpha_2, 0, 0).$$

Поскольку не выполнены, например, ни  $\psi^{(3)}(\alpha^2(y)) \geq \psi^{(3)}(\alpha^2(z))$ , ни  $\psi^{(3)}(\alpha^2(z)) \geq \psi^{(3)}(\alpha^2(y))$ , то согласно (5.7) векторные оценки  $y$  и  $z$  не сравнимы по  $R^\Omega$ , т.е.  $y R^\Omega z$  и  $z R^\Omega y$ .

Попробуем сравнить эти векторные оценки, учитывая информацию  $A$  и  $D \downarrow$  и используя решающее правило, заданное теоремой 5.1. Имеем:

$$\begin{aligned} \alpha^{[1,1]\downarrow}(y) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha^{[1,2]\downarrow}(y) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, 0, 0), \\ \alpha^{[1,3]\downarrow}(y) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, 0, 0, \alpha_1, 0, 0), \quad \alpha^{[1,4]\downarrow}(y) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, 0, 0, \alpha_1, 0, 0, \alpha_1, 0, 0); \\ \alpha^{[1,1]\downarrow}(z) &= (0, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha^{[1,2]\downarrow}(z) = (0, \alpha_2, \alpha_3, 0, \alpha_2, \alpha_3), \\ \alpha^{[1,3]\downarrow}(z) &= (0, \alpha_2, \alpha_3, 0, \alpha_2, \alpha_3, 0, \alpha_2, 0), \quad \alpha^{[1,4]\downarrow}(z) = (0, \alpha_2, \alpha_3, 0, \alpha_2, \alpha_3, 0, \alpha_2, 0, 0, \alpha_2, 0). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \psi^{(3)}(\alpha^{[1,1]\downarrow}(y)) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \geq \psi^{(3)}(\alpha^{[1,1]\downarrow}(z)) = (\alpha_2, \alpha_3, 0), \\ \psi^{(6)}(\alpha^{[1,2]\downarrow}(y)) &= (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 0) \geq \psi^{(6)}(\alpha^{[1,2]\downarrow}(z)) = (\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3, 0, 0), \\ \psi^{(9)}(\alpha^{[1,3]\downarrow}(y)) &= (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0, 0) \geq \\ &\geq \psi^{(9)}(\alpha^{[1,3]\downarrow}(z)) = (\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3, 0, 0, 0, 0), \\ \psi^{(12)}(\alpha^{[1,4]\downarrow}(y)) &= (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \geq \\ &\geq \psi^{(12)}(\alpha^{[1,4]\downarrow}(z)) = (\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

то согласно (5.16) верно  $yR^{AD\downarrow}z$ . Так как векторные неравенства выполняются как  $\geq$ , то верно  $yP^{AD\downarrow}z$ .

#### 5.4 Отношения предпочтения и безразличия при качественной информации о важности критериев со шкалой первой порядковой метрики

Пусть имеется качественная (нечисловая) информация о важности критериев  $\Omega$ , состоящая из сообщений вида  $i \approx j$  (критерии  $f_i$  и  $f_j$  равноважны) и  $i \succ j$  (критерий  $f_i$  важнее критерия  $f_j$ ). Сообщение  $i \approx j$  порождает на множестве векторных оценок  $Z$  отношение безразличия  $I^{i \approx j}$ , а сообщение  $i \succ j$  – отношение предпочтения  $P^{i \succ j}$ :

$$yI^{i \approx j}z \text{ при } y = z^{ij} \text{ и } z_i \neq z_j, \quad yP^{i \succ j}z \text{ при } y = z^{ij} \text{ и } z_i < z_j,$$

где  $z^{ij}$  – векторная оценка, полученная из векторной оценки  $z$  перестановкой компонент  $z_i$  и  $z_j$ . Например, если  $z = (3, 1, 2)$ , то  $z^{13} = (2, 1, 3)$ . Именно эти отношения и

лежат в основе определений равенства и превосходства важности одних критериев над другими, принятых в теории важности критериев [143],[145], [146], [155].

Предположим, что, помимо информации о важности критериев  $\Omega$ , имеется информация  $D$  о том, что рост предпочтений вдоль шкалы критериев замедляется, т.е. что значения ценностей градаций  $v_k$ , кроме неравенств (5.1), удовлетворяют также неравенствам (5.8) для разностей ценностей соседних градаций.:

При наличии информации  $D$  сообщение  $i \approx j$  порождает на множестве векторных оценок  $Z$  также и отношение предпочтения  $P^{i \approx j \& D}$ , а сообщение  $i > j$  – отношение предпочтения  $P^{i > j \& D}$ , определяемые следующим образом:

$$y P^{i \approx j \& D} z \Leftrightarrow (y = (z \mid z_i + l, z_j - l), z_i + l^3/4z_j - l) \vee$$

$$(y = (z \mid z_j + l, z_i - l), z_j + l^3/4z_i - l), \quad (5.19)$$

$$y P^{i > j \& D} z \Leftrightarrow (y = (z \mid z_i + l, z_j - l), z_i + l^3/4z_j - l), \quad (5.20)$$

где  $l \in Z_0$ ,  $(z \mid z_i + l, z_j - l)$  – векторная оценка, полученная из векторной оценки  $z$  заменой компоненты  $z_i$  на  $z_i + l$  и компоненты  $z_j$  на  $z_j - l$ . Смысл этих отношений прост. Определение (5.19) гласит: если критерии  $f_i$  и  $f_j$  равноважны, то после увеличения меньшей из компонент  $z_i$  и  $z_j$  на натуральное число  $l$  и одновременного уменьшения большей из компонент на то же число  $l$ , таких, что увеличенная компонента не больше уменьшенной, получится векторная оценка, более предпочтительная, чем исходная векторная оценка  $z$ .

Определение (5.20) говорит: если критерий  $f_i$  важнее критерия  $f_j$  и в векторной оценке  $z$  компонента  $z_i$  меньше компоненты  $z_j$ , то после увеличения  $z_i$  на натуральное число  $l$  и одновременного уменьшения  $z_j$  на то же число  $l$  так, чтобы увеличенная компонента не стала больше уменьшенной, получится векторная оценка, более предпочтительная, чем исходная векторная оценка  $z$ .

Определения (5.19) и (5.20) можно рассматривать также и как определение шкалы первой порядковой метрики с замедлением роста предпочтений вдоль шкалы

применительно к рассматриваемой задаче, не требующее привлечения неравенств (5.8).

Отношение нестрогого предпочтения  $R^{\Omega\&D}$ , порождаемое совокупной информацией  $\Omega\&D$ , определяется как транзитивное замыкание объединения отношения Парето  $R^0$  и всех отношений  $I^{i\approx j}$ ,  $P^{i>j}$ ,  $P^{i\approx j\&D}$  и  $P^{i>j\&D}$ , порождаемых сообщениями из  $\Omega$  с учетом информации  $D$ :

$$R^{\Omega\&D} = \text{TrCl}(R^0 \cup (\bigcup_{\omega \in \Omega} (R^\omega \cup R^{\omega\&D}))), \quad (5.21)$$

где  $\text{TrCl}$  – символ операции транзитивного замыкания бинарного отношения,  $R^\omega = I^{i\approx j}$  и  $R^{\omega\&D} = P^{i\approx j\&D}$  при  $\omega = i\approx j$ ,  $R^\omega = P^{i>j}$  и  $R^{\omega\&D} = P^{i>j\&D}$  при  $\omega = i>j$ . Согласно (5.21),  $yR^{\Omega\&D}z$  верно тогда и только тогда, когда существует цепочка с  $s + 1$  векторными оценками  $u^t$  (число  $s$  зависит от  $y$  и  $z$ ) вида:

$$u^0 R^{\gamma^1} u^1, u^1 R^{\gamma^2} u^2, \dots, u^{s-1} R^{\gamma^s} u^s, \quad (5.22)$$

где  $u^0 = y$ ,  $u^s = z$ , а каждое  $\gamma^j$  есть  $0$ ,  $i\approx j$ ,  $i\approx j\&D$ ,  $i>j$  или  $i>j\&D$ . При этом если в (5.22) хотя бы один раз встречается  $P$  (т.е.  $P^0$ ,  $P^{i\approx j\&D}$ ,  $P^{i>j}$  или  $P^{i>j\&D}$ ), то верно  $yP^{\Omega\&D}z$ ; в противном случае справедливо  $yI^{\Omega\&D}z$ . Цепочки вида (5.22) также называются объясняющими. Информация  $\Omega\&D$  (внутренне) *непротиворечива*, если не существует цепочки вида (5.22) при  $u^0 = u^s$ , в которой хотя бы один раз встречается  $P$ .

Проверить непротиворечивость информации  $\Omega\&D$  и попарно сравнивать по предпочтительности достижимые векторные оценки непосредственно на основе определения (5.22) возможно при матричном представлении входящих в это определение бинарных отношений на множестве  $Z$  (см. [141]). Однако такой путь практически не реализуем даже при «не очень больших» числе критериев  $m$  и числе градаций  $q$ . Например, при  $m = 10$  и  $q = 10$  размерность матрицы смежности будет равна  $10^{10} \times 10^{10}$ . Поэтому требуется иной подход к рассматриваемой проблеме.

5.5 Алгоритмическое решающее правило для задач с упорядоченными по важности критериями со шкалой первой порядковой метрики

Далее рассматривается случай, когда все критерии упорядочены по важности. Для упрощения записей положим, что критерии занумерованы в порядке невозрастания их относительной важности (так что наиболее важен критерий  $f_1$ , а  $f_m$  – наименее важный критерий). Согласно информации  $\Omega$  рассматриваемого вида, множество номеров критериев  $M = \{1, \dots, m\}$  можно, собрав номера равноважных критериев в группы, представить в виде:

$$M = M_1 \cup \dots \cup M_n, \quad (5.23)$$

так что если  $i \in M_p$  и  $j \in M_r$ , то  $i \approx j$  при  $p = r$  и  $i \succ j$  при  $p < r$ .

*Ординальными*, или *порядковыми величинами важности* критериев называются числа  $\beta_1, \dots, \beta_m$ , удовлетворяющие условиям:

$$i \approx j \in \Omega \Rightarrow \beta_i = \beta_j, \quad i \succ j \in \Omega \Rightarrow \beta_i > \beta_j. \quad (5.24)$$

Если числа  $\beta_i$  положительны и в сумме равны 1, то они называются *ординальными*, или *порядковыми коэффициентами важности*, и обозначаются  $\alpha_i$ .

Теорема 5.3. Информация  $\Omega \& D$  непротиворечива.

Построим конструктивную форму решающего правила (5.5), т.е. правила, задающего отношение  $R^{\Omega \& D}$  с использованием информации  $\Omega \& D$ . Введем в рассмотрение числа

$$\alpha_{ik}(y) = \begin{cases} \alpha_i, & y_i > k, \\ 0, & y_i \leq k, \end{cases} \quad , i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, q \quad 1. \quad (5.25)$$

Эти числа составляют  $m \times (q - 1)$ -матрицу

$$A(y) = (\alpha_{ik}(y)), \quad (5.26)$$

соответствующую векторной оценке  $y$ . Если  $y_i = k$ , то первые  $k - 1$  элементов  $i$ -ой строки этой матрицы равны  $\alpha_i$ , а следующие  $q - k$  её элементов равны 0. Через  $\alpha^k(y)$  обозначим вектор, составленный из элементов  $k$ -го столбца матрицы  $A(y)$ :



$$\alpha^k(y) = (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{mk}). \quad (5.27)$$

Рассмотрим разность матриц (3.4), соответствующих векторным оценкам  $y$  и  $z$ :

$$C(y, z) = A(y) - A(z). \quad (5.28)$$

Элементы этой матрицы, согласно (5.25), равны:

$$c_{ik}(y, z) = \alpha_{ik}(y) - \alpha_{ik}(z) = \begin{cases} \alpha_i, & z_i \leq k < y_i, \\ -\alpha_i, & y_i \leq k < z_i, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, q-1.$$

Особенностью матрицы  $C(y, z)$  является то, что каждая ее строка  $i$  состоит из последовательности нулей, за которой следует последовательность чисел  $\alpha_i$  (если  $y_i > z_i$ ) или  $-\alpha_i$  (если  $y_i < z_i$ ), а затем снова последовательность нулей. Подробнее это иллюстрируют Таблица 5.1 и Таблица 5.2:

Таблица 5.1. Строка  $i$  матрицы  $C(y, z)$  при  $y_i > z_i$

Номер столбца $k$	1	...	$z_i - 1$	$z_i$	...	$y_i - 1$	$y_i$	...	$q - 1$
Элементы строки $i$	0	0	0	$\alpha_i$	$\alpha_i$	$\alpha_i$	0	0	0

Таблица 5.2. Строка  $i$  матрицы  $C(y, z)$  при  $y_i < z_i$

Номер столбца $k$	1	...	$y_i - 1$	$y_i$	...	$z_i - 1$	$z_i$	...	$q - 1$
Элементы строки $i$	0	0	0	$-\alpha_i$	$-\alpha_i$	$-\alpha_i$	0	0	0

Если  $z_i = 1$  (или  $y_i = 1$ ) и  $y_i \neq z_i$  то последовательность нулей в начале строки в Таблице 5.1 (соответственно в Таблице 5.2) отсутствует. Аналогично если  $y_i = q$  (или  $z_i = q$ ) и  $y_i \neq z_i$ , то отсутствует последовательность нулей в конце этой строки. Если же  $y_i = z_i$ , то вся  $i$ -я строка состоит из нулей.

В случае наличия равноважных критериев перенумеруем их так, чтобы соответствующие строки матрицы  $C(y, z)$  с положительными элементами обладали меньшими номерами, т.е.:

$$\text{при } i \approx j, y_i > z_i, y_j < z_j \text{ полагаем } i < j. \quad (5.29)$$

Построенная таким образом матрица  $C(y, z)$  позволяет сформулировать решающее правило (5.5) в следующей форме.

Теорема 5.4. Соотношение  $yR^{\Omega \& D}z$  справедливо тогда и только тогда, когда существует инъективное отображение  $\eta_{yz}$  множества отрицательных элементов матрицы  $C(y, z)$  во множество её положительных элементов, которое каждому отрицательному элементу  $c_{j\tau}(y, z) = -\alpha_j$  ставит в соответствие положительный элемент  $c_{i\tau}(y, z) = \alpha_i$  так, что  $i < j$  и  $t^{3/4}\tau$ . При этом, если для отображения  $\eta_{yz}$  выполняются условия:

- 1) число положительных и отрицательных элементов в матрице  $C(y, z)$  одинаково;
- 2) каждому отрицательному элементу  $c_{j\tau}(y, z) = -\alpha_j$  соответствует положительный элемент из того же столбца  $c_{i\tau}(y, z) = \alpha_i$ ,  $i < j$ , причем  $\alpha_i = \alpha_j$ ,

то  $yI^{\Omega \& D}z$ , а если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то  $yP^{\Omega \& D}z$ .

Отметим, что, в соответствии с принятым соглашением о нумерации критериев в порядке невозрастающей важности и (5.18), если  $c_{i\tau}(y, z) = \eta_{yz}(c_{j\tau}(y, z))$ , то  $\alpha_i / \alpha_j$ . Согласно теореме 5.2, для существования отображения  $\eta_{yz}$  необходимо, чтобы число положительных элементов матрицы  $C(y, z)$  было не меньше числа отрицательных элементов.

Аналогичное решающее правило можно записать, очевидно, и для величин важности  $\beta_i$ , если вместо чисел  $\alpha_{ik}(y)$  использовать числа

$$\beta_{ik}(y) = \begin{cases} \beta_i, & y_i > k, \\ d, & y_i \leq k, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, q - 1,$$

где  $d$  – произвольное число, меньше, чем любое  $\beta_i$  (т.е.  $d < \min_i \beta_i$ ). Иногда это удобнее с вычислительной точки зрения.

Пользуясь определением отображения  $\eta_{yz}$ , данным в теореме 5.4, построим алгоритм  $\varkappa_0(y, z)$  проверки существования и построения такого отображения. Введем обозначение  $C_{ik}^+(y, z)$  для подматрицы из первых  $i - 1$  строк и первых  $k$  столбцов матрицы  $C(y, z)$ . Если  $c_{i\tau}(y, z) = -\alpha_i$ , то именно в этой подматрице должен находиться положительный элемент, соответствующий в отображении  $\eta_{yz}$  указанному отрицательному элементу. Также введем обозначение  $C_{ik}^-(y, z)$  для подматрицы из строк

с номерами  $i + 1, \dots, m$  и столбцов с номерами  $k, \dots, q - 1$  матрицы  $C(y, z)$ . Если  $c_{ik}(y, z) = \alpha_i$ , то именно в этой подматрице находятся все те отрицательные элементы, которым во всех возможных отображениях  $\eta_{yz}$  может соответствовать указанный положительный элемент.

Можно было бы просто перебрать все возможные паросочетания отрицательных и положительных элементов матрицы  $C(y, z)$  и проверить для них выполнение условий, накладываемых на отображение  $\eta_{yz}$ , но существует более эффективное решение. Идея предлагаемого алгоритма  $\mathcal{N}_0(y, z)$  состоит в том, чтобы последовательно находить и фиксировать такие соотношения  $c_{ii}(y, z) = \eta_{yz}(c_{j\tau}(y, z))$ , которые должны присутствовать хотя бы в одном из возможных отображений  $\eta_{yz}$ , если такие отображения вообще существуют. Тогда элементы  $c_{j\tau}(y, z) = -\alpha_j$  и  $c_{ii}(y, z) = \alpha_i$  можно будет удалить из рассмотрения (например, обнулить их в матрице  $C(y, z)$ ). При этом важно, что если для исходной матрицы существовало хотя бы одно отображение  $\eta_{yz}$ , то для преобразованной матрицы также будут существовать отображения  $\eta_{yz}$ , но только те, в состав которых входит соотношение  $c_{ii}(y, z) = \eta_{yz}(c_{j\tau}(y, z))$ .

Если в результате последовательного применения такой процедуры удастся обнулить все отрицательные элементы матрицы  $C(y, z)$ , то отображение  $\eta_{yz}$  будет получено в явном виде. Если же на одной из итераций алгоритма для какого-то отрицательного элемента  $c_{j\tau}(y, z) = -\alpha_j$  в подматрице  $C_{j\tau}^+(y, z)$  не окажется положительных элементов, то это будет означать, что отображения  $\eta_{yz}$  не существует и для исходной матрицы  $C(y, z)$ .

Для поиска указанного соотношения  $c_{ii}(y, z) = \eta_{yz}(c_{j\tau}(y, z))$  выберем в матрице  $C(y, z)$  отрицательный элемент с наименьшим номером столбца  $\tau$  (если в этом столбце несколько отрицательных элементов, то выбираем из них тот, у которого наименьший номер строки  $j$ ). Искомый положительный элемент  $c_{ii}(y, z) = \alpha_i$  должен находиться в подматрице  $C_{j\tau}^+(y, z)$ . Так как в первых  $\tau - 1$  столбцах матрицы  $C(y, z)$  нет отрицательных элементов, то множество отрицательных элементов, которым во всех возможных отображениях  $\eta_{yz}$  может соответствовать произвольный положи-

тельный элемент  $c_{it}(y, z) = \alpha_i$  из  $C_{j\tau}^+(y, z)$ , находится в подматрице  $C_{it}^-(y, z)$ , то есть оно не зависит от номера столбца  $t^{3/4}\tau$ . Поэтому положительный элемент  $c_{i_{\max}t}(y, z) = \alpha_{i_{\max}}$  с наибольшим номером строки  $i_{\max} < j$  будет иметь прообраз в наименьшем по включению множестве отрицательных элементов – элементов из  $C_{i_{\max}\tau}^-(y, z)$ , то есть любой другой положительный элемент из подматрицы  $C_{j\tau}^+(y, z)$  может иметь прообраз в этом же множестве и, возможно, среди других отрицательных элементов. Поэтому, если существует отображение  $\eta_{yz}$ , в котором элементу  $c_{j\tau}(y, z) = -\alpha_j$  соответствует произвольный положительный элемент из подматрицы  $C_{j\tau}^+(y, z)$ , то в отображении  $\eta_{yz}$  всегда можно поменять местами этот положительный элемент и элемент  $c_{i_{\max}t}(y, z) = \alpha_{i_{\max}}$ . Другими словами, из всех возможных отображений  $\eta_{yz}$ , если они существуют, всегда можно выбрать такое, в котором  $c_{i_{\max}t}(y, z) = \eta_{yz}(c_{j\tau}(y, z))$ . Искомое соотношение найдено.

Алгоритм  $\mathcal{N}_0(y, z)$ .

Шаг 1. Если в матрице  $C(y, z)$  отсутствуют отрицательные элементы, то переходим к шагу 6, иначе выполняем Шаг 2.

Шаг 2. Выбираем в матрице  $C(y, z)$  отрицательный элемент с наименьшим номером столбца  $\tau$ . Если в этом столбце несколько отрицательных элементов, то выбираем из них тот, у которого наименьший номер строки  $j$ .

Шаг 3. Если в подматрице  $C_{j\tau}^+(y, z)$  нет положительных элементов, то переходим к шагу 7, иначе выполняем Шаг 4.

Шаг 4. В подматрице  $C_{j\tau}^+(y, z)$  выбираем положительный элемент с наибольшим номером строки  $i < j$ . (При этом не важно, в каком из первых  $\tau$  столбцов он находится, для определенности можно выбрать элемент с наименьшим номером столбца  $t$ .)

Шаг 5. Обнуляем в матрице  $C(y, z)$  элементы  $c_{j\tau}(y, z) = -\alpha_j$  и  $c_{it}(y, z) = \alpha_i$  и переходим к Шагу 1.

Шаг 6. Конец работы алгоритма: отображение  $\eta_{yz}$  существует.

Шаг 7. Конец работы алгоритма: отображение  $\eta_{yz}$  не существует.

Заметим, что после выполнения шага 6 алгоритма будет не только доказано существование искомого отображения  $\eta_{yz}$ , но и построено такое отображение.

5.6 Пример сравнения векторных оценок по предпочтительности при помощи алгоритма  $\mathcal{N}_0$

Пусть  $m = 5, q = 9, \Omega = \{1 \approx 2, 2 \succ 3, 3 \approx 4, 4 \succ 5\}$ , так что  $\alpha_1 = \alpha_2 > \alpha_3 = \alpha_4 > \alpha_5$ .

Рассмотрим векторные оценки  $y = (9, 5, 7, 4, 1)$  и  $z = (1, 6, 8, 8, 2)$ . Для них  $5 \times 8$ -матрицы (5.26) выглядят так:

$$A(y) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & 0 \\ \alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим справедливость соотношения  $yR^{\Omega \& D}z$ . Матрица (5.28) имеет вид:

$$C(y, z) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \downarrow_0^1 & \alpha_1 \downarrow_0^2 & \alpha_1 \downarrow_0^3 & \alpha_1 \downarrow_0^4 & \alpha_1 \downarrow_0^5 & \alpha_1 \downarrow_0^6 & \alpha_1 \downarrow_0^7 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 \downarrow_0^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 \downarrow_0^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 \downarrow_0^2 & -\alpha_4 \downarrow_0^4 & -\alpha_4 \downarrow_0^5 & -\alpha_4 \downarrow_0^7 & 0 \\ -\alpha_5 \downarrow_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

В этой матрице восемь положительных элементов и семь отрицательных. Поэтому необходимое условие существования отображения  $\eta_{yz}$  выполнено, и можно воспользоваться алгоритмом  $\mathcal{N}_0(y, z)$ . Порядок его работы представлен при помощи стрелок, стоящих справа от задействованных ненулевых элементов матрицы: верхний индекс у стрелки показывает, на какой итерации работы алгоритма  $\mathcal{N}_0(y, z)$  соответствующий элемент обнуляется, а нижний – напоминает об обнулении (если элемент не

обнуляется, то стрелки он не имеет).? Распишем подробно первую и последнюю итерации.

### Итерация 1.

Шаг 1. Поскольку в матрице (5.30) имеются отрицательные элементы, переходим к шагу 2.

Шаг 2. Выбираем элемент  $c_{51}(y, z) = -\alpha_5$ .

Шаг 3. В подматрице  $C_{51}^+(y, z)$  есть положительный элемент; переходим к шагу 4.

Шаг 4. В подматрице  $C_{51}^+(y, z)$  выбираем положительный элемент  $c_{11}(y, z) = \alpha_1$ .

Шаг 5. Обнуляем элементы  $c_{51}(y, z)$  и  $c_{11}(y, z)$ , переходим к шагу 1 итерации 2...

### Итерация 8.

Шаг 1. В полученной на шаге 7 матрице нет отрицательных элементов (у нее лишь один ненулевой элемент  $c_{18}(y, z) = \alpha_5 > 0$ ), переходим к шагу 6.

Шаг 6. Конец работы алгоритма: отображение  $\eta_{yz}$  существует.

Таким образом, построено следующее отображение  $\eta_{yz}$ :

$$c_{51}(y, z) = -\alpha_5 \rightarrow c_{11}(y, z) = \alpha_1;$$

$$c_{44}(y, z) = -\alpha_4 \rightarrow c_{12}(y, z) = \alpha_1;$$

$$c_{25}(y, z) = -\alpha_2 \rightarrow c_{13}(y, z) = \alpha_1;$$

$$c_{45}(y, z) = -\alpha_4 \rightarrow c_{14}(y, z) = \alpha_1;$$

$$c_{46}(y, z) = -\alpha_4 \rightarrow c_{15}(y, z) = \alpha_1;$$

$$c_{37}(y, z) = -\alpha_3 \rightarrow c_{16}(y, z) = \alpha_1;$$

$$c_{47}(y, z) = -\alpha_4 \rightarrow c_{17}(y, z) = \alpha_1.$$

Следовательно, верно  $yR^{\Omega \& D}z$ . А так как число положительных элементов в матрице (5.30) больше числа отрицательных элементов, то, согласно теореме 6.4, верно  $yP^{\Omega \& D}z$ .

## 5.6 Заключение

В этом разделе отчета представлены результаты по разработке ординальных решающих правил: двух аналитических решающих правила (основанных на предположении существования кардинальных коэффициентов важности) и одного алгоритмического решающего правила (не опирающегося на такое предположение) для многокритериальных задач принятия решений, в которых все критерии упорядочены по важности и имеют шкалу первой порядковой метрики.

Следует отметить, что предложенные решающие правила применимы и для анализа задач принятия решений в условиях неопределенности, когда вероятности «состояний природы» лишь упорядочены по величине, а функция полезности лица, принимающего решение, неизвестна, но известно его отношение к риску (он не склонен или же, наоборот, склонен к риску).

Разработанные алгоритмы целесообразно реализовать в системах поддержки принятия многокритериальных решений, основанных на подходах теории важности критериев.

Результаты проведенных исследований нашли отражения в работах [140], [158], [150]:

1. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Алгоритмическое решающее правило, использующее ординальные коэффициенты важности критериев со шкалой первой порядковой метрики// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т.52. №1. С.43-59.
2. Подиновский В.В. Количественная важность критериев и аддитивные функции ценности// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т.53. №1. С.133-142.
3. Podinovski V.V. Sensitivity analysis for choice problems with partial preference relations// European journal of operational research. 2012. V.221. pp.198-204.

## 6 МЕТОД АННОТИРОВАННОГО СУФФИКСНОГО ДЕРЕВА АСТ ДЛЯ ОЦЕНКИ РЕЛЕВАНТНОСТИ СТРОК ТЕКСТОВЫМ ДОКУМЕНТАМ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В АНАЛИЗЕ ТЕКСТОВЫХ КОЛЛЕКЦИЙ

В этом разделе отчета представлены результаты исследования по анализу текстовой информации. Излагается модификация метода аннотированного суффиксного дерева (АСД), которая ориентирована на то, чтобы, во-первых, убрать априорное ограничение на глубину конструируемого дерева, во-вторых, сделать более адекватной оценку степени вхождения последовательности букв в текст, и, в-третьих, рассмотреть другие приложения метода. На конкретных примерах описывается модификация и применение этой модификации метода АСД для решения задач анализа текстовой информации трёх типов: а) установление связи корпуса текстов и совокупности ключевых словосочетаний; б) установление связи корпуса текстов с таксономией предметной области; в) автоматизация построения таксономии с использованием компетентных разработок и ресурсов интернета.

Основные работы по автоматизации обработки и анализу текстов идут в разрезе представления текстов как совокупностей слов, как это делается в наиболее популярных методиках «модели мешка слов» и «обработки естественного языка». Значительно реже применяются методики, основанные на представлении текстов как последовательностей символов. Между тем, последние имеют то значительное преимущество, что они не требуют предварительной обработки текстов, например, выделения таких видов слов как «ключевые слова», «стоп-слова» и пр. В данной работе представлена методика анализа текстов, основанная на понятии суффиксного дерева. Суффиксное дерево – одна из основных структур данных для хранения и поиска фрагментов символических последовательностей – текстов, биологических последовательностей, и т.п. [168]. В последнее время ее все чаще используют для кластеризации текстовых объектов, см. например, [170]. Мы используем суффиксные деревья, аннотированные частотами вхождения фрагментов текстов (АСД), иногда также называемые обобщенными суффиксными деревьями. Этот инструмент позволяет эффективно решать задачи анализа текстов, не связанные с их грамматически-



ми описаниями и не зависящими от языка, на котором они написаны. В частности, в [176] этот аппарат использовался для выделения так называемого «спама» в составе электронной почты.

В данной работе метод АСД модифицирован: во-первых, убрано априорное ограничение на глубину конструируемого суффиксного дерева, во-вторых, предложена новая формула оценки степени вхождений, позволяющая убрать ее зависимость от длины анализируемых текстов и, в-третьих, рассматриваются приложения, основанные на предварительном построении так называемой ПС таблицы (см. пункт 6.2.1). Модифицированный метод АСД применён для:

- а) исследованию связей данного корпуса текстов и совокупности ключевых словосочетаний путем анализа структуры либо множества текстов, либо множества словосочетаний;
- б) анализа связей текстов с таксономией своей предметной области.

Далее в подразделе 6.1 описаны методы построения аннотированного суффиксного дерева (АСД) и наложения строки на АСД. Подраздел 6.2 описывает методики и примеры решения задач типа а), подраздел 6.3 посвящен примерам задач типа б), а подраздел 6.4 – типа в). В подразделе 6.5 сделаны некоторые выводы.

## 6.1 Индексирование фрагментов текста с помощью аннотированного суффиксного дерева (АСД)

### 6.1.1. Понятие аннотированного суффиксного дерева

Будем рассматривать текст как последовательность символов. Для уменьшения объема вычислений текст разбивается на короткие фрагменты, в дальнейшем называемые строками. При этом текст рассматривается не как единое целое, а неупорядоченная совокупность строк. Любые фрагменты, содержащие семантически законченные отрывки текста, могут быть использованы в качестве строк. Использование «строкового» представления теряет семантические связи между отрывками, но сохраняет связи внутри них. Однако теряемые нами «дальние» связи обычно теряются и при других подходах к анализу текстов, как, например, при подходе «обработки

естественного языка» [172]. Вместе с тем сохраняются «локальные» связи, что существенно отличает данный подход от другого популярного подхода, использующего модель так называемого «мешка слов» [176],[172],[182].

АСД организовано как корневое дерево, в котором каждый узел, кроме корня, помечен одним из символов строки [176]. Путь от корня АСД до любого узла кодирует один из фрагментов строки, а путь из корня до листа дерева – один из суффиксов строки. Помимо символьной метки, каждый узел обладает числовой меткой, соответствующей частоте соответствующего фрагмента. На рисунке 6.1 представлено АСД для строки «ХАВХАС» (в [168] дается другое, обычное, суффиксное дерево для этой строки).

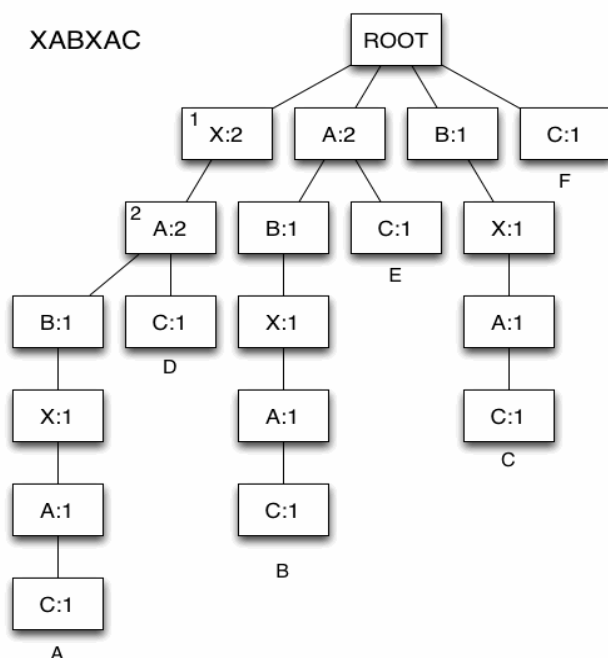


Рисунок 6.1 – Аннотированное суффиксное дерево для строки «ХАВХАС»

У строки  $s = \text{«ХАВХАС»}$  шесть суффиксов:  $s[1:] = \text{«ХАВХАС»}$ ,  $s[2:] = \text{«АВХАС»}$ ,  $s[3:] = \text{«ВХАС»}$ ,  $s[4:] = \text{«ХАС»}$ ,  $s[5:] = \text{«АС»}$ ,  $s[6:] = \text{«С»}$ . В АСД на Рисунке 6.1 их кодируют пути от корня ROOT до листьев A, B, C, D, E, F, соответственно. Сочетание «ХА» дважды встречается в строке  $s$ : это фрагменты  $s[1:2] = s[4:5] = \text{«ХА»}$ . На Рисунке 6.1 эти символы представлены узлами, помеченными номерами 1 и 2. Узел 2 имеет двух потомков с частотами 1, соответствующих символам  $s[3] = \text{«В»}$  и  $s[6] = \text{«С»}$ . Другими словами, «ХА» – префикс обоих суффиксов A и D.

АСД для двух и более строк не имеет принципиальных отличий от АСД для одной строки. Оно получается добавлением информации строк к уже построенному дереву и так же представляет все фрагменты коллекции строк и их частоты. Рассмотрим АСД для двух строк:  $s = \langle \text{XABXAC} \rangle$  и  $t = \langle \text{VABXAC} \rangle$  (см. рисунок 6.2). Строки  $s$  и  $t$  различаются только первыми символами ( $s[1] = \langle \text{X} \rangle$ ,  $t[1] = \langle \text{V} \rangle$ ). Их суффиксы, начиная со вторых, полностью совпадают. Поэтому АСД на рисунке 6.2 отличается от АСД рисунка 6.1 только тем, что, во-первых, в нем - новая цепочка узлов  $G$ , соответствующая суффиксу  $t[1:] = \langle \text{VABXAC} \rangle$ , и, во-вторых, изменились частоты, приписанные узлам. Теперь фрагмент  $\langle \text{XA} \rangle$  встречается три раза ( $s[1:2] = s[4:5] = t[4:5] = \langle \text{XA} \rangle$ ), поэтому в новом дереве узлам 1 и 2 приписаны частоты 3. Узел 3, помеченный символом  $\langle \text{V} \rangle$  является префиксом двух суффиксов:  $s[3:] = t[3:] = \langle \text{VXAC} \rangle$ ,  $t[1:] = \langle \text{VABXAC} \rangle$ , причем частота первого из них равна 2, второго – 1. Поэтому узлу 3 приписана частота 3.

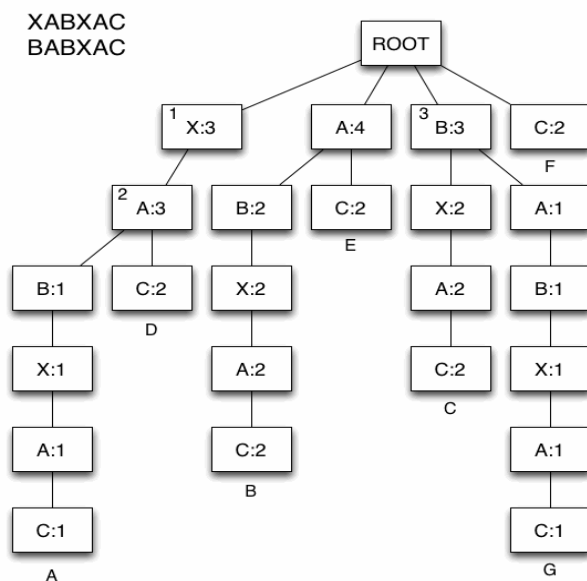


Рисунок 6.2 – Аннотированное суффиксное дерево для строк  $\langle \text{XABXAC} \rangle$  и  $\langle \text{VABXAC} \rangle$

Важное свойство АСД: частота любого узла равна сумме частот его узлов-детей, так как родительский узел соответствует префиксу нескольких суффиксов, и его частота складывается из частот этих суффиксов. Отсюда следует, что частота родительского узла равна сумме частот листьев, которые он покрывает.

### 6.1.2 Алгоритм построения аннотированного суффиксного дерева

Алгоритм построения АСД для коллекции строк основан на последовательном переборе всех суффиксов всех строк из коллекции. Приведем точный алгоритм, модифицированный по сравнению с [176] в связи со строковым представлением текста и измененной мерой качества вхождения (релевантности).

Построение дерева для коллекции строк  $s_1, \dots, s_N$ .

1. Инициализация: создаем пустую структуру, в которой будет храниться АСД. Обозначим ее  $ast$ . Далее итеративно будем добавлять в  $ast$  подструктуры, соответствующие строкам из входной коллекции.
2. На  $i$ -той итерации алгоритма,  $i=1, 2, \dots, N$ , для строки  $s=s_i$  длины  $l$ :
3. Находим все суффиксы  $s[j:]$ , где  $j=1, 2, \dots, l$ .
4. Для каждого суффикса  $s[j:]$  ищем в  $ast$  совпадение – путь от корня, совпадающий с максимальным начальным отрезком суффикса  $s[j:]$ .
5. Пусть найдено совпадение  $m = s[j:k]$ , где  $k \leq l$ . Для узлов, попавших в совпадение, увеличиваем частоты на 1.
6. Если  $k < l$ , то требуется создать новые узлы для фрагмента строки  $s[k+1:l]$ . Для этого создаем у последнего узла в найденном совпадении нового потомка, помечаем его символом  $s[k+1]$  и приписываем ему частоту 1. Таким же образом последовательно создаем узлы для всех оставшихся символов фрагмента. В результате будет создана новая цепочка узлов, кодирующая текущий суффикс. Если  $k = l$ , то новые узлы не создаются.

Для примера, построим АСД строки  $s=\langle \text{ХАВХАС} \rangle$  (рисунки 6.1 и 6.2). Для первых трех суффиксов ХАВХАС, АВХАС, ВХАС совпадений не будет найдено. Поэтому в дерево будут добавлены соответствующие цепочки к узлам А, В, С, у которых частота каждого узла определяется как равная 1. При добавлении следующего суффикса  $s[4:]=\langle \text{ХАС} \rangle$  будет найдено непустое совпадение  $\langle \text{ХА} \rangle$ , поэтому частота узлов 1 и 2 из совпадения будет увеличена на 1, а для узла 2 - создан новый потомок с меткой  $\langle \text{С} \rangle$  и частотой 1. Аналогично, при добавлении суффикса  $s[5:]=\langle \text{АС} \rangle$  будет найдено совпадение из одного узла с меткой  $\langle \text{А} \rangle$ . Следуя алгоритму, частота узла

будет увеличена на 1 и у него будет создан новый потомок с меткой «С» и частотой 1.

Если к уже построенному для строки  $s = \langle \text{ХАВХАС} \rangle$  АСД требуется добавить строку  $t = \langle \text{ВАВХАС} \rangle$ , то для первого суффикса  $t[1:] = \langle \text{ВАВХАС} \rangle$  будет найдено совпадение из одного узла с меткой «В». Увеличим его частоту и добавим к нему путь из всех остальных символов суффикса. Получим цепочку узлов G на рисунке 6.2. Для всех остальных суффиксов строки  $t$  будут найдены совпадения, полностью покрывающие суффиксы, поэтому у всех узлов в дереве частоты будут увеличены, но новых узлов создано не будет.

### 6.1.3 Процедура наложения строки на АСД

Использование АСД позволяет оценить степень релевантности последовательности символов данному тексту. Покажем, как это можно сделать.

Введем обозначения:  $ast$  – АСД, построенное для коллекции строк,  $ROOT$  – корень АСД,  $u$  – узел АСД,  $f(u)$  – его частота,  $s$  – строка, релевантность которой требуется оценить.

Условной вероятностью узла  $u$  назовем величину  $\hat{p} = \frac{f(u)}{f(\text{parent}(u))}$ , где  $f(u)$  – частота узла  $u$ ,  $f(\text{parent}(u))$  – частота узла-родителя  $u$ . Условную вероятность узла на первом уровне АСД считаем равной  $\frac{f(u)}{\sum_{n: \text{parent}(n)=ROOT} f(n)}$ , где  $\{n: \text{parent}(n) = ROOT\}$  – множество всех узлов  $n$  на первом уровне дерева.

Оценка вхождения строки  $s$  в дерево  $ast$  получается путем усреднения оценок всех суффиксов строки  $s$ . Для каждого суффикса строки  $s$  найдем в дереве  $ast$  совпадение  $m = m_1, \dots, m_k$ . Оценка совпадения  $m$  – это сумма условных вероятностей узлов, принадлежащих совпадению:

$$\text{score}(m) = \sum_{i=0}^k \hat{p}(m_i). \quad (6.1)$$

Это позволяет агрегировать оценки всех совпадений по формуле:

$$SCORE(s, ast) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^l score(s[i:], ast), \quad (6.2)$$

где  $l$  – длина строки  $s$ ,  $s[i:]$  – ее  $i$ -тый суффикс. Полная оценка (6.2) строки  $s$  – это средняя оценка совпадений ее суффиксов с последовательностями в дереве.

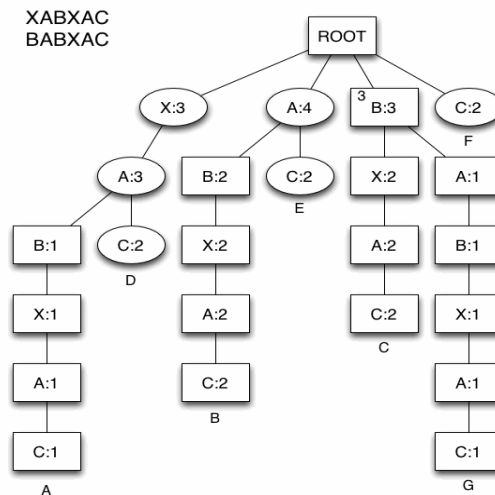


Рисунок 6.3 – Наложение строки «VXACA» на ACD коллекции строк {«XABXAC», «BABXAC»}; концы совпадений отображены овалами

Таблица 6.1 – Оценка результатов наложения всех суффиксов строки «VXACA» на ACD, построенное для коллекции строк {«XABXAC», «BABXAC»}

Суффикс	Совпадение	Score
«VXACA»	Нет	0
«XACA»	«X»->«A»->«C»	$3/12 + 3/3 + 2/3 = 11/12$
«ACA»	«A»->«C»	$4/12 + 2/4 = 5/6$
«CA»	«C»	$2/12$
«A»	«A»	$4/12$

Пример: оценка степени вхождения строки «VXACA» в коллекцию {«XABXAC», «BABXAC»} (см. рисунок 6.3).

Для того чтобы найти условную вероятность узлов на первом уровне ACD, будем считать, что частота корня равна сумме частот всех узлов на первом уровне:  $3+4+3+2 = 12$ . Таким образом, для суффикса «XAC» (совпадение по ветви D) получается сумма трех слагаемых,  $3/12$  для «X»,  $3/3$  для «A», и  $2/3$  для «C». В Таблице 6.1 приведены расчеты для всех суффиксов строки. Суммирование этих оценок «C» последующим усреднением дает  $SCORE = 3.25/ 5 = 0.65$ .

#### 6.1.4. Нормированные оценки сравнения строк с различными АСД

Часто возникает потребность сравнить оценки сходства строк с двумя или более АСД. Получаемые оценки могут сильно зависеть от размеров АСД. Чем больше узлов в АСД, тем больше разброс оценок, получаемых при сличении строк с этим деревом. Для того чтобы сделать оценки по разным деревьям сравнимыми между собой, модифицируем формулы (6.1) и (6.2) так, чтобы нормировать результаты по длине фактических совпадений:

$$score(m) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k \hat{p}(m_i), \quad (6.1^*)$$

где  $k$  – длина найденного совпадения  $m = m_1...m_k$ . Общая оценка

$$SCORE(s, ast) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^l score(s[i:], ast) \quad (6.2^*)$$

имеет смысл условной вероятности, приходящейся на одну букву суффикса в совпадениях.

Такая нормировка делает оценки сравнимыми как по документам, так и по словосочетаниям.

#### 6.1.5 Другие направления использования суффиксных деревьев

Обычные суффиксные деревья часто называют моделью представления текста, альтернативной модели «мешка слов». Мешок слов – пожалуй, самый популярный способ представления текста в компьютере – представляет собой вектор, компоненты которого соответствуют отдельным словам и равны их частотам. Эта модель обладает рядом недостатков и ограничений. Во-первых, в такой модели, теряются связи между словами из словосочетаний. Во-вторых, такая модель не всегда удобна. В работе [170], например, утверждается, что в задаче кластеризации текстовых документов модель «мешок слов» не эффективна из-за чрезмерно большой размерности и разреженности векторов частот, представляющих отдельные тексты. С точки зре-

ния авторов этой работы, в задаче кластеризации текстовых документов использование суффиксных деревьев более обосновано. Заметим, что и в той работе, и во множестве других, суффиксное дерево понимается как иерархическая структура слов, а не символов. Такой подход к представлению суффиксных деревьев впервые предложен в [182] и с алгоритмической точки зрения не отличается от традиционного, изложенного в [168].

Наше представление суффиксных деревьев несколько отличается: во-первых, аннотированные суффиксные деревья имеют другую структуру, во-вторых, мы используем их с другими целями. В рассматриваемых в данной статье задачах аннотированное суффиксное дерево используется в первую очередь для характеристики связей между фрагментами текстов и коллекцией текстов. Эта задача отличается от задачи кластеризации текстовых документов и требует, очевидно, анализа текста не на уровне слов, а на уровне символов.

## 6.2 Использование метода АСД для анализа текстов по словосочетаниям

В этом подразделе будут описаны два подхода к анализу пары «корпус текстов – совокупность ключевых словосочетаний». Один подход связан с исследованием структуры корпуса в разрезе словосочетаний; другой – с исследованием структуры связей между словосочетаниями согласно данному корпусу.

### 6.2.1 ПС таблица

Метод АСД может использоваться для анализа структуры корпуса текстов в разрезе определенных словосочетаний, связанных с этим корпусом. Рассмотрим какой-нибудь корпус текстов, например, набор публикаций о бизнес-процессе в посткризисной России (2009-2010 годы). Словосочетания могут характеризовать различные типовые события:

- изменение организационно-правовой формы;
- изменение уровня концентрации собственности;
- повышение эффективности управления затратами;



- смена генерального директора;
  - участие в судебных разбирательствах;
  - присвоение кредитного рейтинга;
  - выход на международный рынок;
  - публикация финансовой отчетности;
  - реструктуризация кредита;
  - первичное размещение на зарубежной бирже
- и др.

С помощью АСД метода построим таблицу «публикация-словосочетание» (ПС таблица), в которой строки соответствуют отдельным публикациям (текстам), столбцы – отдельным словосочетаниям, а элементы – оценки степени вхождения строк-словосочетаний в АСД, построенное для соответствующей публикации. Для каждой публикации строим свое АСД, а затем, с помощью процедуры наложения вычислим оценки степеней вхождения каждого словосочетания публикацию (см. Таблицу 6.2, представляющую фрагмент одной из наших ПС таблиц). Были проведены эксперименты с различными методами разбиения статьи на строки. Хорошие результаты достигаются при разбиении публикации на тройки слов, по-видимому, из-за того, что большинство рассматриваемых словосочетаний тоже состоит из трех слов, так что глубина АСД получается близкой к длине словосочетаний, с ним сравниваемых. Построенную ПС таблицу можно использовать как для анализа структуры корпуса публикаций, так и для анализа взаимосвязей между словосочетаниями.

Таблица 6.2 – Фрагмент ПС таблицы. Столбцы соответствуют публикациям, а строки – словосочетаниям, значения в клетках – степени релевантности словосочетаний данным публикациям

	Доклад Всемирного Банка об экономике России	Международные стандарты финансовой отчетности	Если генеральный директор иностранец
1. Изменение организационно-правовой формы	0.3145	0.3616	0.3644
2. Изменение уровня концентрации собственности	0.5016	0.3148	0.2706
3. Повышение эффективности управления затратами	0.4433	0.2809	0.2445

4. Смена генерального директора	0.2264	0.2351	0.5947
---------------------------------	--------	--------	--------

### 6.2.2 Анализ структуры корпуса публикаций путем иерархической группировки

ПС таблица позволяет использовать словосочетания как количественные признаки, значения которых она содержит. С ее помощью можно построить иерархическую классификацию публикаций. Мы используем метод иерархической концептуальной кластеризации [179] в модификации Миркина [173]. Концептуальный кластер-анализ отличается от остальных методов кластер-анализа тем, что разделение кластеров в нем осуществляется не по многомерному расстоянию, комбинирующему в себе действие всех рассматриваемых признаков, а по только одному из признаков. Если признак  $x$  количественный, то две части, на которые разбивается кластер, отвечают предикатам  $\langle x > a \rangle$  и  $\langle x \leq a \rangle$  для некоторого значения  $a$ . Если признак – категоризованный, то две части разделения отвечают предикатам  $\langle x = a \rangle$  и  $\langle x \neq a \rangle$  для некоторой категории  $a$ . В процессе вычислений осуществляется полный перебор всех кандидатов для разбиения – по всем признакам и всем их значениям  $a$  – их на самом деле очень немного, линейная функция от числа признаков, и выбирается то разделение, для которого суммарная ассоциация с существующими признаками максимальна. При этом максимально и многомерное расстояние Уорда между центрами разделенных частей [173]. Получаемое «концептуальное» дерево имеет простую интерпретацию и, кроме того, выступает в качестве инструмента отбора информативных признаков – тех, которые действительно участвуют в разделениях. Степень ассоциации иерархического разбиения с признаками измеряется так называемым корреляционным отношением в случае количественных признаков, или коэффициентами, основанными на таблице сопряженности между искомым разбиением и признаками, в случае категоризованных признаков. Оказывается, в последнем случае некоторые известные коэффициенты ассоциации, популярные в построении решающих деревьев, такие как индекс Джини и коэффициент сопряженности Пирсона, эквивалентны специальным случаям критерия квадратичной ошибки в методе

к-средних, при условии, что отдельные категории представлены как числовые 1/0 признаки и подходящим образом нормированы [173].

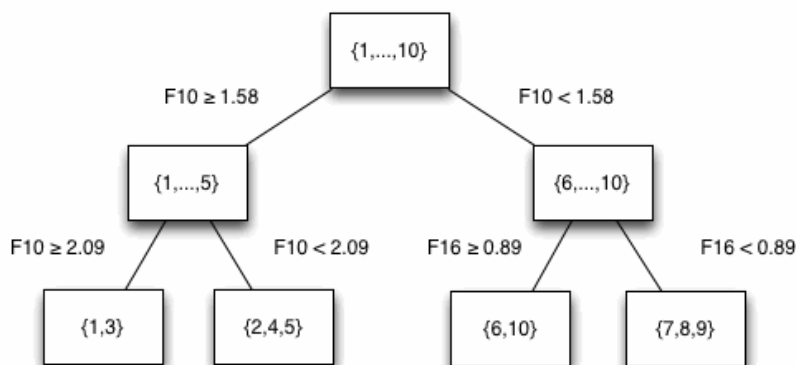


Рисунок 6.4 – Пример иерархической классификации

Благодаря специфике метода, каждый кластер в полученной иерархии может быть легко интерпретирован предикатами на пути от корня дерева до листа, соответствующего рассматриваемому кластеру. В силу своей дихотомической структуры, метод может на разных этапах построения дерева иерархии использовать различные значения одного и того же признака, что многократно происходило при расчетах. При этом возникает отдельная задача согласования соответствующих бинарных предикатов – формирование интервалов оценки релевантности, соответствующих тому или иному кластеру. Например, кластер {2,4,5} на рисунке 6.4 описывается условием: релевантность словосочетания F10 находится в пределах между 1.58 и 2.09.

В одном из расчетов таким способом было получено дерево иерархии, имеющее 7 уровней и 51 узел, 26 из которых являются листьями (они и есть искомые кластеры публикаций). При этом из нескольких десятков рассматривавшихся словосочетаний в построенном дереве были использованы только те, которые перечислены в пункте 6.2.1. Этот список характеризует существенные стороны выживания и развития компаний, особенно в послекризисный период. Он оказался довольно устойчивым относительно различных методов деления текстов на строки, а также преобразования данных путем обнуления малых значений оценки релевантности.

### 6.2.3 Анализ связей между ключевыми словосочетаниями

Ту же ПС таблицу можно использовать для анализа связей между входящими в нее словосочетаниями. Все публикации разделяются на три типа: 1) статьи, в которых явно выражено только одно словосочетание, так что его оценка по методу АСД значительно превосходит оценки всех остальных словосочетаний; 2) статьи с высокими оценками релевантности двух и более словосочетаний; 3) статьи, где нет ни одного словосочетания с высокой оценкой. Поэтому для каждого словосочетания определены множества публикаций, составляющие его моно- и мульти-ядра, т.е. множества публикаций только типа 1) (моноядро) и типа 2) (мультиядро). Объединение этих двух типов образует множество всех публикаций  $F(A)$ , в которых оценка релевантности соответствующего словосочетания  $A$  превышает заданный порог.

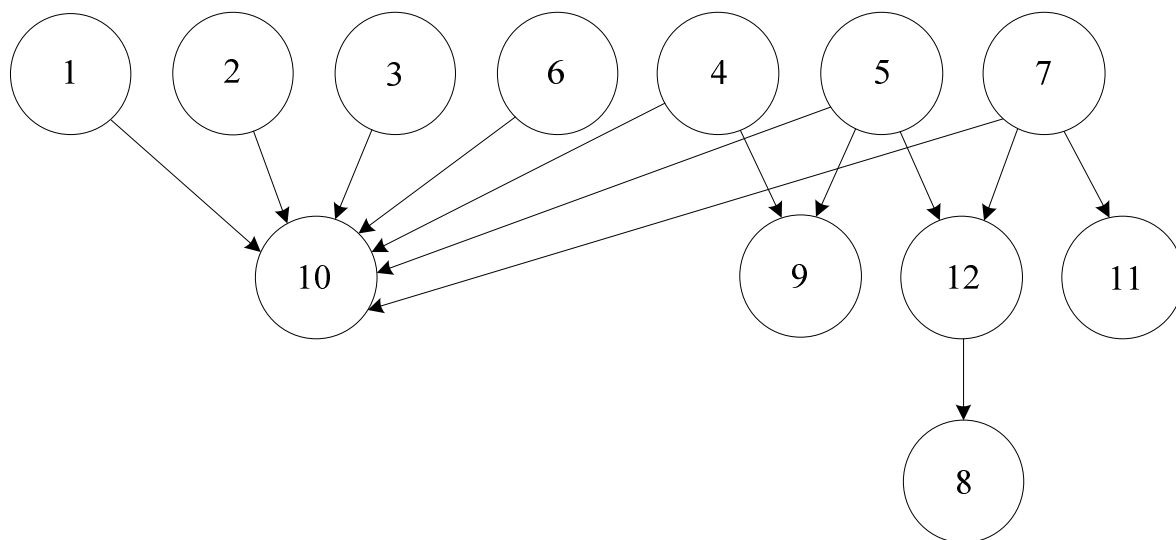


Рисунок 6.5 – Граф значимых (на уровне 60%) связей между словосочетаниями по массиву публикаций. Расшифровка номеров приведена ниже

Будем считать, что словосочетание  $A$  влечет словосочетание  $B$  согласно данному корпусу публикаций, если доля множества  $F(B)$  в  $F(A)$  составляет не менее 60%. Это правило, соответствующее традиционным логико-статистическим построениям, напоминает известный аппарат построения ассоциаций в так называемой разработке данных [169]. Действительно, в обоих случаях имеется в виду, что одно множество объектов содержит другое, с точностью до определенной ошибки, конечно. Однако имеется и существенная разница. В разработке данных импликации (ассоциативные правила) ищутся по всему массиву данных, без привязки к каким-либо специфиче-

ским утверждениям, что требует задания дополнительного порога на уровень «поддержки» импликации. В нашем случае импликации привязаны к заранее заданным словосочетаниям, и не нуждаются в проверке на уровень поддержки. Данный подход ближе к так называемому детерминационному анализу [165]. Но в детерминационном анализе главное – выявление системы категорий, комбинация которых приводит к максимальной точности импликации. Для нас же главное – выявление структуры связей между заданными словосочетаниями. В частности, в расчете по публикациям о бизнес-процессе в России с использованием нескольких десятков словосочетаний был получен граф, представленный на рисунке 6.5. Словосочетания, соответствующие его вершинам:

- 1) ввод автоматизированного производства;
- 2) выпуск пресс-релизов (с положительными или отрицательными новостями);
- 3) изменение размера пакета акций, принадлежащего институциональному инвестору;
- 4) изменение уровня концентрации собственности;
- 5) повышение квалификации персонала;
- 6) проведение вертикального слияния;
- 7) проведение операций купли-продажи бренда;
- 8) выход на международный рынок;
- 9) изменение организационно-правовой формы;
- 10) повышение эффективности управления затратами;
- 11) публикация финансовой отчетности;
- 12) смена финансового директора.

Обращает на себя внимание то, что в графе нет контуров и всего два основных уровня, естественным образом интерпретируемых как источники и цели. С содержательной точки зрения, граф допускает разумную интерпретацию, связанную с содержанием процессов развития бизнес-процесса в России в 2009-2010 гг. Показанные в нем цели: уменьшение издержек, изменение организационно-правовой формы, повышение прозрачности, выход на мировые рынки действительно могут помочь бизнесу выжить и развиваться; событие 12) оказывается шагом, ведущим к вы-

ходу на мировые рынки. Согласно графу, основными факторами этого процесса являются: купля-продажа брендов (развитие сетевых структур), автоматизация производства, повышение квалификации персонала, а также передача государственных активов в частные руки.

### 6.3 Использование метода АСД для анализа связи текстов с таксономией предметной области

В этом подразделе будет рассмотрена возможность отображения текстов на таксономию соответствующей предметной области. Под таксономией, или иерархической онтологией, понимается иерархическое представление основных понятий в разрезе таких отношений, как «А состоит из В1, В2, ...» или «В – это частный случай А». В настоящее время иерархические онтологии - одно из основных направлений автоматизации хранения, использования и накопления знаний [178],[160],[159]. В разделе описаны наши попытки использования метода АСД для отображения текстов в таксономиях математики и информатики, одна – англоязычная (информатика), вторая – русскоязычная (математика).

#### 6.3.1 Индексирование научных статей таксономическими единицами классификации информатики ACM-CCS

Одно из возможных приложений метода АСД – индексирование научных публикаций по существующим научным классификациям. Например, в журналах международной Ассоциации Вычислительной Техники (Association for Computing Machinery) используется классификационная система вычислительной техники, разработанная этой организацией [166] (ACM-CCS), для индексирования (рубрикации) статей. Авторы вручную приписывают своим статьям две-три таксономические единицы ACM-CCS, наилучшим образом отвечающие им по содержанию. Нас интересует возможность использования метода АСД для автоматизации такого индексирования.

Чтобы реализовать эту идею, для каждой рассматриваемой научной публикации следует:

- выделить ее ключевые фрагменты, включая заголовок, список ключевых слов и аннотацию (abstract);
- построить АСД по выделенным фрагментам публикации (по всем или частично);
- оценить степень вхождения каждой листовой таксономической единицы АСМ-CCS в построенное АСД, т.е. построить профиль статьи;
- выбрать таксономические единицы с максимальными оценками в качестве исковой индексации.

Рассмотрим один из журналов, Journal of the ACM, издаваемый в электронном формате и находящийся в свободном доступе. Для ускорения расчетов использованы только текст аннотации и ключевые слова статей. В Таблице 6.3 приведены аннотации, таксономические единицы, приписанные авторами, и списки ключевых слов для публикаций [162] и [163]. Это сделано для того, чтобы читатель смог оценить сам, насколько аннотации, полученные с использованием метода АСД и приведенные далее в Таблицах 6.4 и 6.5, соответствуют содержанию. Кроме того, приведенные тексты могут быть использованы как данные для тестирования других методов анализа текстов. Следует иметь в виду, что, несмотря на внешнее сходство с задачей распознавания образов, в данной проблеме нет внешнего учителя. Поэтому не существует объективного измерителя степени успешности работы автоматического индексатора, по крайней мере, в настоящее время.

Таблица 6.3 – Аннотации, индексные таксономические единицы и ключевые слова двух публикаций журнала АСМ

M. Bojanczyk, A. Muscholl, T. Schwentick, L. Segoufin	M. Grohe, A. Henrich, N. Schweikardt
Two variable logic on data trees and XML reasoning, Journal of ACM, 2009, 56(3), 58 p.	Lower bounds for processing data with few random accesses to external memory, Journal of ACM, 2009, 56(3), 48 p.

<p>Motivated by reasoning tasks for XML languages, the satisfiability problem of logics on data trees is investigated. The nodes of a data tree have a label from a finite set and a data value from a possibly infinite set. It is shown that satisfiability for two-variable first-order logic is decidable if the tree structure can be accessed only through the child and the next sibling predicates and the access to data values is restricted to equality tests. From this main result, decidability of satisfiability and containment for a data-aware fragment of XPath and of the implication problem for unary key and inclusion constraints is concluded.</p>	<p>We consider a scenario where we want to query a large dataset that is stored in external memory and does not fit into main memory. The most constrained resources in such a situation are the size of the main memory and the number of random accesses to external memory. We note that sequentially streaming data from external memory through main memory is much less prohibitive.</p> <p>We propose an abstract model of this scenario in which we restrict the size of the main memory and the number of random accesses to external memory, but admit arbitrary sequential access. A distinguishing feature of our model is that it allows the usage of unlimited external memory for storing intermediate results, such as several hard disks that can be accessed in parallel.</p> <p>In this model, we prove lower bounds for the problem of sorting a sequence of strings (or numbers), the problem of deciding whether two given sets of strings are equal, and two closely related decision problems. Intuitively, our results say that there is no algorithm for the problems that uses internal memory space bounded by <math>N^{1-\epsilon}</math> and at most <math>o(\log N)</math> random accesses to external memory, but unlimited “streaming access”, both for writing to and reading from external memory. (Here <math>N</math> denotes the size of the input and <math>\epsilon</math> is an arbitrary constant greater than 0.) We even permit randomized algorithms with one-sided bounded error. We also consider the problem of evaluating database queries and prove similar lower bounds for evaluating relational algebra queries against relational databases and XQuery and XPath queries against XML-databases.</p>
<p>Primary Classification</p> <p>F.4.1[Mathematical logic and formal languages]:Mathematical logic</p> <p>Additional Classification:</p> <p>F.2.3[Database management]: Languages–Query languages</p>	<p>Primary Classification</p> <p>F.1.1 [Computation by Abstract Devices]: Models of Computation—bounded-action devices;</p> <p>F.1.3 [Computation by Abstract Devices]: Complexity Measures and Classes—relations among complexity classes; relations among complexity measures;</p> <p>Additional Classification:</p> <p>H.2.4 [Database Management]: Systems—query processing; relational databases</p>
<p>General Terms: Theory</p> <p>Key Words and Phrases: First-order logic, data trees, decidability</p>	<p>General Terms: Theory, Languages</p> <p>Key Words and Phrases: complexity, data streams, real-time data, query processing, query optimization, semi-structured data, XML</p>

В левой части Таблиц 6.4 и 6.5 представлены АСД-профили, а в правой – авторские аннотации, а также места, которые авторские таксономические единицы заняли в АСД-профиле.

Профиль Таблицы 6.4 представляется вполне удачным, поскольку таксономические единицы из авторского индекса статьи занимают 3 и 4 место в АСД-профиле. Напротив, профиль Таблицы 6.5 – неудачный: авторский индекс статьи содержит таксономические единицы, крайне низко оцененные АСД-профилем. Дело в том, что авторские индексации содержат таксономические единицы, формулировки ко-



торых не отражены в тексте аннотации – они передаются другими, синонимичными словами.

Приведенный пример показывает трудности, связанные с методом АСД:

- неоправданно высокая оценка общих слов и фраз. Эту проблему отчасти можно решить путем введения списка стоп-слов, включающего все подобные слова, «вручную»;
- таксономическая единица получает низкую оценку, если автор предпочитает использовать другое, хотя и близкое по смыслу, понятие. Эта проблема может быть решена, если с каждой таксономической единицей связать список синонимичных понятий.

Таблица 6.4 – Пример “удачного” АСД профиля

Статья: Wojanczyk M. et al. Two variable logic on data trees and XML reasoning, Journal of the ACM, 2009, Vol. 56(3). 2-48.					
АСД Профиль			Индексационные таксономические единицы (ручное аннотирование)		
ID	TE	ACM-CCS единица	ID	#	ACM-CCS категории
I.6.2	6.1969	Simulation Languages	F.4.3	3	Formal Languages
I.1.3	6.1415	Languages and Systems	H.2.3	4	Languages
F.4.3	6.0796	Formal Languages	H.2.1	13	Logical Design
H.2.3	4.0757	Languages	F.4.1	28	Mathematical Logic
D.4.5	3.7387	Reliability	I.7.2	53	Document Preparation

Таблица 6.5 – Пример “неудачного” АСД профиля

Статья: Grohe M., et al. Lower bounds for processing data with few random accesses to external memory. Journal of the ACM, 2009, Vol. 56(3), 1-58.					
AST found profile			ACM-CCS index terms (manual annotation)		
ID	TE	ACM-CCS класс	ID	#	ACM-CCS класс
J.1	9.5991	ADMINISTRATIVE DATA PROCESSING	F.1.3	161	Complexity Measures and Classes
I.2.7	7.3757	Natural Language Processing	H.2.4	166	Systems
H.2.5	5.0704	Heterogeneous Databases	F.1.1	220	Models of Computation
H.2.8	4.4196	Database Applications			
C.5.1	4.0146	Large and Medium Computers			

### 6.3.2 Анализ учебных программ математического цикла НИУ ВШЭ с использованием таксономии РЖ «Математика»

На сайте НИУ ВШЭ имеются в свободном доступе файлы программ различных курсов, относящихся к математическим дисциплинам и читаемым студентам различных специализаций. Естественный вопрос – как эти программы отражают современную математику – может трактоваться как возможность выделения основных кластеров математического знания, содержащихся в этих программах, и их отображения на иерархическую классификацию математики. Поскольку учебные программы написаны на русском языке, в качестве классификации математики мы взяли русскоязычный иерархический рубрикатор реферативного журнала РЖ «Математика» (в настоящее время – на сайте [162]; мы использовали более ранний вариант рубрикатора, доступный в 2010 г., когда проводились расчеты).

Приведем некоторые из полученных результатов. В таблице 6 представлены таксономические единицы, получившие максимальные оценки релевантности программе курса «Дискретная математика». Часть таксономических единиц, получивших высокие оценки по методу АСД, оказались нерелевантными содержанию учебной программы. Три из представленных в Таблице 6.6 нерелевантных таксономических единиц содержат слово «алгебраический». Это слово или однокоренные с ним часто употребляются в программе «Дискретная математика», поэтому данные таксономические единицы и получили высокие оценки.

Таблица 6.6 – Часть профиля программы “Дискретная математика”. Серым выделены неадекватные таксономические единицы

Программа по курсу «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»		
Оценка	Код	Таксономическая единица
25.53	517.986.9	Другие алгебраические структуры в функциональном анализе
18.096	512.562	Частично упорядоченные множества
17.205	512.664.8	Деформации алгебраических структур
16.204	512.732.1	Общие свойства алгебраических пучков
16.025	510.63	Классические логические теории
15.307	512.545.6	Частично упорядоченные группы
12.076	510.6	Математическая логика
11.267	510.64	Неклассические логики
11.253	519.171.2	Представления графов
11.049	519.876.3	Сетевое планирование

10.96	519.712.4	Сложность алгоритмов
10.96	510.52	Сложность алгоритмов
8.31	510.633	Логика высказываний
7.36	519.681.4	Сложность вычислений

Хороший профиль оказался у программы «Дифференциальные уравнения»: он включает в себя большую часть соответствующего раздела таксономии и почти полностью покрывает содержание программы.

В целом, результаты этого приложения вызывают больше вопросов, чем дают ответов. Это связано, на наш взгляд, не только с вышеотмеченными недостатками метода АСД, но и особенностями использованной таксономии. Использованная версия таксономии РЖ «Математика» (2009) – это дерево неравномерной глубины (от 3 до 8 уровней в разных разделах), содержащее разделы, не сбалансированные между собой по объему и содержанию. Кроме того, в таксономии отсутствуют некоторые современные темы такие как «Дискретная математика» или «Математическая экономика». В разделах, относящихся к современным частям математики, часто опущены важные понятия. Например, категория «Теория игр» содержит таксономические единицы, перечисляющие виды игр, но понятие «равновесие» здесь не представлено. Напротив, имеются разделы, связанные с относительно небольшими частями математики, особенно с точки зрения учебных программ, которым соответствуют глубокие и кустистые поддеревья. Кроме того, в таксономии усложнена система навигации; есть ссылки на удаленные после последней модификации таксономические единицы. Это делает актуальной задачу разработки более адекватной классификации математики, включая, вероятно, информатику и прикладную математику. Этой задаче посвящён следующий подраздел.

#### 6.4 Метод автоматизации достраивания таксономии на основе ресурсов Википедии

Основа таксономии теории вероятностей и математической статистики была составлена нами вручную по справочным материалам ВАК [163]. Основные темы паспорта специальности «Теория вероятностей и математическая статистика» оче-

видным образом собираются в трехуровневое дерево. На первом уровне этого дерева расположены 2 раздела: теория вероятностей и математическая статистика. В первом разделе 5 листьев, во втором 6 (см. Таблицу 6.7, представляющую эти уровни столбцами).

Таблица 6.7 – Таксономия специальности «Теории вероятностей и математическая статистика» по материалам ВАК

ТВиМС	Теория вероятностей и математическая статистика		
	ТВиМС.01	Теория вероятностей	
		ТВиМС.01.01	Модели и характеристики случайных явлений
		ТВиМС.01.02	Распределения вероятностей и предельные теоремы
		ТВиМС.01.03	Комбинаторные и геометрические вероятностные задачи
		ТВиМС.01.04	Случайные процессы и поля
		ТВиМС.01.05	Оптимизационные и алгоритмические вероятностные задачи
	ТВиМС.02	Математическая статистика	
		ТВиМС.02.01	Методы статистического анализа и вывода
		ТВиМС.02.02	Статистические параметры и их оценивание по выборке
		ТВиМС.02.03	Статистические критерии и проверка статистических гипотез
		ТВиМС.02.04	Временные ряды и случайные процессы
		ТВиМС.02.05	Машинное обучение
		ТВиМС.02.06	Многомерная статистика и анализ данных

Для достраивания в качестве источника была выбрана категория Википедии «Теория вероятностей и математическая статистика». Она содержит более чем 40 подкатегорий и 600 статей (по данным на конец декабря 2011). Из Википедии для достраивания доступны два вида данных: 1) иерархическая структура категорий, подкатегорий и статей (дерево категорий), 2) тексты статей. Дерево категорий мы будем использовать для наращивания иерархии собственной таксономии: к каждой таксономической теме на первом и втором уровне присоединим несколько подходящих по содержанию категорий Википедии и лежащие ниже подкатегории. Листьями таксономии будем считать названия статей, а извлеченные из текстов статей ключевые слова – уточнениями листьев.

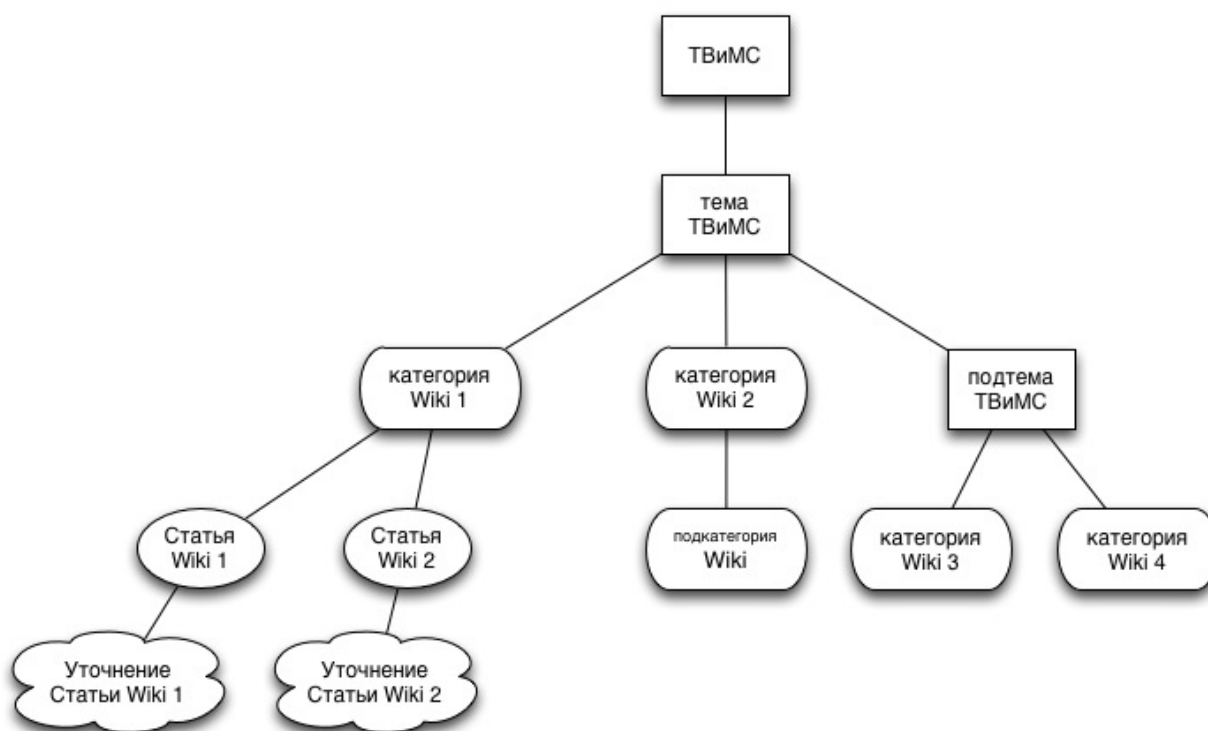


Рисунок 6.6 – Схема достраивания таксономии. В прямоугольниках находятся темы таксономии «Теории вероятностей и математическая статистика», в скругленных прямоугольниках – категории Википедии, в овалах – подкатегории Википедии, в облаках – уточнения листьев.

Структура категорий Википедии оказалась зашумленной: между некоторыми подкатегориями и категориями с экспертной точки зрения нет смысловой связи (например, категория «Оптимизация» находится в категории «Машинное обучения», которая, в свою очередь находится в категории «Математическая статистика»). Строго говоря, дерево категорий является графом, а не деревом, поскольку в некоторых случаях может содержать циклы. Одно из объяснений этому феномену согласно [171] заключается в том, что стандарт Википедии допускает размещение подкатегории в неограниченном числе категорий. Таким образом, для решения задачи достраивания таксономии необходимо провести предварительную обработку данных из Википедии и очистить дерево категорий от irrelevantных статей и категорий.

Наш подход к решению задачи достраивания таксономии состоит из нескольких этапов:

- 1) загрузка дерева категории «Теория вероятностей и математическая статистика» Википедии;
- 2) очистка дерева категорий от нерелевантных статей;
- 3) очистка дерева категорий от нерелевантных подкатегорий;
- 4) достраивание промежуточных уровней таксономии из категорий Википедии;
- 5) достраивание листьев таксономии из статей Википедии;
- 6) уточнение листьев таксономии ключевыми словами статей Википедии.

Поясним каждый из этих этапов.

1. Загрузка дерева категории «Теория вероятностей и математическая статистика» Википедии.

Хотя загрузка текстов статей – это техническая процедура, в ходе ее выполнения можно проводить предварительную обработку дерева категорий. На этом этапе «вручную» отсеиваются некоторые, очевидно не относящиеся к теории вероятностей подкатегории, например, «Оптимизация программного обеспечения» или «Natural Language Toolkit». В результате в нашем распоряжении оказались 640 статей Википедии, организованных в 48 категорий. Максимальная глубина загруженного дерева – 5, средняя глубина – 3. Некоторые категории содержат только подкатегории, но, в большинстве случаев, категории содержат и статьи, и подкатегории.

2. Очистка дерева категорий от нерелевантных статей.

Мы считаем нерелевантной такую статью, степень сходства которой с названием родительской категории не превосходит определенного порога. Под степенью сходства мы понимаем некую числовую характеристику, изменяющуюся от 0 до 1 и показывающую, насколько вероятно название родительской категории в тексте статьи. Для вычисления степеней сходства мы пользуемся аппаратом аннотированных суффиксных деревьев (АСД). В общих чертах, вычисляемый коэффициент позволяет оценить количество и длину подстрок названия категорий, входящих в текст статьи. Если степень сходства невелика, то в тексте статьи не встречается ни название категории, ни его части, поэтому можно считать, что между тематикой статьи и категорией связи нет.

### 3. Очистка дерева категорий от нерелевантных категорий.

Связь между данной категорией и ее подкатегорией определяется по аналогии со связью между категорией и текстом статьи в ней. Вместо текста статьи мы используем совокупность всех текстов в подкатегории и рассматриваем их как один текст. Степень сходства названия категории с таким текстом должна превышать заданный порог, чтобы подкатегория была релевантной для своей родительской категории.

### 4. Достраивание промежуточных уровней таксономии из категорий Википедии.

После очистки дерева категорий от нерелевантных статей и категорий, требуется определить, к какой из тем/вершин нашей таксономии может быть отнесена каждая категория. Для решения этой задачи мы пользуемся тем же методом АСД и вычисляем степени сходства таксономических единиц с текстами каждой категории. Категорию мы относим к той таксономической единице/теме, степень сходства с которой у этой категории максимальна. Мы не делали различий между категориями разных уровней, и в некоторых случаях оказалось, что и категория, и ее подкатегории были подстроены под одну таксономическую тему. В этом случае, мы создавали дополнительный уровень в таксономии и оставляли подкатегории потомками категорий.

### 5. Достраивание листьев таксономии из статей Википедии.

В нашей таксономии листьями служат статьи Википедии. В каждой достроенной категории мы оставляем релевантные для нее статьи. Если в категории нет статей и все ее потомки – подкатегории, то листьями в этой ветке будут статьи в подкатегориях.

### 6. Уточнение листьев таксономии ключевыми словами статей Википедии.

Мы считаем, что ключевые слова и словосочетания – это некоторые значимые формулировки в тексте статьи Википедии. Мы не использовали сложных алгоритмов для извлечения ключевых слов из текстов статей, поскольку статьи в Википедии не длинные, посвящены одной узкой теме, поэтому потребности в более продвинутом анализе текстов не возникает. Мы ограничились тем, что считали ключевыми словами наиболее частотные существительные, а ключевыми словосочетаниями –

наиболее частотные словосочетания, удовлетворяющие определенному синтаксическому шаблону (прилагательное + существительное, существительное + существительное, например). Использование синтаксических шаблонов также позволяет приводить словосочетания к нормальному виду.

В нашей работе статьи Википедии рассматриваются как совокупности предложений, т.е. строк, а названия категорий и таксономические темы как отдельные строки. Использование АСД позволяет оценить степень сходства одной строки с текстом, т.е. с совокупностью строк (названия категории с текстом статьи, например). В общих словах, степень сходства равна усредненной сумме квадратов длин совпадающих подстрок с учетом частоты совпавших подстрок. Степень сходства изменяется от 0 до 1, в экспериментальных расчетах, как правило, не превышает 0.6.

Таким образом, работа АСД используется в данном методе трижды:

- для очистки дерева категорий от нерелевантных статей;
- для очистки дерева категорий от нерелевантных категорий;
- для определения связи между таксономическими единицами и категориями Википедии.

Для решения задач 1 и 2 вводится порог степени сходства. В данном приложении нетрудно такой порог выбрать экспериментально, поскольку все статьи коллекции довольно близки друг к другу. Вполне комфортно подбирается порог 0.2, значительно отделяющий релевантные материалы от нерелевантных. Так, например, если степень сходства названия категории с текстом статьи меньше этого порога, то мы признаем статью нерелевантной для этой категории. Использование такого значения порога можно обосновать так: он составляет примерно треть от максимальной степени сходства.

Приведем пример таксономии, достроенной на 4 уровня, так что глубина нового дерева изменяется от 4 до 6. Некоторые таксономические темы, например, «Методы статистического анализа и вывода», не подвергались процедуре достраивания, и остались листьями в дереве таксономии.



Таксономическая тема «Распределение вероятностей и предельные теоремы» была дополнена несколькими уровнями иерархии, которые показаны в Таблице 6.8.

Таблица 6.8 – Достроенная таксономическая тема «Распределение вероятностей и предельные теоремы». Листья дерева опущены для простоты.

ТВиМС.01.02	распределения вероятностей и предельные теоремы	
	средние величины	
	распределения вероятностей	
		дискретные распределения
		непрерывные распределения
	марковские процессы	
	мартингалы	

На этапе очистки дерева категорий от нерелевантных статей было удалено 100 статей из 640. К нашему удивлению во всем дереве обнаружено всего две нерелевантных подкатегории: 1) подкатегория «Регрессионный анализ» в категории «Оптимизация»; 2) подкатегория «Деревья принятия решения» в категории «Машинное обучение».

Рассмотрим результаты процедуры достраивания на примере категории «Факторный анализ». В Википедии эта категория относится к категории «Математическая статистика». В ходе процедуры достраивания категории эта связь подтвердилась и категория «Факторный анализ» была помещена на второй уровень таксономии под темой ТВиМС.02 «Математическая статистика». Степень сходства темы «Математическая статистика» со статьям из категории «Факторный анализ» составляет примерно 0.4. Стоит отметить, что не все подкатегории «Математической статистики» сохранили связь с этой темой в таксономии. Категория «Средние величины» стала потомком темы «Распределение вероятностей и предельные теоремы» со степенью сходства около 0.43.

Изначально в категории «Факторный анализ» было 12 статей:

- факторный анализ;
- робастность в статистике;
- мультиколлинеарность;
- метод моментов нахождения оценок;

- метод максимального правдоподобия;
- метод группового учета аргументов;
- метод главных компонент;
- линейная регрессия на корреляции;
- коэффициент детерминации;
- корреляция;
- коррелятор;
- RANSAC.

После процедуры очистки в категории осталось 5 статей:

- коэффициент детерминации;
- метод главных компонент;
- факторный анализ;
- метод максимального правдоподобия;
- корреляция.

Каждая из этих статей стала листом в дереве таксономии. Для уточнения листьев дерева из текстов статей были извлечены ключевые слова и словосочетания (см. Таблице 6.9).

Таблица 6.9 – Примеры уточнения листьев таксономии: ключевые слова с частотой 5 и больше

Статья	Ключевые слова и словосочетания	Частоты ключевых слов и словосочетаний в тексте статьи
факторный анализ	факторный анализ	19
	Фактор	10
	Нагрузка	6
метод максимального правдоподобия	максимальное правдоподобие	9
	функция правдоподобия	8
	Параметр	7

Статья	Ключевые слова и словосочетания	Частоты ключевых слов и словосочетаний в тексте статьи
	оценка максимального правдоподобия	6
	Выборка	6
корреляция	корреляция	43
	коэффициент корреляции	23
	случайная величина	21
	ковариация	12
	Связь	12
	Ранг	10
	отклонение	8

В нашей таксономии была тема ТВиМС.02.05 «Машинное обучение», а в Википедии есть категория с таким же названием. Логично предположить, что при достраивании промежуточных уровней категория Википедии попадет под одноименную тему таксономии. Однако оказалось, что категория Википедии больше связана с темой ТВиМС.02.06 «Многомерная статистика и анализ данных» (со степенью сходства 0.45). Вторая категория, которая попала в эту тему – это категория «Деревья принятия решений», которая в Википедии является подкатегорией «Машинного обучения».

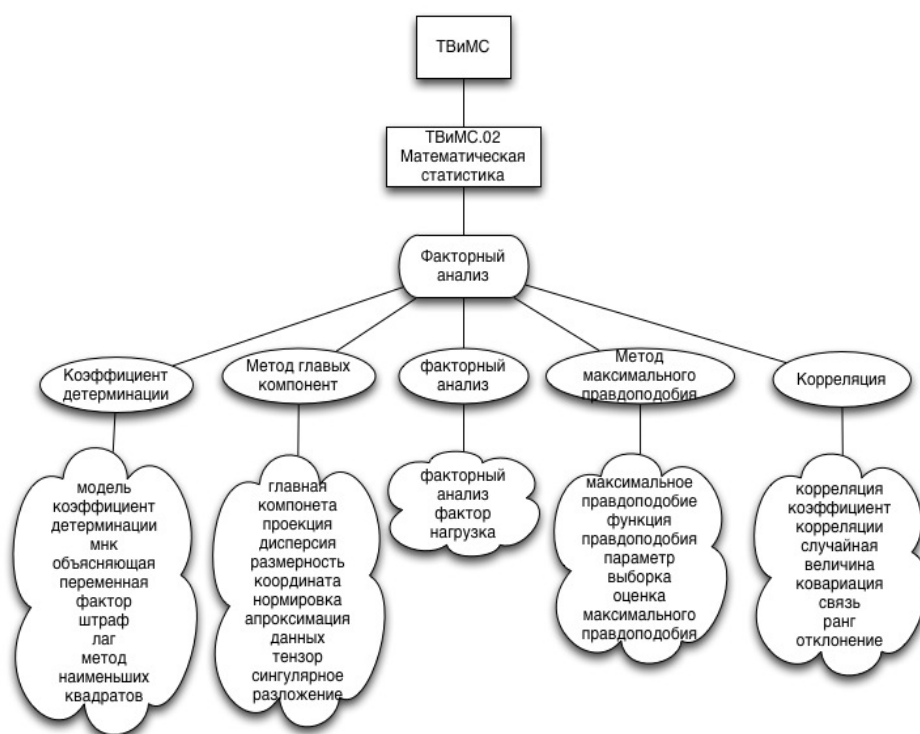


Рисунок 6.7 – Фрагмент достроенной таксономии

## 6.5 Некоторые выводы

Методы анализа текстов, основанные на аннотированных суффиксных деревьях (АСД), удобны тем, что не связаны с необходимостью грамматического разбора фраз, с семантическим анализом особенностей того или иного языка, и, более того, вообще позволяют свести до минимума предварительную обработку текстов, составляющую важную и иногда трудоемкую часть других подходов. Путем разбивки текста на строки нам удалось значительно снизить вычислительную трудоемкость этого метода. Рассмотренные примеры, с одной стороны, показывают эффективность метода в правильно выбранных приложениях и, с другой стороны, показывают пути его дальнейшего совершенствования. Главный недостаток метода – существенная привязка к буквенному содержанию фрагментов текста, от чего, вероятно, можно освободиться путем добавления информации о шумовых словах, словах-синонимах и частичных синонимах.

Результаты проведенных исследований нашли отражения в работах [161],[164],[174],[175]:

1. Миркин Б.Г., Черняк Е.Л., Чугунова О.Н. Метод аннотированного суффиксного дерева для оценки степени вхождения строк в текстовые документы// Бизнес-Информатика, 3(21), 2012, С.31-41.
2. Черняк Е.Л., Чугунова О.Н., Аскарова Ю.А., Насименто С., Миркин Б.Г. Автоматизация использования таксономий для аннотирования текстовых документов// Сб. конференции «Анализ Изображений, Сетей и Текстов"», Екатеринбург, 2012, С.97-103.
3. Mirkin B.G., Amorim R. Minkowski metric, feature weighting and anomalous cluster initializing in K-Means clustering// Pattern Recognition, 45, 2012, pp.1061-1075.
4. Nascimento S., Mirkin B.G. Additive spectral method for fuzzy cluster analysis of similarity data including community structure and affinity matrices// Information Sciences, 183, 2012, pp.16-34.

## 7 СТОХАСТИЧЕСКАЯ МЕРА ИНФОРМАТИВНОСТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОГО ВЫДЕЛЕНИЯ ИНФОРМАТИВНЫХ ПРИЗНАКОВ

В этом разделе приведены результаты исследования по так называемым стохастическим мерам информативности, которые в ряде задач обработки и анализа изображений оказались удобным математическим аппаратом моделирования недетерминистских систем.

В теории распознавания образов одной из наиболее важных задач является задача выбора информативных признаков (характеристик) образа. В линейном признаковом пространстве эта задача может быть решена, например, с помощью метода главных компонент [184],[194]. Однако в том случае, когда естественной линейной структуры в признаковом пространстве нет, этот метод становится неприменимым. В ряде работ авторов проекта был предложен другой подход к решению этой задачи, основанный на понятии меры информативности. В этом разделе ограничимся исследованием задачи выбора информативных признаков только на контурных изображениях, хотя сам подход может быть использован для решения аналогичной задачи и для других классов объектов (см. например, [191], где с помощью мер информативности решалась задача оптимальной сегментации). Этот подход предполагает рассмотрение на множестве  $2^\Gamma$  всех упорядоченных подмножеств точек дискретной кривой  $\Gamma$  некоторой функции множеств  $\mu(A)$ ,  $A \in 2^\Gamma$ , называемой мерой информативности, если она удовлетворяет определенным условиям. Впервые такой способ представления кривых, по-видимому, были рассмотрены в работах [185], [186]. Примерами мер информативности являются нормированный периметр или нормированная площадь многоугольника, некоторые способы агрегирования значений локальных признаков (например, кривизны) кривой и т.д.

В подразделе 7.1 рассмотрена аксиоматика мер информативности на контурах, некоторые способы определения мер информативности контурных изображений, а также приведены свойства некоторых конкретных мер информативности, таких как

меры информативности контура по длине, по площади, по кривизне. Эти свойства во многом определяются тем, что меры информативности это некоторый подкласс хорошо известных в теории неточных вероятностей, так называемых монотонных мер (по другой терминологии такие меры еще называют неаддитивными или нечеткими).

В подразделе 7.2 приведены результаты исследований по так называемым стохастическим мерам информативности. Это меры информативности, определенные на множествах признаков контурных изображений в том случае, когда сами признаки являются случайными величинами. Такой способ описания контурных изображений будет актуальным, если изображение подвергнуто вероятностному зашумлению. В этом случае значение меры информативности  $\mu(A)$  представления  $A \in 2^\Gamma$  кривой  $\Gamma$  будет случайной величиной  $M(A)$ , математическое ожидание которой характеризует информативность представления  $A$ , а дисперсия – степень устойчивости представления относительно рассматриваемого описания к зашумлению. Таким образом, возникает возможность постановки ряда задач нахождения информативных и устойчивых к зашумлению представлений контурных изображений. Некоторые из таких постановок рассмотрены для наиболее популярной меры информативности контура – меры информативности по длине.

В подразделе 7.3 приведены результаты исследования и применения к нахождению информативных и устойчивых к зашумлению представлений контурных изображений для наиболее популярной геометрической меры информативности по длине.

### 7.1. Меры информативности как способ агрегирования информации о низкочастотных особенностях изображений

Мера информативности полигонального представления кривой представляет собой функцию множеств, определенную на всех подмножествах вершин полигонального представления, удовлетворяющую условиям нормировки, монотонности (множество из большего числа точек многоугольника имеет большую информатив-

ность), инвариантности относительно группы аффинных преобразований плоскости и удаления неинформативных точек. Таким образом, меру информативности полигонального представления кривой (или просто меру информативности кривой) можно рассматривать как способ агрегирования информации о низкоуровневых особенностях кривой. Примерами мер информативности являются нормированная длина ломаной и площадь многоугольника с вершинами в данных точках подмножества. Такие меры информативности называют мерами информативности по длине и площади соответственно.

### 7.1.1 Аксиоматика меры информативности дискретной плоской кривой

Будем рассматривать плоскую дискретную кривую  $\Gamma = (\mathbf{g}_k)_{k=0}^{n-1}$ ,  $\mathbf{g}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j}$ . В первичных контурах, получаемых при обработке оцифрованных изображений, точки  $\mathbf{g}_k \in \mathbb{Z}^2$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , и удовлетворяют условиям связности: а)  $\mathbf{g}_k \neq \mathbf{g}_{k+1}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ ; б)  $\mathbf{g}_k \tau \mathbf{g}_{k+1}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , где  $\tau$  – некоторое отношение связности (например, точки  $\mathbf{g}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{g}_{k+1} = x_{k+1} \mathbf{i} + y_{k+1} \mathbf{j}$  находятся в отношении 8-связности, если  $|x_{k+1} - x_k| + |y_{k+1} - y_k| \leq 2$ ). Множество точек кривой  $\Gamma$  будем считать упорядоченным.

Предположим, что мы хотим выделить такое подмножество  $B = \{\mathbf{g}_{i_1}, \dots, \mathbf{g}_{i_l}\}$  точек кривой  $\Gamma$ , которое «хорошо» представляло бы  $\Gamma$ . Простейшим и наиболее распространенным представлением плоской кривой является полигональное представление, в котором кривая аппроксимируется некоторой ломаной: в этом случае множество  $B$  – это множество вершин многоугольника. С другой стороны, понятно, что вместо аппроксимации кривой можно использовать приближение этой кривой не только кусочно-линейными кривыми, но и другими «достаточно простыми» кривыми некоторого класса, например, алгебраическими кривыми второго порядка и пр. Поэтому введем обобщение понятия полигонального представления плоской кривой.



Пусть  $\Psi$  – некоторый класс плоских спрямляемых кривых без самопересечений,  $d(\Gamma_1, \Gamma_2)$  – некоторая фиксированная метрика между кривыми. Например,  $d(\Gamma_1, \Gamma_2)$  – расстояние Хаусдорфа [190],[187]:

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = \max \left\{ \sup_{\mathbf{g}_1 \in \Gamma_1} \inf_{\mathbf{g}_2 \in \Gamma_2} \rho(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2), \sup_{\mathbf{g}_2 \in \Gamma_2} \inf_{\mathbf{g}_1 \in \Gamma_1} \rho(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) \right\},$$

где  $\rho$  – некоторая метрика на плоскости.

Определение 7.1.  $\Psi$ -представлением плоской кривой  $\Gamma = (\mathbf{g}_k)_{k=0}^{p-1}$  будем называть пару  $(B, \Lambda(B, \Psi))$  упорядоченных множеств точек кривой  $B = \{\mathbf{g}_{i_1}, \dots, \mathbf{g}_{i_l}\}$ ,  $\mathbf{g}_{i_s} \in \Gamma$ ,  $s = 1, \dots, l$ , и кривых  $\Lambda(B, \Psi) = \{\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_{l-1}}\}$ ,  $\Lambda_{i_s} \in \Psi$ ,  $s = 1, \dots, l-1$ , таких, что:

1)  $\mathbf{g}_{i_s}$  – начало, а  $\mathbf{g}_{i_{s+1}}$  – конец кривой  $\Lambda_{i_s}$ ,  $s = 1, \dots, l-1$ ;

2)  $d(\Lambda_{i_s}, \Gamma_{i_s}) = \inf_{\Lambda \in \Psi} d(\Lambda, \Gamma_{i_s})$ , где  $\Gamma_{i_s}$  – часть кривой  $\Gamma$ , заключенная между точками  $\mathbf{g}_{i_s}$  и  $\mathbf{g}_{i_{s+1}}$ .

Аналогично вводится  $\Psi$ -представление для замкнутой кривой. Из определения следует, что  $\Psi$ -представление однозначно определяется множеством своих узлов  $B$ . Если  $\Psi$  – множество всех отрезков прямых на плоскости, то  $\Psi$ -представление будет полигональным. На практике, кроме полигональных представлений, чаще всего рассматриваются  $\Psi$ -представления, где  $\Psi$  – множество всех отрезков прямых и дуг окружностей на плоскости [196],[193]. На рисунке 7.1 приведен пример упорядоченного множества  $B = \{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_6\}$  –  $\Psi$ -представления дискретной кривой  $\Gamma = (\mathbf{g}_k)_{k=0}^6$ , где  $\Psi$  – класс отрезков прямых и дуг окружностей некоторого фиксированного набора радиусов.

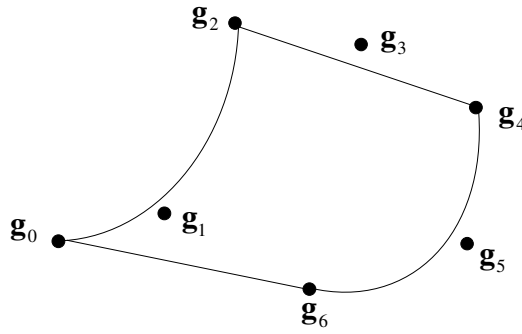


Рисунок 7.1 – Пример упорядоченного множества  $B = \{g_0, g_2, g_4, g_6\}$ , как  $\Psi$ -представления дискретной кривой  $\Gamma = (g_k)_{k=0}^6$

Назовем два  $\Psi$ -представления  $(B', \Lambda')$  и  $(B'', \Lambda'')$  эквивалентными  $((B', \Lambda') \sim (B'', \Lambda''))$ , если они определяют одну и ту же кривую. Очевидно, что в каждом классе эквивалентности существует единственное  $\Psi$ -представление с минимальным числом узлов.

Теперь, используя понятие  $\Psi$ -представления кривой, можно определить на множестве  $2^\Gamma$  всех точечных подмножеств упорядоченных точек дискретной кривой  $\Gamma = (g_k)_{k=0}^{n-1}$   $\Psi$ -меру информативности.

Определение 7.2.  $\Psi$ -мерой информативности на  $2^\Gamma$  назовем функцию множеств  $\mu$ , удовлетворяющую условиям:

- 1)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,  $\mu(\Gamma) = 1$  (нормированность);
- 2) если  $A \subseteq B$ , то  $\mu(A) \leq \mu(B)$  (монотонность);
- 3) если  $(A, \Lambda(A, \Psi)) \sim (B, \Lambda(B, \Psi))$ , то  $\mu(A) = \mu(B)$ .

Кроме того, от меры информативности, как правило, требуется, чтобы она была инвариантной относительно заданной группы  $G$  преобразований на плоскости, т.е.  $\mu(\varphi(B)) = \mu(B)$  для всех  $B \in 2^\Gamma$  и  $\varphi \in G$ . В качестве группы  $G$ , например, может быть группа аффинных преобразований плоскости.

Заметим, что условия 1) и 2) являются аксиомами монотонной (нечеткой) меры, введенной Сугено [197].

### 7.1.2 Способы определения мер информативности контура

Рассмотрим некоторые важные примеры мер информативности, а также некоторые общие способы построения таких мер.

Пусть задана замкнутая дискретная плоская кривая  $\Gamma = (\mathbf{g}_k)_{k=0}^{n-1}$ ,  $\mathbf{g}_n = \mathbf{g}_0$ ,  $\Psi$  – некоторое множество плоских спрямляемых кривых без самопересечений, для  $B \subseteq \Gamma$  множество  $\Lambda(B, \Psi)$  определяется так же, как в определении 7.1. Введем в рассмотрение функции множеств  $\mu_L^\Psi$  и  $\mu_S^\Psi$ :

а) если  $B = \{\mathbf{g}_{i_1}, \dots, \mathbf{g}_{i_l}\} \subseteq \Gamma$ , то  $\mu_L^\Psi(B) = L_\Psi(B)/L_\Psi(\Gamma)$ , где

$$L_\Psi(B) = \sum_{s=1}^l L(\Lambda_{i_s}), \quad \Lambda(B, \Psi) = \{\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_l}\},$$

где  $L(\Lambda)$  – длина кривой  $\Lambda \in \Lambda(B, \Psi)$ .

б) если область, ограниченная многоугольником с вершинами в точках дискретной кривой  $\Gamma$ , является выпуклой и  $B = \{\mathbf{g}_{i_1}, \dots, \mathbf{g}_{i_l}\} \subseteq \Gamma$ ,  $\mathbf{g}_{i_{l+1}} = \mathbf{g}_{i_1}$ , то  $\mu_S^\Psi(B) = S_\Psi(B)/S_\Psi(\Gamma)$ , где  $S_\Psi(B)$  – площадь фигуры, ограниченной кривыми  $\Psi$ -представления с вершинами в точках упорядоченного множества  $B$ .

Если  $\Psi$  – множество всех отрезков прямых на плоскости, то соответствующие функции множеств  $\mu_L^\Psi$  и  $\mu_S^\Psi$  будем обозначать просто через  $\mu_L$  и  $\mu_S$ . Кроме того, будем считать, что  $\mu_L(A) = 0$ , если  $|A| = 0, 1$  и  $\mu_S(A) = 0$ , если  $|A| = 0, 1, 2$ . Нетрудно показать, что функции множеств  $\mu_L$  и  $\mu_S$  будут мерами информативности, которые будем называть мерами информативности по длине и площади соответственно.

Предложение 7.1. Пусть  $\Gamma$  – замкнутая дискретная кривая. Функция множества  $\mu_L$  и, в случае выпуклости многоугольника с вершинами в точках кривой  $\Gamma$ , функция множеств  $\mu_S$  являются монотонными мерами информативности на  $2^\Gamma$ .

Заметим, что если замкнутая дискретная кривая  $\Gamma$  ограничивает невыпуклый многоугольник, то функция множеств  $\mu_S$  уже не будет монотонной. Меры информативности  $\mu_L$  и  $\mu_S$  были введены и исследованы в работах [185],[186].

Усредненную функцию информативности  $\mu$  дискретной кривой  $\Gamma$  можно представить в виде

$$\mu(A) = \frac{\sum_{\mathbf{g} \in A} \omega(\mathbf{g}, A)}{\sum_{\mathbf{g} \in \Gamma} \omega(\mathbf{g}, \Gamma)}, \quad A \in 2^\Gamma, \quad (7.1)$$

где  $\omega(\mathbf{g}, A)$  – неотрицательное значение признака представления  $A$  кривой  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{g} \in A$ . Если для множества  $A$  значения  $\omega(\mathbf{g}, A)$  не определяются, то положим  $\mu(A) = 0$  (в частности,  $\mu(\emptyset) = 0$ ). Примерами усредненных функций информативности являются меры информативности по длине  $\mu_L$ , по площади  $\mu_S$ . Например, для меры информативности по длине  $\omega(\mathbf{g}, A) = \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_+(A)\|$ , где  $\mathbf{g}_+(A)$  – точка, следующая за точкой  $\mathbf{g}$  в упорядоченном представлении  $A$ . Пусть  $\bar{A}$  – замкнутая область, ограниченная многоугольником  $A$ . Тогда для меры информативности по площади замкнутой дискретной кривой  $\Gamma$ , ограничивающей выпуклый многоугольник, имеем  $\omega(\mathbf{g}, A) = 0.5 |\boldsymbol{\rho}_O(\mathbf{g}) \times \boldsymbol{\rho}_O(\mathbf{g}_f(A))|$ , где  $\boldsymbol{\rho}_O(\mathbf{g})$  – радиус вектор точки  $\mathbf{g} \in A$  относительно произвольной точки  $O \in \bar{A}$ .

## 7.2 Стохастическая монотонная усредненная мера информативности

Пусть  $\Gamma = (\mathbf{g}_k)_{k=0}^{n-1}$  – плоская замкнутая дискретная кривая,  $\mathbf{g}_n = \mathbf{g}_0$ ,  $\mu$  – усредненная мера информативности на  $2^\Gamma$  вида (7.1). Предположим, что значение признака  $\omega(\mathbf{g}, A)$  в точке  $\mathbf{g}$  представления  $A$  зависит как от координат самой точки  $\mathbf{g}$ , так и некоторых соседних с ней точек. Рассмотрим случай, когда  $\omega(\mathbf{g}, A) = \omega(\mathbf{g}, A_{0,1}(\mathbf{g})) = \omega(\mathbf{g}, \mathbf{g}_+(A))$  для всех  $\mathbf{g} \in A$  и  $A \in 2^\Gamma$ ,  $|A| > 2$ . Примерами таких мер является мера информативности по длине  $\mu_L$  и мера информативности по площади  $\mu_S$ , если область  $\bar{\Gamma}$  – выпуклая.

Предположим, что дискретная плоская замкнутая кривая  $\Gamma = (\mathbf{g}_k)_{k=0}^{n-1}$ ,  $\mathbf{g}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j}$ , подвергнута вероятностному зашумлению  $\mathcal{N}_{d,2}((\sigma_{x,t})_t, (\sigma_{y,r})_r)$ . В ре-

зультате получим случайную кривую  $\tilde{\Gamma} = (\mathbf{G}_k)_{k=0}^{p-1}$ ,  $\mathbf{G}_k = X_k \mathbf{i} + Y_k \mathbf{j}$ , где  $X_k = x_k + \eta_k$ ,  $Y_k = y_k + \xi_k$ ,  $\eta_k, \xi_k$  – случайные некоррелированные величины, причем  $\mathbf{E}[\eta_k] = \mathbf{E}[\xi_k] = 0$ ,  $\sigma^2[\eta_k] = \sigma_{x,k}^2$ ,  $\sigma^2[\xi_k] = \sigma_{y,k}^2$ . В этом случае признаковые характеристики  $\omega(\mathbf{G}, A) = \Omega(\mathbf{g}, \mathbf{g}_+(A))$  будут случайными величинами, также как и значение меры

$$M(A) = \sum_{\mathbf{g} \in A} \Omega(\mathbf{g}, \mathbf{g}_+(A)) / \sum_{\mathbf{g} \in \Gamma} \Omega(\mathbf{g}, \mathbf{g}_+(\Gamma)) \quad (7.2)$$

для фиксированного представления  $A \in 2^\Gamma$ . Будем использовать обозначение  $\Omega(\mathbf{g}_{j_k}, (\mathbf{g}_{j_k})_+(A)) = \Omega_{k,k+1}(A)$ , если  $A = \{\mathbf{g}_{j_0}, \dots, \mathbf{g}_{j_{m-1}}\}$ ,  $\mathbf{g}_{j_m} = \mathbf{g}_{j_0}$ , – полигональное представление кривой  $\Gamma$ .

Предположим, что существует такое базовое множество  $B \subseteq \Gamma$ , что случайные величины  $\Omega_{k,k+1}(B)$  и  $\Omega_{j,j+1}(B)$  независимы, если  $|k - j| > 1$ . Тогда вместо меры  $M$ , определяемой формулой (7.2), будем рассматривать меру

$$M(A) = \sum_j \Omega_{j,j+1}(A) / \sum_k \Omega_{k,k+1}(B), \quad A \in 2^B.$$

Можно сказать, что мера  $\mu$  определяет модель неточности первого порядка полигонального представления кривой  $\Gamma$ . Мера  $\mu(A)$  зависит от множества параметров-признаков  $\omega(\mathbf{g}, A)$ ,  $\mathbf{g} \in \Gamma$ , которые при зашумлении кривой  $\Gamma$ , вносят свою неточность в определение информативности полигонального представления. Эта неточность является моделью второго порядка. Таким образом, мера  $M$  представляет собой иерархическую двухуровневую модель неточности полигонального представления кривой. По поводу иерархических моделей неточности см. [192].

Вычислим среднее значение  $\mathbf{E}[M(A)]$  меры информативности  $\mu(A)$ . Пусть  $\mathbf{E}[\Omega_{k,k+1}(A)] = m_k(A)$ ,  $\sigma^2[\Omega_{k,k+1}(A)] = \sigma_k^2(A)$ ,  $\text{Cov}[\Omega_{j-1,j}(B), \Omega_{j,j+1}(B)] = k_j(B)$ . Случайная величина  $M(A)$  равна отношению двух случайных величин  $X_1 = \sum_k \Omega_{k,k+1}(A)$  и  $X_2 = \sum_j \Omega_{j,j+1}(B)$ . Поэтому предварительно найдем приближенные выражения и оценим остатки для числовых характеристик отношения  $X_1/X_2$

двух случайных величин (эти формулы можно найти в [189], однако там не указаны условия применимости и не оценена точность).

Лемма 7.1. Пусть  $X_1$  и  $X_2$  две случайные величины, принимающие значения в интервалах  $l_1, l_2$  соответственно положительных полуосей и  $l_2 \subseteq ((1-\delta)\mathbf{E}[X_2], (1+\delta)\mathbf{E}[X_2])$ ,  $l_1 \subseteq (\mathbf{E}[X_1] - \delta\mathbf{E}[X_2], \mathbf{E}[X_1] + \delta\mathbf{E}[X_2])$ . Тогда справедливы следующие формулы для среднего значения и дисперсии отношения  $X_1/X_2$  соответственно

$$\mathbf{E}\left[\frac{X_1}{X_2}\right] = \frac{\mathbf{E}[X_1]}{\mathbf{E}[X_2]} + \frac{\mathbf{E}[X_1]}{\mathbf{E}^3[X_2]} \sigma^2[X_2] - \frac{1}{\mathbf{E}^2[X_2]} \mathbf{Cov}[X_1, X_2] + r_1, \quad (7.3)$$

$$\sigma^2\left[\frac{X_1}{X_2}\right] = \frac{1}{\mathbf{E}^2[X_2]} \sigma^2[X_1] + \frac{\mathbf{E}^2[X_1]}{\mathbf{E}^4[X_2]} \sigma^2[X_2] - \frac{2\mathbf{E}[X_1]}{\mathbf{E}^3[X_2]} \mathbf{Cov}[X_1, X_2] + r_2, \quad (7.4)$$

где  $\mathbf{Cov}[X_1, X_2]$  – ковариация случайных величин random  $X_1$  и  $X_2$ , т.е.  $\mathbf{Cov}[X_1, X_2] = \mathbf{E}\left[(X_1 - \mathbf{E}[X_1])(X_2 - \mathbf{E}[X_2])\right]$ ;  $r_1, r_2$  – остатки, зависящие от числовых характеристик случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ . Причем

$$|r_1| \leq \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]}{\mathbf{E}^3[X_2]} \sigma^2[X_2] \leq \frac{\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]}{(1-\delta)\mathbf{E}[X_2]} \delta^3, \quad |r_2| \leq C\delta^3.$$

Доказательство. Докажем только (7.3), поскольку (7.4) доказывается аналогично. Разложим функцию  $\varphi(x, y) = \frac{x}{y}$  в ряд Тейлора в точке  $(\mathbf{E}[X_1], \mathbf{E}[X_2])$ . Получим

$$\varphi(x, y) = \frac{x}{y} = \varphi(\mathbf{E}[X_1], \mathbf{E}[X_2]) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n \varphi(\mathbf{E}[X_1], \mathbf{E}[X_2]) =$$

$$\varphi(\mathbf{E}[X_1], \mathbf{E}[X_2]) - \frac{\mathbf{E}[X_1](y - \mathbf{E}[X_2]) - \mathbf{E}[X_2](x - \mathbf{E}[X_1])}{\mathbf{E}^2[X_2]} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{E}[X_2] - y}{\mathbf{E}[X_2]}\right)^{n-1}.$$

Последний ряд сходится в любой точке  $(x, y) \in l_1 \times l_2$ . Тогда

$$\mathbf{E}\left[\frac{X_1}{X_2}\right] = \frac{\mathbf{E}[X_1]}{\mathbf{E}[X_2]} + \frac{\mathbf{E}[X_1]}{\mathbf{E}^3[X_2]} \sigma^2[X_2] - \frac{1}{\mathbf{E}^2[X_2]} \mathbf{Cov}[X_1, X_2] + r_1,$$

где

$$r_1 = -\mathbf{E}\left[\frac{\mathbf{E}[X_1](X_2 - \mathbf{E}[X_2]) - \mathbf{E}[X_2](X_1 - \mathbf{E}[X_1])}{\mathbf{E}^2[X_2]} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{E}[X_2] - X_2}{\mathbf{E}[X_2]}\right)^{n-1}\right]$$

и

$$|r_1| \leq \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]}{\mathbf{E}^3[X_2]} \sigma^2[X_2] \leq \frac{\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]}{(1-\delta)\mathbf{E}[X_2]} \delta^3.$$

Последняя оценка следует из неравенства  $\sigma[X_2] \leq \delta \mathbf{E}[X_2]$ . Лемма доказана.

Замечание. Условиям, сформулированным в лемме 7.1, обладают, в частности, все усеченные распределения. Поскольку в реальных оцифрованных изображениях распределения шума являются усеченными, то ниже в этом разделе будем предполагать, что рассматриваются только такие распределения, для которых указанные приближенные формулы выполняются со сколь угодно большой степенью точности. В ряде случаев этой «приближенностью» или «усеченностью» будем пренебрегать.

Для нахождения ковариационного момента  $\mathbf{Cov}[X_1, X_2]$  рассмотрим инъективное отображение индексов  $\pi_A: \pi_A(l) = s$ , если  $\mathbf{g}_{j_l} = \mathbf{g}_s$ ,  $\mathbf{g}_{j_l} \in A = \{\mathbf{g}_{j_0}, \dots, \mathbf{g}_{j_{m-1}}\}$ ,  $\mathbf{g}_s \in B = \{\mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{g}_{n-1}\}$ . Заметим, что  $\pi_B(s) = s$  для всех  $s = 0, \dots, n-1$ . Тогда

$$\mathbf{Cov}[X_1, X_2] = \sum_i \sum_j \mathbf{Cov}[\Omega_{i,i+1}(A), \Omega_{j,j+1}(B)] = \sum_i k_i^B(A),$$

где

$$k_i^B(A) = \mathbf{Cov}[\Omega_{i,i+1}(A), \Omega_{\pi_A(i)-1, \pi_A(i)}(B)] + \mathbf{Cov}[\Omega_{i,i+1}(A), \Omega_{\pi_A(i), \pi_A(i)+1}(B)] + \\ \mathbf{Cov}[\Omega_{i,i+1}(A), \Omega_{\pi_A(i+1)-1, \pi_A(i+1)}(B)] + \mathbf{Cov}[\Omega_{i,i+1}(A), \Omega_{\pi_A(i+1), \pi_A(i+1)+1}(B)], \quad (7.5)$$

если  $\pi_A(i+1) \neq \pi_A(i) + 1$  и

$$k_i^B(A) = \mathbf{Cov}[\Omega_{i,i+1}(A), \Omega_{\pi_A(i)-1, \pi_A(i)}(B)] + \sigma_i^2(A) + \mathbf{Cov}[\Omega_{i,i+1}(A), \Omega_{\pi_A(i+1), \pi_A(i+1)+1}(B)], \quad (7.6)$$

если  $\pi_A(i+1) = \pi_A(i) + 1$ . Коэффициент  $k_i^B(A)$  численно равен суммарной ковариации  $i$ -го признака полигонального представления  $A$  с другими признаками базового контура  $B$ . Заметим, что  $k_i^B(B) = \sigma_i^2(B) + k_i(B) + k_{i+1}(B)$  и  $\sum_i k_i^B(B) = \sum_i \sigma_i^2(B) + 2\sum_i k_i(B) = \sigma^2[X_2]$ .

Теперь для  $A \in 2^B$  из (7.3) и учитывая, что  $\mathbf{E}[X_1] = \sum_k m_k(A)$ ,  $\mathbf{E}[X_2] = \sum_j m_j(B)$ ,  $\sigma^2[X_2] = \sum_j \sigma_{j,j+1}^2(B) + 2\sum_j k_j(B)$ , имеем следующее выражение для оценки математического ожидания (математическое ожидание «без остатка»)  $\tilde{\mathbf{E}}[M(A)] = \mathbf{E}[M(A)] - r_1$  случайной меры

$$\tilde{\mathbf{E}}[M(A)] = \frac{\sum_k m_k(A)}{\sum_j m_j(B)} + \frac{\sum_k m_k(A) \sum_i k_i^B(B)}{\left(\sum_j m_j(B)\right)^3} - \frac{\sum_i k_i^B(A)}{\left(\sum_j m_j(B)\right)^2}.$$

Оценка математического ожидания  $\tilde{\mathbf{E}}[M(A)]$  определяет функцию множеств на  $2^B$ , причем  $\tilde{\mathbf{E}}[M(\emptyset)] = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}[M(B)] = 1$ . Введем обозначения  $S(A) = \sum_i m_i(A)$ ,  $K(A, B) = \sum_i k_i^B(A)$ ,  $A \in 2^B$ . Тогда меру  $\tilde{\mathbf{E}}[M(A)]$  можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}[M(A)] = \frac{S(A)}{S(B)} + \frac{S(A)K(B, B)}{S^3(B)} - \frac{K(A, B)}{S^2(B)}. \quad (7.7)$$

Аналогично, для  $A \in 2^B$  из (7.4) можно получить выражение для оценки дисперсии (дисперсии «без остатка»)  $\tilde{\sigma}^2[M(A)] = \sigma^2[M(A)] - r_2$  случайной меры

$$\tilde{\sigma}^2[M(A)] = \frac{K(A, A)}{S^2(B)} + \frac{S(A)}{S^3(B)} K(B, B) - \frac{2S(A)K(A, B)}{S^3(B)}. \quad (7.8)$$

Выражения (7.7) и (7.8) для оценок математического ожидания и дисперсии случайной меры могут быть использованы для формирования функции критерия в различных по постановкам задачах нахождения оптимальных и устойчивых к зашумлению полигональных представлений кривой. Ниже будут рассмотрены некоторые такие постановки задачи для одной из наиболее популярных мер информативности дискретных кривых – мер информативности по длине кривой.

### 7.3 Стохастическая мера информативности по длине

Пусть в мере информативности вида (7.1) в качестве признакового значения  $\omega(\mathbf{g}, A) = \omega(\mathbf{g}, A_{0,1}(\mathbf{g})) = \omega(\mathbf{g}, \mathbf{g}_+(A))$  полигонального представления  $A$  в точке  $\mathbf{g}$  ис-



пользуется длина звена ломаной  $\omega(\mathbf{g}, A) = \|\Delta\mathbf{g}(A)\|$ , где  $\Delta\mathbf{g}(A) = \mathbf{g} - \mathbf{g}_+(A)$ ,  $\mathbf{g}_+(A)$  – точка, следующая за точкой  $\mathbf{g}$  в упорядоченном представлении  $A$ . Если из контекста понятно, какое полигональное представление рассматривается, то будем просто писать  $\Delta\mathbf{g}$  вместо  $\Delta\mathbf{g}(A)$ .

Предположим, что дискретная плоская замкнутая кривая  $\Gamma = (\mathbf{g}_k)_{k=0}^{n-1}$ ,  $\mathbf{g}_k = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j}$ , подвергнута зашумлению типа «дискретный белый гауссовский шум», в результате получим случайную кривую  $\tilde{\Gamma} = (\mathbf{G}_k)_{k=0}^{p-1}$ ,  $\mathbf{G}_k = \mathbf{g}_k + \mathbf{n}_k$ , где  $\mathbf{n}_k = \eta_k\mathbf{i} + \xi_k\mathbf{j}$ ,  $\eta_k, \xi_k \sim N(0, \sigma^2)$ . Такое зашумление будем обозначать через  $\mathcal{W}_{d,2}(\sigma)$ . В этом случае признаковые характеристики  $\omega(\mathbf{G}, A) = \Omega(\mathbf{g}, A) = \|\mathbf{G} - \mathbf{G}_+(A)\| = \|\Delta\mathbf{G}(A)\|$  будут случайными величинами. Если  $A = \{\mathbf{g}_{j_0}, \dots, \mathbf{g}_{j_{m-1}}\}$ ,  $\mathbf{g}_{j_m} = \mathbf{g}_{j_0}$ , – полигональное представление кривой  $\Gamma$ , то будем, как и ранее, использовать обозначение  $\Omega(\mathbf{g}_{j_k}, (\mathbf{g}_{j_k})_+(A)) = \Omega_{k,k+1}(A)$ .

В этом пункте получим асимптотические формулы для величины оценки смещения  $\tilde{b}[M(A)] = \tilde{\mathbf{E}}[M(A)] - \mu(A)$  и оценки случайной ошибки  $\tilde{\sigma}^2[M(A)]$  стохастической меры информативности по длине  $M(A) = \sum_{\mathbf{g} \in A} \Omega(\mathbf{g}, A) / \sum_{\mathbf{g} \in B} \Omega(\mathbf{g}, B)$ ,  $A \in 2^B$ . Заметим, что вообще говоря, в случае гауссовского белого шума случайные величины  $\sum_{\mathbf{g} \in A} \Omega(\mathbf{g}, A)$  не удовлетворяют условиям леммы 7.1 (поскольку не являются ограниченными). Однако при небольшой дисперсии зашумления вероятность больших отклонений случайной длины многоугольника от длины незашумленного многоугольника будет сколь угодно мала. Поэтому будем предполагать, что случайная длина при указанном зашумлении приблизительно удовлетворяет условиям леммы 7.1. Найдем сначала числовые характеристики случайной величины  $\Omega(\mathbf{g}, A) = \|\Delta\mathbf{G}(A)\|$ .

### 7.3.1 Числовые характеристики длин сторон зашумленного многоугольника

Справедливо следующее предложение.

Предложение 7.2. Для математического ожидания случайной величины  $\Omega(\mathbf{g}, A) = \|\Delta \mathbf{G}(A)\|$  при зашумлении  $\mathcal{W}'_{d,2}(\sigma)$  справедливо асимптотическое равенство

$$\mathbf{E}[\|\Delta \mathbf{G}\|] = \|\Delta \mathbf{g}\| \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\|\Delta \mathbf{g}\|^2} + \frac{\sigma^4}{2\|\Delta \mathbf{g}\|^4} + O\left(\frac{\sigma^6}{\|\Delta \mathbf{g}\|^6}\right) \right).$$

Доказательство. Пусть  $\Omega(\mathbf{g}, A) = \|\mathbf{G} - \mathbf{G}_+(A)\|$ ,  $\mathbf{G} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{G}_+ = X_+\mathbf{i} + Y_+\mathbf{j}$ . Тогда  $\Omega(\mathbf{g}, A) = \sqrt{(X - X_+)^2 + (Y - Y_+)^2}$ . Так как случайные величины  $X, Y, X_+, Y_+$  – независимы, то плотность их совместного распределения равна  $h(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = h_{\mathbf{g}}(\mathbf{z})h_{\mathbf{g}_+}(\mathbf{w})$ , где  $h_{\mathbf{g}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{z}-\mathbf{g}\|^2}$ . Тогда

$$\mathbf{E}[\Omega(\mathbf{g}, A)] = \int_{R^2} \int_{R^2} \|\mathbf{w} - \mathbf{z}\| h(\mathbf{z}, \mathbf{w}) dz d\mathbf{w} = \int_{R^2} \int_{R^2} \|\mathbf{w} - \mathbf{z} + \Delta \mathbf{g}\| h_0(\mathbf{z}) h_0(\mathbf{w}) dz d\mathbf{w},$$

где  $\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_+ - \mathbf{g} = (x_+ - x)\mathbf{i} + (y_+ - y)\mathbf{j}$ . Осуществляя замену  $\mathbf{w} - \mathbf{z} = \mathbf{u}$  в последнем интеграле и учитывая, что  $h_0(\mathbf{u} + \mathbf{z})h_0(\mathbf{z}) = h_0(\mathbf{u}/\sqrt{2})h_0(\mathbf{z}\sqrt{2} + \mathbf{u}/\sqrt{2})$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Omega(\mathbf{g}, A)] &= \int_{R^2} \|\mathbf{u} + \Delta \mathbf{g}\| h_0(\mathbf{u}/\sqrt{2}) d\mathbf{u} \int_{R^2} h_0(\mathbf{z}\sqrt{2} + \mathbf{u}/\sqrt{2}) dz = \\ &= \int_{R^2} \|\mathbf{u}\sqrt{2} + \Delta \mathbf{g}\| h_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \|\Delta \mathbf{g}\| + I, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где

$$I = \int_{R^2} \left( \|\mathbf{u}\sqrt{2} + \Delta \mathbf{g}\| - \|\Delta \mathbf{g}\| \right) h_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

Запишем интеграл  $I$  в полярных координатах  $(r, \varphi)$ , причем полярную ось расположим вдоль вектора  $\Delta \mathbf{g}$ . Тогда

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \left( \sqrt{2r^2 + 2\sqrt{2}r\|\Delta \mathbf{g}\|\cos\varphi + \|\Delta \mathbf{g}\|^2} - \|\Delta \mathbf{g}\| \right) r \tilde{h}_0(r) dr = \|\Delta \mathbf{g}\| F(\sigma/\|\Delta \mathbf{g}\|), \quad (7.10)$$

где

$$F(s) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r \tilde{h}_0(r) f(r, \varphi, s) dr, \quad \tilde{h}_0(r) = \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2},$$

$$f(r, \varphi, s) = \sqrt{2r^2 s^2 + 2\sqrt{2}rs \cos \varphi + 1} - 1.$$

Разложим функцию  $F(s)$  по формуле Тейлора по степеням  $s$ . Так как  $F^{(n)}(0) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r \tilde{h}_0(r) f_s^{(n)}(r, \varphi, 0) dr$ , то найдем  $f_s^{(n)}(r, \varphi, 0)$ ,  $n=0, \dots, 4$ . Имеем  $f(r, \varphi, 0) = 0$ ,  $f'_s(r, \varphi, 0) = \sqrt{2}r \cos \varphi$ ,  $f''_s(r, \varphi, 0) = 2r^2 \sin^2 \varphi$ ,  $f'''_s(r, \varphi, 0) = -6\sqrt{2}r^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi$ ,  $f^{(4)}_s(r, \varphi, 0) = -12r^4 \sin^2 \varphi \cdot (1 - 5\cos^2 \varphi)$ . Тогда  $F(0) = F'(0) = F'''(0) = 0$ ,  $F''(0) = 2$ ,  $F^{(4)}(0) = 12$ . Вычисляя производные более высокого порядка, нетрудно доказать, что  $F(s) = s^2 + \frac{1}{2}s^4 + O(s^6)$ . Из последнего равенства, формул (7.9) и (7.10) следует утверждение предложения.

Следствие 7.1. При тех же условиях для дисперсии случайной величины  $\Omega(\mathbf{g}, A) = \|\Delta \mathbf{G}(A)\|$  справедливо равенство

$$\sigma^2[\Omega(\mathbf{g}, A)] = 2\sigma^2 \left( 1 - \frac{\sigma^2}{\|\Delta \mathbf{g}\|^2} + O\left(\frac{\sigma^4}{\|\Delta \mathbf{g}\|^4}\right) \right).$$

Доказательство. Имеем

$$\sigma^2[\Omega(\mathbf{g}, A)] = \int_{R^2} \int_{R^2} \|\mathbf{w} - \mathbf{z}\|^2 h(\mathbf{z}, \mathbf{w}) dz d\mathbf{w} - \mathbf{E}^2[\Omega(\mathbf{g}, A)] =$$

$$\int_{R^2} \|\mathbf{u}\sqrt{2} + \Delta \mathbf{g}\|^2 h_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} - \mathbf{E}^2[\Omega(\mathbf{g}, A)] = \|\Delta \mathbf{g}\|^2 + 4\sigma^2 - \mathbf{E}^2[\Omega(\mathbf{g}, A)].$$

Применяя теперь асимптотическое равенство для  $\mathbf{E}[\Omega(\mathbf{g}, A)]$  из предложения, завершим доказательство следствия.

Следствие 7.2. При тех же условиях для среднего значения  $S(A) = \sum_{\mathbf{g} \in A} \mathbf{E}[\|\Delta \mathbf{G}(A)\|]$  случайной ненормированной функции информативности по длине справедливо равенство

$$S(A) = L(A) + \sigma^2 \sum_{\mathbf{g} \in A} \frac{1}{\|\Delta \mathbf{g}\|} + \sigma O\left(\frac{\sigma^3}{\underline{\Delta}^3(A)}\right),$$

где  $L(A)$  – длина многоугольника  $A$ ,  $\underline{\Delta}(A) = \min\{\|\Delta \mathbf{g}\| : \mathbf{g} \in A\}$ .

Аналогично вычислим ковариацию  $k_j(A) = \mathbf{Cov}[\Omega_{j-1,j}(A), \Omega_{j,j+1}(A)]$  между случайными величинами  $\Omega_{j-1,j}(A)$ ,  $\Omega_{j,j+1}(A)$ . Пусть  $\Delta \mathbf{g}_s(A) = \mathbf{g}_{s+1} - \mathbf{g}_s$ ,  $s = j-1, j$ ,  $\alpha_j = \left(\Delta \mathbf{g}_{j-1}, \Delta \mathbf{g}_j\right)$ .

Предложение 7.3. Для ковариации  $k_j(A)$  между случайными величинами  $\Omega_{j-1,j}(A)$ ,  $\Omega_{j,j+1}(A)$  при зашумлении  $\mathcal{W}'_{d,2}(\sigma)$  справедливо асимптотическое равенство

$$k_j(A) = -\sigma^2 \cos \alpha_j \left( 1 - \frac{\sigma^2}{\|\Delta \mathbf{g}_{j-1}\|^2} - \frac{\sigma^2 \cos \alpha_j}{2\|\Delta \mathbf{g}_{j-1}\|\|\Delta \mathbf{g}_j\|} - \frac{\sigma^2}{\|\Delta \mathbf{g}_j\|^2} + o\left(\frac{\sigma^2}{\underline{\Delta}^2(\mathbf{g}_j)}\right) \right),$$

где  $\underline{\Delta}(\mathbf{g}_j) = \min\{\|\Delta \mathbf{g}_{j-1}\|, \|\Delta \mathbf{g}_j\|\}$ .

Доказательство. Пусть  $\Omega_{j-1,j}(A) = \|\mathbf{G}_j - \mathbf{G}_{j-1}\|$ ,  $\Omega_{j,j+1}(A) = \|\mathbf{G}_{j+1} - \mathbf{G}_j\|$ ,  $\mathbf{G}_s = X_s \mathbf{i} + Y_s \mathbf{j}$ ,  $s = j-1, j, j+1$ . Тогда

$$k_j(A) = \mathbf{E}[\Omega_{j-1,j}(A)\Omega_{j,j+1}(A)] - \mathbf{E}[\Omega_{j-1,j}(A)]\mathbf{E}[\Omega_{j,j+1}(A)],$$

где  $\Omega_{s,s+1}(A) = \sqrt{(X_{s+1} - X_s)^2 + (Y_{s+1} - Y_s)^2}$ ,  $s = j-1, j$ . Так как случайные величины  $X_s, Y_s$ ,  $s = j-1, j, j+1$ , – независимы, то плотность их совместного распределения равна  $h(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = h_{j-1}(\mathbf{w})h_j(\mathbf{z})h_{j+1}(\mathbf{v})$ , где  $h_s(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{z}-\mathbf{g}_s\|^2}$ ,  $s = j-1, j, j+1$ . Тогда

$$\mathbf{E}[\Omega_{j-1,j}(A)\Omega_{j,j+1}(A)] = \int_{R^2} \int_{R^2} \int_{R^2} \|\mathbf{w} - \mathbf{z}\| \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| h(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) d\mathbf{w} d\mathbf{z} d\mathbf{v} =$$

$$\int_{R^2} \int_{R^2} \int_{R^2} \|\mathbf{z} - \mathbf{w} + \Delta \mathbf{g}_{j-1}\| \|\mathbf{v} - \mathbf{z} + \Delta \mathbf{g}_j\| h_0(\mathbf{w})h_0(\mathbf{z})h_0(\mathbf{v}) d\mathbf{w} d\mathbf{z} d\mathbf{v}.$$

где  $\Delta \mathbf{g}_s = \mathbf{g}_{s+1} - \mathbf{g}_s$ ,  $s = j-1, j$ . Осуществляя замены  $\mathbf{w} - \mathbf{z} = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v} - \mathbf{z} = \mathbf{q}$  в последнем интеграле и учитывая, что  $h_0(\mathbf{u} + \mathbf{z})h_0(\mathbf{z}) = h_0(\mathbf{u}/\sqrt{2})h_0(\mathbf{z}\sqrt{2} + \mathbf{u}/\sqrt{2})$ , получим

$$\mathbf{E}[\Omega_{j-1,j}(A) \Omega_{j,j+1}(A)] = \int_{R^2} \|\Delta \mathbf{g}_{j-1} - \mathbf{u}\| h_0\left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{2}}\right) d\mathbf{u} \int_{R^2} \|\mathbf{q} + \Delta \mathbf{g}_j\| d\mathbf{q} \\ \int_{R^2} h_0\left(\mathbf{z}\sqrt{2} + \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{2}}\right) h_0(\mathbf{q} + \mathbf{z}) d\mathbf{z}.$$

Кроме того,  $h_0(\mathbf{z}\sqrt{2} + \mathbf{u}/\sqrt{2})h_0(\mathbf{q} + \mathbf{z}) = h_0\left(\mathbf{z}\sqrt{3} + \frac{\mathbf{u} + \mathbf{q}}{\sqrt{3}}\right)h_0\left(\frac{\mathbf{u} - 2\mathbf{q}}{\sqrt{6}}\right)$ . Поэтому

$$\mathbf{E}[\Omega_{j-1,j}(A) \Omega_{j,j+1}(A)] = \frac{1}{3} \int_{R^2} \|\Delta \mathbf{g}_{j-1} - \mathbf{u}\| h_0\left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{2}}\right) d\mathbf{u} \int_{R^2} \|\mathbf{q} + \Delta \mathbf{g}_j\| h_0\left(\frac{\mathbf{u} - 2\mathbf{q}}{\sqrt{6}}\right) d\mathbf{q} = \\ \int_{R^2} \|\Delta \mathbf{g}_{j-1} - \sqrt{2}\mathbf{u}\| h_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \int_{R^2} \|0.5\sqrt{2}\mathbf{u} + \sqrt{1.5}\mathbf{q} + \Delta \mathbf{g}_j\| h_0(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \|\Delta \mathbf{g}_{j-1}\| \|\Delta \mathbf{g}_j\| + I,$$

где

$$I = \int_{R^2} \int_{R^2} \left( \|0.5\sqrt{2}\mathbf{u} + \sqrt{1.5}\mathbf{q} + \Delta \mathbf{g}_j\| \cdot \|\Delta \mathbf{g}_{j-1} - \sqrt{2}\mathbf{u}\| - \|\Delta \mathbf{g}_{j-1}\| \|\Delta \mathbf{g}_j\| \right) h_0(\mathbf{u}) h_0(\mathbf{q}) d\mathbf{u} d\mathbf{q}.$$

Перейдем в интеграле  $I$  к полярным координатам  $\mathbf{q} = r\boldsymbol{\theta}$ ,  $\mathbf{u} = s\boldsymbol{\zeta}$ , где  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi$ ,  $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{i} \cos \psi + \mathbf{j} \sin \psi$ ,  $\psi$  – угол между векторами  $\Delta \mathbf{g}_{j-1}$  и  $\boldsymbol{\zeta}$ ,  $\varphi$  – угол между векторами  $\Delta \mathbf{g}_j$  и  $\boldsymbol{\theta}$ . Пусть  $\alpha_j = \left( \Delta \mathbf{g}_{j-1}, \Delta \mathbf{g}_j \right)$ . Тогда

$$\|0.5\sqrt{2}\mathbf{u} + \sqrt{1.5}\mathbf{q} + \Delta \mathbf{g}_j\|^2 = 0.5s^2 + 1.5r^2 + \|\Delta \mathbf{g}_j\|^2 + \sqrt{3}rs \cos(\varphi - \psi + \alpha_j) + \\ \sqrt{2}\|\Delta \mathbf{g}_j\|s \cos(\psi - \alpha_j) + \sqrt{6}\|\Delta \mathbf{g}_j\|r \cos \varphi, \\ \|\Delta \mathbf{g}_{j-1} - \sqrt{2}\mathbf{u}\|^2 = 2s^2 - 2\sqrt{2}s\|\Delta \mathbf{g}_{j-1}\| \cos \psi + \|\Delta \mathbf{g}_{j-1}\|^2.$$

Поэтому

$$I = \|\Delta \mathbf{g}_{j-1}\| \cdot \|\Delta \mathbf{g}_j\| F\left(\sigma/\|\Delta \mathbf{g}_{j-1}\|, \sigma/\|\Delta \mathbf{g}_j\|\right), \quad (7.11)$$

где

$$F(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi d\psi \int_0^\infty \int_0^\infty r s \tilde{h}_0(r) \tilde{h}_0(s) f(r, \varphi, s, \psi, x, y) dr ds, \quad \tilde{h}_0(r) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}},$$

$$f(r, \varphi, s, \psi, x, y) = \sqrt{f_1(r, \varphi, s, \psi, x) f_2(s, \psi, y)} - 1,$$

$$f_l = a_l x^2 + b_l x + 1, \quad l = 1, 2,$$

$$a_1 = 0.5s^2 + 1.5r^2 + \sqrt{3}rs \cos(\varphi - \psi + \alpha_j), \quad b_1 = \sqrt{2}s \cos(\psi - \alpha_j) + \sqrt{6}r \cos \varphi,$$

$$a_2 = 2s^2, \quad b_2 = -2\sqrt{2}s \cos \psi.$$

Разложим функцию  $F(x, y)$  по формуле Тейлора по степеням  $x$  и  $y$ . Так как

$$F_{x^i y^k}^{(i+k)}(0, 0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi d\psi \int_0^\infty \int_0^\infty r s \tilde{h}_0(r) \tilde{h}_0(s) f_{x^i y^k}^{(i+k)}(r, \varphi, s, \psi, 0, 0) dr ds, \quad \text{то найдем}$$

$$f_{x^i y^k}^{(i+k)}(\mathbf{0}) = f_{x^i y^k}^{(i+k)}(r, \varphi, s, \psi, 0, 0), \quad i + k = 0, \dots, 4. \quad \text{Имеем} \quad f(\mathbf{0}) = 0, \quad f'_x(\mathbf{0}) = b_1/2,$$

$$f'_y(\mathbf{0}) = b_2/2, \quad f''_{xx}(\mathbf{0}) = \frac{1}{4}(4a_1 - b_1^2), \quad f''_{yy}(\mathbf{0}) = \frac{1}{4}(4a_2 - b_2^2), \quad f''_{xy}(\mathbf{0}) = \frac{1}{4}b_1 b_2, \quad f'''_{xxx}(\mathbf{0}) =$$

$$-\frac{3}{8}(4a_1 - b_1^2)b_1, \quad f'''_{xxy}(\mathbf{0}) = \frac{1}{8}(4a_1 - b_1^2)b_2, \quad f'''_{xyy}(\mathbf{0}) = \frac{1}{8}b_1(4a_2 - b_2^2), \quad f'''_{yyy}(\mathbf{0}) = -\frac{3}{8}(4a_2 - b_2^2)b_2,$$

$$f_{x^4}^{IV}(\mathbf{0}) = -\frac{3}{16}(4a_1 - b_1^2)(4a_1 - 5b_1^2), \quad f_{x^3 y}^{IV}(\mathbf{0}) = -\frac{3}{16}(4a_1 - b_1^2)b_1 b_2, \quad f_{x^2 y^2}^{IV}(\mathbf{0}) =$$

$$\frac{1}{16}(4a_1 - b_1^2)(4a_2 - b_2^2), \quad f_{xy^3}^{IV}(\mathbf{0}) = -\frac{3}{16}b_1(4a_2 - b_2^2)b_2, \quad f_{y^4}^{IV}(\mathbf{0}) = -\frac{3}{16}(4a_2 - b_2^2)(4a_2 - 5b_2^2).$$

Тогда

$$F(0, 0) = dF(0, 0) = d^3 F(0, 0) = 0,$$

$$d^2 F(0, 0) = 2(x^2 - xy \cos \alpha_j + y^2), \quad d^4 F(0, 0) = 12(x^2 + xy \cos \alpha_j + y^2)^2,$$

$$F(x, y) = (x^2 - xy \cos \alpha_j + y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + xy \cos \alpha_j + y^2)^2 + o(\rho^4), \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}[\Omega_{j-1, j}(A) \Omega_{j, j+1}(A)] = \|\Delta \mathbf{g}_{j-1}\| \cdot \|\Delta \mathbf{g}_j\| \left(1 + F\left(\sigma / \|\Delta \mathbf{g}_{j-1}\|, \sigma / \|\Delta \mathbf{g}_j\|\right)\right),$$

где  $x = \sigma / \|\Delta \mathbf{g}_{j-1}\|$ ,  $y = \sigma / \|\Delta \mathbf{g}_j\|$ . С другой стороны, из предложения 7.2 следует, что

$$\mathbf{E}[\Omega_{s,s+1}(A)] = \|\Delta \mathbf{g}_s\| (1 + F_1(\sigma/\Delta \mathbf{g}_s)), \quad s = j-1, j,$$

где  $F_1(z) = z^2 + 0.5z^4 + o(z^4)$ . Тогда

$$\begin{aligned} k_j(A) &= \mathbf{E}[\Omega_{j-1,j}(A)\Omega_{j,j+1}(A)] - \mathbf{E}[\Omega_{j-1,j}(A)]\mathbf{E}[\Omega_{j,j+1}(A)] = \\ &= \|\Delta \mathbf{g}_{j-1}\| \|\Delta \mathbf{g}_j\| (F(x, y) - F_1(x) - F_1(y)) = \\ &= \sigma^2 \cos \alpha_j \left( -1 + \frac{1}{2}(2x^2 + xy \cos \alpha_j + 2y^2) + o(\rho^2) \right). \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует справедливость предложения.

Пусть  $\mathbf{B}$  – некоторое базовое множество дискретной кривой  $\Gamma = (\mathbf{g}_k)_{k=0}^{n-1}$ . Так как для дисперсии  $K(\mathbf{B}, \mathbf{B})$  случайной ненормированной функции информативности по длине  $\sum_{\mathbf{g} \in \mathbf{B}} \|\Delta \mathbf{G}(\mathbf{B})\|$  справедливо равенство  $K(\mathbf{B}, \mathbf{B}) = \sum_i k_i^{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) = \sum_i \sigma_i^2(\mathbf{B}) + 2\sum_i k_i(\mathbf{B})$ , то из предложения 7.3 вытекает следствие.

Следствие 7.3. При тех же условиях для дисперсии  $K(\mathbf{B}, \mathbf{B}) = \sigma^2 \left[ \sum_{\mathbf{g} \in \mathbf{B}} \|\Delta \mathbf{G}(\mathbf{B})\| \right]$  случайной ненормированной функции информативности по длине справедливо равенство

$$K(\mathbf{B}, \mathbf{B}) = 2\sigma^2 \sum_{\mathbf{g} \in \mathbf{B}} (1 + \cos \beta(\mathbf{g})) + \sigma^2 o\left(\frac{\sigma}{\underline{\Delta}(\mathbf{B})}\right), \quad (7.12)$$

где  $\beta(\mathbf{g})$  – внутренний угол многоугольника  $\mathbf{B}$  с вершиной в точке  $\mathbf{g}$ ,  $\underline{\Delta}(\mathbf{B}) = \min\{\|\Delta \mathbf{g}\| : \mathbf{g} \in \mathbf{B}\}$ .

Используя результат предложения 7.3 нетрудно доказать асимптотическую формулу для суммарной ковариации  $k_i^{\mathbf{B}}(A)$  (см. формулы (7.5) и (7.6)) длины  $i$ -ой стороны многоугольника  $A$  с длиной других сторон базового многоугольника  $\mathbf{B}$ . Для этого введем следующие обозначения. Пусть  $\Delta \mathbf{g}_i(A) = \mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g}_i$   $i$ -я вектор-сторона полигонального представления  $A$ . Через  $\mathbf{b}_i^{\pm}$ ,  $\mathbf{b}_{i+1}^{\pm}$  обозначим вектор-сторону многоугольника  $\mathbf{B}$ , «соседние» с вектор-стороной  $\Delta \mathbf{g}_i(A)$ , как показано на рисунке

7.2 а) (обратите внимание на направления этих векторов), а через  $\alpha_i^\pm, \alpha_{i+1}^\pm$  – углы между вектор-стороной  $\Delta \mathbf{g}_i(A)$  и векторами  $\mathbf{b}_i^\pm, \mathbf{b}_{i+1}^\pm$  соответственно.

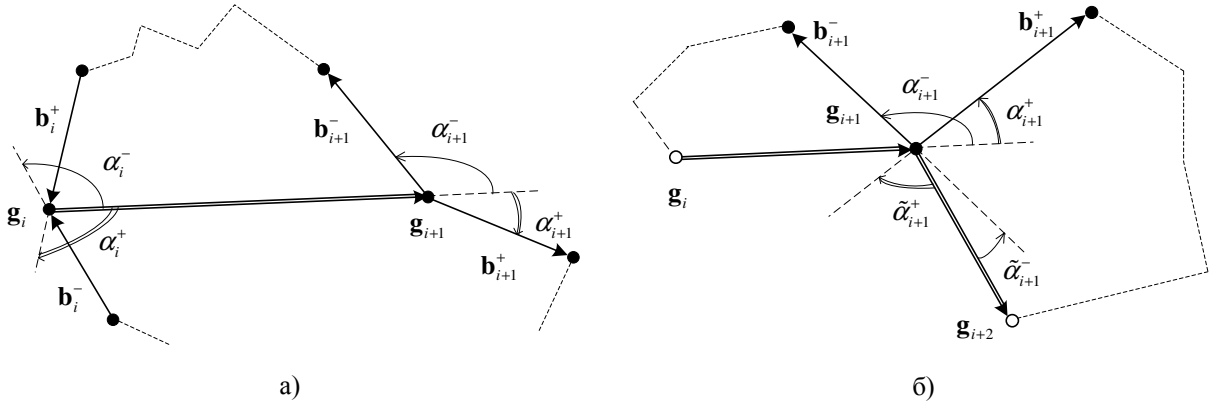


Рисунок 7.2. Иллюстрация к введенным обозначениям

Следствие 7.4. При тех же условиях для любого  $A \in 2^B$  справедливо равенство

$$k_i^B(A) = -\sigma^2 (\cos \alpha_i^- + \cos \alpha_i^+ + \cos \alpha_{i+1}^- + \cos \alpha_{i+1}^+) + \sigma^2 o \left( \frac{\sigma}{\underline{\Delta}_i^B(A)} \right),$$

где  $\underline{\Delta}_i^B(A) = \min \{ \|\Delta \mathbf{g}_i(A)\|, \|\mathbf{b}_i^\pm\|, \|\mathbf{b}_{i+1}^\pm\| \}$ .

Доказательство. Возможны два случая: 1) если  $\mathbf{b}_i^+ \neq -\Delta \mathbf{g}_i(A)$ ,  $\mathbf{b}_{i+1}^- \neq -\Delta \mathbf{g}_i(A)$ , то из предложение 7.3 и формулы (7.5) имеем

$$k_i^B(A) = -\sigma^2 (\cos \alpha_i^- + \cos \alpha_i^+ + \cos \alpha_{i+1}^- + \cos \alpha_{i+1}^+) + \sigma^2 o \left( \frac{\sigma}{\underline{\Delta}_i^B(A)} \right);$$

2) если  $\mathbf{b}_i^+ = \mathbf{b}_{i+1}^- = -\Delta \mathbf{g}_i(A)$ , то из предложения 7.3 и формулы (7.6) имеем

$$k_i^B(A) = -\sigma^2 (\cos \alpha_i^- - 2 + \cos \alpha_{i+1}^+) + \sigma^2 o \left( \frac{\sigma}{\underline{\Delta}_i^B(A)} \right).$$

Так как  $\alpha_i^+ = \alpha_{i+1}^- = \pi$  при  $\mathbf{b}_i^+ = \mathbf{b}_{i+1}^- = -\Delta \mathbf{g}_i(A)$ , то эти два случая можно объединить в один и следствие доказано.

Используя последнее следствие, найдем ковариацию  $K(A, B) = \sum_i k_i^B(A)$  всех сторон многоугольника  $A$  со сторонами многоугольника базового множества  $B$ .



Пусть  $\alpha(\mathbf{g})$  ( $\beta(\mathbf{g})$ ) – внутренний угол многоугольника  $A$  (многоугольника  $B$ ) в вершине  $\mathbf{g}$ ,  $\gamma(\mathbf{g})$  – угол между векторами  $\mathbf{g}_+(A) - \mathbf{g}$  и  $\mathbf{g}_+(B) - \mathbf{g}$ .

Следствие 7.5. При тех же условиях для любого  $A \in 2^B$  справедливо равенство

$$K(A, B) = 4\sigma^2 \sum_{\mathbf{g} \in A} \cos \frac{\alpha(\mathbf{g})}{2} \cos \frac{\beta(\mathbf{g})}{2} \cos \left( \gamma(\mathbf{g}) + \frac{\alpha(\mathbf{g}) - \beta(\mathbf{g})}{2} \right) + \sigma^2 o \left( \frac{\sigma}{\underline{\Delta}(A, B)} \right), \quad (7.13)$$

где  $\underline{\Delta}(A, B) = \min_i \{ \underline{\Delta}_i^B(A) \}$ .

Доказательство. Из следствия 7.4 для суммы ковариаций  $k_i^B(A)$  и  $k_{i+1}^B(A)$  в двух последовательных точках полигонального представления  $A$ , получим (см. рисунок 7.2 б))

$$k_i^B(A) + k_{i+1}^B(A) = -\sigma^2 \left( \cos \alpha_i^- + \cos \alpha_i^+ + \cos \alpha_{i+1}^- + \cos \alpha_{i+1}^+ + \right. \\ \left. \cos \tilde{\alpha}_{i+1}^- + \cos \tilde{\alpha}_{i+1}^+ + \cos \tilde{\alpha}_{i+2}^- + \cos \tilde{\alpha}_{i+2}^+ \right) + \sigma^2 o \left( \sigma / \underline{\Delta}_{i,i+1}^B(A) \right),$$

где  $\underline{\Delta}_{i,i+1}^B(A) = \min \{ \underline{\Delta}_i^B(A), \underline{\Delta}_{i+1}^B(A) \}$ ,  $\alpha_{i+1}^\pm$  ( $\tilde{\alpha}_{i+1}^\pm$ ) – углы между векторами-сторонами  $\mathbf{b}_{i+1}^\pm$  многоугольника  $B$  и вектором-стороной  $\Delta \mathbf{g}_i(A)$  ( $\Delta \mathbf{g}_{i+1}(A)$ ) многоугольника  $A$ . Тогда

$$K(A, B) = -\sigma^2 \sum_i \left( \cos \alpha_{i+1}^- + \cos \alpha_{i+1}^+ + \cos \tilde{\alpha}_{i+1}^- + \cos \tilde{\alpha}_{i+1}^+ \right) + \sigma^2 o \left( \sigma / \underline{\Delta}(A, B) \right).$$

Но  $\alpha_{i+1}^- - \alpha_{i+1}^+ = \tilde{\alpha}_{i+1}^- - \tilde{\alpha}_{i+1}^+ = 2\pi - \beta(\mathbf{g}_{i+1})$ ,  $\alpha_{i+1}^- + \alpha_{i+1}^+ = 2\gamma(\mathbf{g}_{i+1}) + 2\alpha(\mathbf{g}_{i+1}) - \beta(\mathbf{g}_{i+1})$ ,  $\tilde{\alpha}_{i+1}^- + \tilde{\alpha}_{i+1}^+ = 2\gamma(\mathbf{g}_{i+1}) - \beta(\mathbf{g}_{i+1})$ . Поэтому

$$\cos \alpha_{i+1}^- + \cos \alpha_{i+1}^+ + \cos \tilde{\alpha}_{i+1}^- + \cos \tilde{\alpha}_{i+1}^+ = \\ 4 \cos \frac{2\pi - \beta(\mathbf{g}_{i+1})}{2} \cos \frac{\alpha_{i+1}^- + \alpha_{i+1}^+ + \tilde{\alpha}_{i+1}^- + \tilde{\alpha}_{i+1}^+}{4} \cdot \cos \frac{\alpha_{i+1}^- + \alpha_{i+1}^+ - \tilde{\alpha}_{i+1}^- - \tilde{\alpha}_{i+1}^+}{4} = \\ -2 \cos \frac{\alpha(\mathbf{g}_{i+1})}{2} \cos \frac{\beta(\mathbf{g}_{i+1})}{2} \cos \left( \gamma(\mathbf{g}_{i+1}) + \frac{\alpha(\mathbf{g}_{i+1}) - \beta(\mathbf{g}_{i+1})}{2} \right).$$

Из последнего равенства вытекает справедливость следствия.

Заметим, что если  $A = B$ , то  $\gamma(\mathbf{g}) = 0$ ,  $\alpha(\mathbf{g}) = \beta(\mathbf{g})$  для всех  $\mathbf{g} \in A$  и из (7.13) следует (7.12).

### 7.3.2 Оценки числовых характеристик стохастической меры информативности по длине

Используя результаты предыдущего пункта, найдем оценки числовых характеристик стохастической меры информативности по длине и покажем, как эти оценки характеристик могут быть использованы для нахождения устойчивого к зашумлению полигонального представления кривой.

Докажем сначала утверждение об оценке математического ожидания стохастической меры информативности по длине  $\tilde{\mathbf{E}}[M(\cdot)]$  на  $2^B$ .

Теорема 7.1. Для оценки математического ожидания стохастической меры информативности по длине  $\mathbf{E}[M(\cdot)]$  на  $2^B$  при зашумлении  $\mathcal{W}_{d,2}(\sigma)$  справедливо асимптотическое равенство

$$\tilde{\mathbf{E}}[M(A)] = \frac{L(A)}{L(B)} + \frac{\sigma^2}{L^2(B)} C_1(A, B) + o\left(\frac{\sigma^2}{\underline{\Delta}^2(A, B)}\right), \quad A \in 2^B, \quad (7.14)$$

где

$$C_1(A, B) = -L(A) \sum_{\mathbf{g} \in B} \frac{1}{\|\Delta \mathbf{g}\|} + L(B) \sum_{\mathbf{g} \in A} \frac{1}{\|\Delta \mathbf{g}\|} + 4 \frac{L(A)}{L(B)} \sum_{\mathbf{g} \in B} \cos^2 \frac{\beta(\mathbf{g})}{2} - 4 \sum_{\mathbf{g} \in A} \cos \frac{\alpha(\mathbf{g})}{2} \cos \frac{\beta(\mathbf{g})}{2} \cos \left( \gamma(\mathbf{g}) + \frac{\alpha(\mathbf{g}) - \beta(\mathbf{g})}{2} \right).$$

Доказательство. Действительно, из равенства (7.7), следствий 7.2, 7.3, 7.5 получим

$$\tilde{\mathbf{E}}[M(A)] = \frac{S(A)S^2(B) + S(A)K(B, B) - S(B)K(A, B)}{S^3(B)} =$$

$$\frac{L(A)L^2(B) + \sigma^2 \left( 3L(A)L(B) \sum_{\mathbf{g} \in B} \|\Delta \mathbf{g}\|^{-1} + L(B)C_1(A, B) \right) + \sigma^2 o(\sigma/\underline{\Delta}(A, B))}{L^3(B) + 3L^2(B)\sigma^2 \sum_{\mathbf{g} \in B} \|\Delta \mathbf{g}\|^{-1} + \sigma^2 o(\sigma/\underline{\Delta}(B))}.$$

Из последнего равенства вытекает формула (7.14).

Заметим, что из (7.14) следует асимптотическая формула для оценки смещения  $\tilde{b}[M(A)] = \tilde{E}[M(A)] - \mu(A)$  стохастической меры информативности по длине при указанном зашумлении:

$$\tilde{b}[M(A)] = \frac{\sigma^2}{L^2(B)} C_1(A, B) + o\left(\frac{\sigma^2}{\underline{\Delta}^2(A, B)}\right), \quad A \in 2^B,$$

причем  $C_1(B, B) = 0$ .

Аналогично с помощью формулы (7.8), следствий 7.2, 7.3, 7.5, находится асимптотическая формула для оценки дисперсии стохастической меры информативности по длине.

Теорема 7.2. Для оценки дисперсии стохастической меры информативности по длине  $\tilde{\sigma}^2[M(\cdot)]$  на  $2^B$  при зашумлении  $\mathcal{W}'_{d,2}(\sigma)$  справедливо асимптотическое равенство

$$\tilde{\sigma}^2[M(A)] = \frac{4\sigma^2}{L^2(B)} C_2(A, B) + o\left(\frac{\sigma^2}{\underline{\Delta}^2(A, B)}\right), \quad A \in 2^B,$$

где

$$C_2(A, B) = \sum_{\mathbf{g} \in A} \cos^2 \frac{\alpha(\mathbf{g})}{2} + \frac{L^2(A)}{L^2(B)} \sum_{\mathbf{g} \in B} \cos^2 \frac{\beta(\mathbf{g})}{2} - 2 \frac{L(A)}{L(B)} \sum_{\mathbf{g} \in A} \cos \frac{\alpha(\mathbf{g})}{2} \cos \frac{\beta(\mathbf{g})}{2} \cos \left( \gamma(\mathbf{g}) + \frac{\alpha(\mathbf{g}) - \beta(\mathbf{g})}{2} \right).$$

Замечание. Очевидно, что  $C_2(B, B) = 0$ . Кроме того, с помощью неравенства Коши-Буняковского нетрудно доказать, что для выпуклого многоугольника  $B$  (в этом случае все косинусы в выражении для  $C_2(A, B)$  неотрицательны) верна оценка

$$C_2(A, B) \geq \frac{1}{L^2(B)} \left( L(B) \sqrt{\sum_{g \in A} \cos^2 \frac{\alpha(g)}{2}} - L(A) \sqrt{\sum_{g \in A} \cos^2 \frac{\beta(g)}{2}} \right)^2.$$

И в любом случае (в том числе и для невыпуклого многоугольника) величина  $C_2(A, B)$  неотрицательна.

Заметим также, что главные константы  $C_1(A, B)$  и  $C_2(A, B)$  в выражениях для оценок смещения  $\tilde{b}[M(A)]$  и дисперсии  $\tilde{\sigma}^2[M(A)]$  соответственно определяют зависимость вероятностных характеристик смещения и дисперсии стохастической меры информативности  $M(A)$  от геометрических характеристик полигонального представления  $A$ .

### 7.3.3 Нахождение наилучших представлений контура с помощью стохастических мер информативности

С помощью понятия стохастической меры информативности можно поставить различные задачи нахождения наилучших относительно того или иного критерия представлений контура.  $A$ , используя асимптотические формулы основных числовых характеристик таких мер, можно достаточно эффективно решать поставленные задачи. Ниже рассмотрим постановки и примеры решений двух таких задач.

Величина случайной ошибки – дисперсия стохастической меры информативности характеризует степень устойчивости меры информативности к зашумлению кривой. Можно поставить задачу о нахождении полигонального представления фиксированной мощности  $A \in 2^B$ ,  $|A| = k$ , минимизирующего величину оценки дисперсии стохастической меры информативности по длине. Из теоремы 7.2 следует, что при небольшой интенсивности зашумления  $\sigma$  решением указанной задачи будет полигональное представление  $A = \arg \min_{A \in 2^B, |A|=k} C_2(A, B)$ , которое можно считать наиболее устойчивым к зашумлению относительно данной меры информативности.

Пример 7.1. Пусть  $B = \{g_1, \dots, g_6\}$  – упорядоченное множество вершин правильного шестиугольника со стороной 1. Вычислим величину  $C_2(A, B)$  для всевозмож-

ных полигональных представлений  $A$  мощности  $|A|=3$ :  $A_1 = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_5\}$ ,  $A_2 = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_4\}$ ,  $A_3 = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  (см. рисунок 7.3).

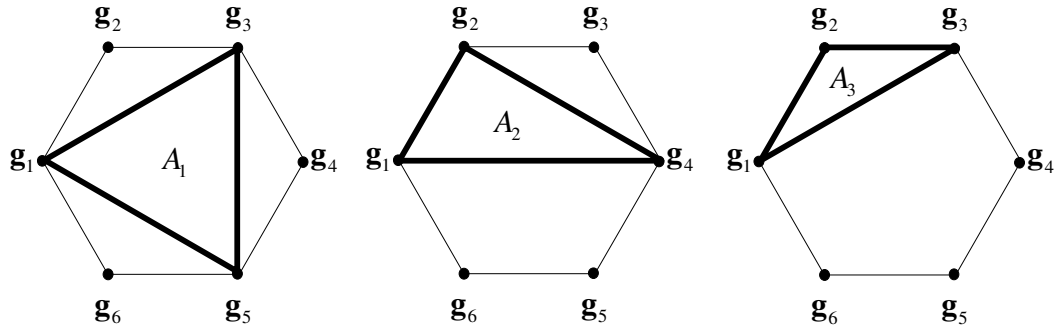


Рисунок 7.3. Полигональные представления мощности  $|A|=3$  шестиугольника

Так как  $\beta(\mathbf{g}) = 2\pi/3$ ,  $\mathbf{g} \in B$ ,  $L(B) = 6$ ,  $\sum_{\mathbf{g} \in B} \cos^2 \frac{\beta(\mathbf{g})}{2} = 1.5$ , то

$$C_2(A, B) = \sum_{\mathbf{g} \in A} \cos^2 \frac{\alpha(\mathbf{g})}{2} + \frac{L^2(A)}{24} - \frac{L(A)}{6} \sum_{\mathbf{g} \in A} \cos \frac{\alpha(\mathbf{g})}{2} \cos \left( \gamma(\mathbf{g}) + \frac{\alpha(\mathbf{g})}{2} - \frac{\pi}{3} \right).$$

Тогда  $C_2(A_1, B) = 1.125$ ,  $C_2(A_2, B) = 1.25$ ,  $C_2(A_3, B) = \frac{56+22\sqrt{3}-5\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{48} \approx 1.66$ . Таким образом, наиболее устойчивым к зашумлению относительно меры информативности по длине среди контуров мощности 3 является контур  $A_1$ .

Рассмотрим задачу о нахождении информативного минимального полигонального представления контура. Оценка  $\tilde{E}[M(A)]$  характеризует величину общей информативности полигонального представления. Но  $\max_{A \in 2^B} \tilde{E}[M(A)] = \tilde{E}[M(B)] = 1$  – представление должно быть не только информативным, но и по возможности минимальным. Из геометрических построений следует, что если в контуре  $B$  мы выбираем представление  $A$  с угловой точкой  $\mathbf{g}$  и углом  $\alpha(\mathbf{g})$ , то, чем острее угол  $\alpha(\mathbf{g})$ , тем больше будет изменяться длина  $L(A)$  ломаной при небольшом изменении положения точки  $\mathbf{g}$ . Поэтому дисперсия стохастической меры информативности по длине характеризует среднее значение углов вершин полигонального представления контура – чем больше в среднем в представлении  $A$  точек высокой информативности (точек с острыми углами), тем больше будет значение  $M(A)$ . Этот же вывод под-

тверждает и анализ величины  $C_2(A, B)$  в оценке  $\tilde{\sigma}^2[M(A)]$ . Кроме того,  $C_2(B, B) = 0$ . Причем дисперсию можно рассматривать как характеристику средней информативности представления и в случае, когда изображение не является зашумленным. Поэтому может быть поставлена двухкритериальная задача нахождения такого представления  $A$ , которое максимизирует величины  $\tilde{E}[M(A)]$  и  $\tilde{\sigma}^2[M(A)]$ . Поведение дисперсии и математического ожидания стохастической меры при изменении числа точек в представлении контура иллюстрирует следующий пример.

Пример 7.2. Пусть  $B$  – правильный  $2^n$ -угольник с длиной стороны  $b$ , вписанный в окружность радиуса  $R$ ;  $A = A_m$  – правильный  $2^m$ -угольник ( $m \leq n$ ) с длиной стороны  $a$ . Тогда  $\alpha(\mathbf{g}) = \pi(1 - 2^{1-m})$ ,  $\beta(\mathbf{g}) = \pi(1 - 2^{1-n})$ ,  $a = b \frac{\sin(\pi 2^{-m})}{\sin(\pi 2^{-n})}$ ,  $\gamma(\mathbf{g}) = \frac{\beta(\mathbf{g}) - \alpha(\mathbf{g})}{2}$ . Поэтому для  $A = A_m$  имеем

$$\begin{aligned} \tilde{E}[M(A)] &\approx \frac{L(A)}{L(B)} + \frac{C_1(A, B)}{L^2(B)} \sigma^2 = \mu(A) \left( 1 + \left( \frac{\sigma}{a} \right)^2 - \left( \frac{\sigma}{b} \right)^2 \right) = \\ &2^{m-n} \frac{\sin(\pi 2^{-m})}{\sin(\pi 2^{-n})} \left( 1 + \left( \frac{\sigma}{b} \right)^2 \left( \frac{\sin^2(\pi 2^{-n})}{\sin^2(\pi 2^{-m})} - 1 \right) \right), \\ \tilde{\sigma}^2[M(A)] &\approx \frac{4C_2(A, B)}{L^2(B)} \sigma^2 = \mu^2(A) \left( \frac{|B|}{|A|} - 1 \right) \left( \frac{\sigma}{R} \right)^2 = \\ &2^{m-n-2} (1 - 2^{m-n}) \sin^2(\pi 2^{-m}) \left( \frac{\sigma}{b} \right)^2. \end{aligned}$$

Например, если в качестве агрегирующего критерия рассматривать линейную свертку двух критериев

$$q_\lambda(m) = (1 - \lambda) \tilde{E}[M(A)] + \lambda \tilde{\sigma}^2[M(A)], \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

и поставить задачу о нахождении правильного  $2^m$ -угольника  $A = A_m$ , для которого критерий  $q_\lambda(m)$  максимален, то получим следующие результаты для правильного 64-угольника  $B$  (т.е.  $n = 6$ ):  $\arg \max q_{0.5}(m) = 6$  и  $\arg \max q_{0.75}(m) = 3$ .

#### 7.4 Некоторые выводы

В данном разделе отчета приведены результаты исследований по стохастическим мерам информативности, определенным на множестве случайных признаков недетерминистской системы. Рассмотрены приложения таких мер к решению задачи нахождения минимального и устойчивого к зашумлению представления контурного изображения. В частности, получены следующие результаты:

- введены и исследованы усредненные стохастические меры информативности, определенные на множестве случайных признаков недетерминистской системы;
- найдены асимптотические формулы оценок числовых характеристик геометрической меры информативности по длине относительно отношения типа шум-сигнал;
- поставлены и исследованы некоторые оптимизационные задачи нахождения минимальных и устойчивых к зашумлению представлений контурных изображений с помощью геометрической меры информативности по длине.

Результаты исследований, представленные в этом разделе, нашли отражение в работах [195],[188]:

1. Lepskiy A. Stochastic Measure of Informativity and Its Application to the Task of Stable Extraction of Features// Synergies of soft computing and statistics for intelligent data analysis, AISC 190, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013, pp.553-561.
2. Лепский А.Е. Применение стохастических монотонных мер в задачах выделения информативных признаков контурных изображений// Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Черногория, г. Будва, 2012 г.: Сборник докладов. М.: Торус Пресс, 2012., с.358-361.

## 8 РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БИРЖИ

В этом разделе приведены результаты исследований по построению и изучению моделей, отражающих процессы на бирже с точки зрения поведенческих финансов с целью изучения и понимания механизмов принятия экономических решений инвесторами, влияния действий инвестора на формирование рыночной цены. Поведенческие финансы – это новое направление теории финансов, которое объясняет процесс торговли на основе психологии инвесторов и влияния их поведения на рынок. Именно нерациональное поведение участников рынка может объяснить колебания цен на рынке и возникновение пузырей, может быть важным фактором в рождении и развитии финансовых кризисов.

Ранее в [199] были разработаны и исследованы модели, представляющие работу биржи как потока событий двух типов – “регулярных” и “кризисных”. Игрок не знает заранее тип пришедшего события и должен опознать его. Благосостояние игрока зависит от успешности его распознавания. Было показано, что успешная идентификация регулярных событий более чем в половине случаев, позволяет игроку добиться среднего неотрицательного выигрыша. Однако в расчётах использовался пороговый метод, где значение порогов задавались произвольно.

В новой задаче вводится точное определение порога разделения событий на бирже, с помощью оптимизационной задачей с целевой функцией в виде вероятности получения неотрицательного выигрыша игроками, а также рассматриваются различные методы получения порога, исходя из данных по ценным бумагам и индексам. Также получены оценки модели с учетом оптимального порога и показана устойчивость основных показателей.

Среди последних работ на тему моделирования биржи с учетом поведения инвесторов можно упомянуть работы, посвященные «стадному поведению» (herding) [203], объясняющих подобное поведение инвесторов ожиданиями будущих прибылей, собственными побуждениями агентов или каскадной моделью, когда агент, даже имея негативную информацию относительно актива, но наблюдая за действиями других игроков, может изменить свое мнение и проигнорировать имеющуюся собственную информацию. Множество работ, например, [200], [205], [198], посвящено



финансовым кризисам и возможности их предсказания, в частности, теории финансовых пузырей и теории Черных лебедей. В работах [201],[204] для изучения «стадного поведения» создаются имитационные модели, в которых игроки могут учитывать действия других игроков в процессе принятия решения.

### 8.1 Основная часть

В модели [199] на биржу поступает поток событий двух типов – типа  $Q$  (от слова *quiet*) и типа  $R$  (*rare*), каждый из них является простейшим и интенсивность потока событий типа  $Q(R)$  равна  $\lambda(\mu)$ , причем  $\lambda \gg \mu$ . Задача игрока (биржевого брокера) заключается в распознавании наступившего события  $X$  – некоего сигнала, который поступает брокеру на бирже о состоянии экономики, о котором он должен решить, что означает этот сигнал: что экономика находится в “нормальном режиме”, либо наступает кризис. Если наступило событие  $Q$  (экономика стабильна) и брокер его правильно распознал, то он может получить за это небольшой доход – величину  $a$ . Если событие  $Q$  будет принято за  $R$ , то он понесет небольшие потери  $-b$ . Вероятности таких исходов считаем известными и равными  $p_1$  и  $q_1$ , соответственно. Если же наступило событие  $R$  (кризис) и оно не было распознано верно, то брокер понесет потери намного большие – сумму  $-d$ ,  $d \gg b$ . Если же он «угадает» наступление кризиса, то сможет на этом неплохо заработать – в случае правильной идентификации  $R$  брокер получает величину  $c$ , причем  $c \gg a$ . В реальной работе трейдера такие исходы соответствуют открытию длинных и коротких позиций в период роста и спада. Длинная позиция означает покупку активов с целью продажи через некоторое время по более высокой цене. Короткая позиция подразумевает, напротив, продажу активов по завышенной цене с надеждой дальнейшей покупки по более низкой. Задача игрока состоит в получении неотрицательного суммарного выигрыша  $E[Z]$ . Ожидаемое значение суммы всех полученных таким образом выигрышей/проигрышей равно  $(\lambda(p_1a - q_1b) + \mu(p_2c - q_2d))t$ .

Параметры модели мы можем оценить по данным фондовых индексов и акций отдельных компаний. Для разделения событий (в данном случае дней, так как мы

взяли дневные данные) были подсчитаны значения волатильности индексов со скользящим интервалом в 20 дней и использовалось пороговое правило: если значение волатильности превышает заданный порог, то это означает наступление события типа  $R$ , т.е. кризис. Далее можем оценить величины отдельных выигрышей/проигрышей: в точках, соответствующих событию  $Q$ , оценим  $a$  и  $b$  (если в этот момент индекс пошел вверх, значит, реализовалось событие  $a$ , а если вниз – то  $-b$ ), и аналогично с событиями типа  $R$  (если индекс увеличился по сравнению с предыдущим значением, то изменение считаем за величину  $c$ , если индекс упал, то упал на  $-d$  пунктов). В полученных выборках подсчитывалось среднее, что мы приняли за оценки соответствующих величин выигрышей/проигрышей.

В Таблице 8.1 приведены значения параметров модели для пороговых значений 6% и 10%.

Таблица 8.1 – Оценка параметров модели для индекса S&P500

Индекс S&P500, август 1999 – декабрь 2009 ( $n=2664$ наблюдения)					
Пороговое значение волатильности	$p_Q$	$a, \%$	$-b, \%$	$c, \%$	$-d, \%$
6%	0.98	0.61	-0.64	2.81	-2.93
10%	0.99	0.63	-0.66	3.74	-3.05

Для таких оценок параметров можно посмотреть, какими должны быть вероятности ошибиться при идентификации, так чтобы ожидаемый выигрыш брокера был неотрицательным. Для порога 6% область выглядит так, как показано на рисунке 8.1.

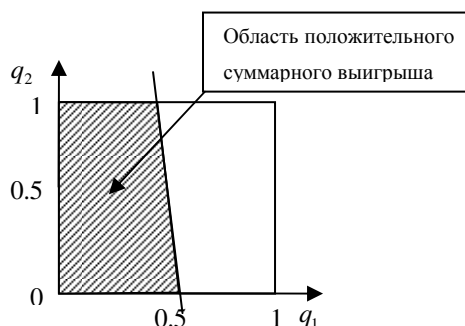


Рисунок 8.1 – Область параметров, дающих неотрицательный ожидаемый суммарный выигрыш

Как видно, вероятность ошибиться при распознавании частых событий оказывает несравненно более сильное влияние на ожидаемый выигрыш, что неудивительно при таких значениях остальных параметров. Фактически, достаточно распознавать события типа  $Q$  в половине случаев для обеспечения положительного результата всей игры. Это главный вывод данной модели – для того, чтобы «быть в плюсе», нужно уметь идентифицировать верно регулярные события, даже если игрок не в состоянии понять, когда наступает кризис.

С содержательной точки зрения, площадь заштрихованной фигуры отражает вероятность получения игроком неотрицательного суммарного выигрыша, причем в общем случае площадь трапеции  $F(q_1^0, q_1^1)$  зависит от точек пересечения с границами единичного квадрата  $[q_1^0, 0]$  и  $[q_1^1, 1]$  (см. рисунок 8.2).

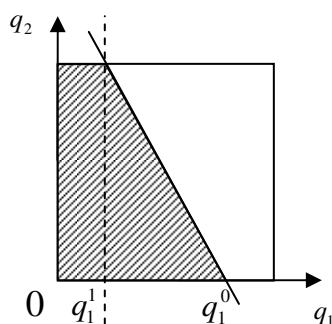


Рисунок 8.2 – Область значений  $q_1$  и  $q_2$ , при которых ожидаемый выигрыш  $E[Z]$  неотрицателен (заштрихована)

Оптимальной границей разделения событий типа  $Q$  и  $R$  с точки зрения игрока, стремящегося максимизировать вероятность  $F(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{p})$  получения неотрицательного выигрыша, является граница, максимизирующая площадь трапеции  $F(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{p})$  при условии  $q_1, q_2 \in [0, 1]$ , где  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{p}$  являются оценками величин  $a, b, c, d, p_Q$  на основании имеющейся выборки. Напомним, что в исходной модели значение этих величин определялось на основании порогового правила и все оценки

зависят от выбранного порога  $\hat{p} = \hat{p}(\sigma_{cp}) = p(\hat{\sigma} < \sigma_{cp})$ , причем порог в исходной модели задавался нами произвольно – в виде 6%, 8%, 10%.

Поставленную оптимизационную задачу, в которой целевой функцией является площадь трапеции (см. рисунок 8.2), отражающий вероятность получения неотрицательного выигрыша при естественных условиях на вероятности  $q_1, q_2 \in [0,1]$ , решаем численно. Значение  $\sigma_{max}$ , соответствующее наибольшей вероятности получения неотрицательного суммарного выигрыша, определяется эмпирически, путём сдвига границы от минимально возможного по выборке до максимального с шагом 0,05.

Для определения оптимальных границ и значений параметров мы использовали данные фондового индекса S&P500, входящих в него акций (Microsoft, General Electric, Morgan Chase, Proctor&Gamble, Johnson&Johnson, Apple, AT&T, IBM, Bank of America) и индексов Nikkei, Hang Seng, Dow Jones, DAX, CAC40, период с 02.08.1999 по 31.12.2009 (Таблицы 8.2 и 8.3).

Подсчитаны также два показателя вариации полученных значений: стандартное отклонение  $\sigma$  (абсолютный показатель) и коэффициент вариации  $V = \frac{\sigma}{x} 100\%$  (относительный показатель). Среднее квадратическое отклонение дает обобщенную характеристику признака совокупности и показывает, во сколько раз в среднем колеблется величина признака совокупности. Коэффициент вариации позволяет судить об однородности совокупности – чем он меньше, тем выборка более однородна. Совокупность считается однородной, если коэффициент вариации не превышает 33% (для распределений, близких к нормальному).

Видно (см. Таблицы 8.2 и 8.3), что для индексов и компаний величина частоты возникновения регулярных событий  $\hat{p}$  варьируется незначительно: индексы как обобщенные показатели состояния экономики показывают оценку  $\hat{p} = 0,97$ , коэффициент вариации 3%, оценка этого показателя у компаний ниже – 0,88 и коэффициент вариации 7%. Оценки параметров  $a$  и  $b$  регулярных событий, а также значений  $q_1^1$  и  $q_1^0$  являются достаточно устойчивыми. Оценки параметров кризисных событий являются нестабильными, что вполне понятно, учитывая крайне небольшую

их долю в общей совокупности имеющихся данных. Оптимальным порогом в среднем по индексам является порог в 7%, а для компаний – 6%.

Таблица 8.2 – Значения параметров при максимуме функции  $F(\sigma_{zp})$  для индексов

№	Индекс	$\hat{p}$	$a$	$-b$	$c$	$-d$	$q_1^1$	$q_1^0$	$\sigma_{max}, \%$	$F(\sigma_{max})$
1	S&P500	0,994	0,64	-0,67	4,21	-2,8	0,475	0,509	8,1	0,492
2	Nikkei	0,988	0,83	-0,89	3,95	-4,02	0,454	0,51	6,6	0,482
3	HS	0,925	0,89	-0,87	2,25	-2,41	0,395	0,61	4,96	0,503
4	DJ	0,995	0,6	-0,63	2,79	-2,5	0,477	0,5	9,15	0,488
5	DAX	0,981	0,78	-0,88	2,63	-2,7	0,441	0,503	7,85	0,472
6	CAC40	0,951	0,79	-0,84	2,69	-2,32	0,414	0,572	4,8	0,493
	$\bar{x}$	0,97	0,76	-0,80	3,09	-2,79	0,44	0,53	7	0,49
	$\sigma$	0,03	0,11	0,12	0,80	0,63	0,03	0,05	2	0,01
	$V = \frac{\sigma}{x} 100\%$	2,9%	14,9%	14,5%	25,8%	22,5%	7,5%	8,6%	25,6%	2,2%

Таблица 8.3 – Значения параметров при максимуме функции  $F(\sigma_{zp})$  для акций

№	Акция	$\hat{p}$	$a$	$-b$	$c$	$-d$	$q_1^1$	$q_1^0$	$\sigma_{max}, \%$	$F(\sigma_{max})$
1	Exxon	0,983	0,87	-0,94	1,67	-4,41	0,438	0,497	6,6	0,468
2	Microsoft	0,906	1,08	-1,05	2,12	-2,2	0,401	0,612	6,4	0,507
3	GE	0,872	1,02	-0,96	2,35	-2,75	0,31	0,69	5,6	0,5
4	MC	0,856	1,23	-1,16	3,13	-3,03	0,301	0,735	6,5	0,518
5	P&G	0,894	0,7	-0,65	1,3	-1,92	0,348	0,634	3,8	0,491
6	J&J	0,945	0,71	-0,68	1,76	-2,46	0,409	0,584	4,8	0,497
7	Apple	0,774	1,75	-1,39	1,96	-2,71	0,305	0,74	6,1	0,522
8	AT&T	0,836	0,98	-0,95	1,85	-1,91	0,315	0,698	4,5	0,506
9	IBM	0,84	0,9	-0,84	1,7	-1,87	0,313	0,702	4,5	0,508
10	Bank of America	0,937	1,17	-1,14	6,37	-5,83	0,337	0,691	11,4	0,514
	$\bar{x}$	0,88	1,04	-0,98	2,42	-2,91	0,35	0,66	6	0,50
	$\sigma$	0,06	0,30	0,22	1,47	1,27	0,05	0,08	2	0,02
	$V = \frac{\sigma}{x} 100\%$	7,0%	29,3%	23,0%	60,8%	43,8%	14,4%	11,6%	35,4%	3,1%

## 8.2 Некоторые выводы

В данном разделе приведены результаты решения проблемы поиска критерия для строгого определения порога разделения кризисных и регулярных событий. В качестве критерия была выбрана функция, отражающая вероятность получения неотрицательного выигрыша. В результате максимизации критерия был получен порог разделения событий. Значения порога были найдены как для индексов, отражающих состояние экономики в целом, так и для акций отдельных компаний. Если в последнем случае значения таких порогов могут сильно отличаться, что неудивительно для

отдельных компаний, то порог отсеечения событий для индексов находится в более узком диапазоне.

Также показано, что для индексов и компаний оценки параметров регулярных событий и оценки частоты появления регулярных и кризисных событий являются устойчивыми и согласованными. Оценки же параметров кризисных событий очень сильно зависят от выбранного порога.

Результаты исследования готовятся к публикации в статье Горбань И.А, Егорова Л.Г. «Оптимальный порог в задаче разделения событий при моделировании биржи».

## 9 ИССЛЕДОВАНИЕ СОВПАДЕНИЙ ПОЗИЦИЙ КАНДИДАТОВ В МОДЕЛИ ВЕРОЯТНОСТНОГО ГОЛОСОВАНИЯ

В этом разделе отчета представлены результаты исследования так называемой модели пространственной политической конкуренции. Модели пространственной политической конкуренции, предполагающие стохастическую природу полезностей избирателей, известны с пионерских работ [213] и [212]. Наиболее известным результатом в этой области является теорема о средневзвешенном избирателе: если (а) вероятность того, что избиратель поддержит одну партию (или одного кандидата) из двух зависит только от разности полезностей, что он получит в случае выигрыша каждой из партий; (б) предельный эффект возрастания разности полезностей на вероятность поддержки партий один и тот же для всех избирателей; (в) политические партии максимизируют ожидаемую долю полученных голосов, условия первого порядка для равновесия Нэша выполняются, если партии занимают одну и ту же позицию, и в этой позиции будет максимизироваться суммарная полезность избирателей.

Вся известная на сегодняшний день литература предполагает, что партии или нейтральны к риску, или максимизируют вероятность победы на выборах. Тем не менее, ясно, что в реальности это предположение выполняется далеко не всегда, оно может нарушаться в силу большого числа различных факторов, как специфических для кандидатов, так и специфических для избирательной системы.

Существуют, по меньшей мере, три причины, по которым классические предположения могут нарушаться (см. [226]), во-первых, победа с большим перевесом может быть очень привлекательна, в частности, это верно для авторитарных или «почти-авторитарных» режимов. Во-вторых, проигравший с небольшим отрывом может получать поощрительный приз [214]. В-третьих, минимальный проходной барьер, формула для подсчёта квот и специфическое голосование по округам существенно влияют на «преобразование» полученных партией голосов в места даже в системах с «пропорциональным представительством» [217],[211]; кроме того, партии ещё могут принимать в расчёт возможность образования коалиций [215],[224].

Ранние работы предполагали, что полезность избирателя убывает квадратично по мере удаления от его идеальной точки. При этом предположении, конвергентное

равновесие расположено в средневзвешенной точке. Современные обобщения касались как Евклидовости предпочтений [218], так и стратегического поведения избирателей [220]. Во всех работах демонстрировалось существование конвергентного равновесия в общем случае. В работе [223] рассматривалась модель вероятностного голосования, в котором кандидаты характеризовались не только их позицией в политическом пространстве, но и «валентностью» – неполитическими характеристиками, влияющими на привлекательность кандидатов для избирателей. В этом случае равновесие Нэша могло перестать быть устойчивым, но характер его расположения не изменялся.

В большинстве работ по вероятностному голосованию предполагается, что кандидаты максимизируют или вероятность победы на выборах, или ожидаемую долю полученных голосов. Неоднократно различные исследователи задавались вопросом об эквивалентности действий кандидатов (или стратегической эквивалентности) в этих двух парадигмах. В статьях [212], [216] и [210] утверждается, что при ряде предположений стратегическая эквивалентность имеет место, однако в статьях [221],[222] утверждается, что при более общих предположениях это не так: функции наилучшего ответа кандидатов, максимизирующих вероятность победы отличаются от функций наилучшего ответа кандидатов, максимизирующих ожидаемую долю полученных голосов – за исключением нескольких вырожденных случаев.

Результаты данной работы в дальнейшем будут сопоставляться с результатами статьи [208], в которой предполагается, что избиратели составляют континуум и что кандидаты максимизируют ожидаемую долю полученных голосов.

В этом разделе отчета представлены результаты исследований, в котором основным предположением об избирателях является предельная нейтральность при конвергентных позициях. Это условие предполагает, что если оба кандидата занимают одну и ту же позицию, то незначительное изменение позиции одного из кандидатов даёт такой же эффект, как противоположное по знаку изменение позиции другого кандидата.

Доказывается, что конвергентность равновесия непосредственно связана с выполнением условия симметричности функций выигрыша кандидатов. В специаль-



ном случае, когда функции выигрыша кандидатов одинаковы, это условие означает, что для любого  $0 \leq i \leq N$  кандидаты безразличны между лотереями, предлагающими  $i$  и  $(N-i)$  голосов с одинаковой вероятностью. В общем случае выполнение этого условия означает, что кандидаты участвуют в игре с нулевой суммой. Ключевым утверждением исследования является теорема о том, что если условия симметричности нарушаются, то конвергентное равновесие может существовать только в вырожденных случаях. Если же условие симметричности выполняется, то для обоих кандидатов условия первого порядка совпадают при конвергентных позициях, и из-за этого конвергентное равновесие существует в невырожденном случае. Примером вырожденного случая, когда симметричности нет, но конвергентное равновесие, тем не менее, существует, может служить ситуация, когда вероятность того, что избиратели поддержат первого кандидата одинакова для всех конвергентных позиций. Этот результат хорошо перекликается с работой [226], в которой для случая симметричной игры, двух избирателей и двух кандидатов найдено равновесие и исследована его сравнительная статика. В частности, из этой работы следует, что по мере возрастания полезности от получения ровно одного голоса позиция кандидата в равновесии приближается к позиции «своего» избирателя (того, который при прочих равных отдаёт этому кандидату предпочтение). Если же полезность от получения одного голоса сравнительно невелика, то кандидаты стремятся встать в равновесии поближе к «чужому» избирателю.

Большинство предположений о полезности кандидатов в известных моделях вероятностного голосования удовлетворяют условию симметричности из нашего исследования и, как следствие, допускают конвергентное равновесие в невырожденном случае. В данном же исследовании утверждается, что если рассматривать класс всех возможных полезностей кандидатов (удовлетворяющих аксиомам фон Неймана-Моргенштерна), то конвергенция позиций кандидатов может встречаться только в вырожденных случаях.

## 9.1 Модель и основные результаты

Пусть в выборах участвуют 2 кандидата, а голосуют  $N$  избирателей, предполагаем, что выбор избирателя может зависеть от случайных факторов. Кандидаты одновременно выбирают свои политические платформы  $y_j$  из компактного множества  $X \subset R^k$ ,  $j=1,2$ . Политические предпочтения избирателей задаются дважды непрерывно-дифференцируемыми функциями  $p_i: X^2 \rightarrow [0,1]$ , где  $p_i(y_1, y_2)$  – вероятность того, что избиратель  $i$  поддержит кандидата 1 при данных политических платформах  $y_1$  и  $y_2$  (или функция реакции избирателя). Для любых  $y_1, y_2$  выбор избирателя  $i$  статистически независим от выборов других избирателей.

Выигрыш кандидата зависит от числа полученных голосов, эта зависимость имеет вид функции полезности по фон-Нейману-Моргенштерну. Таким образом, ожидаемые полезности кандидатов имеют вид:

$$U_1 = \sum_{l=0}^N P_l u_l^1, \quad (9.1)$$

$$U_2 = \sum_{l=0}^N P_l u_{N-l}^2, \quad (9.2)$$

где

$$P_l = \sum_{S \subseteq N, |S|=l} \left( \prod_{i \in S} p_i \prod_{i \notin S} (1-p_i) \right) \quad (9.3)$$

суть вероятность того, что кандидат 1 получит ровно  $l$  голосов, а  $u_l^j$  – соответствующее значение полезности кандидата  $j$ . Пусть  $(u_0^j, \dots, u_N^j) \in U_N$ , где  $U_N$  – множество всех таких  $(u_0, \dots, u_N)$  что  $0 = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_N = 1$ .

Очевидно, что кандидат, максимизирующий ожидаемое число голосов  $U_1 = \sum_{l=1}^N p_l$ , будет иметь  $u_l^1 = \frac{l}{N}$ . Для кандидата, максимизирующего вероятность

победы, получается, что  $u_l^1 = 0$  если  $l < \frac{N}{2}$ ,  $u_l^1 = \frac{1}{2}$  если  $l = \frac{N}{2}$ , и  $u_l^1 = 1$  если  $l > \frac{N}{2}$ .

Для кандидата, максимизирующего вероятность получения большинства, тоже получается  $u_l^1 = \frac{l}{N}$ .

В качестве концепции решения игры используется локальное равновесие Нэша.

Определение 9.1.  $(y_1^*, y_2^*)$  – локальное равновесие Нэша в игре двух игроков с множеством стратегий  $X$  и функциями выигрыша (9.1), (9.2), если существует такое  $\varepsilon > 0$  что если выполнено  $\|y_1 - y_1^*\| < \varepsilon$  и  $\|y_2 - y_2^*\| < \varepsilon$ , то выполнено также  $U_1(y_1^*, y_2^*) \geq U_1(y_1, y_2^*)$  и  $U_2(y_1^*, y_2^*) \geq U_2(y_1^*, y_2)$ . Равновесие называется внутренним, если  $y_1^*, y_2^*$  лежат во внутренности множества  $X$ . Равновесие называется конвергентным, если  $y_1^* = y_2^*$ .

Условия первого порядка для равновесия имеют вид:

$$D_1(U_1) = \sum_{l=0}^N u_l^1 D_1(P_l) = 0 \quad (9.4)$$

$$D_2(U_2) = \sum_{l=0}^N u_l^2 D_2(P_{N-l}) = 0, \quad (9.5)$$

где  $D_j$  означает градиент, взятый по политической платформе  $j$ -го кандидата. Условия второго порядка для локального равновесия имеют вид:

$$D_1^2(U_1) < 0 \text{ (отрицательно определена)} \quad (9.6)$$

$$D_2^2(U_2) < 0 \text{ (отрицательно определена)} \quad (9.7)$$

В дальнейшем мы ограничиваемся только внутренними равновесиями. Мы будем использовать следующие предположения.

Определение 9.2. Избиратель  $i$  нейтрален, если для любых  $y_1, y_2$  выполнено  $p_i(y_1, y_2) = 1 - p_i(y_2, y_1)$ .

Определение 9.3. Избиратели называются одинаково смещёнными при конвергентных позициях, если для любых  $y_1 = y_2$  и для любых  $i$  выполнено  $p_i(y_1, y_2) = p(y_1, y_2)$ .

Определение 9.4. Избиратель  $i$  называется предельно нейтральным при конвергентных позициях, если  $D_1(p_i(y_1, y_2)) = -D_2(p_i(y_1, y_2))$  для любых  $y_1 = y_2$ .

Определение 9.5. Предпочтения избирателя  $i$  насыщены, если для любых  $z \in \text{int}(X)$  существуют  $\bar{\alpha} > 0$ ,  $\bar{\beta} < 0$  такие, что для каждого  $r \in R^k$ ,  $\|r\|=1$ , выполнено  $z + \bar{\alpha}r \in X$  и  $r \cdot D_1(p_i(z + \alpha r, z + \alpha r)) < \bar{\beta}$  для любых  $\alpha > \bar{\alpha}$ .

Из нейтральности избирателей следует их одинаковая смещённость при конвергентных позициях: для любого  $i$  и  $y$  из нейтральности следует что  $p_i(y, y) = \frac{1}{2}$ . Аналогично, из нейтральности следует и предельная нейтральность. Условие насыщенности предполагает, что если кандидаты выбрали одну и ту же позицию, расположенную достаточно далеко от некоторой другой фиксированной позиции, то частная производная функции реакции избирателя по позиции каждого из кандидатов будет направлен в сторону той фиксированной позиции. Это свойство проиллюстрировано на рисунке 9.1.

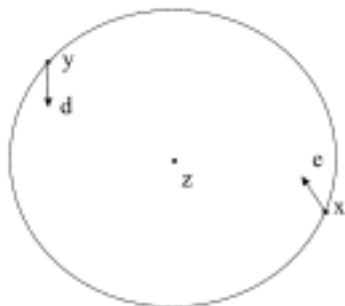


Рисунок 9.1 – Иллюстрация условия насыщенности

Соотнесём данные определения с известными примерами функции реакции из [208]. Первый пример – модель, основанная на разности полезностей. В ней каждый избиратель связывает определённую полезность с любой возможной политической платформой, а функции реакции избирателей зависят только от разности полезностей между платформами кандидатов 1 и 2.

Пример 9.1. Предположим, что  $p_i$  удовлетворяет модели разности полезностей, а именно:

$$p_i(y_1, y_2) = \hat{p}_i(u_i(y_1) - u_i(y_2)), \quad (9.8)$$

где  $\hat{p}_i(\cdot)$  - неубывающая гладкая функция, а  $u_i(\cdot)$  - просто гладкая функция.

Таким образом,  $i$  нейтрален тогда и только тогда, когда для любых  $x$   $\hat{p}_i(x) = 1 - \hat{p}_i(-x)$ ; избиратели одинаково смещены при конвергентных позициях, если  $\hat{p}_i(0) = \hat{p}^0$  для любых  $i$ ; все избиратели предельно нейтральны при конвергентных позициях; предпочтения избирателя  $i$  насыщены тогда и только тогда, когда существует  $v_i \in X$ ,  $\bar{\alpha}_i > 0$ , и  $\bar{\beta}_i < 0$  такое, что для любых  $r \in R^k$ ,  $\|r\|=1$ , выполнено  $z + \bar{\alpha}_i r \in X$  и  $r \cdot D(u_i(v_i + \alpha r)) < \bar{\beta}_i$  для всех  $\alpha > \bar{\alpha}_i$ .

Поэтому для модели разности полезностей насыщенность  $p_i(\cdot)$  эквивалентна насыщенности  $u_i(\cdot)$ . Следующий пример является важным частным случаем модели равенности полезностей.

Пример 9.2. Предположим, что  $p_i$  удовлетворяет модели вероятностного голосования с обобщёнными Евклидовыми предпочтениями, а именно, избиратель  $i$  поддерживает кандидата 1, если:

$$-(y_1 - v_i)A_i(y_1 - v_i)^T + \delta_i + \varepsilon_i < -(y_2 - v_i)A_i(y_2 - v_i)^T, \quad (9.9)$$

где  $v_i \in X$  - идеальная точка избирателя  $i$ ,  $A_i$  неотрицательно определённая матрица  $n \times n$ ,  $\varepsilon_i$  - случайная величина с нулевым математическим ожиданием, а  $\delta_i$  - смещение избирателя  $i$  в пользу кандидата 1.

Тогда  $i$  нейтрален, только если плотность  $\varepsilon_i$  симметрична в окрестности 0 и  $\delta_i = 0$ ; избиратели одинаково смещены при конвергентных позициях, если  $\delta_i = 0$  при любых  $i$ ; все избиратели предельно нейтральны при конвергентных позициях и предпочтения всех избирателей насыщены.

В последнем примере вероятность того, что избиратель поддержит кандидата 1, зависит от отношения полезностей избирателя от платформ кандидатов 1 и 2. Эта спецификация впервые рассмотрена в статье [209].

Пример 9.3. Предположим, что  $p_i$  удовлетворяет модели отношения полезностей, а именно:

$$p_i(y_1, y_2) = \hat{p}_i(u_i(y_1) / u_i(y_2)), \quad (9.10)$$

где  $\hat{p}_i(\cdot)$  – неубывающая гладкая функция, а  $u_i(\cdot) > 0$  – просто гладкая.

Тогда  $i$  нейтрален только если  $\hat{p}_i(x) = 1 - \hat{p}_i(1/x)$  для любых  $x \neq 0$ ; избиратели одинаково смещены при конвергентных позициях, если  $\hat{p}_i(1) = \hat{p}_i^1$  для всех  $i$ ; все избиратели предельно нейтральны при конвергентных позициях; предпочтения избирателя  $i$  насыщены тогда и только тогда, когда существует  $v_i \in X$ ,  $\bar{\alpha}_i > 0$  и  $\bar{\beta}_i < 0$  такие, что для любых  $r \in R^k$ ,  $\|r\|=1$ ,  $r \cdot D(u_i(v_i + \alpha r)) < \bar{\beta}_i$  для всех  $\alpha > \bar{\alpha}_i$ .

Нейтральность и одинаковая смещённость при конвергентных позициях – довольно сильные предположения, которые обычно не подтверждаются эмпирическими исследованиями функция полезности избирателей. Оценки функция полезностей избирателей вида (9.9), основанные на данных массовых опросов показывают, что коэффициенты  $\delta_i$  существенно зависят от таких наблюдаемых характеристик, как пол, доход, место работы или вероисповедание (см. [223]). Предельная нейтральность при конвергентных позициях, с другой стороны, существенно более слабое предположение. Для того чтобы она выполнялась, достаточно, чтобы предельное изменение полезности избирателя при небольшом отступлении позиции кандидата от конвергентной не зависело от «имени» кандидата.

Каковы необходимые условия (на  $u_i^j$ ) существования конвергентного локального равновесия Нэша? Конвергентное равновесие в политическом пространстве размерности  $k$  должно быть решением системы из  $2k$  уравнений, образованных условиями первого порядка (9.4), (9.5).

Рассмотрим следующее условие симметричности:

$$u_i^1 = 1 - u_{N-i}^2 \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (9.11)$$

Выполнение этого условия означает, что кандидаты участвуют в игре с нулевой суммой. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что если условие (9.11) выполнено, то  $k$  уравнений (9.5) выражаются из уравнений (9.4) в конвергентных позициях. Если (9.11) нарушается, то для «почти всех» функций реакции

избирателей не существует  $y^*$ , в которой выполняются условия первого порядка. Так как пространство функций реакции избирателей бесконечномерно, то для того, чтобы сделать это утверждение формальным, необходимо использовать понятие малого множества (или множества меры 0) для бесконечномерных пространств. Мы используем понятие конечной вырожденности (*finite shyess*) [206]:

Определение 9.6. Пусть  $X$  – топологическое векторное пространство,  $C \subset X$  – выпуклое Борелевское подмножество  $X$ . Пусть  $\lambda_V$  – Лебегова мера на конечномерном подпространстве  $V$  пространства  $X$ . Борелевское множество  $E \subset C$  называется конечно-вырожденным в  $C$ , если существует конечномерное подпространство  $V \subset X$  такое, что  $\lambda_V(C + a) > 0$  для некоторого  $a \in X$  и  $\lambda_V(E + x) = 0$  для любого  $x \in X$ .

Наша цель – доказать, что множество всех функций реакции избирателей  $p_i : X^2 \rightarrow [0,1]^N$ ,  $i = 1, \dots, N$ , таких, что условия первого порядка (9.4), (9.5) выполняются для некоторых  $y_1 = y_2 = y^*$  является малым по отношению к множеству всех возможных функций реакции, удовлетворяющих предельной нейтральности при конвергентных позициях. К сожалению, напрямую применить понятие конечной вырожденности затруднительно, так как условия первого порядка существенно нелинейны по  $p_i$ . Зато условия первого порядка линейны по  $P_i$ , что существенно облегчает проводимые математические рассуждения (так как при определении конечной вырожденности основную роль играет линейное подпространство). Поэтому сначала доказывается нужное соотношение в пространстве  $P$ , а затем обосновывается эквивалентность обоих ( $P$  и  $p$ ) пространств.

Нашим первым шагом будет доказательство того факта, что в некотором общем классе игр двух лиц (который содержит в себе игры вида (9.1), (9.2), (9.3)), подмножество игр с конвергентными равновесиями будет малым. А уже затем будет доказано, что интересующий нас класс игр не является малым в общем классе.

Пусть  $\mathcal{P}$  – пространство<sup>14</sup> всех дважды гладких функций  $P: X^2 \rightarrow \mathbf{R}^{N+1}$  таких, что выполнено соотношение  $\sum_{l=0}^N P_l \equiv 1$  и условие предельной нейтральности при конвергентных позициях:

$$D_1(P(y, y)) = -D_2(P(y, y)) \quad (9.12)$$

для любых  $y \in X$ . Пусть  $\mathcal{P}$  оснащено стандартной  $C^2$  метрикой:

$$\begin{aligned} \rho(P'(\cdot), P''(\cdot)) = & \max_{x, y \in X} \|P'(x, y) - P''(x, y)\| + \max_{x, y \in X} \|D(P'(x, y)) - D(P''(x, y))\| + \\ & + \max_{x, y \in X} \|D^2(P'(x, y)) - D^2(P''(x, y))\|, \end{aligned}$$

где  $\|\cdot\|$  означают Евклидову норму.

Пусть  $y_1, y_2 \in \text{int}(X)$ . Пусть  $\mathbf{P}(y_1, y_2)$  подмножество  $\mathcal{P}$  такое, что (9.4) выполнено в точке  $(y_1, y_2)$ . Пусть  $\mathcal{P}(y_1, y_2)$  – подмножество  $\mathbf{P}(y_1, y_2)$  такое, что (9.4) и (9.5) выполнены в  $(y_1, y_2)$ . Доказывается следующий результат:

Теорема 9.1. Пусть (9.11) выполнено. Тогда  $\mathcal{P}(z, z) = \mathbf{P}(z, z)$  для любых  $z \in \text{int}(X)$ . В противном случае,  $\mathcal{P}(z, z)$  конечно вырождено в  $\mathbf{P}(z, z)$  для любых  $z \in \text{int}(X)$ .

Для того чтобы сформулировать вторую часть утверждения, нам понадобится отрицание понятия малого множества. Проблема в том, что конечная вырожденность и конечная «общность» (свойство выполнено везде, за исключением конечно вырожденного множества) не являются отрицаниями друг друга. Так, например, множество всех коэффициентов квадратного уравнения, при которых уравнение имеет хотя бы один вещественный корень, не является малым во множестве всех возможных коэффициентов, однако, оно не является и «общим» (случаем). Так как существуют несколько различных понятий малости, то простым отрицанием конечной вырожденности обойтись не получится. Поэтому мы определяем понятие множества, не являющегося малым, так, чтобы оно не попадало ни под какое из понятий малости. Для этого в основу определения будет положено понятие относительной

<sup>14</sup> На самом деле оно является аффинным многообразием, но для наших целей это не важно, так как все используемые понятия инвариантны к сдвигу множества.



открытости и использован тот факт, что относительно открытое множество не может быть малым.

Определение 9.7. Пусть  $X$  – топологическое векторное пространство, а  $C$  – выпуклый компакт в  $X$ . Подмножество  $S$  множества  $E$  называется эквивалентным по размеру множеству  $C$ , если существует  $A \subset E$  такое, что  $A$  относительно открыто в  $C$ .

В конечномерном случае из этого определения следует, что если множество  $C$  имеет ненулевую меру, то множество  $E$  не может иметь меру, равную 0. В бесконечномерном случае из определения следует, что  $E$  не может быть конечно вырожденным в  $C$ . Отметим, что для сформулированного определения критична выпуклость «большого» множества – без неё эти свойства не будут выполнены.

Наша следующая цель – показать, что мы можем исследовать свойства функций  $P(y_1, y_2)$  (вероятности того, что первый кандидат получит некоторое фиксированное количество голосов), вместо того, чтобы исследовать функции реакции каждого избирателя по отдельности –  $p(y_1, y_2)$ . Будет показано, что в общем случае индивидуальные функции реакции избирателей  $p(y_1, y_2)$  могут быть однозначно восстановлены по функциям  $P(y_1, y_2)$ ; более того, будет доказано, что функции  $P$ , заданные формулой (9.3), наследуют (от соответствующих функций  $p(y_1, y_2)$ ) свойство предельной нейтральности при конвергентных позициях и наоборот.

Определение 9.8. Пусть  $P = (P_0, \dots, P_N) \in \mathbf{R}^{N+1}$ ,  $\sum_{l=0}^N P_l = 1$ . Будем говорить, что вектор  $P$  *правильный*, если существуют  $p = (p_1, \dots, p_N) \in [0, 1]^N$ , такие, что (9.3) выполняется для всех  $l = 0, \dots, N$ ; в этом случае мы будем говорить, что вектор  $p \in [0, 1]^N$  *порождает*  $P \in \mathbf{R}^{N+1}$ .

Далее доказываются следующие утверждения:

Лемма 9.1. Для каждого правильного вектора  $P \in \mathbf{R}^{N+1}$ , порождающий его вектор  $p \in [0, 1]^N$  единственен с точностью до перестановки компонентов.

Лемма 9.2. Пусть  $P^0 \in \mathbf{R}^{N+1}$  – правильный вектор и все компоненты порождающего его вектора  $p^0$  различны. Тогда для любого (достаточно малого)  $\varepsilon > 0$  найдёт-

ся  $\delta$ -окрестность  $P^0$ , в которой существует единственная (с точностью до перестановок) гладкая функция  $p: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  такая, что  $|p_i - p_i^0| < \varepsilon$  и

$$P_l \equiv \sum_{S \subseteq N, |S|=l} \left( \prod_{i \in S} p_i(P) \prod_{i \notin S} (1 - p_i(P)) \right) \quad (l = 0, \dots, N). \quad (9.13)$$

Заметим, что так как  $\sum_{l=0}^N P_l^0 \equiv 1$ ,  $p$  зависит от  $N$  переменных, а не от  $N+1$ .

Лемма 9.3. Пусть  $p: X^2 \rightarrow [0,1]^N$  предельно нейтральна при конвергентных позициях. Тогда функции  $P: X^2 \rightarrow \mathbf{R}^{N+1}$ , заданные формулой (9.3), тоже предельно нейтральны при конвергентных позициях. Аналогично, пусть  $P: X^2 \rightarrow \mathbf{R}^{N+1}$  правильная в любой точке и предельно нейтральна в конвергентных позициях, и пусть функции  $p: X^2 \rightarrow \mathbf{R}^N$  определены согласно леммам 9.1 и 9.2. Более того, предположим, что для любого  $z \in X$ , значения  $p_1(z, z), \dots, p_N(z, z)$  различны. Тогда функции  $p$  предельно нейтральны при конвергентных позициях.

Обозначим за  $P(y_1, y_2)$  подмножество  $\mathbf{P}(y_1, y_2)$  такое, что для любых  $y_1, y_2 \in X$ , вектор  $(P_0(y_1, y_2), P_1(y_1, y_2), \dots, P_N(y_1, y_2))$  правильный, а порождающая его функция  $p: X^2 \rightarrow [0,1]^N$  (определённая согласно леммам 9.1, 9.2) удовлетворяет предельной нейтральности при конвергентных позициях, кроме того, пусть выполняются условия второго порядка (9.6). Тогда имеет место следующее утверждение:

Лемма 9.4. Множество  $P(z, z)$  эквивалентно по размеру множеству  $\mathbf{P}(z, z)$  для всех  $z \in \text{int}(X)$ .

Теперь мы можем сформулировать продолжение теоремы 9.1, учитывающее условия второго порядка, а также принимающее во внимание свойство правильности. Обозначим за  $\bar{P}(y_1, y_2)$  подмножество  $P(y_1, y_2)$  такое, что условия (9.4), (9.5), (9.6) и (9.7) выполнены в точке  $(y_1, y_2)$ .

Теорема 9.2. Пусть выполнено условие симметричности (9.11). Тогда множество  $\bar{P}(z, z)$  эквивалентно по размеру множеству  $\mathbf{P}(z, z)$  для всех  $z \in \text{int}(X)$ .

Таким образом, если выполняются условия симметричности, то конвергентное локальное равновесие Нэша не является исключением. А если условие симметричности нарушается, то, тем не менее, обычное локальное равновесие Нэша (не обязательно конвергентное) не является исключением.

Теорема 9.3. Зафиксируем  $u^1, u^2 \in U$ . Пусть  $\bar{P}$  – множество всех правильных вектор-функций  $P \in \mathcal{P}$  таких, что в некоторой точке  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$  выполняются условия первого и второго порядка (9.4), (9.5), (9.6), (9.7) (для полезностей кандидатов  $(u^1, u^2)$ ). Тогда множество  $\bar{P}$  эквивалентно по размеру множеству  $\mathcal{P}$  для всех  $u^1, u^2$ .

Теперь обратимся к вопросу устойчивости локально равновесия по отношению к небольшим вариациям полезностей кандидатов. В работе обосновывается, что небольшие изменения полезностей кандидатов практически всегда приводят к большому изменению положения локального равновесия Нэша.

Теорема 9.4. Зафиксируем некоторые значения полезностей кандидатов  $\hat{u}^1, \hat{u}^2 \in U$ . Предположим, что в точке  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$  выполнены условия первого и второго порядка (9.4), (9.5), (9.6), (9.7). Рассмотрим функцию:

$$F(y_1, y_2) = (D_1(U_1), D_2(U_2)). \quad (9.14)$$

Верны следующие утверждения:

- 1) если якобиан  $F$  не вырожден в точке  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ , то для любого  $\delta > 0$  существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для каждого  $u$  в  $\varepsilon$ -окрестности  $\hat{u}$  существует локальное равновесие Нэша в  $\delta$ -окрестности  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ ;
- 2) если  $\bar{\mathcal{P}}(y_1, y_2)$  – подмножество  $\mathcal{P}(y_1, y_2)$  такое, что Якобиан  $F$  вырожден в точке  $(y_1, y_2)$ , то  $\bar{\mathcal{P}}(y_1, y_2)$  конечно вырождено в  $\mathcal{P}(y_1, y_2)$ .

Теперь вернёмся к одному из основных вопросов работы: что происходит с конвергентным равновесием, если условия равновесия нарушаются совсем чуть-чуть. Согласно теореме 9.4, в общем случае в окрестности исходного равновесия будет существовать локальное равновесие Нэша. Но согласно теореме 9.1 оно не будет конвергентным (в общем случае): даже если в нем вдруг выполняются конвер-

гентные условия первого порядка для 1-го кандидата, то в общем случае они не будут выполняться для 2-го кандидата.

## 9.2 Интерпретация условий симметричности

Условия (9.11) могут иметь несколько интерпретаций. Выберем  $0 < l < N$  и возьмём  $x = u_{N-l}^2 + u_l^2 - 1$ . Пусть  $L(p)$  – лотерея, предлагающая  $l$  голосов с вероятностью  $1-p$  и  $N-l$  голосов с вероятностью  $p$ , а  $M(p')$  – лотерея, предлагающая 0 голосов с вероятностью  $1-p'$  и  $N$  голосов с вероятностью  $p'$ . Если (9.11) выполнено, то для любых  $p, p'$  кандидат 1 предпочитает  $L(p)$  по сравнению с  $M(p')$  тогда и только тогда, когда кандидат 2 предпочитает  $L(p)$  по сравнению с  $M(p' + x)$ .

Если функции полезности обоих кандидатов одинаковы, то из (9.11) следует, что они симметричны:  $u_l^1 = 1 - u_{N-l}^1$  для всех  $l = 0, \dots, N$ . Другими словами, оба кандидата безразличны между честными лотереями, предлагающими 0 или  $N$  голосов и такой же лотереей, предлагающей  $l$  или  $N-l$  голосов для всех  $1 \leq l \leq \frac{N}{2}$ .

Заметим, что условия (9.11) выполнены, если оба кандидата максимизируют полученную долю голосов или же вероятность победы – так получилось, что оба наиболее популярных в литературе предположения удовлетворяют условию, которое в общем случае не выполнено – конвергентное равновесие не будет существовать для «почти всех» функций полезности кандидатов. Например, условие (9.11) нарушается, если один из кандидатов максимизирует долю полученных голосов, а другой – вероятность победы.

Ситуацию с несуществованием конвергентного равновесия можно наглядно проиллюстрировать на простом численном примере. Используя метод градиентного спуска, реализованный в среде Matlab 7.0, мы нашли локальное равновесие Нэша для семейства проблем, варьируя параметры функции полезности кандидатов.

Рассмотрим следующий численный пример (следуя логике статьи [226]). Предположим, что  $N = 5$  и политическое пространство одномерно. Предпочтения избирателей Евклидовы, таким образом, полезности кандидатов имеют вид

$$u_{i1} = a_i - \beta(v_i - y_1)^2 + \varepsilon_i, \quad (9.15)$$

$$u_{i2} = -\beta(v_i - y_2)^2, \quad (9.16)$$

где  $\varepsilon_i$  независимы и распределены по логистическому закону. Возьмём  $v_1 = v_2 = v_3 = 1$  и  $v_4 = v_5 = 0$ . Пусть  $\beta = 1$ . Возьмём  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$  и  $a_4 = a_5 = -1$ . Таким образом, если позиции кандидатов совпадают, избиратели 1, 2, и 3 предпочитают кандидата 1, а избиратели 4 и 5 – кандидата 2.

Предположим, что функции полезности обоих кандидатов одинаковы и имеют вид:  $u_i^j = (l/5)^\alpha$ . Численные симуляции показывают, что в общем случае позиции кандидатов различны. Ниже приведены графики зависимостей позиций кандидатов от  $\alpha$  (см. рисунок 9.2).

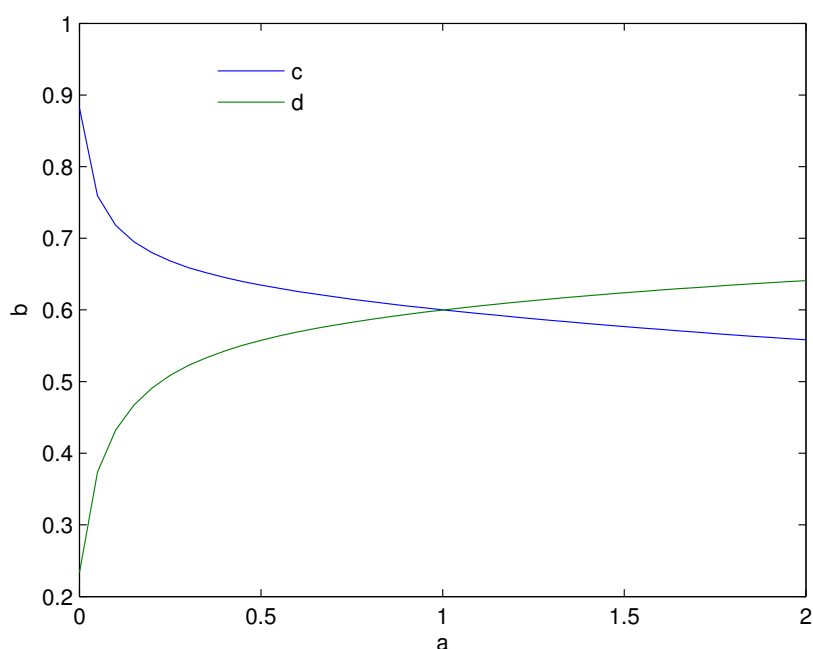


Рис 9.2 – Графики зависимостей позиций кандидатов от  $\alpha$

При  $\alpha = 1$ , когда кандидаты нейтральны к риску, их позиции будут идентичными, как и предсказывает теорема о средневзвешенном избирателе.

Если  $\alpha < 1$ , то кандидаты боятся риска. Возможные причины этого уже обсуждались во введении: кандидат может получать существенный утешительный приз, или же партия в погоне за высоким результатом не хочет растерять поддержку ядра

своих убеждённых сторонников. В этом случае партии будут стремиться выбирать позицию поближе к своим заведомым сторонникам (избиратели 1, 2 и 3 для кандидата 1 и избиратели 4 и 5 для кандидата 2). При  $\alpha > 1$ , кандидаты любят риск. В частности, эта ситуация может соответствовать авторитарному или полуавторитарному режиму, для которого победа с большим отрывом позволяет воодушевить (или наоборот смутить) избирателей и запугать потенциальных оппонентов. При демократии победа с большим перевесом может позволить кандидату проводить радикальные реформы. В любом случае, при подобном раскладе кандидат, стремясь выиграть выборы с большим отрывом, занимает позицию поближе к ядру избирателей другого кандидата.

### 9.3 Некоторые выводы

Уместно сравнить основные результаты данного исследования с теоремой 6 из статьи [208], в которой утверждается, что для кандидатов, максимизирующих ожидаемую полезность и в рамках модели разности полезностей, любое равновесие Нэша в чистых стратегиях должно быть конвергентным (дополнительно требуется выполнение ряда технических условий типа вогнутости). При более общих предположениях о функциях реакции избирателей доказать существование локального равновесия Нэша удаётся лишь для достаточно узких классов возможных полезностей кандидатов.

В настоящем исследовании доказываемся, что если нарушается условие симметричности, то конвергентное равновесие разрушается. Таким образом, в нашем исследовании предлагается ещё один возможный источник политической дивергенции в моделях пространственного голосования: целевые функции кандидатов могут не удовлетворять условию симметричности.

Ещё одним побочным результатом нашего исследования является утверждение о существовании локального конвергентного равновесия в ряде общих случаев. Так, если кандидаты максимизируют ожидаемое число голосов или вероятность победить, а также выполняются условия одинаковой смещённости при конвергентных

позициях и насыщенности предпочтений избирателей, то удаётся доказать существование конвергентного равновесия. Как и в аналогичных утверждениях из предыдущих работ, можно показать, что и в этом случае (в рамках модели разности полезностей) в конвергентном равновесии максимизируется суммарная полезность избирателей.

Результаты исследований, представленные в этом разделе, нашли отражение в работе [227]:

Zakharov A.V., Sorokin C.S. Policy convergence in a two-candidate probabilistic voting model// *Social Choice and Welfare*, 2013 (under review).

## 10 ИССЛЕДОВАНИЕ АКСИОМАТИКИ ДЛЯ ИНДЕКСОВ ВЛИЯНИЯ В ЗАДАЧЕ ГОЛОСОВАНИЯ С КВОТОЙ

В этом разделе отчета представлены результаты исследования аксиоматики для индексов влияния в задаче голосования с квотой.

Большинство встречающихся в жизни схем голосования являются или могут быть записаны как голосования с квотой. Но аксиоматики для индексов влияния, определенных на простых играх напрямую не переносятся на голосования с квотой, поскольку используемые в них операции в этом случае определены некорректно. Тем не менее, большую часть аксиоматик можно адаптировать для голосований с квотой. Тому, как это сделать и посвящено настоящее исследование.

Проблеме аксиоматического задания индексов влияния посвящено множество работ. Среди них можно отметить [236] (первая аксиоматика для индекса Шепли-Шубика [245]), [237] (первая аксиоматика для индекса Банцафа [234]), [241],[242], [243],[232] (аксиоматика для индексов влияния, зависящих от предпочтений участников, введенных в [228]).

С другой стороны, большинство существующих схем голосования являются (или могут быть описаны как) голосования с квотой. Встает вопрос — как аксиоматически задать индекс влияния на этом классе правил принятия решения.

Непосредственно перенести любую из рассмотренных этих или других, известных, аксиоматик на случай голосований с квотой не удастся, поскольку в отличие от простых игр, на которых исходно определяются индексы влияния, множество голосований с квотой не замкнуто относительно многих операций (объединение, пересечение, вычеркивание коалиции).

В работе [229] была построена аксиоматика для индекса влияния Банцафа, адаптированная для голосований с квотой. В этой статье вводится несколько новых аксиом, формулировки которых сложнее, чем в аксиоматиках для индекса Банцафа для простых игр.

Конструкция работы [229] интересна сама по себе, но оказывается, что многие (а на самом деле большинство) аксиоматик можно адаптировать для голосований с



квотой, просто дописав в нужных местах фразу "если результат операции тоже будет голосованием с квотой".

Столь же просто удастся переформулировать для голосований с квотой и аксиоматики для введенных в [228] индексов влияния, зависящих от предпочтений участников.

В рамках отчета невозможно, да и не нужно приводить переформулировки и доказательства для всех возможных аксиоматик. Заинтересованный читатель сможет легко проделать это сам. В части отчета это будет проделано для аксиоматики Дуби-Шепли [237] для индекса Банцафа [234] и одной из аксиоматик для индексов влияния, зависящих от предпочтений участников [228],[232].

## 10.1 Простые игры, голосования с квотой и индексы влияния

### 10.1.1 Основные определения

Определение 10.1. Будем называть простой игрой пару  $(N,v)$ , где  $N$  – множество, а  $v:2^N \rightarrow \{0,1\}$  – функция, сопоставляющая каждому подмножеству  $N$  либо 0, либо 1, причем выполняется свойство монотонности: если  $S$  и  $T$  – подмножества  $N$  и  $S \subseteq T$ , то  $v(S) \leq v(T)$ .

Определения даны в соответствии с [246]. Более традиционное определение простой игры предполагает также, что  $v(\emptyset)=0$ ,  $v(N)=1$ . Это условие исключает только две тривиальные игры, в которых  $v(S)$  тождественно равна 0 или 1. Будем обозначать эти игры как 0 и 1 соответственно.

Далее предполагается, что  $N$  – конечное множество, элементы которого занумерованы с 1 до  $n$ , т.е.  $N=\{1,\dots,n\}$ . Элементы множества  $N$  называются игроками, подмножества  $N$  – коалициями. Если это не вызывает путаницы, простая игра  $(N,v)$  обозначается просто  $v$ , а число игроков в коалиции  $S$  как  $s$ . Множество всех простых игр  $n$  игроков обозначается  $SG_n$ .

Коалиция  $S$  называется выигрывающей, если  $v(S)=1$  и проигрывающей, если  $v(S)=0$ .

Игрок  $i$  называется ключевым в коалиции  $S$ , если  $S$  выигрывающая, а  $S \setminus \{i\}$  – проигрывающая (для этого, очевидно, необходимо, чтобы  $i$  принадлежал  $S$ ). Игрок

называется болваном, если он не ключевой ни в одной коалиции. Название дано в [245] по аналогии с бриджем - и там и здесь болван – игрок, не имеющий возможности влиять на события. Множество всех коалиций, в которых игрок  $i$  ключевой, обозначается через  $W_i(v)$ .

Выигрывающая коалиция называется минимальной, если все игроки в ней ключевые или, другими словами, она не содержит никакой другой выигрывающей коалиции. Множества выигрывающих и минимальных выигрывающих коалиций обозначаются, соответственно,  $W(v)$  и  $M(v)$ . Простая игра часто задается перечислением всех (или только минимальных) выигрывающих коалиций. Это оправдано, поскольку  $M(v)$  однозначно определяет  $W(v)$ , а  $W(v)$  – функцию  $v$ .

Замечание 10.1. Отметим, что в простой игре, кроме  $v=0,1$  всегда есть хотя бы одна выигрывающая коалиция ( $N$ ), поэтому есть и минимальная выигрывающая коалиция, причем непустая, т.к.  $\emptyset \notin W(v)$ . Поскольку в минимальной выигрывающей коалиции все игроки ключевые, то в любой простой игре будет игрок, ключевой в одной из коалиций.

Пусть  $S$  – произвольная коалиция. Назовем олигархической и обозначим через  $u^S$  игру, в которой  $S$  будет единственной минимальной выигрывающей коалицией. Если  $i$  принадлежит  $S$ , то  $i$  ключевой игрок во всех коалициях, содержащих  $S$ . Если  $i \notin S$ , то  $i$  – болван.

Пусть  $v$  – простая игра, не совпадающая с  $u^N$ ,  $S$  принадлежит  $M(v)$ . Обозначим через  $v_{-S}$  игру, полученную из  $v$  переводом  $S$  из выигрывающих коалиций в проигрывающие. Формально  $W(v_{-S})=W(v)/\{S\}$ . Будем называть переход от  $v$  к  $v_{-S}$  вычеркиванием коалиции  $S$ . Игра  $v_{-S}$  также будет простой (поскольку коалиция  $S$  минимальна, ее вычеркивание не нарушает монотонности). При вычеркивании коалиции  $S$  игроки, входившие в нее, теряют одну коалицию, в которой они ключевые, игроки, не входящие в  $S$ , наоборот, приобретают одну. Точнее, верна следующая лемма.

Лемма 10.1 [241]. Пусть  $S$  принадлежит  $M(v)$ . Тогда

$$W_i(v_{-S}) = \begin{cases} W_i(v) \setminus \{S\}, & \text{если } i \in S; \\ W_i(v) \cup \{S \cup \{i\}\}, & \text{если } i \notin S. \end{cases}$$

Пример 10.1. Пусть  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ , выигрывающие коалиции в игре  $v$  – все трех- и четырехэлементные подмножества,  $\{1, 2\}$  и  $\{3, 4\}$ ,  $S = \{1, 2\}$ . Выигрывающими коалициями в  $v_{-S}$  будут  $\{3, 4\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 3, 4\}$ ,  $\{2, 3, 4\}$ ,  $\{1, 2, 3, 4\}$ . В Таблице 10.1 знаком + отмечены коалиции, в которых соответствующий участник ключевой (слева от черты – для игры  $v$ , справа – для  $v_{-S}$ ).

Таблица 10.1 – Ключевые игроки коалиций для игр  $v$  и  $v_{-S}$

игрок	{1,2}	{3,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{2,3,4}	{1,2,3,4}
1	+/-	-/-	+/+	+/+	-/-	-/-	-/-
2	+/-	-/-	+/+	+/+	-/-	-/-	-/-
3	-/-	+/+	-/+	-/-	+/+	+/+	-/-
4	-/-	+/+	-/-	-/+	+/+	+/+	-/-

Игроки 1 и 2 при переходе к игре  $v_{-S}$  перестают быть ключевыми в коалиции  $\{1, 2\}$  (она стала проигрывающей), а 3 и 4 становятся ключевыми в коалициях  $\{1, 2, 3\}$  и  $\{1, 2, 4\}$  соответственно. В остальных клетках Таблицы 10.1 ничего не меняется.

### 10.1.2 Голосования с квотой

Так называется важный частный случай простых игр, под который подпадает большинство реальных схем голосования.

Определение 10.2. Пусть  $N = \{1, \dots, n\}$  – множество игроков. Голосованием с квотой называется упорядоченный набор из  $n+1$  неотрицательного числа, первое из которых ( $q$ ) называется квотой, а остальные  $(w_1, \dots, w_n)$  – числом голосов или весом соответствующего игрока.

Голосование с квотой кратко записывается, как  $(q; w_1, \dots, w_n)$ . Числом голосов (или весом) коалиции называется сумма голосов входящих в нее игроков:

$w(S) = \sum_{i \in S} w_i$ . Коалиция выигрывающая, если суммарное число голосов ее игроков не

меньше квоты и проигрывающая в противном случае. Таким образом, голосованию с квотой сопоставляется простая игра.

Пример 10.2. В Государственной Думе РФ (во время написания текста, июнь 2011 г.) 450 депутатов, входящих в 4 фракции: "Единая Россия" (315 депутатов), КПРФ (57), ЛДПР (40) и "Справедливая Россия" (38). Для принятия решений требуется более половины всех голосов, т.е. не менее 226. Т.е. правило принятия решения – голосование с квотой (226;315,57,40,38). Выигрывающими коалициями в данном случае будут все, содержащие первую фракцию.

Соответствие между голосованиями с квотой и простыми играми неоднозначно. Например, голосования с квотой (51;34,33,33) и (51;49,49,2) задают одну и ту же простую игру – выигрывающими коалициями будут 2- и 3-элементные множества и только они.

Определение 10.3. Говорят, что простую игру  $v$  можно записать, как голосование с квотой, если существуют такие неотрицательные числа  $q, w_1, \dots, w_n$ , что голосование с квотой  $(q; w_1, \dots, w_n)$  задает игру  $v$ .

В тех случаях, когда разница не важна, мы будем отождествлять голосование с квотой и соответствующую ей простую игру.

Обозначим через  $WG_n$  множество всех простых игр, которые можно записать, как голосование с квотой.

Пример 10.3 [230]. Совет Безопасности ООН состоит из 15 членов: пяти постоянных (Великобритания, Китай, Россия, США, Франция) и 10 переизбираемых ежегодно. Решение принимается большинством в девять голосов, причем пять из них должны принадлежать постоянным членам. Это правило принятия решения записывается, как голосование с квотой

$$(39; 7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1),$$

т.е. те же выигрывающие коалиции будут, если предоставить постоянным членам Совета Безопасности по 7 голосов, остальным по одному, а квота – 39 голосов.

Не все простые игры можно записать, как голосование с квотой. Приведем "минимальный" пример.

Пример 10.4. Пусть  $N=\{1,2,3,4\}$ . Зададим игру множеством минимальных выигрывающих коалиций:  $M(v)=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ . Докажем, что эта игра не записывается, как голосование с квотой. Пусть это не так, т.е. существует набор  $(q;w_1,w_2,w_3,w_4)$ , задающий игру  $v$ . Коалиции  $\{1,2\}$  и  $\{3,4\}$  выигрывающие, поэтому  $w_1+w_2 \geq q$ ,  $w_3+w_4 \geq q$  и, следовательно,  $w_1+w_2+w_3+w_4 \geq 2q$ . Коалиции  $\{1,3\}$  и  $\{2,4\}$  проигрывающие, поэтому  $w_1+w_3 < q$ ,  $w_2+w_4 < q$  и, следовательно,  $w_1+w_2+w_3+w_4 < 2q$ . Противоречие.

Правила принятия решения, не записывающиеся, как голосование с квотой, встречаются и в реальных выборных органах. Один из примеров (правда, довольно громоздкий) можно посмотреть в [246].

По-видимому, не существует простого способа определить, будет ли произвольная простая игра голосованием с квотой. Подробнее об этом также можно прочитать в [246].

Индекс влияния,  $\Phi:SG_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , сопоставляет каждой простой игре  $v$  вектор  $\Phi(v)$ ,  $i$ -я компонента которого интерпретируется как влияние игрока  $i$ . Индексом влияния голосования с квотой называется индекс влияния соответствующей ей простой игры. Наиболее известны индексы влияния Банцафа и Шепли-Шубика. В этом исследовании преимущественно рассматривается первый из них.

Индекс влияния Банцафа (BI) [234] вычисляется в предположении, что влияние игрока пропорционально числу коалиций, в которых он ключевой. Общий индекс Банцафа  $TVz_i$  для игрока  $i$  равен

$$TVz_i = |W_i|.$$

Индекс влияния Банцафа  $Vz_i$  получается из общего индекса нормированием.

$$Vz_i = \frac{|W_i|}{\sum_{j=1}^n |W_j|}.$$

Впервые подобный индекс влияния был введен Пенроузом [244], где число коалиций с ключевым игроком  $i$  делится на число всех коалиций, в которые входит  $i$ ,

$$P_i = \frac{1}{2^{n-1}} |W_i|.$$

Во многих работах, в частности, [241] под индексом Банцафа понимается именно индекс Пенроуза. Чтобы как-то совместить историческую справедливость и сложившуюся традицию, в данном исследовании результаты работ [241],[237] будут переформулированы для общего индекса Банцафа. Чтобы перейти к индексу Пенроуза, общий индекс Банцафа нужно просто поделить на  $2^{n-1}$ .

Другая форма записи общего индекса Банцафа –

$$TBz_i = \sum_{S \subseteq N} (v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

В последнем равенстве используется свойство ключевого игрока:  $\Phi(v) + \Phi(w) = \Phi(v \vee w) - \Phi(v \wedge w)$ ,  $v(S) - v(S \setminus \{i\})$  равно 1, если  $i$  – ключевой в  $S$  и 0 в противном случае.

Индекс Шепли-Шубика (SSI) [245] возник в теории игр как частный случай вектора Шепли. В нем число, которое коалиция добавляет к влиянию игрока, зависит от ее размера

$$SS_i = \sum_{S \in W_i(v)} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} = \sum_{S \subseteq N} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}.$$

### 10.1.3 Аксиоматики для индексов Шепли-Шубика и Банцафа

Для этих самых известных индексов влияния построено множество аксиоматик. Приведем две исторически первые из них.

Индекс Шепли-Шубика однозначно определяется следующими четырьмя аксиомами.

Аксиома болвана (Null Player, NP). Для любой игры простой  $v$ , если  $i$  – болван в игре  $v$ , то его влияние равно 0.

Анонимность (Anonymity, An). Для любой игры  $v \in SG_n$ , любой перестановки  $\pi$  множества  $N$  и любого  $i \in N$

$$\Phi_i(\pi v) = \Phi_{\pi(i)}(v),$$

где  $(\pi v)(S) = v(\pi(S))$ .

Трансфер (Transfer, T). Для любых игр  $v, w \in SG_n$ , таких что  $v \vee w \in SG_n$ ,

$$\Phi(v) + \Phi(w) = \Phi(v \vee w) - \Phi(v \wedge w),$$

где  $i \in N$   $(v \vee w)(S) = \max(v(S), w(S))$ , а  $(v \wedge w)(S) = \min(v(S), w(S))$ .

Эта аксиома, как показано в работе [241], имеет эквивалентную формулировку.

Трансфер\* (Transfer\*, T\*). Для любых игр  $v, w \in SG_n$ , любой коалиции  $S \in M(v) \cap M(w)$  и любого  $i \in N$

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \Phi_i(w) - \Phi_i(w_{-S}).$$

Эффективность (Efficiency axiom, E). Если  $v \neq 0, 1$ ,

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i(v) = 1.$$

Таким образом, верна следующая теорема

Теорема 10.1 [245]. Пусть  $\Phi: SG_n \rightarrow R^n$ . Тогда  $\Phi$  удовлетворяет аксиомам NP, An, T (T\*) и E, если и только если  $\Phi$  – индекс Шепли-Шубика.

Индекс Банцафа не удовлетворяет аксиоме эффективности, поэтому ее заменяет несколько более сложное условие:

Общая сумма Банцафа (Banzhaf Total Power, BzTP).

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{S \subset N} (v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

Остальные три аксиомы те же, что и для индекса Шепли-Шубика.

Теорема 10.2 [237],[241]. Пусть  $\Phi: SG_n \rightarrow R^n$ . Тогда  $\Phi$  удовлетворяет аксиомам NP, An, T (T\*) и BzTP, если и только если  $\Phi$  – индекс Банцафа.

## 10.2 Игры и индексы влияния, зависящие от предпочтений участников

Приведенная ниже конструкция обобщает определения [228] (см. пример 10.3).

В определение простой игры добавляется дополнительная информация – каждому игроку  $i$  и коалиции  $S$  сопоставляется число  $f(i,S)$ , которое можно воспринимать, как меру желания игрока  $i$  присоединиться к  $S$ .

Определение 10.4. Назовем простой игрой с предпочтениями тройку  $(N,v,f)$ , где  $N=\{1,\dots,n\}$  – множество игроков, пара  $(N,v)$  образует простую игру,  $f$  – функция, сопоставляющее каждой коалиции  $S$  и игроку  $i$  положительное число  $f(i,S)$ .

Простую игру можно воспринимать, как простую игру с предпочтениями, в которой все коалиции одинаково предпочтительны –  $(N,v) \equiv (N,v,1)$ .

В случаях, когда это не вызывает путаницы, игра  $(N,v,f)$  обозначается просто  $v$ . Если две игры использованы в одном доказательстве, предполагается, что функция  $f$  у них одна и та же.

Понятия выигрывающей, проигрывающей и минимальной выигрывающей коалиций, и ключевого игрока, вычеркивания коалиции и голосования с квотой дословно переносятся из простых игр. Наличие дополнительной функции  $f$  пока ни на что не влияет. При вычеркивании коалиции меняется только  $v$ , функция  $f$  остается прежней.

Пример 10.5 [228]. Предпочтения игроков задаются  $n \times n$ -матрицей  $P$ . Неформально говоря, ее элемент  $p_{ij} \in [0,1]$  определяет желание игрока  $i$  войти в коалицию с игроком  $j$ . Матрица  $P$  не обязательно симметрична, т.е. в общем случае  $p_{ij} \neq p_{ji}$ . Для вычислений удобно считать, что  $p_{ii}=0$ .

В [228] приведено несколько способов определения матрицы предпочтений для реальных выборных органов и предложены более 10 версий индекса, основанных на матрице предпочтений. Приведем четыре из них. В обозначениях данного раздела

$$f^+(j,S,P) = \sum_{i \in S} \frac{p_{ji}}{s-1};$$

$$f^-(j,S,P) = \sum_{i \in S} \frac{p_{ij}}{s-1};$$

$$f(j,S,P) = \frac{f^+(j,S,P) + f^-(j,S,P)}{2};$$



$$f(S, P) = \sum_{j \in S} \frac{f^+(j, S, P)}{s} = \sum_{j \in S} \frac{f^-(j, S, P)}{s} = \frac{1}{s \cdot (s-1)} \sum_{i, j \in S} p_{ij}.$$

Если коалиция  $S$  состоит из одного элемента, считаем все функции равными 1.

Величину  $f^+(j, S, P)$  можно интерпретировать, как среднее желание игрока  $j$  входить в коалицию с остальными игроками  $S$ ,  $f^-(j, S, P)$  – как среднее желание остальных игроков  $S$  входить в коалицию с  $j$ ,  $f(S, P)$  – как среднее желание всех игроков входить в коалицию со своими коллегами из  $S$ .

Если отношения между всеми игроками коалиции  $S$  хорошие, т.е.  $p_{ij}=1$  для всех  $i, j \in S$ , то  $f^+(j, S, P) = f^-(j, S, P) = f(S, P) = 1$ , если же отношения между всеми игроками коалиции  $S$  плохие, т.е.  $p_{ij}=0$  для всех  $i, j \in S$ , то  $f^+(j, S, P) = f^-(j, S, P) = f(S, P) = 0$ .

Индекс влияния,  $\Phi: SGP_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , как и в случае простых игр, сопоставляет каждой игре  $v$  с симметричными или несимметричными предпочтениями вектор  $\Phi(v)$ ,  $i$ -я компонента которого интерпретируется как влияние игрока  $i$ .

Определение 10.5.  $\alpha$ -индекс влияния определяется по формуле

$$\alpha_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} f(i, S).$$

Пусть  $f(i, S) > 0$  для всех игроков и коалиций, а  $v$  не равно тождественно ни 0, ни 1. Определим нормированный  $\alpha$ -индекс влияния  $N\alpha(v)$  [228]:

$$N\alpha_i(v) = \frac{\alpha_i(v)}{\sum_{j \in N} \alpha_j(v)}.$$

Все три условия во второй части определения нужны для того, чтобы знаменатель был не равен 0.

Доказательство следующего утверждения (правда, в несколько измененной формулировке) можно найти в [232].

Лемма 10.2. Пусть  $S \in M(v)$ . Тогда

$$\alpha_i(v) - \alpha_i(v_{-S}) = \begin{cases} f(i, S), & \text{если } i \in S; \\ -f(i, S \cup \{i\}), & \text{если } i \notin S. \end{cases}$$

Пример 10.6. Пусть  $f(S)$  зависит только от числа игроков в коалиции  $S$ . Если  $f(S)=1$ , то  $\alpha$ -индекс совпадает с общим индексом Банцафа, а нормированный  $\alpha$ -индекс – с индексом Банцафа.

$$St_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} 1 = |W_i(v)| = Bz_i(v).$$

Если же  $f(S)=1/2^{n-1}$ ,  $\alpha$ -индекс совпадает с индексом Пенроуза.

Если, наконец,  $f(S) = \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}$ ,  $\alpha(v)$  совпадает с индексом Шепли-

Шубика.

$$\alpha(v) = \sum_{S \in W_i(v)} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} = SS_i(v).$$

Многие другие индексы влияния (например, Джонстона [240], Дигена-Пакела [235], Холера-Пакела [239]) также записываются, используя  $\alpha$ -индекс (см. [231]). Поэтому  $\alpha$ -индекс можно рассматривать, как обобщение этих индексов.

### 10.3 Аксиоматика для $\alpha$ -индекса

Для  $\alpha$ -индекса возможна аксиоматизация в стиле приведенных выше ([232]). Но для разнообразия приведем здесь другую аксиоматику из той же статьи. Оказывается, что достаточно двух аксиом.

Аксиома болвана (Null Player, NP). Выигрыш болвана не зависит от интенсивностей предпочтений и всегда равен 0.

Усиленная аксиома трансфера (Strong Transfer, ST). Для любой игры  $v \in SGP_n$ , любой коалиции  $S \in M(v)$  и любого  $i \in S$

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = f(i, S).$$

Если  $i \in S$ , то ST – усиление аксиомы  $T^*$ : в  $T^*$  указывается, что разность  $\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S})$  постоянна по  $v$ , а ST дополнительно говорит, чему эта разность равна.

Но если  $i \notin S$ , аксиома ST, в отличие от  $T^*$ , не утверждает ничего.

Теорема 10.3. Индекс влияния  $\Phi(v)$  удовлетворяет аксиомам NP и ST тогда и только тогда, когда  $\Phi(v)=\alpha(v)$ .

Аналог этой аксиоматики – утверждение о том, что линейная функция определяется двумя свойствами – в нуле она равна 0, а производная в любой точке постоянна.

## 10.4 Аксиоматики для индексов влияния в случае голосований с квотой

### 10.4.1 Свойства голосований с квотой

Непосредственно перенести любую из рассмотренных выше аксиоматик на случай голосований с квотой не удастся, поскольку результат многих операций над голосованиями с квотой (объединение, пересечение, вычеркивание коалиции) уже не будет записываться, как голосование с квотой.

Пример 10.7. Пусть  $N=\{1,2,3,4\}$ . Обозначим  $v$  простую игру с двумя минимальными выигрывающими коалициями –  $\{1,2\}$  и  $\{3,4\}$ . В примере 10.2 было доказано, что  $v$  нельзя записать в виде голосования с квотой. Но  $v = u^{\{1,2\}} \cup u^{\{3,4\}}$ , т.е. объединение двух голосований с квотой.

Рассмотрим четыре голосования с квотой:

$$w_1=(3;2,1,2,1), w_2=(3;1,2,2,1), w_3=(3;2,1,1,2), w_4=(3;1,2,1,2).$$

Выигрывающими коалициями в них будут все 3- и 4-элементные множества игроков и все 2-элементные, кроме  $\{2,4\}$  для  $w_1$ , кроме  $\{1,4\}$  для  $w_2$ , кроме  $\{2,3\}$  для  $w_3$  и кроме  $\{1,3\}$  для  $w_4$ . Поэтому при пересечении этих голосований с квотой получается  $v$ .

В  $w_1$  пять минимальных выигрывающих коалиций – все 2-элементные, кроме  $\{2,4\}$ . Вычеркнем  $\{1,3\}$ . Полученная простая игра не может быть записана, как голосование с квотой. Иначе, поскольку коалиции  $\{1,2\}$  и  $\{3,4\}$  выигрывающие, сумма их голосов не меньше двух квот,  $\{1,3\}$  и  $\{2,4\}$  – проигрывающие, поэтому сумма их

голосов меньше двух квот. Но в обоих случаях речь идет о сумме голосов всех игроков. Противоречие.

С другой стороны, некоторые "базовые" игры записываются, как голосования с квотой и, хотя из игры  $v \in WG_n$  нельзя вычеркнуть произвольную минимальную выигрывающую коалицию, оставаясь во множестве  $WG_n$ , но какую-нибудь можно. Поэтому некоторые доказательства проходят, если во все аксиомы добавить фразу "в том случае, если результат операции будет голосованием с квотой". Формализацию сказанного начнем со следующей леммы.

Лемма 10.3.

- а) простые игры  $0, 1 \in WG_n$ ;
- б) для любого  $S$   $u^S \in WG_n$ ;
- в) для любого  $S \neq N$   $u_{-S}^S \in WG_n$ ;
- г) если  $v \in WG_n$ , а игрок  $i$  не болван в  $v$ , то существует такая минимальная выигрывающая коалиция  $S \ni i$ , что  $v_{-S} \in WG_n$ .

Доказательство. а) Пусть для всех  $i \in N$   $w_i=1$ . Тогда если  $q=0$ , выигрывающими будут все коалиции, а если  $q=n+1$ , выигрывающих коалиций не будет.

Покажем справедливость б). Пусть  $w_i=n+1$ , если  $i \in S$ ,  $v_i=1$ , если  $i \notin S$ ,  $q=|S| \cdot (n+1)$ . В этом случае коалиция будет выигрывающей, если и только если она содержит  $S$ . Что и требовалось.

Покажем справедливость в). Определим веса игроков так же, как и в предыдущем пункте, а квоту сделаем на единицу меньше:  $q=|S| \cdot (n+1) - 1$ . Коалиция будет выигрывающей, если и только если она содержит  $S$  за одним исключением:  $S$  – проигрывающая. Конструкция некорректна, если  $|S|=0$ . Но тогда  $S=\emptyset$  и  $v=1$ , а этот случай уже рассмотрен в п. 1.

Докажем г). Разобьем утверждение на два:

- г1) если игру можно записать, как голосование с квотой, то ее можно записать как голосование с квотой так, чтобы выигрыши всех коалиций были попарно различны;

г2) если выигрыши всех коалиций попарно различны, то уменьшив вес игрока  $i$ , можно добиться того, чтобы выигрывающими остались все те же коалиции, кроме одной, содержащей  $i$ .

Докажем сначала г1). Пусть  $\varepsilon$  – разница между квотой и весом самой сильной из проигрывающих коалиций. Выберем положительные числа  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ , каждое из которых меньше  $\varepsilon/n$  и рассмотрим теперь голосование с квотой  $(q; v_1 + \varepsilon_1, \dots, v_n + \varepsilon_n)$ . Покажем, что новое голосование с квотой задает ту же простую игру, что и старое. Квота не изменилась, а вес каждого из игроков увеличился, поэтому выигрывающие коалиции остались выигрывающими. Но вес каждой коалиции увеличился не более, чем на сумму всех  $\varepsilon_i$ , каждое из которых меньше, чем  $\varepsilon/n$ , т.е. вся сумма увеличилась менее, чем на  $\varepsilon$ . Поэтому все проигрывающие коалиции остались проигрывающими. Что и требовалось.

Осталось доказать, что можно выбрать  $\varepsilon_i$  так, что веса всех коалиций различны. Множество всех допустимых  $\varepsilon_i$  образует открытый гиперкуб в  $\mathbb{R}^n$ , заданный неравенствами  $0 < \varepsilon_i < \varepsilon/n$ , мера которого равна  $(\varepsilon/n)^n > 0$ . Каждое условие равенства весов двух коалиций задает линейное уравнение на  $\varepsilon_i$ , т.е. неподходящие нам наборы  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  лежат на конечном множестве гиперплоскостей в  $\mathbb{R}^n$ , т.е. имеют меру 0 в  $\mathbb{R}^n$ . Поэтому множество подходящих наборов имеет ту же (положительную) меру, что и множество всех допустимых наборов  $\varepsilon_i$ , поэтому множество всех подходящих наборов непусто.

Докажем г2). Будем непрерывно уменьшать вес  $i$ -го игрока, не меняя квоту и веса остальных игроков. Когда вес игрока  $i$  станет равен 0, проигрывающими станут все коалиции, в которых  $i$  – ключевой. Поскольку  $i$  не болван, такие коалиции есть. Поэтому при непрерывном уменьшении веса игрока  $i$  был момент, когда проигрывающей стала первая из этих коалиций, а поскольку веса всех коалиций различны, можно выбрать момент, когда проигрывающей будет только одна из них.

Отметим, что если, как это обычно и бывает на практике, веса игроков целые, то можно сделать так, что и измененные веса игроков останутся целыми. Ничто не мешает выбрать  $\varepsilon_i$  рациональными, тогда рациональными будут и измененные веса игроков. Дело в том, что множество подходящих наборов  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  будет не только

непусто, но также и открыто, как разность открытого множества и конечного числа замкнутых. А любое непустое открытое подмножество в  $\mathbb{R}^n$  содержит точку с рациональными координатами.

Отметим, что для любого положительного  $a$  голосования с квотой  $(q; w_1, \dots, w_n)$  и  $(aq; aw_1, \dots, aw_n)$  задают одну и ту же простую игру. Поэтому, умножив квоту и веса всех игроков на общий знаменатель  $\varepsilon_i$ , получим голосование с квотой с целыми коэффициентами.

Вообще, рассуждая аналогично, несложно доказать, что любую игру, записывающуюся, как голосование с квотой, можно записать как голосование с квотой с целой квотой и весами игроков. Было бы очень интересно получить тот же результат, не используя "промежуточное" голосование с квотой.

Пример 10.8. Рассмотрим голосование с квотой  $(2; 1, 1, 1)$ . Пусть  $\varepsilon_1=1/2$ ,  $\varepsilon_2=1/3$ ,  $\varepsilon_3=1/6$ . Добавив их к весам игроков, получим голосование с квотой  $(2, 3/2, 4/3, 7/6)$  или  $(12; 9, 8, 7)$ . Как видно из Таблицы 10.2, веса всех коалиций различны, а выигрывающими, как и раньше, будут только коалиции из двух и трех игроков.

Таблица 10.2 – Коалиции и их веса

X	$\emptyset$	{C}	{B}	{A}	q	{B,C}	{A,C}	{A,B}	{A,B,C}
w(X)	0	7	8	9	12	15	16	17	24

Замечание 10.2. Первые три пункта леммы 10.3 очевидны и добавлены для полноты формулировки. Аналогичный пункту г) результат: если игра  $v$  записывается, как голосование с квотой, то существует минимальная выигрывающая коалиция  $S$ , такая, что игра  $v_{-S}$  тоже записывается, как голосование с квотой, был доказан в работе [229], но утверждение леммы более точно, а приведенное здесь доказательство, по мнению автора проще и лучше описывает суть проблемы.

#### 10.4.2 Адаптированные аксиомы и характеристика

Аксиомы NP, An, E и VzTP не меняются никак. Только область определения индекса сужается со всех простых игр на голосования с квотой. Аксиомы T и T\*, кроме того, несколько ослабляются:

Трансфер (Transfer, T). Для любых  $v, w \in WG_n$ , таких что  $v \vee w \in WG_n$  и  $v \wedge w \in WG_n$

$$\Phi(v) + \Phi(w) = \Phi(v \vee w) - \Phi(v \wedge w),$$

где  $i \in N$   $(v \vee w)(S) = \max(v(S), w(S))$ , а  $(v \wedge w)(S) = \min(v(S), w(S))$ .

Трансфер\* (Transfer\*, T\*). Для любых игр  $v, w \in WG_n$ , для любой коалиции  $S \in M(v) \cap M(w)$  такой, что  $v_{-S}, w_{-S} \in WG_n$  и любого игрока  $i$

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \Phi_i(w) - \Phi_i(w_{-S}).$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма

Лемма 10.4. Пусть индекс влияния  $\Phi$  удовлетворяет аксиоме T. Тогда он удовлетворяет и аксиоме T\*.

Доказательство. Пусть  $v$  и  $w$  записываются, как голосования с квотой,  $S \in M(v) \cap M(w)$ ,  $v_{-S}$  и  $w_{-S}$  также записываются, как голосования с квотой. Если  $S=N$ , то  $v=w=u^N$  и утверждение леммы тривиально. Далее будем считать, что  $S \neq N$ . По лемме 10.3 игры  $u^S$  и  $u^S_{-S}$  записываются, как голосования с квотой, причем  $v_{-S} \cup u^S = v$ ,  $v_{-S} \cap u^S = u^S_{-S}$ ,  $w_{-S} \cup u^S = w$ ,  $w_{-S} \cap u^S = u^S_{-S}$ . Значит, по аксиоме T

$$\Phi(v) = \Phi(v_{-S} \cup u^S) = \Phi(v_{-S}) + \Phi(u^S) - \Phi(u^S_{-S})$$

$$\Phi(w) = \Phi(w_{-S} \cup u^S) = \Phi(w_{-S}) + \Phi(u^S) - \Phi(u^S_{-S}),$$

т.е.

$$\Phi(v) - \Phi(v_{-S}) = \Phi(w) - \Phi(w_{-S}) = \Phi(u^S) - \Phi(u^S_{-S}),$$

что и требовалось.

Доказательство корректности приведенной аксиоматики для индекса Банцафа близко к доказательствам похожих утверждений в [241],[232]. Сделанные поправки позволяют обойти особенности голосований с квотой.

Теорема 10.4. Пусть  $\Phi: WG_n \rightarrow R^n$ . Тогда  $\Phi$  удовлетворяет аксиомам NP, An, T и VzTP, если и только если  $\Phi$  – индекс Банцафа.

Доказательство. Заметим, что переформулированные аксиомы слабее их аналогов – они утверждают то же самое, но при существенных ограничениях. По теореме 10.2 индекс Банцафа, определенный на  $SG_n$  удовлетворяет аксиомам NP, An, T и VzTP, следовательно, тот же индекс, но определенный на  $WG_n$ , должен удовлетворять тем же аксиомам.

Обратное утверждение будем доказывать по индукции по числу выигрывающих коалиций, используя при этом первую часть доказательства.

Основание индукции. Пусть  $|W(v)|=0$ , т.е.  $v=0$ . По лемме 10.3  $v \in WG_n$ . Ни один игрок не будет ключевым ни в одной коалиции. Следовательно, по аксиоме NP  $\Phi_i(v)=0$  для всех  $i$ . Поскольку  $Bz(v)$  тоже удовлетворяет NP,  $Bz_i(v)=0$ . Значит  $\Phi_i(v)=Bz_i(v)$ .

Шаг индукции. Возможны два случая.

1. Пусть в игре  $v$  одна минимальная выигрывающая коалиция  $S$ , т.е.  $v=u^S$ . По лемме 10.3  $u^S \in WG_n$ . В этом случае коалиция  $T$  будет выигрывающей тогда и только тогда, когда она содержит  $S$ , т.е. содержит в себе всех игроков из  $S$ . Поэтому, если игрок  $j \notin S$ , от его вхождения или не вхождения в коалицию  $T$  ничего не изменится –  $T$  и  $T \setminus \{j\}$  будут выигрывающими или проигрывающими одновременно. Поэтому все игроки, не входящие в  $S$  будут болванами в игре  $v$ . Поэтому, если  $i \notin S$ ,  $\Phi_i(v)=Bz_i(v)=0$ .

Рассмотрим теперь игроков, входящих в  $S$ . По аксиоме анонимности влияния этих игроков равны, т.е. любых  $i, j \in S$   $\Phi_i(v)=\Phi_j(v)$  и  $Bz_i(v)=Bz_j(v)$ . По аксиоме VzTP суммы влияний игроков, вычисленные как с помощью индексов  $Bz$  и  $\Phi$ , равны, т.е.

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = \sum_{i \in N} Bz_i(v),$$

$$\sum_{i \in S} \Phi_i(v) = \sum_{i \in S} Bz_i(v),$$

$$|S| \Phi_j(v) = |S| Bz_j(v), \forall j \in S,$$

$$\Phi_j(v) = Bz_j(v), \forall j \in S,$$



что и требовалось.

2. Пусть теперь  $M(v) > 1$ , т.е. в игре  $v$  есть две минимальные выигрывающие коалиции ( $S$  и  $S'$ ), причем можно считать, что  $v_{-S} \in WG_n$ . Также выигрывающими будут все коалиции, содержащие  $S$ , поэтому в  $v$  не меньше выигрывающих коалиций, чем в  $u^S$ . Но  $S \not\subset S'$  (иначе коалиция  $S'$  не была бы минимальной выигрывающей). Значит в  $v$  больше выигрывающих коалиций, чем в  $u^S$ . Поэтому к  $u^S$  применимо предположение индукции. Вычеркнем  $S$  из  $v$  и  $u^S$ .  $v_{-S} \in WG_n$  по предположению,  $u_{-S} \in WG_n$  по лемме 10.3. По аксиоме  $T^*$  для  $\Phi$  предположению индукции для  $u^S$  и  $u_{-S}^S$  и аксиоме  $T^*$  для  $Bz$

$$\Phi(v) - \Phi(v_{-S}) = \Phi(u^S) - \Phi(u_{-S}^S) = Bz(u^S) - Bz(u_{-S}^S) = Bz(v) - Bz(v_{-S}).$$

Но по предположению индукции для  $v_{-S}$   $\Phi(v_{-S}) = Bz(v_{-S})$ . Значит, и  $\Phi(v) = Bz(v)$ .

Можно сформулировать и доказать аналогичную теорему и для индекса Шепли-Шубика.

**Теорема 10.5.** Пусть  $\Phi: WG_n \rightarrow R^n$ . Тогда  $\Phi$  удовлетворяет аксиомам  $NP$ ,  $Ap$ ,  $T$  и  $E$ , если и только если  $\Phi$  – индекс Шепли-Шубика.

Доказательство дословно повторяет доказательство предыдущей теоремы с заменой аксиомы  $BzTP$  на аксиому эффективности. Формально говоря, аксиома  $E$  ничего не утверждает, если  $v=0,1$ , но это следует из аксиомы  $NP$ .

Если  $v=0$  или  $1$ , в игре  $v$  не будет игроков, ключевых хоть в какой-нибудь коалиции, так как в первом случае не будет выигрывающих коалиций, а во втором – проигрывающих. Поэтому все игроки будут болванами и, если индекс влияния  $\Phi$  удовлетворяет аксиоме  $NP$ , то, как и в доказательстве теоремы 10.4,  $\Phi_i(v)=0$  для всех игроков  $i$ .

### 10.5 Аксиоматика для $\alpha$ -индекса в случае голосований с квотой

Благодаря лемме 10.3 можно переформулировать для голосований с квотой и аксиоматику для  $\alpha$ -индекса. Перепишем аксиомы:

Аксиома болвана (Null Player, NP). Выигрыш болвана не зависит от интенсивностей предпочтений и всегда равен 0.

Усиленная аксиома трансфера (Strong Transfer, ST). Для любого голосования с квотой  $v$  и для любой коалиции  $S \in M(v)$ , таких, что  $v_{-S}$  – тоже голосование с квотой и любого  $i \in S$

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = f(i, S).$$

Теорема 10.6.  $\alpha$ -индекс влияния для голосований с квотой однозначно задается аксиомами NP и ST, переформулированными для голосований с квотой.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 10.4, отметим, что переформулированные аксиомы слабее их аналогов. Поэтому раз  $\alpha$ -индекс удовлетворяет не переформулированным для голосований с квотой аксиомам NP, ST, то он удовлетворяет и переформулированным аксиомам.

Обратное утверждение будем доказывать по индукции по числу выигрывающих коалиций, используя при этом первую часть доказательства.

Основание индукции. Пусть выигрывающих коалиций нет. Эта игра записывается, как голосование с квотой  $(n+1; 1, \dots, 1)$ . Ни один игрок не будет ключевым ни в одной коалиции. Следовательно, по аксиоме NP  $\Phi_i(v) = 0$  для всех  $i$ . Поскольку  $\alpha(v)$  тоже удовлетворяет NP,  $\alpha_i(v) = 0$ . Значит  $\Phi_i(v) = \alpha_i(v)$ .

Шаг индукции. Пусть  $v \in WGP_n$ . Если  $i$  – болван в игре  $v$ , то  $\Phi_i(v) = \alpha_i(v) = 0$ . Если это не так, то по лемме 10.3 существует  $S \in M(v)$ , т.ч.  $v_{-S} \in WGP_n$ . К игре  $v_{-S}$  применимо предположение индукции, поэтому

$$\Phi_i(v_{-S}) = \alpha(v_{-S}) = \sum_{T \in W_i(v_{-S})} f(i, T).$$

По аксиоме ST для  $\Phi(v)$ , предположению индукции и аксиоме ST для  $\alpha(v)$

$$\Phi_i(v) = \Phi_i(v_{-S}) + f(i, S) = \alpha_i(v_{-S}) + f(i, S),$$

$$\alpha_i(v) = \alpha_i(v_{-S}) + f(i, S).$$

Поэтому  $\Phi_i(v) = \alpha_i(v)$ .

## 10.6 Некоторые выводы

Все известные индексы влияния однозначно задаются, например, множеством выигрывающих коалиций и никакой специфики голосований с квотой не используют. Проведенное исследование показывает, что аксиоматики для индексов влияния в случае голосований с квотой можно получать простой переформулировкой аксиом.

Однако, полученный в этом разделе результат состоит в том, что хотя простые игры, соответствующие голосованиям с квотой, не образуют решетку, по этой "не решетке" можно пройти от максимального элемента к минимальному, посетив любую наперед заданную вершину. Это соображение открывает возможность точнее описать множество игр, записывающихся как голосования с квотой.

Результаты исследований, представленные в этом разделе, нашли отражение в работе [233]:

Шварц Д.А. Аксиоматики для индексов влияния в задаче голосования с квотой// Проблемы управления, 2012, 1, с.33-41.

## 11 ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ ВЫБОРА И РАНЖИРОВАНИЯ АЛЬТЕРНАТИВ В МАЖОРИТАРНОМ ГРАФЕ

В этом разделе отчета представлены результаты по исследованию способов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе и применению этих методов к построению агрегированных рейтингов конкретных наборов альтернатив. Эти исследования в 2012г. осуществлялось в следующих направлениях:

- построение агрегированных ранжирований стран по уровню их демократического развития (подраздел 11.1);
- построение классификации стран по степени их конкурентоспособности с помощью методов теории коллективного выбора (подраздел 11.2);
- разработка обучающего программного обеспечения, решающего задачи оптимального выбора и ранжирования альтернатив (электронное приложение к учебнику и задачнику [251], подраздел 11.3);
- сбор и обработка количественных данных, создание программного обеспечения в целях автоматизации процесса ранжирования экономических агентов (подраздел 11.4).

В подразделе 11.5 сделаны некоторые выводы о проделанной работе в исследовании способов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе.

### 11.1 Построение агрегированных ранжирований стран по уровню их демократического развития с помощью методов выбора и ранжирования альтернатив, представленных вершинами мажоритарного графа

Демократия является важнейшей нормативной концепцией в современной политике. Следовательно, определение степени демократичности того или иного политического организма есть задача не только познавательная, но и практическая, от решения которой зависят как наши знания, так и наши оценки и действия. В силу той же причины большое значение приобретает требование объективности (и, следовательно, общезначимости, неоспоримости) выводов исследователей демократии.

Именно поэтому различными исследовательскими коллективами были созданы разнообразие индексы, являющиеся способом количественной оценки уровня развития демократии в различных странах. Предполагается, что использование количественных методов, помимо всего прочего, повышает объективность и надежность результатов исследования. Однако наличие разных индексов демократии, принципы вычисления которых сильно различаются, свидетельствует о том, что демократия как форма политической жизни есть явление сложное и многомерное. Различия в способе вычисления приводят к противоречивым оценкам относительного уровня демократического развития одного и того же государства – в ранжированиях по значению разных индексов страны располагаются в разных последовательностях. В настоящей работе дается количественная оценка степени расхождения этих ранжирований.

Поскольку большинство индексов основано на разумных и допустимых модельных предположениях, а priori нельзя предпочесть какой-либо из этих способов оценки уровня развития демократии всем остальным. Соответственно, возникает проблема агрегирования противоречивой информации, которую дают ранжирования по отдельным показателям.

Очень часто для агрегирования рейтингов используют метод взвешенной суммы, когда итоговый рейтинг строят с помощью индекса, чье значение полагается равным сумме значений исходных индексов, взятых с некоторыми весами. Корректное использование подобного метода наталкивается на серьезное ограничение – требуется теоретическое обоснование возможности сложения значений индексов, поскольку складывать можно только однородные величины. Если говорить об индексах демократии, то, во-первых, различным индексам соответствуют разные шкалы измерения, что требует выбора коэффициента пересчета из одной шкалы в другую. Обоснование выбора значения коэффициентов пересчета предстает еще большей теоретической проблемой, чем весов для суммы. Во-вторых, различные индексы основаны на различном понимании и операционализации демократии, и, соответственно, по-разному отражают разные аспекты этого сложного и многомерного явления. Таким образом, различные индексы демократии измеряют, вообще говоря,

не одно и то же, то есть не являются величинами однородными. Кроме того, использование метода взвешенной суммы не позволяет включать в агрегирование рейтинги, основанные не на количественных (кардинальных, интервальных) переменных, а на переменных порядковых (ординальных, ранговых). Наконец, непонятно почему для агрегирования нужно использовать именно взвешенную сумму, а не какую-либо другую функцию, зависящую от исходных индексов, например, их произведение.

Цель данного исследования состояла в том, чтобы предложить подход к построению агрегированных рейтингов демократии, не использующий арифметические действия с величинами индексов, и потому свободный от ограничений метода взвешенной суммы. В основе данного подхода лежит использование методов ранжирования, предложенных в теории коллективного выбора, а в настоящее время также используемых в задачах многокритериального оценивания альтернатив. Альтернативами в настоящем исследовании являются страны, а критериями их оценки - индексы уровня развития демократии, такие как индекс демократии (Democracy Index), рассчитываемый аналитическим подразделением журнала The Economist, индекс проекта Polity IV (index Polity IV), индекс институциональных основ демократии (ИИОД), индекс Ванханена (Vanhanen index) и один из индикаторов, рассчитываемых Институтом Всемирного Банка, - индекс свободы слова и ответственности властей (Voice & Accountability index). Данные критериальные оценки агрегируются на основании правила большинства. В отличие от метода взвешенной суммы этот способ агрегирования является ординальным и свободен от вышеуказанных недостатков. Результатом агрегирования становится бинарное отношение, называемое мажоритарным. Оно содержит информацию о попарном сравнении государств. Поскольку мажоритарное отношение само, как правило, не является ранжированием в силу наличия в нем циклов, нарушающих транзитивность, то ранжирование строится на основании этого отношения с помощью специальных методов, таких, как правило Коупланда, марковский метод или сортировка с помощью различных функций выбора, определяющих в рассматриваемой совокупности наилучшие альтернативы

Идея использования методов теории коллективного выбора для агрегирования рейтингов была предложена и реализована в работе «Построение рейтингов журна-

лов по менеджменту с помощью методов теории коллективного выбора» [249]. В ней методы теории коллективного выбора применяются для построения агрегированных рейтингов 82 научных журналов по менеджменту, на основе их оценок по различным показателям цитирования. Общая схема исследования и методы, используемые в работе [249], легли в основу настоящего исследования.

Для данного исследования были выбраны пять способов ранжирования государств мира по уровню их демократического развития: 1) по значению индекса демократии (Democracy Index), рассчитываемому аналитическим подразделением журнала The Economist, 2) по значению индекса проекта Polity IV (index Polity IV), 3) по значению индекса институциональных основ демократии (ИИОД), 4) по значению индекса Ванханена (Vanhanen index), 5) по значению одного из индикаторов, рассчитываемых Институтом Всемирного Банка – индекса свободы слова и ответственности властей (Voice & Accountability index). Данные индексы были взяты в качестве исходных по двум причинам. Во-первых, они являются наиболее популярными рейтингами, рассчитываемыми в настоящее время. Во-вторых, благодаря выбранным шкалам измерения, степень дискриминации стран в рейтингах высокая, то есть число пар стран, которые рейтинги ставят на одну и ту же позицию, невысока. Из-за несоответствия второму критерию из анализа был исключен рейтинг демократичности, рассчитываемый организацией Freedom House. Значения этого индекса – натуральные числа от 1 до 7, что обуславливает низкую разрешающую способность рейтинга. Другой популярный индекс Unified Democracy Scores был исключен потому, что сам является агрегированным и строится на основе десятка исходных индексов, в числе которых индекс Ванханена и индекс Freedom House.

Вычисление индекса демократии стран мира (Democracy Index) – это глобальное исследование, результатом которого становится рейтинг стран мира по показателю уровня демократичности. Этот индекс рассчитывается по методике британского исследовательского центра The Economist Intelligence Unit (аналитическое подразделение британского журнала Economist), основанной на агрегировании экспертных оценок и результатов опросов общественного мнения населения соответствующих

щих стран. Исследование проводится с 2006 года, и рейтинги публикуются один раз в два года.

Значение индекса зависит от оценки степени демократичности страны по одному из пяти измерений демократии: качество избирательного процесса и степень политического плюрализма; характер деятельности правительства; величина политического участия; демократичность политической культуры; наличие гражданских свобод.

Индекс представляет собой взвешенную сумму, основанную на ответах на 60 закрытых вопросов, для каждого из которых предлагается два или три варианта ответов. Большинство ответов являются экспертными оценками, однако The Economist Intelligence Unit не дает информации о специализации экспертов, их национальности и о том, являются ли они сотрудниками агентства или же независимыми экспертами. Часть данных (ответы на вопросы) берется из публичных опросов. Все вопросы разбиваются на 5 категорий, упомянутых выше. За определенный вариант ответа вопрос страна получает 0 баллов или 1 балл (если вариантов ответа два), либо 0 баллов, 0,5 балла или 1 балл (если вариантов три). Баллы суммируются по отдельным категориям. Каждая сумма умножается на 10 и делится на количество вопросов в категории. Значение индекса демократии полагается равным среднему арифметическому полученных пяти чисел, округленному до сотых. В результате демократичность каждого государства оценивается количественно по шкале от 0 до 10 с шагом 0,01. В итоговом рейтинге все государства ранжируются на основе значений индекса демократии и разбиваются по типу режима власти на четыре категории:

- полная демократия (8 – 10 баллов);
- недостаточная демократия (6 – 7.99 баллов);
- гибридный режим (4 – 5.99 баллов);
- авторитарный режим (менее 4 баллов).

Проект «Polity», основанный Тедом Робертом Гурром, был направлен на сбор и анализ данных о политических институтах и режимах независимых государств мира. В 1970-1990-е гг. реализация поставленной задачи осуществлялась в рамках про-



ектов «Polity II» и «Polity III», хотя они концентрировались и на более конкретных целях. Помимо сбора информации о государствах мира особое внимание уделялось процессам упадка авторитарных режимов и демократизации в Восточной Европе и Латинской Америке, а также динамике развития режимов третьей «волны» демократизации. В настоящее время под руководством М. Маршалла реализуется проект «Polity IV».

Инструментарий анализа, прежде всего, ориентирован на мониторинг состояния и динамики режимов. Центральной категорией анализа выступает полития, которая понимается как определенное состояние политического режима, содержащее в себе черты демократии и автократии

Индекс изменяется по целочисленной шкале от -10 (самый высокий уровень автократии) до +10 (самый высокий уровень демократии), с тремя дополнительными значениями. Итоговый показатель, характеризующий политику, вычисляется на основе значений двух показателей – степени демократичности и степени автократичности.

Эти показатели, в свою очередь, рассчитываются на основе оценок значений следующих переменных:

- механизмы рекрутирования представителей исполнительной власти (англ. regulation of executive recruitment): институциональные процедуры передачи исполнительной власти;
- уровень конкуренции в процессе рекрутирования представителей исполнительной власти (англ. competitiveness of executive recruitment): степень использования выборных процедур при занятии должностей;
- степень открытости процесса рекрутирования представителей исполнительной власти (англ. openness of executive recruitment): возможности занятия должностей теми, кто не входит в политическую элиту;
- ограничения в отношении исполнительной власти (англ. executive constraints);

- механизмы регулирования политического участия (англ. regulation of participation): развитость институциональных структур, обеспечивающих выражение интересов на политическом уровне;
- соревновательность политического участия (англ. competitiveness of participation): возможности доступа в институциональные структуры с целью выражения своих интересов для тех, кто не входит в политическую элиту.

Указанные переменные были изначально сведены в три группы (concept variables):

- рекрутирование представителей исполнительной власти рассчитывается на основе переменных 1, 2 и 3 из обозначенного выше списка;
- ограничения в отношении исполнительной власти идентичны переменной 4;
- политическая конкуренция рассчитывается на основе переменных 5 и 6.

Для каждой рассматриваемой страны создается отдельный отчет, где указываются общий индекс, показатели степени демократичности и автократичности, а также значения всех перечисленных выше переменных. Индексы политики рассчитываются для каждого года, начиная с 1800 г. (для государств, возникших позднее, – с момента обретения независимости).

WGI – продолжительный исследовательский проект, направленный на изучение различных индикаторов управления в странах мира. WGI состоит из 6 композитных индексов, характеризующих отдельные факторы управления, и покрывает около 200 стран на период с 1996 года. Основные индексы:

- свобода слова и ответственность властей;
- политическая стабильность и отсутствие насилия/терроризма;
- эффективность государственного управления;
- качество регулирования;
- верховенство закона;
- контроль над коррупцией.

Индекс свободы слова и подотчетности властей показывает восприятие уровня вовлеченности граждан в процесс формирования государственного аппарата, также свободы слова, свободы объединений и свободы СМИ. Данный индекс обычно рассматривается как показатель уровня демократии, поэтому и используется в данной работе в качестве исходного рейтинга.

Этот индекс отражает комбинацию ответов на вопросы о качестве государственного управления. Он строится на основании нескольких сотен переменных, взятых из 25 различных источников 18 организаций. Каждой стране в этом рейтинге дается балльная оценка на основе измерения данных из большого числа вторичных источников, а также целевых исследований и измерений восприятия, проводимых компаниями, занимающимися оценкой рисков, Институтом европейского университета, высшими учебными заведениями, агентствами по изучению общественного мнения и т.д. Так как используемая методология дает возможность выполнять оценку отдельных компонентов, а так же комплексную оценку, то можно выборочно исследовать лишь отдельные сферы государственного управления в зависимости от потребностей и цели оценки.

Индекс измеряется в шкале от 1 до 100. Чем выше значение рейтинга, тем выше эффективность государственного управления. «В 2002 г. показатель России по индексу «Право голоса и подотчетность» составил 33,8, а по индексу «Контроль коррупции» – 21,1. Оба показателя оказались выше, чем средний показатель по СНГ, но значительно ниже, чем показатель по странам Организации экономического сотрудничества и развития (по обоим индексам он составил 91,3).

Индекс демократизации Ванханена как способ измерения уровня демократизации различных государств был предложен финским политологом Тату Ванханеном. Уровень демократичности страны в данном случае измеряется по критериям политического участия и электоральной конкуренции.

Ванханен выделял в качестве главного преимущества своего индекса демократизации то, что он основывается на важных, простых и точных критериях. Он пишет, что его индикаторы демократизации отличаются по двум важным пунктам: 1) используются только два индикатора и 2) оба индикатора основаны на количествен-

ных электоральных данных. Ванханен полагает, что лучше использовать простые количественные переменные с некоторыми недостатками, чем более сложные меры с весами и оценками, основанными на субъективных суждениях.

При вычислении индекса (ИД) используются два количественных показателя демократии:

- уровень конкурентности (К), который равен удельному весу голосов, полученных на парламентских и президентских (в странах, где они проводятся) выборах оппозиционными партиями;
- уровень электорального участия (У), который равен удельному весу населения, участвовавшего в голосовании на этих выборах среди всего населения страны (включая и детей).

Общая формула индекса демократизации Ванханена выглядит следующим образом:

$$\text{ИД} = \text{К} \cdot \text{У} / 100.$$

Индекс институциональных основ демократии (далее – ИИОД) включает показатели, которые характеризуют наличие и степень развитости абсолютно необходимых (но при этом недостаточных) оснований и условий для участия и контроля граждан над решением вопросов, затрагивающих их интересы, то есть для появления и развития демократического правления.

При составлении этого индекса его авторы пытались преодолеть ошибки и недостатки существующих индексов, а именно исключить минималистское и максималистское понимания демократии и использование при подсчете индекса экспертных оценок. Способом преодоления первой проблемы стало процедурно-институциональное понимание демократии как совокупности институтов и процедур, при условии, что эти процедуры не сводятся лишь к наличию формальных выборов. Данный индекс учитывает, в том числе и степень укорененности в обществе институционально-процедурных традиций, способствующих демократическому развитию: минимально конкурентных политических практик, ограничения исполни-

тельной власти, политического участия, возможностей оказания влияния на формирование представительной власти, конституционности («игра по правилам») и др.

Индекс основан на следующих переменных:

- 1) возраст непрерывной минимальной электоральной традиции;
- 2) уровень парламентской конкуренции;
- 3) уровень конкуренции при формировании исполнительной власти;
- 4) включенность граждан в избирательный процесс;
- 5) доля женщин в нижней палате парламента;
- 6) отсутствие или подрыв конкуренции при формировании исполнительной власти;
- 7) нахождение во главе исполнительной власти более двух сроков подряд;
- 8) нарушения конституционного порядка;
- 9) непрерывность демократической традиции после Первой мировой войны;
- 10) влияние парламента на формирование правительства.

С помощью дискриминантного анализа авторы определяют «веса» каждой переменной индекса и строят рейтинг 192 стран мира. Выявляется относительно высокая корреляция индекса институциональных основ демократии с рядом иных индексов демократии.

Для анализа степени согласованности оценок уровня демократии, получаемых с помощью вышеописанных рейтингов, в настоящем исследовании были выбраны 158 государств. Выбор стран был обусловлен необходимостью иметь оценку по каждому рассматриваемому индексу для каждой рассматриваемой страны. Требование однородности оценки в сочетании с особенностями вычисления отобранных индексов, а также большой интерес к близким по времени событиям определило выбор 2008 года, как временного периода, состояние дел в который описывали рейтинги.

Поскольку объектом настоящего исследования являлись не сами индексы, а основанные на них ранжирования, то для оценки согласованности рейтингов были использованы ранговые величины: доля сильно согласованных пар альтернатив  $R_{\text{strict}}$ , доля слабосогласованных пар  $R_{\text{weak}}$  и коэффициент Кендалла  $\tau_b$ . Вычисление этих

величин связано с измерением расстояния Кендалла [264]: позиции стран в разных рейтингах сравниваются для всех возможных пар стран, если государство в одном рейтинге расположено выше другого, а в другом - ниже, то такая пара называется инверсией или противоречием. Расстояние Кендалла между рейтингами равно числу инверсий.

Следуя схеме анализа, предложенной в работе [249], измерения уровня согласованности рейтингов можно использовать выраженную в процентах долю согласованных пар государств  $R_{\text{strict}}=100 \frac{N_+ + N_0}{N}$ , где  $N_+$  – число пар, в которых позиция одной из стран выше позиции другой страны, как в первом рейтинге, так и во втором,  $N_0$  – число пар, в которых номера позиций обеих стран совпадают как в первом рейтинге, так и во втором,  $N$  – общее число неупорядоченных пар. Очевидно, что  $R_{\text{strict}}=100\%$  тогда и только тогда, когда оба рейтинга идентичны. Результаты вычисления  $R_{\text{strict}}$  для пяти отобранных рейтингов приведены в Таблице 11.1. Значения для пар округлены до целых чисел, значение средних – до десятых.

Таблица 11.1 – Доля строго согласующихся пар  $R_{\text{strict}}$  (%)

	Индекс демократии журнала Economist	Индекс проекта Polity IV	Индекс Ванханена	Индекс свободы слова и ответственности властей (WGI-VA)	Индекс институциональных основ демократии
Индекс демократии журнала Economist		81	82	91	86
Индекс проекта Polity IV	81		78	82	79
Индекс Ванханена	82	78		82	84
Индекс свободы слова и ответственности властей (WGI-VA)	91	82	82		85
Индекс институциональных основ демократии	86	79	84	85	
Среднее значение	84,8	79,8	81,4	84,9	83,5

Можно предположить, что величина  $R_{\text{strict}}$  слишком жестко оценивает расхождение между рассматриваемыми рейтингами, ведь если одно государство расположено выше другого в одном рейтинге, а в другом они расположены на одной пози-

ции, то такая ситуация считается противоречием. Однако так считать необязательно, предположив, что один индекс по каким-то причинам «видит» разницу между данными государствами лучше, чем второй, который ее «не видит», поэтому второй рейтинг можно «уточнить» по первому. Таким образом, предлагается считать такие пары согласующимися нестрого. Соответственно, мерой согласия рейтингов является доля пар, в оценке которых они согласуются нестрого, равная разности единицы (100%) и доли инверсий:  $R_{\text{weak}} = 100 \left( 1 - \frac{N_-}{N} \right)$ . Если  $R_{\text{weak}} = 100\%$ , то это значит, что два рейтинга можно объединить в один на основании вышеописанного принципа уточнения. Результаты вычисления  $R_{\text{weak}}$  приведены в Таблице 11.2. Значения для пар округлены до целых чисел, значение средних – до десятых.

Таблица 11.2 – Доля нестрого согласующихся пар  $R_{\text{weak}}$  (%)

	Индекс демократии журнала Economist	Индекс проекта Polity IV	Индекс Ванханена	Индекс свободы слова и ответственности властей (WGI-VA)	Индекс институциональных основ демократии
Индекс демократии журнала Economist		90	83	91	86
Индекс проекта Polity IV	90		88	91	88
Индекс Ванханена	83	88		83	85
Индекс свободы слова и ответственности властей (WGI-VA)	91	91	83		85
Индекс институциональных основ демократии	86	88	85	85	
Среднее значение	87,4	89,1	84,9	87,5	86,2

Также для оценки уровня согласованности рейтингов можно использовать классический коэффициент ранговой корреляции – коэффициент Кендалла [264],[265]. Так как исходные рейтинги содержат наблюдения с совпадающими рангами, то необходимо использовать коэффициент Кендалла  $\tau_b$  со скорректированной нормировкой. Он вычисляется по формуле  $\tau_b = \frac{N_+ - N_-}{\sqrt{(N - n_1)(N - n_2)}}$ , где  $n_1$  – это число таких пар, в которых обе страны имеют одинаковый ранг в первом рейтинге, а  $n_2$ , со-

ответственно, – это число таких пар во втором рейтинге. Результаты вычисления коэффициента Кендалла приведены в Таблице 11.3 Значения для пар округлены до двух значащих цифр после запятой, значение средних – до трех.

Таблица 11.3 – Коэффициент Кендалла  $\tau_b$

	Индекс демократии журнала Economist	Индекс проекта Polity IV	Индекс Ванханена	Индекс свободы слова и ответственности властей (WGI-VA)	Индекс институциональных основ демократии
Индекс демократии журнала Economist		0,74	0,66	0,82	0,72
Индекс проекта Polity IV	0,74		0,69	0,77	0,70
Индекс Ванханена	0,66	0,69		0,65	0,70
Индекс свободы слова и ответственности властей (WGI-VA)	0,82	0,77	0,65		0,71
Индекс институциональных основ демократии	0,72	0,70	0,70	0,71	
Среднее значение	0,732	0,723	0,675	0,735	0,707

Значения  $R_{\text{strict}}$ ,  $R_{\text{weak}}$  и  $\tau_b$  показывают наличие сильной положительной связи между показателями демократии. Минимальное значение индекса  $\tau_b=0,65$  – у пары индекс Ванханена/Индекс свободы слова и ответственности властей. Вообще, индекс Ванханена демонстрирует самую низкую корреляцию с остальными индексами – среднее значение  $\tau_b$  для пар, включающих этот индекс, равно 0,675. То есть из всех индексов демократии он является наиболее самобытным.

Следует также отметить, что относительно низкое среднее значение величины  $R_{\text{strict}}$  для пар с индексом проекта Polity IV объясняется не худшей согласованностью с остальными показателями, а наличием большого количества пар стран с совпадающими значениями этого индекса, что, в свою очередь, обусловлено спецификой его шкалы, содержащей всего лишь 21 деление, – намного меньше, чем у любого из четырех других. То, что среднее значение  $R_{\text{strict}}$  для индекса проекта Polity IV понижено именно в силу грубости его шкалы, подтверждается относительно высокими средними значениями  $R_{\text{weak}}$  и  $\tau_b$  для данного индекса.



Пары, не содержащие индекс Ванханена, показывают корреляцию на уровне 0,70-0,75, что говорит о достаточно высокой степени согласованности рейтингов. Наиболее сильно связаны друг с другом Индекс демократии журнала Economist и Индекс свободы слова и ответственности властей ( $\tau_b=0,82$ ). Если не обращать внимания на аномально высокое значение  $R_{weak}$  для индекса проекта Polity IV, обусловленное, опять же, грубостью его шкалы, то лучше всего (хотя и не сильно лучше) согласуется с другими показателями Индекс свободы слова и ответственности властей.

Тем не менее, даже самая согласованная пара индексов, дает взаимоисключающие оценки 9% пар стран, а между другими рейтингами расхождения еще больше. Соответственно, возникает вопрос – какой рейтинг, в итоге, следует использовать для оценки уровня развития демократии? Как он должен выглядеть?

Рассмотренные выше меры согласованности рейтингов показывают, что, хотя между рейтингами и наблюдается существенная корреляция, между ними имеются также значимые различия. Так как способы вычисления всех рассматриваемых индексов, в целом, разумны, мы не имеем права говорить об априорном превосходстве одного конкретного рейтинга над другими. Более того, можно утверждать, что расхождения в ранжировании государств являются не следствием более низкого качества одних методик составления рейтинга по сравнению с другими, но обусловлены сложностью и многомерностью самого объекта исследования – демократии. Отсюда возникает идея использовать для оценки рейтинг, основанный на информации, которую дает каждый из рассматриваемых индексов, то есть рейтинг агрегированный.

Попытки построения подобных агрегированных рейтингов применялись неоднократно, при этом классическим решением этой задачи, как уже было сказано выше, является использование метода взвешенной суммы. Однако корректное применение этого метода, во-первых, наталкивается на серьезные теоретические препятствия (необходимость обоснования выбора весов и коэффициентов пересчета из одной шкалы в другую, необходимость обеспечения однородности складываемых величин), а, во-вторых, ограничивает множество агрегируемых рейтингов только ранжированиями, основанными на интервальных (кардинальных) переменных. Для рас-

сма триваемых показателей таких обоснований нет, поэтому нельзя быть уверенным в корректности использования данного метода для получения агрегированной оценки уровня развития демократии. В настоящей работе в качестве альтернативного способа решения данной задачи предлагается использовать методы, заимствованные из теории коллективного выбора.

Основной задачей теории коллективного выбора является нахождение способов определения альтернатив, которые будут или должны быть выбраны данным коллективом из числа имеющихся в наличии вариантов на основании мнения о них индивидуальных участников процесса принятия коллективных решений. К данной задаче также примыкает задача полного упорядочения альтернатив по степени их предпочтительности для коллектива, то есть построение их группового рейтинга. Мнение или предпочтения индивида моделируются рейтингом альтернатив. Таким образом, теория коллективного выбора решает задачу построения одного (коллективного) рейтинга на основании нескольких (индивидуальных) рейтингов. Поэтому методы теории коллективного выбора можно применять для решения схожих по своей сути и форме многокритериальных задач, одной из которых является рассматриваемая в настоящей работе задача единой оценки уровня развития демократии в странах мира на основании пяти различных оценок.

Соответственно, в данной многокритериальной задаче страны будут формальными альтернативами, а их оценки по определенному индексу демократии – мнением (фиктивного) индивида, участника процесса принятия коллективного решения.

Определения используемых в настоящей работе математических понятий и их обозначения взяты из [249].

Допустим, нам дано множество доступных для выбора альтернатив  $A$ ,  $|A|=m$ ,  $m \geq 3$ , и группа  $N$ ,  $|N|=n$ ,  $n \geq 2$ , лиц, участвующих в процессе принятия коллективного решения, которое сводится к выбору определенных альтернатив из  $A$ . Мнение каждого отдельного участника  $i$ ,  $i \in N$ , об альтернативах из  $A$ , определяющее его индивидуальный выбор, описывается бинарным отношением  $P_i$  на  $A$ ,  $P_i \subseteq A \times A$ , фиксирующим результаты попарного сравнения альтернатив. Если при сравнении пары

альтернатив  $x$  и  $y$  участник  $i$  выбирает альтернативу  $x$ , то говорят, что упорядоченная пара  $(x, y)$  принадлежит отношению  $P_i$ :  $(x, y) \in P_i$ , или, что альтернатива  $x$  доминирует альтернативу  $y$  по отношению  $P_i$ :  $x P_i y$ . Если выбирающий не может решить, какая из двух альтернатив предпочтительнее, или считает их равноценными, то будем полагать, что он не предпочитает ни одну из них другой, то есть что имеет место  $(x, y) \notin P_i \ \& \ (y, x) \notin P_i$ .

Если известны предпочтения того, кто делает выбор (бинарное отношение на  $A$ ) и если задана функция выбора, то можно предсказать, какие альтернативы станут результатом выбора. Таким образом, располагая информацией об индивидуальных предпочтениях, задачу коллективного выбора можно решить, если, во-первых, определить бинарное отношение  $\mu$ ,  $\mu \subseteq A \times A$ , моделирующее коллективные предпочтения (мнение коллектива об альтернативах из  $A$ ), а во-вторых – задать правило выбора  $S(\mu, A): \{\mu\} \rightarrow 2^A \setminus \emptyset$ , называемое также решением.

Бинарное отношение  $\mu$  (именуемое мажоритарным) строится из отношений предпочтений индивидуальных участников принятия решения с помощью правила большинства:  $x$  доминирует  $y$  по отношению  $\mu$  (то есть  $x$  лучше  $y$  по мнению данного коллектива), если число участников, предпочитающих альтернативу  $x$  альтернативе  $y$ , больше числа участников, предпочитающих альтернативу  $y$  альтернативе  $x$ ,  $x \mu y \Leftrightarrow |B| > |C|$ , где  $B = \{i \in N \mid x P_i y\}$ ,  $C = \{i \in N \mid y P_i x\}$ .

Выбор в качестве метода агрегирования мажоритарного правила определяется тем, что оно удовлетворяет ряду естественных нормативных условий, которые можно предъявить к процессу агрегирования [248],[247]. Также важно, что данная процедура агрегирования не связана с какими-либо арифметическими действиями над значениями критериальных оценок (т.е. индексов), обоснование законности которых, как уже говорилось выше, довольно затруднительно.

По определению отношение  $\mu$  асимметрично,  $(x, y) \in \mu \Rightarrow (y, x) \notin \mu$ . Если имеет место  $(x, y) \notin \mu \ \& \ (y, x) \notin \mu$ , то говорят, что альтернативы  $x$  и  $y$  находятся в отноше-

нии равенства голосов  $\tau$ ,  $\tau \subseteq A \times A$ ,  $(x, y) \in \tau$  &  $(y, x) \in \tau$ . Отношение равенства голосов  $\tau$  симметрично.

Для проведения компьютерных вычислений мажоритарное отношение  $\mu$  представляется через мажоритарную матрицу  $M=[m_{xy}]$ , определяемую так:

$$m_{xy}=1 \Leftrightarrow (x, y) \in \mu, m_{xy}=0 \Leftrightarrow (x, y) \notin \mu.$$

Аналогично мажоритарной матрице  $M$  строится матрица  $T$ , представляющая отношение равенства голосов  $\tau$ .

Для определения правил выбора необходимы также понятия нижнего среза, верхнего среза и горизонта альтернативы  $x$ . Нижним срезом альтернативы  $x$  называется множество  $L(x)$  альтернатив, над которыми  $x$  доминирует,  $L(x)=\{y \mid x\mu y\}$ , верхним срезом – множество  $D(x)$  альтернатив, доминирующих над  $x$ ,  $D(x)=\{y \mid y\mu x\}$ , горизонтом  $x$  –  $H(x)$  множество альтернатив, находящихся с  $x$  в отношении равенства голосов,  $H(x)=\{y \mid y\tau x\}$ .

Одним из наиболее простых способов построения рейтинга альтернатив на основе мажоритарного отношения является правило Коупланда [259]. В основе этого правила лежит следующее соображение: чем больше число альтернатив, которые хуже (при парном сравнении), чем альтернатива  $x$ , тем лучше данная альтернатива в целом. Можно рассуждать и так: альтернатива  $x$  тем лучше в целом, чем меньше число альтернатив, которые лучше альтернативы  $x$ . Наконец, эти два правила можно комбинировать.

С формальной точки зрения, агрегированное ранжирование по Коупланду есть упорядочение альтернатив по числу очков  $s(x)$ , которые присуждаются одним из трех способов:

– версия 1.  $s_1(x)=|L(x)| - |D(x)|$ ;

– версия 2.  $s_2(x)=|L(x)|$ ;

– версия 3.  $s_3(x)=|A| - |D(x)|$ .

Векторы  $s_1$ ,  $s_2$  и  $s_3$  очков, получаемых странами по первой, второй и третьей версии правила Коупланда, вычисляется по формулам  $s_2=(M-M^{tr}) \cdot a$ ,  $s_2=M \cdot a$  и  $s_3=(I-$

$M^{tr} \cdot a$ , соответственно, где  $I$  и  $a$  – это матрица и вектор, все компоненты которых равны 1.

Для построения рейтинга также можно использовать известное решение задачи выбора наилучших альтернатив. Рассмотрим следующую итерационную процедуру. Решение  $S(\mu, A)$  определяет множество  $B_{(1)}$  наилучших альтернатив в  $A$ ,  $B_{(1)}=S(\mu, A)$ . По сравнению со всеми остальными альтернативами варианты из  $B_{(1)}$  – это альтернативы «первого сорта». Если повторить процедуру выбора для множества  $A \setminus B_{(1)}$ , то будет определено множество  $B_{(2)}=S(\mu, A \setminus B_{(1)})=S(\mu, A \setminus S(\mu, A))$ , содержащее альтернативы, которые можно назвать альтернативами «второго сорта» (они хуже альтернатив из  $B_{(1)}$ , но лучше альтернатив из  $A \setminus (B_{(1)} \cup B_{(2)})$ ). Повторяя операцию удаления наилучших альтернатив, определенных на предыдущем этапе, за конечное число шагов мы разделим все множество  $A$  на группы альтернатив разных сортов,  $B_{(k)}=S(\mu, A \setminus (B_{(k-1)} \cup B_{(k-2)} \cup \dots \cup B_{(2)} \cup B_{(1)}))$ , что и будет искомым ранжированием.

В данном исследовании для построения агрегированного рейтинга с помощью вышеописанной процедуры сортировки были выбраны два решения: непокрытое множество и минимальное внешнеустойчивое множество.

Первое из этих решений основано на следующем принципе выбора: усилим условие доминирования, а затем выберем недоминируемые альтернативы. Говорят, что альтернатива  $x$  покрывает альтернативу  $y$ , если  $x$  доминирует и над  $y$ , и над всеми альтернативами, над которыми доминирует  $y$ ,  $x \mu y \ \& \ L(y) \subseteq L(x)$  [266]. Другими словами, для большинства голосующих  $x$  лучше, чем  $y$ , и не существует такой альтернативы  $z$ , которая была бы хуже (для большинства), чем  $y$ ,  $z \mu y$ , и одновременно не хуже чем  $x$ ,  $z \mu x \vee z \tau x$ . Наилучшими являются альтернативы, не покрытые никакими другими альтернативами, их множество называется непокрытым множеством  $UC$ .

Второе решение основано на принципе выбора альтернатив, принадлежащих множеству с каким-либо хорошим свойством. Множество  $ES$  обладает внешней устойчивостью (и, соответственно, называется внешнеустойчивым), если для любой альтернативы  $x$ , не принадлежащей  $ES$ , во множестве  $ES$  найдется альтернатива  $y$ ,

которая лучше (для большинства), чем  $x$ ,  $\forall x \notin ES \exists y: y \in ES \ \& \ u_{yx}$  [267]. Внешнеустойчивое множество называется минимальным, если ни одно из его подмножеств, кроме него самого, не является внешнеустойчивым. Наилучшей считается альтернатива, принадлежащая хотя бы одному минимальному внешнеустойчивому множеству MES, поэтому решением является объединение минимальных внешнеустойчивых множеств, которое также обозначается MES [268], см. также [257].

Непокрытое множество и объединение минимальных внешнеустойчивых множеств могут быть вычислены с помощью матриц  $M$  и  $T$ , введенных ранее. Формулы, выражающие  $UC$  и  $MES$  через  $M$  и  $T$ , приведены в [256], см. также [257].

Определив  $UC$  (или, во втором случае,  $MES$ ) для исходного массива 158 стран, мы приписываем странам, вошедшим в это множество, первое место в новом рейтинге и, как было сказано выше, удаляем эти страны из массива. После этого процедура нахождения  $UC$  (или  $MES$ ) повторяется для нового, усеченного массива стран и т.д. Поскольку при любом мажоритарном отношении  $\mu$  множества  $UC$  и  $MES$  содержат не меньше одного элемента, за конечное число повторений вышеописанной процедуры отбора и исключения массив будет полностью исчерпан, а страны разделены на конечное число рангов.

Наконец, весьма интересно применить одну из версий метода, называемого марковским, поскольку он основан на исследовании марковского процесса случайного блуждания по ориентированному графу, представляющему бинарное отношение  $\mu$ . Первые варианты данного метода были предложены Дэниэлсом [260] и Ушаковым [254], ссылки на другие работы можно найти в статье [258]. Вариант марковского метода используется поисковой системой GOOGLE для ранжирования веб-страниц по их релевантности запросу пользователя.

Чтобы лучше понять смысл этого правила, рассмотрим его на следующем примере. Предположим, что альтернативы из множества  $A$  – это игроки в настольный теннис. У нас есть только один теннисный стол. За стол могут встать только два человека, поэтому о силе игроков мы можем судить лишь на основании информации о парных сравнениях, то есть по результатам отдельных игр.

Наша задача – построение общего рейтинга игроков. Поскольку с помощью одной игры это сделать нельзя, мы устраиваем турнир, состоящий из множества игр. Так как игровой стол только один, то игры должны идти строго одна за другой.

Игроки, которые встанут за стол в данной игре, выбираются следующим способом: тот, кто был объявлен победителем в предыдущей игре, остается стоять за столом, а его противник по жребию выбирается из оставшихся игроков, в число которых входит также и игрок, в предыдущей игре объявленный проигравшим. Вероятность быть выбранным по жребию для всех одинакова. Если результатом предыдущей игры была ничья, то титул победителя переходит к игроку, выбранному по жребию, то есть, несмотря на возможность ничьи, в каждой отдельной игре есть победитель и проигравший. Очевидно, что относительную силу игрока можно измерять, подсчитывая число игр, в которых он был объявлен победителем.

Для того, чтобы начать турнир, одного из игроков нужно назначить победителем в фиктивной «нулевой» игре. Однако, чем дольше будет идти турнир (чем больше в нем будет игр), тем меньше будет зависеть относительное число побед каждого участника от того, кого и как мы выбираем на роль «победителя в предыдущей игре» для самой первой игры. В пределе при стремлении числа игр в турнире к бесконечности относительное число побед никак не зависит от выбора победителя в нулевой игре.

Вместо предела относительного числа побед можно вычислять предел вероятности стать победителем в последней игре турнира, поскольку данные величины равны. Эта вероятность вычисляется с помощью матриц  $M$  и  $T$ .

Допустим, по итогам предшествующих встреч мы знаем относительную силу игроков в каждой паре, и эта сила описывается бинарными отношениями  $\mu$  и  $\tau$ , являясь неизменной во времени величиной. Таким образом, если мы знаем, что имена игроков, которые собираются начать новую игру, –  $x$  и  $y$ , то, зная  $\mu$ , мы со можем абсолютно точно предсказать результат встречи: победу  $x$  (если  $x\mu y$ ), победу  $y$  (если  $y\mu x$ ) и ничью (если  $x\tau y$ ).

Пусть  $\mathbf{p}^{(k)}$  – это вектор,  $i$ -ая компонента которого  $p_i^{(k)}$  есть вероятность  $i$ -того игрока получить титул победителя в  $k$ -ой игре. Возможны два взаимоисключающих случая. Если  $i$ -ый игрок был объявлен победителем в  $(k-1)$ -ой игре, то он станет победителем в  $k$ -ой игре, если по жребию будет выбран противник, которого  $i$ -ый игрок побеждает, то есть альтернатива из нижнего среза альтернативы  $i$ . Вероятность того, что  $i$  станет победителем в  $(k-1)$ -ой игре равна  $p_i^{(k-1)}$ , вероятность выбора альтернативы из  $L(i)$  равна  $\frac{s_2(i)}{m-1}$ , где  $s_2(i)$  – это число очков по второй версии правила Коупланда,  $s_2(x)=|L(x)|$ . Таким образом, вероятность данного исхода равна  $p_i^{(k-1)} \frac{s_2(i)}{m-1}$ .

Второй случай –  $i$ -ый игрок не был объявлен победителем в  $(k-1)$ -ой игре. Он станет победителем в  $k$ -ой игре, если  $i$  будет по жребию выбран противником победителя  $(k-1)$ -ой игры, вероятность чего равна  $\frac{1}{m-1}$ , и если победитель  $(k-1)$ -ой игры принадлежит к верхнему срезу или горизонту альтернативы  $i$ , вероятность чего равна  $\sum_{j=1}^m (m_{ij} + t_{ij}) p_j^{(k-1)}$ . Следовательно, вероятность  $p_i^{(k)}$  определяется равенством

$$p_i^{(k)} = p_i^{(k-1)} \frac{s_2(i)}{m-1} + \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (m_{ij} + t_{ij}) p_j^{(k-1)}. \quad (11.1)$$

Формулу (11.1) удобно записать в матрично-векторной форме

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{p}^{(k-1)} = \frac{1}{m-1} \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{T} + \mathbf{S}) \cdot \mathbf{p}^{(k-1)}.$$

Матрица  $\mathbf{S}=[s_{ij}]$  определяется так:  $s_{ii}=s_2(i)$  и  $s_{ij}=0$  при  $i \neq j$ .

Таким образом, передача титула победителя от игрока к игроку есть марковский процесс с матрицей перехода  $\mathbf{W}$ .

Нас интересует вектор  $\mathbf{p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{p}^{(k)}$ . Нетрудно доказать, что вне зависимости от того каковы начальные условия (т.е. чему равен вектор  $\mathbf{p}^{(0)}$ ), искомый предел будет собственным вектором матрицы  $\mathbf{W}$ , соответствующим собственному значению  $\lambda=1$ . Соответственно, найти  $\mathbf{p}$  можно, решив систему линейных уравнений  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}$ . Иско-



мое ранжирование есть упорядочение альтернатив по убыванию значений компонент  $p_i$ .

Агрегированные рейтинги стран мира, построенные на основании парных сравнений стран по пяти индексам демократии с помощью правила Коупланда, правила выбора альтернатив, принадлежащих непокрытому множеству, правила выбора альтернатив, принадлежащих минимальному внешнеустойчивому множеству, и марковского метода ранжирования приведены в Приложении В в Таблице В.1. Список стран упорядочен согласно второй версии правила Коупланда.

Для того чтобы оценить преимущества работы с агрегированными рейтингами, необходимо провести сравнительный корреляционный анализ для агрегированных и исходных рейтингов. Использование агрегированного рейтинга будет иметь смысл, если он представляет такой способ ранжирования, который согласуется с исходными рейтингами лучше, чем они согласуются друг с другом. Оценка согласованности будет осуществляться при помощи подсчета тех же показателей, что использовались ранее. Результаты вычислений показателей  $R_{strict}$ ,  $R_{weak}$  и  $\tau_b$  приведены в Таблицах 11.4-11.6. Значения  $R_{strict}$  и  $R_{weak}$  для пар округлены до целых чисел, значение их средних – до десятых. Значения  $\tau_b$  для пар округлены до двух значащих цифр после запятой, значение его средних – до трех.

Таблица 11.4 – Доля строго согласующихся пар  $R_{strict}$  (%)

	Коупланд (1)	Коупланд (2)	Коупланд (3)	UC	MES	Марков
Индекс демократии журнала Economist	93	93	93	91	89	92
Индекс проекта Polity IV	85	85	85	84	84	85
Индекс Ванханена	87	87	86	86	85	87
Индекс свободы слова и ответственности властей (WGI-VA)	93	93	93	91	89	93
Индекс институциональных основ демократии	90	90	90	89	88	90
правило Коупланда (1)		99	99	96	95	98
правило Коупланда (2)	99		99	96	94	97
правило Коупланда (3)	99	99		96	95	98
Сортировка с помощью UC	96	96	96		95	96
Сортировка с помощью MES	95	94	95	95		94
Марковское ранжирование	98	97	98	96	94	
Среднее значение для пар, содержащих данный агрегированный	89,4	89,4	89,4	88,1	87,0	89,3

рейтинг и один из пяти исходных рейтингов						
---	--	--	--	--	--	--

Таблица 11.5 – Доля нестрого согласующихся пар  $R_{weak}$  (%)

	Коупланд (1)	Коупланд (2)	Коупланд (3)	UC	MES	Марков
Индекс демократии журнала Economist	93	93	93	94	94	92
Индекс проекта Polity IV	94	94	94	95	96	94
Индекс Ванханена	88	88	88	90	90	88
Индекс свободы слова и ответственности властей (WGI-VA)	93	93	93	94	94	93
Индекс институциональных основ демократии	91	91	91	92	93	90
правило Коупланда (1)		100	100	99	99	98
правило Коупланда (2)	100		99	99	99	98
правило Коупланда (3)	100	99		99	99	98
Сортировка с помощью UC	99	99	99		99	98
Сортировка с помощью MES	99	99	99	99		99
Марковское ранжирование	98	98	98	98	99	
Среднее значение для пар, содержащих данный агрегированный рейтинг и один из пяти исходных рейтингов	91,8	91,9	91,9	92,8	93,4	91,4

Таблица 11.6 – Коэффициент Кендалла  $\tau_b$

	Коупланд (1)	Коупланд (2)	Коупланд (3)	UC	MES	Марков
Индекс демократии журнала Economist	0,86	0,86	0,86	0,87	0,85	0,85
Индекс проекта Polity IV	0,83	0,83	0,83	0,83	0,85	0,83
Индекс Ванханена	0,75	0,75	0,75	0,77	0,77	0,75
Индекс свободы слова и ответственности властей (WGI-VA)	0,86	0,86	0,86	0,86	0,86	0,85
Индекс институциональных основ демократии	0,81	0,81	0,81	0,81	0,82	0,80
правило Коупланда (1)		0,99	0,99	0,97	0,96	0,96
правило Коупланда (2)	0,99		0,98	0,97	0,96	0,96
правило Коупланда (3)	0,99	0,98		0,97	0,96	0,97
Сортировка с помощью UC	0,97	0,97	0,97		0,97	0,95
Сортировка с помощью MES	0,96	0,96	0,96	0,97		0,95
Марковское ранжирование	0,96	0,96	0,97	0,95	0,95	
Среднее значение для пар, содержащих данный агрегированный рейтинг и один из пяти исходных рейтингов	0,82 3	0,82 3	0,82 3	0,82 9	0,83 1	0,81 5

Из таблиц видно, что агрегированные рейтинги сильнее коррелируют с исходными рейтингами, нежели исходные между собой: для пар исходных индексов средние величины  $R_{\text{strict}}$ ,  $R_{\text{weak}}$  и  $\tau_b$  находятся в пределах (79,8-84,9), (84,9-89,1), (0,675-0,735), тогда как для пар агрегированный индекс/исходный индекс диапазоны этих величин равны (87,0-89,4), (91,4-93,4) и (0,815-0,831), соответственно. Это говорит о том, что применение ординальных методов агрегирования, связанных с построением мажоритарного отношения, в данной задаче оправдано. С другой стороны, агрегированные рейтинги имеют очень высокую степень корреляции друг с другом: например, значение  $\tau_b$  для пар агрегированный индекс/агрегированный индекс не опускается ниже 0,95. Следовательно, выбор конкретного метода, использующего мажоритарное отношение, остается, в каком-то смысле, произвольным и должен осуществляться на основании дополнительных критериев, например, таких как вычислительная сложность метода, желаемая степень дискриминации альтернатив (т.е. хотим ли мы получить упорядочение с большим числом мелких кластеров, в пределах содержащих лишь одну страну, или мы хотим получить более «крупное» разбиение с небольшим числом ранговых групп, содержащих много стран) и т.п.

Демократия – многомерное понятие. Измерение уровня демократии является задачей, однозначно правильного решения у которого (пока?) не существует. Различные подходы к измерению уровня развития демократии обуславливают существование различных индексов демократии, каждый из которых имеет свое теоретическое обоснование. Хотя рейтинги, основанные на различных индексах, во многом схожи, между ними все-таки имеются существенные противоречия и выбор рейтинга, который стоит использовать как в научной работе, так и для принятия практических решений, является проблемой. Поэтому построение агрегированных рейтингов предстает актуальной задачей, для решения которой можно применять различные подходы. Данная работа демонстрирует возможность использования методов теории коллективного выбора для решения данной задачи. Это совершенно новый подход, который позволяет строить агрегированные рейтинги, соединяющие в себе преимущества исходных.

В качестве исходных данных были взяты пять наиболее популярных в научной среде рейтингов демократии. Нашей целью было получить ответ на вопрос – будут ли агрегированные рейтинги, строящиеся с помощью ординальных методов и моделей теории коллективного выбора, использование которых снимает вопрос об однородности различных измерений уровня демократии, более эффективным инструментом оценки, чем отдельные рейтинги? Под эффективностью рейтинга как инструмента оценки понималась степень его согласованности с остальными рейтингами – эффективный рейтинг должен минимизировать число противоречивых оценок.

Корреляционный анализ показал, что новые рейтинги имеют более высокие коэффициенты корреляции с исходными, то есть переход от исходных рейтингов к агрегированным является выигрышным.

Некоторые из полученных рейтингов (версии правила Коупланда, марковское ранжирование) характеризуются высокой степенью дискриминации, т.е. доля пар журналов, имеющих одинаковый ранг в очень мала (в пределах 1%). Другие рейтинги (сортировка с помощью UC и MES) наоборот, представляют собой объединение журналов в крупные группы (47 и 30 рангов, соответственно), то есть «грубое» ранжирование, которое также может быть ценным. Возможность построения «грубых» рейтингов можно считать еще одним преимуществом предлагаемого подхода.

В данном исследовании были использованы далеко не все методы ранжирования, основанные на построении мажоритарного отношения. Существуют и другие способы построения коллективного ранжирования помимо правила Коупленда и марковского метода, а также другие решения в задаче наилучшего коллективного выбора, кроме выбора с помощью минимального внешнеустойчивого множества и непокрытого множества. Поэтому следующим шагом в направлении, указанном данным исследованием было бы расширение, как спектра используемых методов агрегирования, так и эмпирического материала.

## 11.2 Построение классификации стран по степени их конкурентоспособности с помощью методов теории коллективного выбора

В общем случае национальная конкурентоспособность понимается как высота темпа экономического роста в стране, стабильная в долгосрочном периоде времени. Поэтому для объективной оценки конкурентоспособности требуется учесть большое количество факторов, способных влиять на экономическое развитие государства. Целью построения индекса конкурентоспособности стран является объединение ряда показателей в некоторую суммарную оценку, всесторонне учитывающую различные аспекты конкурентоспособности.

Одним из наиболее известных индексов конкурентоспособности государств является индекс мировой конкурентоспособности (Global Competitiveness Index, GCI), публикуемый Всемирным экономическим форумом (ВЭФ). При его расчете на основании 12 основных показателей, вычисляемых для рассматриваемых стран, как конечный результат строится их средневзвешенная оценка.

В данном исследовании на основании данных Всемирного экономического форума страны были разделены на пять группы по степени их экономического развития с помощью

Начиная с 2005 года, от имени Всемирного экономического форума ежегодно публикуется расчет значений индекса мировой конкурентоспособности, отражающего микроэкономический и макроэкономический аспекты конкурентоспособности государств. Конкурентоспособность определяется экспертами форума, рассчитываемыми индекс, как совокупность институтов, политики и прочих факторов, которые определяют уровень продуктивности страны. Подробное описание методики составления индекса см. в Отчете ВЭФ (WEF, 2012), ниже дается общий очерк алгоритма его построения.

Значение индекса вычисляется как взвешенное среднее 12 показателей, принимающих целочисленные значения от 1 до 7, и отражающих различные аспекты конкурентоспособности:

- 1) институты (правовая и административная база, на которой строятся взаимоотношения между правительством, организациями и частными лицами);

- 2) инфраструктура;
- 3) макроэкономическая обстановка;
- 4) здравоохранение и начальное образование;
- 5) высшее и дополнительное образование;
- 6) эффективность рынка благ;
- 7) эффективность рынка труда;
- 8) развитость финансового сектора;
- 9) технологическая готовность (склонность организаций к применению современных технологий для повышения эффективности);
- 10) размер реального сектора экономики;
- 11) уровень ведения бизнеса (качество взаимодействия предприятий друг с другом и эффективность процессов внутри них);
- 12) инновационное развитие.

Каждый из приведенных показателей имеет сложную внутреннюю структуру, согласно которой он рассчитывается, поэтому, имея в виду цели настоящего исследования, их значения будем брать заранее вычисленными из Отчета ВЭФ (WEF, 2012).

Несмотря на то, что все характеристики стран, описываемые 12 показателями, важны для определения конкурентоспособности, их относительный вклад в конкурентоспособность зависит от этапа развития, на котором находится конкретное государство. В GCI это отражается в разбиении стран на категории по уровню ВВП на душу населения и доле минерального сырья в общем экспорте благ:

- экономики, зависимые от ресурсов;
- экономики, зависимые от эффективности;
- экономики, зависимые от инноваций;
- переходные экономики из стадии 1 в стадию 2;
- переходные экономики из стадии 2 в стадию 3.

Для каждой из этих групп устанавливаются свои веса, с которыми показатели войдут в итоговую оценку. Поэтому схожие показатели группируются с некоторыми постоянными весами в три подындкса:

- базовые требования (показатели 1-4);
- эффективность (показатели 5-10);
- инновации и развитие (11 и 12 показатель).

Распределение весов, с которыми три подындкса входят в итоговый индекс, приведено в Таблице 11.7.

Таблица 11.7 – Веса подындксов для расчета GCI

	Стадия 1	Переход из 1 в 2	Стадия 2	Переход из 2 в 3	Стадия 3
ВВП на душу населения	<2 000	2 000-2 999	3 000-8 999	9 000-17 000	>17 000
Вес для 1 подындкса	60%	40-60%	40%	20-40%	20%
Вес для 2 подындкса	35%	35-50%	50%	50%	50%
Вес для 3 подындкса	5%	5-10%	10%	10-30%	30%

Как было сказано выше, в Глобальном отчете о конкурентоспособности стран ВЭФ (WEF, 2012) кроме непосредственной оценки конкурентоспособности государств дается методика разделения стран на группы по этапам их экономического развития. Утверждается, что показатели, от которых зависит конкурентоспособность страны, влияют на нее в разной степени в зависимости от того, на какой стадии находится страна. Поэтому смысл такого деления следует видеть в том, что страны делятся по «разновидностям» конкурентоспособности. В Глобальном отчете о конкурентоспособности стран ВЭФ (WEF, 2012) четко заданы 12 показателей, которые экспертами ВЭФ считаются достаточными для оценки конкурентоспособности стран. В этом смысле является недостатком тот факт, что страны делятся на группы по значениям сторонних показателей (ВВП на душу населения и процент минеральных ресурсов в общем экспорте).

Поэтому в данном исследовании был разработан метод, который позволяет объективно разделять страны на группы по схожести 12 показателей, используемых

при оценке стран, тем самым разделяя их на группы по типам конкурентоспособности.

На основе 12 показателей построим рейтинги, каждый из которых ранжирует страны по убыванию значения своего показателя. Каждую страну тогда можно описать вектором из 12 ранговых величин, показывающих, какое место страна занимает в каждом из 12 рейтингов. Тогда задача классификации стран переходит в задачу группировки  $m$  альтернатив в  $n$ -мерном ранговом пространстве.

Чтобы обеспечить наглядность разделения, и в то же время не огрублять значительно его результат, мы решили разбивать альтернативы на  $k=5$  групп. Такое разбиение может быть представлено как пятибалльная шкала с двумя полюсами, наподобие шкал «хорошо-плохо» в социологических опросах.

Одним из наиболее популярных методов автоматической классификации альтернатив является метод  $k$ -means. Данная работа основывается на его дискретной версии, предложенной в [262]. В общем виде метод заключается в том, чтобы каждый из  $n$  векторов определить в один из  $k$  кластеров так, чтобы расстояние от вектора до центроида этого кластера было минимальным.

Для описания алгоритма требуется ввести следующие определения. В ранговом пространстве Евклидова дистанция не является осмысленной оценкой расстояния между альтернативами, поэтому введем следующую функцию расстояния между двумя векторами:  $dist(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$ . Оно равно сумме разниц между значениями мест альтернатив по каждому из рангов.

Векторы, соответствующие альтернативам из  $A$ , обозначим как  $a_1, \dots, a_m$ . Так как мы имеем дело с ранговым пространством размерности  $n$ , то  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \Rightarrow |a_{ij}| = n, 1 \leq a_{ij} \leq m$ . Обозначим как  $c_1, \dots, c_k$  центроиды, то есть векторы, вокруг которых будут образовываться искомые  $k$  кластеров. Как и векторы  $a_1, \dots, a_m$ , они состоят из  $n$  компонент, но в отличие от них компоненты способны принимать дробные значения. Вектор  $u$  показывает, какому кластеру принадлежит каждая альтернатива:  $1 \leq i \leq m \Rightarrow 1 \leq u_i \leq k$ .



Перед запуском самого алгоритма k-means требуется произвести подготовительный этап – каким-то способом выбрать центроиды, вокруг которых в дальнейшем будут формироваться кластеры. Их можно выбрать произвольным образом – как  $k$  векторов  $c_i \in \mathbb{R}^k$ . Такой выбор плох тем, что велика вероятность полной потери вершин одним или несколькими кластерами. В связи с этим лучший способ – выбрать центроиды из множества  $\{a_1, \dots, a_m\}$ . Опытным путем установлено, что результат кластеризации сильно зависит от выбора начальных центроидов, поэтому выбор случайным образом здесь также неприемлем. В качестве центроидов решено выбрать  $k$  векторов из множества  $\{a_1, \dots, a_m\}$ , которые были бы наиболее удалены друг от друга. Они должны удовлетворять условию максимина:

$$\max_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq n} \left( \min_{1 \leq i < j \leq k} \text{dist}(\mathbf{a}_{n_i}, \mathbf{a}_{n_j}) \right),$$

где  $n_1, \dots, n_k$  – порядковые номера выбранных векторов. То есть из  $\{a_1, \dots, a_m\}$  выбирается набор  $\{c_1, \dots, c_k\}$ , у которого наименьшее расстояние между включенными в него векторами не меньше, чем у любого другого набора  $\{c_1', \dots, c_k'\}$ . Данная задача решается перебором  $C_{139}^5$  различных комбинаций, что может быть вычислительно трудно. Для сокращения перебора можно запоминать наименьшее расстояние  $x$  между  $c_1, \dots, c_k$ , оказавшееся наибольшим при переборе всех предыдущих вариантов, и затем не учитывать все варианты, в которых расстояние между какими-то двумя векторами меньше или равно  $x$ .

После определения начальных центроидов можно выполнить саму кластеризацию. Алгоритм состоит из двух шагов:

1) отнесение каждой вершины к кластеру, к центроиду которого она расположена ближе всего:

$$u_i = \arg \min_{1 \leq j \leq k} \text{dist}(\mathbf{a}_i, \mathbf{c}_j), \quad 1 \leq i \leq m;$$

2) вычисление центроидов как центров масс соответствующих им кластеров; каждая компонента центроида определяется как среднее от соответствующих компонент входящих в кластер векторов:

$$c_i = \frac{1}{|S_i|} \sum_{v \in S_i} v, S_i = \{a_k : u_k = i\}, 1 \leq i \leq k.$$

Данные шаги повторяются в цикле, пока  $u^{(t)} \neq u^{(t-1)}$ . При невыполнении условия алгоритм останавливается, так как он будет воспроизводить один и тот же результат.

Результат кластеризации приведен в Таблице 11.8.

Таблица 11.8 – Разбиение стран на кластеры (классификационные группы)

Кластер 1	Кластер 2	Кластер 3	Кластер 4	Кластер 5
Алжир	Албания	Аргентина	Барбадос	Австралия
Ангола	Ботсвана	Азербайджан	Бруней	Австрия
Армения	Гайана	Болгария	Венгрия	Бахрейн
Бангладеш	Гамбия	Бразилия	Индонезия	Бельгия
Бенин	Гана	Вьетнам	Иордания	Великобритания
Боливия	Гондурас	Гватемала	Испания	Германия
Босния и Герцеговина	Грузия	Греция	Китай	Гонконг
Буркина-Фасо	Замбия	Египет	Коста-Рика	Дания
Бурунди	Камбоджа	Индия	Кувейт	Израиль
Венесуэла	Кения	Иран	Литва	Ирландия
Доминиканская Республика	Малави	Италия	Маврикий	Исландия
Зимбабве	Намибия	Казахстан	Мальта	Канада
Кабо-Верде	Нигерия	Колумбия	Оман	Катар
Камерун	Пакистан	Латвия	Панама	Кипр
Кот-д'Ивуар	Руанда	Ливан	Польша	Люксембург
Кыргызстан	Сенегал	Македония	Португалия	Малайзия
Лесото	Танзания	Марокко	Пуэрто-Рико	Нидерланды
Ливия	Ямайка	Мексика	Словакия	Новая Зеландия
Мавритания		Перу	Словения	Норвегия
Мадагаскар		Эль-Сальвадор	Таиланд	ОАЭ
Мали		Россия	Тунис	Республика Корея
Мозамбик		Румыния	Уругвай	Саудовская Аравия
Молдова		Тринидад и Тобаго	Черногория	Сингапур
Монголия		Турция	Чешская республика	США
Непал		Украина	Чили	Тайвань
Никарагуа		Филиппины	Шри Ланка	Финляндия
Парагвай		Хорватия	ЮАР	Франция
Свазиленд				Швейцария
Сербия				Швеция
Сирия				Эстония
Таджикистан				Япония
Тимор-Лесте				
Уганда				
Чад				
Эквадор				
Эфиопия				

Следующим шагом в направлении, указанном данным исследованием будет расширение, как спектра используемых методов кластеризации, так и эмпирического материала.

11.3 Разработка обучающего программного обеспечения, решающего задачи оптимального выбора и ранжирования альтернатив (электронное приложение к учебнику и задачнику [251])

Помимо разработки математических алгоритмов и методов их взаимодействия, при визуализации должны учитываться психологические особенности обучения и восприятия, разрабатываться интуитивно понятный интерфейс. Для отображения мажоритарного графа и графа бинарных отношений были разработаны следующие программные модули.

1. Программные модуль к главе 2 «Обобщенные паросочетания, или паросочетания при линейных предпочтениях участников»:

- устойчивые паросочетания;
- условие Холла;

2. Программные модули к главе 3 «Бинарные отношения, полезность и функции выбора»:

- бинарные отношения и их свойства (антирефлексивность, асимметричность, полнота, связность, отрицательная транзитивность (условие Чипмана), рефлексивность, симметричность, транзитивность);
- отношение толерантности;
- отношение эквивалентности;
- нестрогий частичный порядок;
- строгий частичный порядок;
- нестрогий линейный порядок;
- строгий линейный порядок;
- ацикличность;

- транзитивное замыкание;
- отношение несравнимости;
- объединение, пересечение, произведение бинарных отношений;
- матрица смежности графа;
- выбор по отношению предпочтения;
- многокритериальный выбор (два критерия). Отношение Парето.

### 3. Программные модули к главе 4 «Задача голосования»:

- примеры правил голосования (процедура Борда);
- стратегическое поведение участников в задаче голосования.

### 4. Программные модули к главе 5 «Коллективные решения на графе»:

- внутренняя и внешняя устойчивость, ядро;
- нелокальные правила принятия коллективных решений;
- позиционные правила (обратная процедура Борда, процедура Нансона, процедура Хара, процедура Кумбса);
- правила, использующие мажоритарное отношение (правило выбора минимального доминирующего множества, правило выбора минимального недоминируемого множества, правило Фишберна, правило выбора непокрытого множества, правило выбора слабоустойчивого множества);
- правила, использующие вспомогательную числовую шкалу (первое правило Коупланда, второе правило Коупланда, третье правило Коупланда);
- правила, использующие турнирную матрицу (максиминная процедура, минимаксная процедура).

### 5. Программные модули к главе 6 «Системы пропорционального представительства»:

- методы наибольшего остатка (квота Хара, квота Друпа, нормальная имперская квота, усиленная имперская квота);

- методы делителей (правило д’Онта, методы наименьшего делителя, датская система, система Сент-Лаге);
- индексы представительности парламента (максимальное отклонение, индекс Рэ, индекс Лузмора-Хэнби, индекс удельного представительства (Алескерова-Платонова).

На данный момент реализована половина (6 глав) от предполагаемого объема учебника. Для отображения мажоритарного графа и графа бинарных отношений был разработан, и совершенствуется собственный программный модуль, позволяющий совершать широкий набор различных действий с графом. Графическое отображение результатов работы различных алгоритмов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе производится с помощью вышеупомянутого модуля.

При создании графического интерфейса и визуализации алгоритмов, для изучения различных способов визуализации использовались сайты <http://www.stackoverflow.com>, <http://www.codeproject.com>, <http://www.msdn.microsoft.com>.

11.4 Сбор и обработка количественных данных, создание программного обеспечения в целях автоматизации процесса оценки (ранжирования) экономических агентов (вариантов)

Для будущих задач ранжирования был осуществлен сбор и обработка количественных данных по крупным компаниям из девяти категорий Общероссийского классификатора видов экономической деятельности (ОКВЭД). С этой целью были собраны количественные данные по следующим показателям:

- валовая прибыль;
- прибыль до налогообложения;
- рентабельность активов;
- рентабельность капитала;
- чистая прибыль.

Кроме того, были собраны данные для компаний с максимальной выручкой по отраслям:

- высшее профессиональное образование;
- деятельность железнодорожного транспорта;
- производство, передача и распределение электроэнергии, газа, пара и горячей воды;
- розничная торговля;
- розничная торговля, осуществляемая непосредственно при помощи телевидения, радио, телефона и Интернет;
- строительство;
- производство транспортных средств и оборудования;
- производство пищевых продуктов.

В результате этой работы была создана база данных в виде таблиц в формате Microsoft Excel. Источником данных была система СПАРК.

Кроме этого, в рамках данного исследования было разработано программное обеспечение, автоматизирующее процесс рекрутинга. Создана программа на языке C#, формирующая список ссылок на вакансии и резюме в соответствии с заданной пользователем должностью и выбранным сайтом для автоматизации процесса рекрутинга. Программа скачивала html-код каждого сайта, затем с помощью формального языка поиска подстрок и осуществления работы с ними – языка регулярных выражений – проводила поиск участков кода, содержащих ссылки, которые удовлетворяли заданным условиям (т.е. выбранным регионам и профессии). Далее при помощи регулярных выражений найденные ссылки собирались в единый список в виде URL.

В результате сформирован список ссылок на вакансии и резюме в формате .txt для последующего анализа полученных данных, выделения ключевых слов и поиска синонимов в текстовых полях таблицы, анализа числовых полей таблицы, упорядочивания вакансий по введенным требованиям пользователя (могут быть и числовы-

ми и текстовыми) и создания пользовательского интерфейса. Источниками данных были сайты <http://www.hh.ru/>, <http://www.job.ru/>, <http://www.rabota.ru/>, <http://www.msk.estrabota.ru/>, <http://www.delovoymir.biz/>, <http://www.ekat.erabota.ru/>.

### 11.5 Некоторые выводы

Таким образом, результаты исследований, приведенные в этом разделе носят, в большей степени прикладной характер, связанный с применением методов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе. Основными результатами работы в этом направлении стали:

- построение агрегированных ранжирований стран по уровню их демократического развития;
- построение классификации стран по степени их конкурентоспособности с помощью методов теории коллективного выбора;
- разработка обучающего программного обеспечения, решающего задачи оптимального выбора и ранжирования альтернатив (электронное приложение к учебнику и задачнику [251]);
- сбор и обработка количественных данных, создание программного обеспечения в целях автоматизации процесса ранжирования экономических агентов.

Результаты исследований этого раздела отражены в работах [257], [253], [250]:

1. Aleskerov F., Subochev A. Modeling optimal social choice: matrix-vector representation of various solution concepts based on majority rule// *Journal of Global Optimization*, 2012. DOI 10.1007/s10898-012-9907-2.
2. Субочев А.Н. Измеряя демократию: агрегирование противоречивых рейтингов государств мира методами теории коллективного выбора// Препринт, 2013 (подготовлен к печати).
3. Алескеров Ф.Т., Захлебин И.В., Субочев А.Н. Построение альтернативных версий рейтинга экономической конкурентоспособности стран методами теории коллективного выбора// Препринт, 2013 (готовится к печати).

## 12 АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АБИТУРИЕНТОВ ПО ВУЗАМ

В этом разделе представлены результаты исследований по моделированию распределения абитуриентов по вузам. В данном исследовании рассматривается задача поиска равновесия на двустороннем рынке в случае, когда заданы лишь ординальные предпочтения агентов и невозможно осуществление денежных трансфертов. К таким рынкам относятся рынок свадеб, приемная кампания по поступлению в университеты и др. Впервые рынки такого типа были рассмотрены в работе лауреатов Нобелевской премии по экономике 2012 г. Гейла и Шепли [278]. Они рассмотрели рынки с распределением один-к-одному и один-ко-многим, где предпочтения агентов были заданы линейными порядками. В данном исследовании мы рассматриваем модификацию классической модели Гейла и Шепли: предпочтения университетов на множестве абитуриентов заданы простейшими полупорядками. При этих предположениях доказано существование устойчивого паросочетания и, более того, существование для любого устойчивого паросочетания линейного расширения профиля предпочтений университетов, не нарушающего устойчивости. Основным результатом является расширением теоремы Эрдила-Эрджина о Стабильных Улучшающих Циклах. Эта теорема предоставляет критерий проверки эффективности устойчивого паросочетания. Полученные результаты имеют и важное прикладное значение, поскольку позволяют организовать эффективную процедуру построения паросочетания (например, в рамках приемной кампании) в более широком, чем ранее, классе ситуаций. В первом подразделе мы приводим классическую модель Гейла-Шепли и обзор литературы. Во втором подразделе мы приводим новую модель и основные результаты.

### 12.1 Обзор классических исследований

Рассматривается следующая модель. Пусть  $A$  – множество абитуриентов,  $B$  – множество университетов. Каждый абитуриент может быть зачислен не более, чем в один университет, а каждый университет  $b \in B$  имеет  $q_b$  мест. Предпочтения абитуриентов и университетов устроены следующим образом:



- предпочтения абитуриентов на множестве университетов и возможности остаться без вуза ( $B \cup a$ ) являются линейными порядками, т.е. ациклическими (не существует такого набора  $x_1, \dots, x_n$ , что  $x_1 P x_2 P \dots P x_n P x_1$ ), связными ( $\forall x, y : x \neq y \rightarrow x P y$  или  $y P x$ ) и транзитивными (если  $x P y P z$ , то  $x P z$ ) бинарными отношениями;
- предпочтения университетов на множестве  $A \cup b$  являются линейными порядками;
- предпочтения университетов на множестве всех подмножеств удовлетворяют следующему требованию:  $\forall b \in B, \forall A' \subset A, \forall a_1, a_2 \in A \setminus A'$  такие что  $a_1 \succ_b a_2$  верно, что  $A' \cup \{a_1\} \succ_b A' \cup \{a_2\}$ .

Теперь необходимо распределить абитуриентов для обучения в вузах. Получающееся распределение абитуриентов по вузам мы будем называть паросочетанием. Паросочетание – это отображение  $\mu$  из  $A \cup B$  на множество подмножеств  $A \cup B$  такое, что:

- 1) если  $\mu(a) = b$ , то  $\mu(b) = a$  и наоборот;
- 2)  $\forall a \in A \mu(a) = b$  ( $b \in B$ ) или  $\mu(a) = \{a\}$  (когда абитуриент не зачислен никуда);
- 3)  $\forall b \in B \mu(b) \subseteq A$  или  $\mu(b) = \{b\}$  (в университете не обучается студентов);
- 4)  $\forall b \in B |\mu(b)| \leq q_b$ .

Это определение было впервые предложено в [278]. Поскольку и университеты, и абитуриенты имеют предпочтения и являются независимыми агентами, возникает следующий вопрос: существует ли распределение, которое будет устойчивым к отказам или уклонениям отдельных вузов и абитуриентов? Гейл и Шепли предложили следующее определение устойчивого паросочетания. Паросочетание  $\mu$  будет устойчивым, если оно является:

– индивидуально рациональным для абитуриентов

$\forall a \in A$  таких, что  $\mu(a) \neq \{a\}$  верно, что  $\mu(a) \succ_a \{a\}$ , то есть ни один абитуриент не зачислен в неприемлемый для себя вуз;

– индивидуально рациональным для университетов

$\forall b \in B$  таких, что  $\mu(b) \neq \{b\}$  верно, что  $\forall a \in \mu(b) \{a\} \succ_b \{b\}$ , то есть ни один университет не будет обучать неприемлемого студента;

– эффективность "по пустым местам"

не существует  $a \in A$  и  $b \in B$  таких, что  $\{b\} \succ_a \mu(a)$ ,  $\{a\} \succ_b \{b\}$  и  $|\mu(b)| < q_b$ , т.е. не существует такой пары (абитуриента и университета), что абитуриент предпочел бы учиться в этом университете, а в университете есть свободное место и он готов принять абитуриента;

– попарная устойчивость

не существует  $a \in A$  и  $b \in B$  таких, что (одновременно)  $b \succ_a \mu(a)$  и  $\exists a' \in \mu(b): a \succ_b a'$ , т.е. не существует такой пары, что абитуриент предпочитает университет тому, куда он зачислен, а этот университет предпочитает абитуриента одному из уже зачисленных.

Гейл и Шепли доказали, что множество устойчивых паросочетаний всегда непусто. Более того, они предложили конструктивное доказательство этого утверждения в форме механизма, позволяющего построить устойчивое паросочетание для заданного профиля предпочтений абитуриентов и вузов. Было показано, что в классическом случае все паросочетания являются Парето-оптимальными (с точки зрения общих предпочтений абитуриентов и университетов). Если же рассматривать только мнение абитуриентов, то существует единственное наилучшее для всех абитуриентов устойчивое паросочетание.

Алгоритм, позволяющий найти устойчивое паросочетание, называется алгоритмом отложенного принятия, и имеет две версии (в зависимости от того, какая сторона имеет преимущество при его реализации). Приведем здесь краткое описание механизма отложенного принятия с предлагающими абитуриентами. На первом шаге каждый абитуриент подает заявление в наиболее предпочтительный для себя университет. Если число заявлений, полученных университетом, не превышает числа мест, то университет временно зачисляет всех подавших заявления. Если же число заявлений превышает число мест, то вуз временно зачисляет только  $q$  лучших абитуриентов, и отказывает остальным. На следующем

шаге каждый абитуриент, получивший отказ, подает заявление в следующий по предпочтительности университет. Если на втором шаге общее число заявлений (временно принятых на первом шаге и вновь поступивших) превышает квоту, то вуз вновь оставляет только  $q$  лучших и отказывает остальным. Таким образом, абитуриент, временно принятый в университет, может позднее потерять свое место. Этот шаг повторяется до тех пор, пока каждый абитуриент не будет зачислен в университет, либо отвергнут всеми приемлемыми университетами. Последнее временное распределение и является искомым устойчивым паросочетанием.

Работа Гейла и Шепли породила целое направление в экономической литературе, посвященное обобщенным паросочетаниям. Мы рассмотрим работы, посвященные ослаблению предположений о структуре предпочтений агентов.

При практической реализации механизма отложенного принятия для распределения учеников по школам в городах США [276] возникла следующая проблема: школы не имеют права проводить вступительных испытаний и при формулировании предпочтений руководствуются лишь социальными характеристиками будущих учеников. Несколько учеников могут иметь одинаковые социальные характеристики (например, место проживания), тогда с точки зрения школы такие будущие ученики несравнимы. В этом случае предпочтения школы на множестве учеников представляют собой слабый порядок, то есть ацикличное и транзитивное бинарное отношение. Абдулкадироглу и Сонмез предложили следующую процедуру: сначала все несравнимости в предпочтениях школ случайным образом устраняются (предпочтения школ из слабых порядков превращаются в линейные); затем на получившемся профиле предпочтений учеников и школ реализуется механизм отложенного принятия. Полученное таким образом паросочетание является устойчивым в исходной постановке проблемы.

Однако [277] показали, что паросочетание, получаемое в результате описанной выше процедуры, не всегда является эффективным с точки зрения абитуриентов (в отличие от ситуации, когда предпочтения университетов – линейные порядки). Эрдил и Эрджин предложили критерий проверки эффективности устойчивого паросочетания, а также итерационный механизм, позволяющий получить

эффективное для абитуриентов устойчивое паросочетание на основе случайно построенного в результате применения описанной выше процедуры. Их результат основан на понятии Стабильного Улучшающего Цикла, формальное определение которого будет дано позднее.

В данном исследовании мы рассматриваем модель распределения абитуриентов по вузам, в которой, как и в предыдущих работах, предпочтения абитуриентов заданы линейными порядками, в то время как предпочтения вузов заданы простейшими полупорядками [275]. Этот класс бинарных отношений является обобщением линейных порядков и разрешает лишь особую структуру безразличий в предпочтениях. А именно, если абитуриент  $a$  предпочтительнее абитуриента  $c$ , то абитуриент  $b$  может быть одновременно несравним и с  $a$ , и с  $c$ , однако разрешен только один такой 'промежуточный' абитуриент.

Дадим формальное определение простейшего полупорядка. Сначала дадим определение полупорядка [279]. Бинарное отношение  $P$  является полупорядком на  $D$  если оно:

- ациклично;
- полутранзитивно  $\forall x, y, z, w \in D$   $xPy, yPz$  верно, что  $xPw$  or  $wPz$ .

Пусть  $I(P)$  – отношение безразличия для  $P$ , т.е.  $\{xIy \Leftrightarrow x\bar{P}y \text{ и } y\bar{P}x\}$ . Также введем обозначения для множеств доминируемых и доминирующих альтернатив  $xP = \{y|xPy\}$  и  $Px = \{y|yPx\}$ .

Полупорядок  $P$  является простейшим полупорядком [275], если он удовлетворяет следующим требованиям:

- слабая отрицательная транзитивность:  $\forall x, y \in D$   $xPy$  существует не более одного  $z$  такого, что  $xI(P)z$  и  $yI(P)z$  выполняются одновременно;
- слабое многообразие контуров:  $\forall x, y$  либо  $Px \neq Py$ , либо  $xP \neq yP$ .

Полупорядок, для которого выполнено только условие слабой отрицательной транзитивности, называется простым полупорядком.

Отношения предпочтения, подобные простым и простейшим полупорядкам, оказываются довольно естественными в том случае, когда мы рассматриваем

предпочтения университета на множестве абитуриентов, формируемые на основе баллов, полученных абитуриентами за экзамен. Рассмотрим в качестве примера следующую ситуацию. Три абитуриента,  $a_1, a_2, a_3$ , подали заявления на факультет экономики. Набранные ими баллы составили 65, 63, и 61 балл из 100 соответственно. Предпочтения факультета с учетом набранных абитуриентами баллов могут быть построены исходя из следующих соображений. Во-первых, практика рассматриваемого факультета показывает, что разницу в два балла между результатами абитуриентов следует считать несущественной, поскольку такое небольшое различие может быть связано с везением или быть попросту случайным. По этой причине абитуриентов  $a_1$  и  $a_2$  нельзя однозначно сравнить по уровню подготовки; они будут признаны несравнимыми (равно как  $a_2$  и  $a_3$ ). В то же время разница в три и более набранных балла оказывается, как правило, показателем отличия в уровне подготовке, и вряд ли может быть объяснена случайностью. Таким образом, факультет будет считать абитуриента  $a_1$  более подготовленным, чем абитуриента  $a_3$ . Итак, мы получили отношение предпочтения на множестве абитуриентов, являющееся простейшим полупорядком.

## 12.2 Основные результаты

В дальнейшем мы будем использовать обозначения множеств агентов, а также определения паросочетания и устойчивого паросочетания, введенные ранее для классической модели Гейла-Шепли.

Пусть  $P$  – профиль предпочтений абитуриентов. Для каждого абитуриента  $a \in A$   $P_a$  является линейным порядком на элементах множества  $B \cup \{a\}$ . Пусть  $>$  – профиль предпочтений университетов. Для каждого университета  $b \in B$   $>_b$  является простейшим полупорядком на элементах множества  $A \cup \{b\}$ . Более того, мы предполагаем, что каждое такое бинарное отношение  $>_b$  удовлетворяет требованию "отсутствия безразличия с незачислением", т.е.  $\forall b \in B, \forall a \in A$  либо  $a >_b \emptyset$ , либо  $a <_b \emptyset$ . Таким образом, мы исключаем ситуацию, в которой университету безразлично, зачислен ли абитуриент  $a$ , или место оставлено пустым.

Поскольку наша модель предполагает возможность зачисления в вуз нескольких абитуриентов, необходимо также задать предпочтения университетов на множествах абитуриентов. Мы не определяем эти предпочтения явно, а используем стандартное предположение теории обобщенных паросочетаний: предпочтения на множестве всех подмножеств абитуриентов соответствуют предпочтениям на множестве абитуриентов, т.е.  $\forall b \in B, \forall A' \subseteq A$  таких, что  $|A'| < q_b$ ,  $a_1, a_2 \in A \setminus A'$  если  $a_1 \succ_b a_2$ , то  $A' \cup \{a_1\} \succ_b A' \cup \{a_2\}$ .

### 12.2.1 Существование устойчивого паросочетания

Определение устойчивого паросочетания было введено в предыдущем разделе. Было показано [278], что в случае предпочтений, заданных линейными порядками, устойчивое паросочетание всегда существует.

Легко показать, что устойчивое паросочетание всегда существует и в нашей модифицированной модели.

Теорема 12.1. Если предпочтения абитуриентов заданы линейными порядками, а предпочтения университетов – простейшими полупорядками, то устойчивое паросочетание всегда существует.

Доказательство. Для отношения предпочтения, являющегося простейшим полупорядком, можно построить линейное расширение, т.е. такое отношение предпочтения, являющееся линейным порядком, что все пары, входящие в исходное бинарное отношение, будут сохранены в преобразованном, но новое отношение станет связным. Действительно, пусть  $x \approx_b y, y \approx_b z, x \succ_b z$  – истинные предпочтения вуза  $b$ , тогда линейное расширение  $\succ'_b$  может быть устроено следующим образом:  $x \succ'_b y, y \succ'_b z, x \succ'_b z$ . Паросочетание, которое является устойчивым при линейных расширениях, является устойчивым и при исходных предпочтениях. Действительно, если при линейном расширении не существует блокирующей пары, в которой, в частности, вуз строго предпочитал бы одного из незачисленных абитуриентов уже зачисленному, то такой блокирующей пары тем более не найдется при возврате к исходному профилю предпочтений, включающему

простейшие полупорядки. Алгоритм отложенного принятия позволяет найти устойчивое паросочетание для любого профиля предпочтений, являющихся линейными порядками. Следовательно, устойчивое паросочетание всегда существует. Теорема доказана.

Возникает следующий естественный вопрос: сможем ли мы найти все устойчивые паросочетания, если будем рассматривать различные линейные расширения исходных предпочтений университетов? Отношение  $\succ_b$ , является линейным расширением отношения  $\succ_b$ , если оно является линейным порядком, и  $\forall x, y: x \succ_b y$  верно, что  $x \succ_b y$ . Фактически при построении линейного расширения мы устраняем все несравнимости в исходном отношении. Оказывается, что можно показать следующее.

Теорема 12.2. Для любого устойчивого паросочетания  $\mu$  в модели с предпочтениями, заданными простейшими полупорядками, можно найти состоящий из линейных порядков профиль предпочтений университетов  $\succ'$  (линейное расширение  $\succ$ ), что паросочетание  $\mu$  останется устойчивым.

Доказательство. Рассмотрим паросочетание  $\mu$ , которое устойчиво при исходном профиле предпочтений  $(\succ, P)$ . Построим такое линейное расширение всех предпочтений университетов  $\succ'$ , что при нем паросочетание  $\mu$  останется устойчивым. Заметим, что выбор линейного расширения для одного из университетов никак не ограничивает возможности выбора линейного расширения для других университетов, т.к. при проверке устойчивости паросочетания важны только предпочтения университета и абитуриентов, желающих попасть в этот университет.

Пусть  $a$  зачислен в университет  $b$  в паросочетании  $\mu$ . В силу свойств простейшего полупорядка  $\succ_b$  любой элемент множества может состоять в отношении безразличия  $I(\succ_b)$  не более чем с двумя другими элементами. Таким образом, может существовать не более двух абитуриентов  $x$ , таких, что  $x \approx_b a$ .

В силу устойчивости паросочетания  $\mu$  любой абитуриент  $x$ , несравнимый по предпочтительности для вуза  $b$  с каким-либо из зачисленных абитуриентов и

предпочитающий вуз  $b$  по сравнению с предписанным ему вузом  $\mu(x)$ , должен быть также несравним по предпочтительности с последним из зачисленных в вуз  $b$  абитуриентов. Под последним абитуриентом мы понимаем абитуриента  $a$  с наибольшим множеством  $\succ a$  среди всех абитуриентов  $\mu(b)$ . По этой причине не может существовать более двух абитуриентов  $a'$  и  $a''$ , несравнимых с последним абитуриентом  $a$  и не зачисленных в вуз  $b$ , присутствие которых необходимо учитывать при построении линейного расширения для простейшего полупорядка. Рассмотрим последовательно все возможные случаи взаимного расположения последнего зачисленного абитуриента  $a$  и не зачисленных абитуриентов  $a'$  и  $a''$ . Пусть  $\exists a', a'': bP_{a'}\mu(a'), bP_{a''}\mu(a'')$ ,  $a' \approx_b a \approx_b a''$ ,  $a' \succ_b a''$ . В этом случае отношение предпочтения  $\succ'_b$  может быть построено так, что  $a \succ'_b a' \succ'_b a''$ . Паросочетание  $\mu$  останется стабильным, поскольку в результате перехода к такому линейному расширению не будет образовано блокирующих пар. Теорема доказана.

### 12.2.2 Устойчивые паросочетания: неоптимальность по Парето

Следующее важное свойство устойчивых паросочетаний – Парето-оптимальность. В классической модели, где предпочтения заданы линейными порядками, все паросочетания являются эффективными, а с точки зрения абитуриентов существует единственное наилучшее устойчивое паросочетание. При разработке механизмов на практике интересы абитуриентов, как правило, учитываются в первую очередь. Как следует из доказательства теоремы 12.1, для поиска устойчивого паросочетания можно использовать модифицированную процедуру с устранением несравнимостей, предложенную Абдулкадироглу и Сонмезом. Однако важно понимать, будем ли мы в этом случае получать паросочетание, эффективное с точки зрения абитуриентов.

Рассмотрим следующий простой пример с тремя абитуриентами  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  и тремя университетами  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ , по одному месту в каждом. Предпочтения абитуриентов



$$\begin{aligned} a_1: & b_1 P b_2 P b_3 \\ a_2: & b_2 P b_1 P b_3. \\ a_3: & b_2 P b_3 P b_1 \end{aligned}$$

Предпочтения университетов

$$\begin{aligned} b_1: & a_3 \approx a_2 \quad a_2 \approx a_1 \quad a_3 \succ a_1 \\ b_2: & a_1 \approx a_3 \quad a_3 \approx a_2 \quad a_1 \succ a_2 \\ b_3: & a_1 \approx a_2 \quad a_2 \approx a_3 \quad a_1 \succ a_3 \end{aligned}$$

Найдем устойчивые паросочетания, применив процедуру с предварительным устранением несравнимостей в предпочтениях. Сравним результат работы механизма в случае двух разных расширений  $\succ'$  и  $\succ''$ .

Пусть  $\succ'$  таково, что  $a_1 \succ'_{b_2} a_2 \succ'_{b_2} a_3$ . На первом шаге  $a_1$  подает заявление в  $b_1$ , а абитуриенты  $a_2$  и  $a_3$  – в  $b_2$ . Университет  $b_2$ , получив два заявления на одно место, отклоняет заявление  $a_3$  (в соответствии с расширением предпочтений). Тогда  $a_3$  подает заявление в университет  $b_3$  и на этом работа механизма завершена.

Найдено устойчивое паросочетание  $\mu = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ .

Пусть  $\succ''$  таково, что  $a_1 \succ''_{b_2} a_3 \succ''_{b_2} a_2$ , и  $a_3 \succ''_{b_1} a_2 \succ''_{b_1} a_1$ . На первом шаге  $a_1$  подает заявление в  $b_1$ , а абитуриенты  $a_2$  и  $a_3$  – в  $b_2$ . Университет  $b_2$ , получив два заявления на одно место, отклоняет заявление  $a_2$  (в соответствии с расширением предпочтений). Тогда абитуриент  $a_2$  подает заявление в университет  $b_1$ . Университет  $b_1$ , получив два заявления на одно место, отклоняет заявление  $a_1$  (в соответствии с расширением предпочтений). Теперь  $a_1$  подает заявление в университет  $b_2$ . Университет  $b_2$ , снова имеющий избыток заявлений, отклоняет заявление  $a_3$ . Наконец,  $a_3$  подает заявление в университет  $b_3$  и на этом работа механизма завершается.

Найдено устойчивое паросочетание  $\nu = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$ .

Нетрудно заметить, что с точки зрения абитуриентов паросочетание  $\mu$  лучше, чем  $\nu$ . Действительно, абитуриенту  $a_1$  вуз  $b_1$  нравится больше, чем  $b_2$ , а абитуриенту  $a_2$ , наоборот, вуз  $b_2$  нравится больше, чем  $b_1$ . Третий абитуриент зачислен в один и тот же вуз в обоих паросочетаниях.

Этот простой пример показывает, что даже при использовании процедуры отложенного принятия, ориентированной на абитуриентов, мы можем получать распределения, не являющиеся с точки зрения абитуриентов Парето-эффективными. Наш следующий и основной результат позволяет установить критерий для проверки эффективности для абитуриентов устойчивого паросочетания, а также построить механизм трансформации произвольного устойчивого паросочетания в эффективное для абитуриентов.

### 12.2.3 Стабильные Улучшающие Циклы

Эрджин и Эрдил [277] первыми ввели определение Стабильного Улучшающего Цикла.

Введем дополнительные обозначения. Пусть  $C(b, \mu) = \{a \in A \mid b P_a \mu(a)\}$ . Кроме того, пусть  $D(b, \mu) = \{a \in C \mid \forall a' \in C a \succ_b a'\}$ .

Стабильный Улучшающий Цикл в паросочетании  $\mu$  - это последовательность  $n$  различных абитуриентов  $a_1, \dots, a_n \equiv a_0$  ( $n \geq 2$ ) таких, что  $\mu(a_i) \in B$ , т.е. каждый из них зачислен в университет в  $\mu$ ;  $\forall a_i \mu(a_{i+1}) P_{a_i} \mu(a_i)$ , т.е. каждый предпочел бы учиться в вузе, в котором учится соседний абитуриент с большим номером;  $\forall a_i a_i \in D(\mu(a_{i+1}), \mu)$ , т.е. среди всех абитуриентов, которые хотели бы учиться в вузе абитуриента  $a_{i+1}$ , абитуриент  $a_i$  находится в группе наилучших. Обозначим  $SIC(a_i) = b_{i+1}$ ,  $SIC(b_i) = a_{i-1}$ . Если совершить обмен местами по кругу (от абитуриентов с большим номером абитуриентам с меньшим номером) в соответствии с построенным циклом, то условие 2 будет гарантировать, что положение всех абитуриентов в цикле улучшится, а условие 3 обеспечит устойчивость получившегося нового паросочетания. Основная теорема формулируется следующим образом.

Теорема 12.3. Пусть заданы  $\succ$  и  $R$ , и пусть  $\mu$  - некоторое устойчивое паросочетание. Если  $\mu$  доминируется по Парето (с точки зрения абитуриентов) другим устойчивым паросочетанием, то существует Стабильный Улучшающий Цикл.

Доказательство. Для доказательства основной теоремы нам необходимо будет воспользоваться следующей леммой: [277]. Зафиксируем профили  $\succ$  и  $P$ . Пусть  $\mu$  – устойчивое паросочетание, которое доминируется по Парето (с точки зрения абитуриентов) другим паросочетанием  $\nu$ . Обозначим через  $A'$  множество абитуриентов, которые предпочитают вуз, предписанный им в  $\nu$  вузу, предписанному им в  $\mu$ , а  $B' = \mu(A')$ . Иначе говоря,  $B'$  – это множество вузов, чьи абитуриенты из паросочетания  $\mu$  принадлежат множеству  $A'$ . В таком случае будут верны следующие утверждения:

- 1) абитуриенты из  $A \setminus A'$  имеют одно и то же предписанное распределение в паросочетаниях  $\mu$  и  $\nu$ ;
- 2) для любого вуза  $b$  верно, что  $|\mu(b)| = |\nu(b)|$ , т.е. при обоих паросочетаниях занято одинаковое число мест;
- 3) любой абитуриент из множества  $A'$  зачислен в университет (а не оставлен без места в вузе) и в  $\mu$ , и в  $\nu$ .

Мы не приводим здесь доказательство этой леммы, поскольку оригинальное доказательство [277], сделанное для модели со слабыми порядками, не использует свойство отрицательной транзитивности отношений предпочтения вуза. Следовательно, утверждения леммы верны для случая любых ациклических и транзитивных отношений предпочтения вузов.

Перейдем теперь к доказательству основных утверждений теоремы.

Обозначим через  $\succ_b'$  преобразованное отношение предпочтения вуза  $b$  на множестве абитуриентов. Для любых  $a, a', a''$  таких, что  $a \approx_b a', a' \approx_b a'', a \succ_b a''$ , в преобразованном отношении предпочтения выглядят следующим образом:  $a \succ_b' a', a' \succ_b' a'', a \succ_b' a''$ . Заметим, что в частных случаях простейших полупорядков в построенном преобразованном отношении предпочтения  $\succ_b'$  могут сохраняться несравнимости, однако такое отношение по построению будет являться слабым порядком.

Обозначим через  $A'$  множество абитуриентов, которые предпочитают вуз, предписанный им в  $\nu$ , вузу, предписанному им в  $\mu$ , а  $B' = \mu(A')$ . Иначе говоря,  $B'$  –

это множество вузов, чьи абитуриенты из паросочетания  $\mu$  принадлежат множеству  $A'$ .

Пусть  $C'(b, \mu) = \{a \in A' | bP_a\mu(a)\}$ . Также, пусть  $D'(b, \mu) = \{a \in C' | \forall x \in C' a \succ_b' x\}$ .

Теперь мы можем построить ориентированный граф  $G(V, E)$ , где множество вершин  $V'$  совпадает со множеством вузов  $B'$ , а ребро  $e(b_i, b_j) \in E$  если и только если  $\exists a \in \mu(b_i)$  такой, что  $a \in D'(b_j, \mu)$ . Другими словами, вуз  $b_i$  указывает на вуз  $b_j$  в графе  $G$  если и только если существует абитуриент  $a$ , который:

- зачислен в университет  $b_i$  при паросочетании  $\mu$ , но предпочел бы учиться в вузе  $b_j$ ;
- среди всех таких абитуриентов, которые предпочли бы учиться в  $b_j$  (по сравнению с предписанным им при  $\mu$  местом обучения), он принадлежит к группе наиболее предпочтительных для вуза  $b_j$  абитуриентов (причем в соответствии с преобразованным отношением предпочтения  $\succ_{b_j}'$ ).

Мы присвоим имя такого абитуриента ' $a$ ' – соответствующей дуге  $(b_i, b_j)$ .

В графе  $G$  всегда существует цикл, поскольку по построению множества  $B'$  для каждого из входящих в него вузов существует хотя бы один абитуриент, который желает попасть в этот вуз больше, чем в вуз, предписанный при  $\mu$ . Возьмем любой такой цикл (а точнее, абитуриентов, чьи имена указаны на дугах, входящих в цикл) и покажем, что такой цикл будет Стабильным Улучшающим Циклом.

Первое и второе свойства Стабильного Улучшающего Цикла выполняются по построению. Покажем, что третье свойство также выполнено. По построению,  $\forall b$  и  $\forall a \in A'$  таких, что  $b \succ_a \mu(a)$  верно, что  $SIC(b) \succ_b a$ . Докажем остальное от противного.

Пусть  $\exists$  абитуриент  $x \in A \setminus A'$  и университет  $b \in B'$  такой, что  $b \succ_x \mu(x)$  и  $x \succ_b SIC(b)$ . В этом случае абитуриент  $x$  и вуз  $b$  составили бы блокирующую пару и паросочетание, образованное после проведения обмена в соответствии с построенным циклом, не было бы стабильным.

Из стабильности паросочетаний  $\mu$  и  $\nu$  следует, что  $\mu(b) \succ_b x$ ,  $\nu(b) \succ_b x$  (здесь мы используем утверждение Леммы) и  $\mu(b) \succ_b SIC(b)$ . С другой стороны,  $SIC(b)$ ,  $\nu(b) \in A'$  и  $SIC(b) \in D'(b, \mu)$ , поэтому можно заключить, что  $SIC(b) \succ_b \nu(b)$ .

Поскольку  $\succ_b$  является простейшим полупорядком, возможная следующая ситуация:  $x \approx_b \nu(b) \approx_b SIC(b)$  и  $x \succ_b SIC(b)$ . Но  $SIC$  был построен на основе профиля преобразованных предпочтений  $\succ'$ . Таким образом, в рассмотренном случае дуга, соответствующая абитуриенту  $SIC(b)$ , не была бы включена в граф, т.к. в соответствии с преобразованным отношением предпочтения  $\succ'_b \nu(b) \succ'_b SIC(b)$ . Таким образом,  $x$  и  $b$  никогда не составят блокирующую пару. Мы показали, что построенный цикл удовлетворяет всем свойствам Стабильного Улучшающего Цикла. Теорема доказана.

Эта теорема фактически предоставляет критерий определения эффективности полученного паросочетания, а также ключ к улучшению неэффективного устойчивого распределения.

### 12.3 Некоторые выводы

В данном разделе приведены результаты исследований по анализу расширения классической модели обобщенных паросочетаний на случай предпочтений, являющихся простейшими полупорядками. Показано, что всегда существует устойчивое паросочетание и, наоборот, любое устойчивое паросочетание можно получить, рассмотрев некоторое линейное расширение исходных предпочтений агентов. Кроме того, получены необходимые и достаточные условия эффективности устойчивого паросочетания с точки зрения абитуриентов. Полученные теоретические результаты позволяют на практике строить централизованные механизмы распределения с предпочтениями, являющимися простейшими полупорядками. В дальнейшем полученные результаты планируется расширить на более широкий класс отношений предпочтения – интервальные порядки.

Результаты исследований, представленные в этом разделе, нашли отражение в работах [Кисельгоф 2012а, 2012б]:

1. Кисельгоф С.Г. Моделирование приемной кампании: вузы различного качества и абитуриенты с квадратичной функцией полезности// Проблемы управления, 2012, с.33-40.
2. Кисельгоф С.Г. Модель выбора вузов абитуриентами приемной кампании в России// В кн.: XII Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества. В четырех книгах. Книга 2. Москва: НИУ ВШЭ, 2012, с.422-430.

### 13 ОБЩАЯ ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ О СПРАВЕДЛИВОМ ДЕЛЕЖЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ СПРАВЕДЛИВОСТИ

В этом разделе отчета представлены результаты исследований решения задачи о справедливом дележе при различных определениях справедливости. Предполагается любое число участников при наличии как делимых, так и неделимых пунктов.

В середине 1990-х годов в книге [282] была предложена новая модель разрешения конфликтов. В этой модели конфликт состоит в разногласиях сразу по нескольким вопросам (пунктам), причём важность этих пунктов для различных участников, вообще говоря, различна. Именно эти различия позволяют предложить такой вариант улаживания конфликта, при котором каждый получает то, что его больше устраивает по его собственной оценке. В книге Коэна [280] на стр.180, посвящённой переговорам, утверждается: «Успешный подход к переговорам заключается в выяснении того, что в действительности нужно противной стороне, и в доведении до её сознания того, каким образом она могла бы добиться желаемого, не мешая мне получить своё».

Предложенное уже в первых работах на эту тему формальное определение справедливого дележа требует одновременного выполнения условий равноценности, отсутствия зависти и эффективности. В то же время, как при наличии неделимых пунктов, так и для числа участников конфликта, бóльшего двух, наличие справедливых дележей не гарантируется. Многочисленные примеры этому при неделимости некоторых пунктов для двух участников приведены в публикациях [284],[285], а при делимости всех пунктов для бóльшего числа участников – в книге [283] и цитируемых в ней статьях [286],[287]. В качестве выхода из такого положения в обоих случаях предлагаются различные модификации самого определения справедливого дележа. При этом «положительными» результатами являются доказательства наличия справедливых (в том или ином смысле) дележей, а также алгоритмы их нахождения.

Попытки сформулировать универсальные условия справедливости дележа вряд ли могут оказаться успешными. В книге [282] уже относительно трёх «классических» условий справедливости говорится, что выбор тех из них, которые можно отбросить, является неформальным и определяемым конкретной ситуацией. Естест-

венно, то же самое относится и к уже достаточно многочисленным модификациям этих и других условий.

В данном исследовании задача о справедливом дележе рассматривается с несколько другой точки зрения. Как уже упоминалось, в публикациях по этой теме обычно обсуждаются и предлагаются те или иные модификации условий справедливости, а затем доказываются утверждения о существовании (при рассматриваемых модификациях) справедливых дележей и/или приводятся примеры их отсутствия. Естественно, что справедливые (в том или ином смысле) дележи, вообще говоря, оказываются различными. Однако множество, на котором ищутся соответствующие справедливые дележи, во всех случаях является одним и тем же – множеством всех допустимых дележей. Определение структуры этого множества при любом числе участников и при любом распределении делимых и неделимых пунктов оказывается важным «техническим» этапом при поиске справедливых (в том или ином смысле) дележей. Поэтому анализ множества всех дележей, нахождение его характерных точек, паретовской границы и т.д., представляется важным этапом, предшествующим решению конкретных задач справедливого дележа при разнообразных формализациях понятия справедливости. Именно этому этапу и посвящена настоящая работа.

Материал организован следующим образом. В подразделе 13.1 вводятся основные понятия и обозначения, используемые далее в работе. В подразделе 13.2 анализируются основные модификации условий справедливости и формулируются соответствующие оптимизационные задачи. Эти постановки задач определяют то подмножество множества достижимости, которому принадлежат решения всех указанных задач, и знание которого позволяет сравнительно просто найти решение любой из них. В подразделе 13.3 обсуждаются метод построения указанного «универсального» множества, а в подразделе 13.4 предлагаются соответствующие алгоритмы. В подразделе 13.5 приводятся примеры. В подразделе 13.6 делаются некоторые выводы из проведенного исследования и ставятся новые задачи.



### 13.1 Основные понятия и обозначения

Введём необходимые формальные понятия и обозначения, следуя в основном изложению в книгах [282],[283] и статье [285]. Предположим, что всего имеется  $L$  делимых и  $M$  неделимых пунктов. Занумеруем пункты так, чтобы сначала шли делимые пункты, а потом – неделимые. Случаи  $L = 0$  (делимые пункты отсутствуют) и  $M = 0$  (неделимые пункты отсутствуют) не исключаются. Число участников обозначим через  $m$ .

Сами участники независимо друг от друга определяют числа  $a_{ij}$  (число  $a_{ij}$  – относительная важность  $i$ -го пункта для  $j$ -го участника,  $i = 1, \dots, L + M$ ;  $j = 1, \dots, m$ ). Матрица  $A = (a_{ij})$  называется матрицей важности. Предполагается, что эти важности нормированы, в том смысле, что сумма важностей является одной и той же для всех участников, т.е.

$$\sum_{i=1}^L a_{ij} + \sum_{i=L+1}^{L+M} a_{ij} = D \quad (j = 1, \dots, m). \quad (13.1)$$

Обычно считается, что число  $D = 100$ , что позволяет интерпретировать важность  $a_{ij}$  как процент значимости  $i$ -го пункта для  $j$ -го участника по отношению к общей значимости всех пунктов. Число  $D$ , как и все значимости  $a_{ij}$ , предполагаются целыми числами (детальная аргументация этого допущения приведена в статье [285]).

Пара чисел  $S = \langle L, M \rangle$  будет называться сигнатурой задачи дележа. Сама задача дележа полностью определяется парой  $\langle A, S \rangle$ , где  $A$  – упомянутая выше матрица важностей (размера  $(L + M) \times m$ ),  $S$  – сигнатура.

Далее, каждый делёж  $x$  в задаче с сигнатурой  $S$  может быть представлен в виде пары  $\langle x, \sigma \rangle$ , где матрица  $x = (x_{ij})$  ( $i = 1, \dots, L$ ;  $j = 1, \dots, m$ ), матрица  $\sigma = (\sigma_{ij})$  ( $i = 1, \dots, M$ ;  $j = 1, \dots, m$ ). По построению, для всех элементов матрицы  $x$  выполнено неравенство  $0 \leq x_{ij} \leq 1$  ( $x_{ij}$  есть доля  $i$ -го пункта, доставшаяся  $j$ -му участнику), а для всех элементов матрицы  $\sigma$  выполнено  $\sigma_{ij} \in \{0, 1\}$  ( $\sigma_{ij} = 1$  означает, что  $(i+L)$ -ый пункт целиком достался  $j$ -му участнику). Для всех строк матрицы  $x$  выполнено равенство:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, L), \quad (13.2a)$$

и для всех строк матрицы  $\sigma$  выполнено аналогичное равенство:

$$\sum_{j=1}^m \sigma_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, M). \quad (13.2b)$$

Для любого дележа  $\langle x, \sigma \rangle$  положим

$$g_j^d(x) = \sum_{i=1}^L a_{ij} x_{ij} \quad (j = 1, \dots, m), \quad (13.3a)$$

$$g_j^w(\sigma) = \sum_{i=1}^M a_{L+i,j} \sigma_{ij} \quad (j = 1, \dots, m), \quad (13.3b)$$

$$g_j(x, \sigma) = g_j^d(x) + g_j^w(\sigma) \quad (j = 1, \dots, m). \quad (13.4)$$

Формулы (13.3), (13.4) означают, что общий доход любого участника является суммой двух слагаемых – дохода  $g_j^d(x)$  от делимых пунктов и дохода  $g_j^w(\sigma)$  от неделимых пунктов. Переходя от индивидуальных доходов к векторным, введём в рассмотрение векторы

$$g^d(y) = (g_1^d(y), \dots, g_m^d(y)), \quad (13.5a)$$

$$g^w(\sigma) = (g_1^w(\sigma), \dots, g_m^w(\sigma)), \quad (13.5b)$$

являющиеся наборами доходов всех участников от делимых и неделимых пунктов, и вектор

$$g(x, \sigma) = (g_1(x, \sigma), \dots, g_m(x, \sigma)), \quad (13.6)$$

являющийся набором суммарных доходов всех участников от делимых и неделимых пунктов.

Обозначим множество всех дележей (т.е. пар матриц с неотрицательными элементами, удовлетворяющих условиям (13.2)) через  $Z$ . Переходя от доходов, соответствующих конкретным дележам  $\langle x, \sigma \rangle$ , к множеству всех дележей  $Z$ , положим

$$G^d = \{g^d(x) \mid \langle x, \sigma \rangle \in Z\}, \quad (13.7a)$$

$$G^w = \{g^w(\sigma) \mid \langle x, \sigma \rangle \in Z\}, \quad (13.7b)$$

$$G = \{g(x, \sigma) \mid \langle x, \sigma \rangle \in Z\}. \quad (13.8)$$

Множество  $G$  представляет собой множество всех возможных векторных доходов при всех возможных дележах  $\langle x, \sigma \rangle \in Z$ . Оно называется множеством достижи-

мости, поскольку каждый векторный доход  $g \in G$  может быть получен как результат некоторого дележа. По построению, множество достижимости  $G$  является образом множества всех платежей  $Z$  при линейном отображении, определяемом формулами (13.3), (13.4).

Учитывая, что в любом дележе распределение любого пункта между участниками может быть выбрано независимо от распределений других пунктов, получаем важное равенство

$$G = G^d + G^w, \quad (13.9)$$

где  $G$  является множеством достижимости, определённым формулой (13.8), а под суммой понимается прямая сумма двух множеств из евклидова пространства:  $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ . Заметим, что  $G^d$ ,  $G^w$  и  $G$  содержатся в евклидовом пространстве  $E^m$  размерности  $m$  (напомним, что  $m$  – это число участников в данном дележе).

### 13.2 Модифицированные условия справедливости и оптимизационные постановки задач поиска справедливых дележей

Напомним, следуя книгам [282],[283] [и статье [285] содержательно важные свойства дележей. Почти все эти свойства выражаются в явном виде через соответствующие исходным дележам векторные доходы. Именно в этих терминах они и будут формулироваться, а сам исходный делёж  $\langle x, \sigma \rangle$ , определяющий доход  $g(x, \sigma)$ , будет в большинстве формул опускаться. Доход  $g \in G$  называется:

пропорциональным, если

$$g_j \geq D / m \quad (j = 1, \dots, m), \quad (13.10)$$

т.е. каждый из  $m$  участников получает не менее  $m$ -ой части от максимально возможной суммы в  $D$  баллов по своей собственной оценке;

равноценным, если

$$g_p = g_q \quad (p, q = 1, \dots, m), \quad (13.11)$$

т.е. все получают поровну по своим собственным оценкам;

эффективным, если

$$g \in G^P, \quad (13.12)$$

т.е. вектор  $g$  недоминируем по Парето никаким другим вектором  $h$  из того же множества  $G$ ; это означает, что если в наборе доходов  $g$  доход  $g_i$  у  $i$ -го участника больше, чем доход  $h_i$  у этого же  $i$ -го участника в наборе  $h$ , то для некоторого  $j$ -го участника ситуация будет обратной, т.е.  $g_j$  будет меньше, чем  $h_j$ ;

свободным от зависти, если для любых  $j, p = 1, \dots, m, j \neq p$

$$g_j \geq \sum_{i=1}^L a_{ij} x_{ip} + \sum_{i=1}^M a_{L+i,j} \sigma_{ip}, \quad (13.13)$$

т.е. доход  $j$ -го участника по его собственной оценке не может быть меньше дохода любого другого участника по оценке того же  $j$ -го участника (здесь компоненты дележа  $\langle x, \sigma \rangle$  относятся к  $p$ -му участнику, а коэффициенты важности  $a_{ij}$  – к  $j$ -му участнику).

Обратим внимание на тот факт, что, в отличие от предшествующих формул (13.10)-(13.12), данное свойство дележа не выражается только через доходы – в неравенства (13.13) компоненты дележа  $\langle x, \sigma \rangle$  входят в явном виде.

Однако в любом случае все «классические» содержательные свойства дележей формулируются в виде формальных условий на определённые в начале подраздела 13.1 дележи  $\langle x, \sigma \rangle$ . Суть дела в том, что входящие в формулы (13.10)-(13.12) величины  $g_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) линейно выражаются через компоненты дележа  $\langle x, \sigma \rangle$  формулами (13.3)-(13.6).

Нетрудно проверить, что пропорциональность следует из отсутствия зависти, так что можно ограничиться тремя свойствами: равноценностью, эффективностью и свободой от зависти.

Делёж в книгах [282],[283] был назван справедливым, если он одновременно равноценен, эффективен и свободен от зависти. Основные естественные вопросы, возникающие при исследовании справедливых дележей, являются такими же, как и при исследовании других формально определённых математических объектов: существуют ли справедливые дележи? если да, то, как их находить? какими ещё инте-

ресными свойствами (кроме указанных в определениях) они обладают? если они существуют не всегда, то при каких условиях? как их можно модифицировать, чтобы гарантировать существование дележей при новых условиях? и т.д.

В данном случае в книге [282] даны исчерпывающие ответы на эти вопросы при делимости всех пунктов и при числе участников, равном двум. Кратко формулируем эти ответы. Справедливый делёж существует для любой матрицы важности  $a$ . Он легко находится предложенным авторами методом «подстраивающегося победителя». Важным свойством найденного данным методом справедливого дележа является следующее: все пункты (кроме, быть может, одного, определяемого в процессе работы этого метода) достаются целиком одному или другому участнику, и только один пункт действительно может делиться между ними. Однако при трёх участниках метод «подстраивающегося победителя» неприменим и (как уже указывалось) справедливые дележи могут отсутствовать.

В разделе «Распространение на троих и более участников» в 5-ой главе книги [283] рассмотрены три варианта отказа от одного из трёх «классических» условий справедливости: равноценности, эффективности и свободы от зависти. Даются ссылки на работы, в которых доказывается, что всегда можно найти делёж, удовлетворяющий любым двум из этих трёх условий (в предположении, что все пункты делимы). Другие модификации понятия справедливости (в рамках рассматриваемой модели Брамса-Тэйлора) введены в публикациях [284], [285].

Приведём шесть модифицированных постановок задач поиска справедливого (в том или ином смысле) дележа в виде задач оптимизации на множестве всех дележей  $Z$ .

1. Справедливым называется делёж, обладающий свойствами равноценности и эффективности. В силу этих свойств все такие дележи максимизируют доход одного участника. Поэтому для поиска справедливых (в этом смысле) дележей можно решать задачу оптимизации 1:

$$g_1 \rightarrow \max_{g \in G}$$

при условиях

$$g_j = g_1 \quad (j = 2, \dots, m),$$

$$(g_1, \dots, g_m) \in G^P \text{ (паретовской границе множества } G).$$

В случае делимости всех пунктов ( $M = 0$ ) доказательство существования решений задачи 1 и метод их нахождения приведены в работе [286].

2. Справедливым называется делёж, обладающий свойствами эффективности и отсутствия зависти. Такую задачу можно рассматривать как задачу оптимизации 2:

$$\max_j g_j - \min_j g_j \rightarrow \min_{g \in G}$$

при условиях

$$(g_1, \dots, g_m) \in G^P,$$

$$g_j \geq \sum_{i=1}^L a_{ij} x_{ip} + \sum_{i=1}^M a_{L+i,j} \sigma_{ip} \text{ для любых } j, p = 1, \dots, m, j \neq p.$$

В случае делимости всех пунктов ( $M = 0$ ) доказательство существования решений задачи 2 и метод их нахождения приведены в статье [287].

3. Справедливым называется делёж, обладающий свойствами равноценности и отсутствия зависти. Такую задачу можно рассматривать как задачу оптимизации 3:

$$g_1 \rightarrow \max_{g \in G}$$

при условиях

$$g_j = g_1 \quad (j = 2, \dots, m),$$

$$g_j \geq \sum_{i=1}^L a_{ij} x_{ip} + \sum_{i=1}^M a_{L+i,j} \sigma_{ip} \text{ для любых } j, p = 1, \dots, m, j \neq p.$$

В случае делимости всех пунктов ( $M = 0$ ) доказательство существования решений задачи 3 и метод их нахождения приведены в разделе «Распространение на троих и более участников» в 5-ой главе книги [283].

Заметим, что при отказе от условия делимости всех пунктов существование решений задач 1 – 3 не гарантируется. Заметим также, что в некоторых случаях делёжи, обладающие требуемой комбинацией свойств, находятся не в результате решения оптимизационной задачи, а в результате более простых соображений. Однако во всех случаях условия задачи оптимизации совпадают с требуемыми свойствами,

поэтому все справедливые (в том или ином смысле) дележи с гарантией совпадают с некоторыми точками из множества дележей, определяемыми указанными условиями.

Далее рассмотрим справедливые дележи при любых сигнатурах (т.е. при любом количестве делимых и неделимых пунктов).

4. Справедливым называется делёж, обладающий свойством эффективности и максимизирующий выражение  $\min_j g_j$  на паретовской границе  $G^P$  множестве достижимости  $G$ . Такая задача уже сформулирована как задача оптимизации (задача оптимизации 4):

$$\min_j g_j \rightarrow \max_{g \in G}$$

при условии

$$(g_1, \dots, g_m) \in G^P.$$

5. Справедливым называется делёж, обладающий свойством эффективности и минимизирующий выражение  $\max_j g_j - \min_j g_j$  на паретовской границе  $G^P$  множестве достижимости  $G$ . Такая задача уже сформулирована как задача оптимизации (задача оптимизации 5):

$$(\max_j g_j - \min_j g_j) \rightarrow \min_{g \in G}$$

при условии

$$(g_1, \dots, g_m) \in G^P.$$

6. Справедливым называется делёж, обладающий свойством равноценности и максимизирующий выражение  $g_1$  на множестве достижимости  $G$ . Такая задача уже сформулирована как задача оптимизации (задача оптимизации 6):

$$g_1 \rightarrow \max_{g \in G}$$

при условиях

$$g_j = g_1 \quad (j = 2, \dots, m).$$

При  $m = 2$  справедливые (в смысле 4, 5 и 6) дележи подробно исследованы в публикациях [284], [285]. В частности, установлено существования дележей с требуемыми свойствами в задачах 4 и 5. В задаче 6 их существование не гарантировано, т.е. строятся простые примеры, в которых справедливые (в смысле 6) дележи отсутствуют. Там же приводятся условия на параметры моделей, гарантирующие наличие некоторых других свойств (пропорциональности и равноценности).

Рассмотрим теперь целевые функции и условия и во всех 6-и приведённых задачах оптимизации. Целевые функции имеют один из следующих трёх видов:

$$g_1,$$

$$\max_j g_j - \min_j g_j,$$

$$\min_j g_j.$$

Условия имеют один из следующих трёх видов

$$g_j = g_1 \quad (j = 2, \dots, m)$$

$$(g_1, \dots, g_m) \in G^P \text{ (паретовской границе множества } G\text{);}$$

$$g_j \geq \sum_{i=1}^L a_{ij} x_{ip} + \sum_{i=1}^M a_{L+i,j} \sigma_{ip} \text{ для любых } j, p = 1, \dots, m, j \neq p.$$

Заметим, что все данные целевые функции являются линейными на множествах

$$U_\pi = \{g \in E^m \mid g_{i_1} \leq g_{i_2} \leq \dots \leq g_{i_m}, (i_1, i_2, \dots, i_m) = \pi\}. \quad (13.14)$$

Множества  $U_\pi$  являются выпуклыми многогранными конусами (многогранниками, являющимися конусами). Конусами они являются потому, что вместе с любой точкой  $g \in U_\pi$  для любого неотрицательного числа  $\lambda$  точка  $\lambda g \in U_\pi$ .

Общий подход к решению поставленных в этом разделе оптимизационных задач рассматривается в следующем подразделе.

### 13.3 Построение универсального множества для задач оптимизации 1 – 6

Напомним формулу (13.9):  $G = G^d + G^w$ .



Эта формула даёт достаточно грубое представление о структуре множества достижимости как о прямой сумме двух множеств. Однако сама конструкция позволяет сказать больше. Именно, множество  $G^d$  является выпуклым многогранником в линейном пространстве  $E^m$ , поскольку является образом прямого произведения  $L$  одинаковых симплексов (13.2а). В то же время множество  $G^w$  конечно. Рассматривая сложение множества и одной точки как параллельный сдвиг на вектор с координатами, равными координатам данной точки, получаем следующее

Предложение 13.1. Множество достижимости  $G$  является объединением выпуклых многогранников, полученных из одного и того же выпуклого многогранника  $G^d$  параллельным переносом на векторы, образующие конечное множество  $G^w$ .

Рассмотренные в предыдущем разделе задачи оптимизации 1 и 4-6 являются задачами оптимизации на данном множестве  $G$  указанного типа.

По построению, множество  $G^w$  является конечным множеством векторов из  $E^m$ :  $G^w = \{g_1^w, \dots, g_T^w\}$ . Обозначим через  $G(i, \pi)$  пересечение множества  $G^d + g_i^w$  с множеством  $U_\pi$ , определённым формулой (13.14), и с множествами, определяемыми условиями вида (13.11). Все пересекающиеся множества являются выпуклыми многогранниками, в силу чего их пересечение  $G(i, \pi)$  также является выпуклым многогранником. По построению, каждый из этих многогранников содержится в одном из множеств  $U_\pi$ . В конце подраздела 13.2 утверждалось, что на множествах  $U_\pi$  все рассматриваемые целевые функции линейны. Следовательно, то же самое верно для содержащихся в них выпуклых многогранников  $G(i, \pi)$ . Обозначим через  $V(i, \pi)$  конечное множество вершин  $G(i, \pi)$ . Напомним, что решение линейной задачи оптимизации на выпуклом многограннике совпадает с одной из его вершин. Поэтому проведёнными рассуждениями доказано следующее

Предложение 13.2. Решение любой из рассмотренных в подразделе 13.2 задач справедливого дележа, представленных в виде задач оптимизации 1, 4-6, содержится в конечном множестве

$$V(a, S) = U_\pi U_i^T V(i, \pi). \quad (13.15)$$

Напомним, что пара  $\langle A, S \rangle$ , где  $A$  – матрица важностей,  $S$  – сигнатура, полностью определяет задачу дележа. Таким образом,  $V(A, S)$  – это универсальное конечное множество, зависящее только от самой задачи, но не от используемого определения справедливости. При этом оно всегда содержит точки (доходы), соответствующие справедливым (в различном смысле) дележам.

Конечно, в конкретных ситуациях множество  $V(a, S)$  может быть сужено. В тех случаях, когда требуется эффективность, из него надо удалить все точки, не содержащиеся в паретовской части множества достижимости  $G^P$ . При отсутствии требования равноценности можно не учитывать равенства (13.11). Реально это значит, что можно определить  $G(i, \pi)$  как пересечение множества  $G^d + g_i^w$  с множеством  $U_\pi$ , определённым формулой (13.14), не рассматривая условия (13.11). В любом случае после построения требуемой части множества  $V(A, S)$  решение задачи оптимизации сводится к вычислению целевой функции на найденных точках, что является простой в вычислительном смысле задачей.

Вычислительная сложность предложенной процедуры построения универсального множества приближённо определяется следующим образом. В рассматриваемой модели есть три параметра, влияющие на количество операций: число участников  $m$ , число пунктов  $n = L + M$  и число  $D$ , равное сумме важностей всех пунктов. Естественно, что перебор присутствует. Но экспоненциальная оценка есть только по параметру  $m$ . В частности, один алгоритм связан с необходимостью просмотра всех перестановок длины  $m$ . Однако ориентируясь на реальные ситуации, можно считать, что число участников не превосходит 5-6, поэтому перебор по  $m$  весьма невелик. Построение множеств  $G^d$  и  $G^w$  имеет (очень грубую) степенную оценку  $D^{m-1}$ . Наконец, число пунктов  $n$  вообще не входит в оценки: во всех случаях, в которых рассматриваются делимые пункты, неделимые пункты или все пункты, число операций оценивается предыдущими оценками, зависящими от  $m$  и  $D$ . Заметим, что подавляющее большинство множеств  $G(i, \pi)$  оказываются пустыми, что также сильно влияет (в сторону уменьшения) на время выполнения алгоритмов.

### 13.4 Некоторые алгоритмы

Рассмотрим уже упомянутый алгоритм построения множества  $G^w$ . Суть дела состоит в следующем. Имеется матрица  $B$  размера  $M \times m$ , совпадающая с последними  $m$  строками матрицы важностей  $A$ . Каждому распределению неделимых пунктов, заданному матрицей  $\sigma = (\sigma_{ij})$  ( $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, m$ ), соответствует вектор доходов  $g = (g_1, \dots, g_m)$  с компонентами (см. (13.3b))

$$g_j^w(\sigma) = \sum_{i=1}^M b_{ij} \sigma_{ij} \quad (j = 1, \dots, m).$$

Задача состоит в определении всех возможных векторов дохода  $g$ .

Идея решения достаточно простая и естественная. Предположим, что уже найдены все различные векторы, которые можно получить в результате распределения первых  $i$  неделимых пунктов:  $g_1^i, \dots, g_{n_i}^i$ . Из каждого из этих векторов можно получить ровно  $m$  новых векторов, соответствующих распределению первых  $(i+1)$  неделимых пунктов, отдавая  $(i+1)$ -ый пункт по очереди каждому из  $m$  участников. Более формально: прибавляя  $b_{i+1,j}$  к  $j$ -ой компоненте исходного вектора и 0 ко всем остальным компонентам, получаем  $m$  новых векторов. После того, как все такие векторы найдены, выделяем из них все различные:  $g_1^{i+1}, \dots, g_{n_{i+1}}^{i+1}$ , после чего процесс продолжается. Поскольку все получаемые значения компонент не превосходят соответствующих сумм  $\sum_{i=1}^M b_{ij}$  ( $j = 1, \dots, m$ ), а последние не превосходят  $D$ , то с какого-то номера рост числа  $n_i$  точек на  $i$ -ом уровне прекращается и далее начинается их уменьшение.

Рассмотрим теперь алгоритм построения всех граней выпуклого многогранника в  $E^m$ . Предполагается, что задан список всех граней размерности  $m - 1$  (в виде вектора из  $m$  коэффициентов и свободного члена), и для каждой из них задано множество всех вершин, инцидентных этой грани. Требуется найти такие же описания (в виде наборов гиперплоскостей и множеств инцидентных вершин) для всех граней, включая 0-мерные, т.е. для вершин исходного многогранника.

Пусть уже построены все грани размерности  $k$  ( $k > 0$ ). Рассмотрим любую из них (для определённости, грань  $F$ ). Обозначим множество инцидентных ей вершин

через  $M_F$ . Для всех исходных  $(m-1)$ -мерных граней рассмотрим пересечение  $F$  с каждой из них и запомним это пересечение, если оно не пустое и не совпадает с  $M_F$ . В результате получим семейство множеств  $P_1, \dots, P_s$ . Оставим из них только те, которые не содержатся в других множествах этого семейства. Эти множества определяют все грани размерности  $k-1$ , содержащиеся в грани  $F$ ; они задаются теми же уравнениями, что и грань  $F$ , к которым надо добавить уравнения, пересечение с которыми привело к не вложенным в другие множествам. Повторим эти же операции для всех граней. После этого необходимо из каждого семейства совпадающих построенных граней оставить один набор уравнений (все они будут отличаться только порядком). В результате будет построен полный набор всех разных граней многогранника  $G^d$ . В этом алгоритме важно, что основные операции в нём – это сравнения небольших (по числу элементов) конечных множеств, а не многократное определение рангов матриц, требующее значительно бóльших ресурсов.

Далее найденные грани используются для определения их пересечений с многогранниками систем (13.11) для построения множеств  $V(i, \pi)$ .

Другие алгоритмы основаны, по бóльшей части, на стандартных методах линейной алгебры и здесь не излагаются.

Остановимся кратко на задачах оптимизации 2 и 3, включающих неравенства (13.13) и формулирующихся как задачи оптимизации на множестве дележей  $Z$ . Алгоритмы их решения также основаны на представлении дохода по формулам (13.7) и (13.8) в виде прямой суммы доходов, определяемых непрерывной частью  $x$  и дискретной частью  $\sigma$  дележа  $\langle x, \sigma \rangle$ . Универсальное конечное множество дележей строится по общей схеме, аналогичной рассмотренной выше.

### 13.5 Примеры

Пример 13.1. Рассмотрим две задачи дележа с матрицами важности  $\begin{pmatrix} 79 & 78 & 77 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 59 & 58 & 57 \\ 41 & 42 & 43 \end{pmatrix}$ . В этих задачах число участников  $m = 3$ , число делимых пунктов  $L = 2$ , число неделимых пунктов  $M = 0$ . Многогранники  $G^d = G$  пока-

заны на рисунке 13.1. В обоих случаях паретовская граница  $G^P$  состоит из треугольников 346 и 145 и параллелограмма 2546.

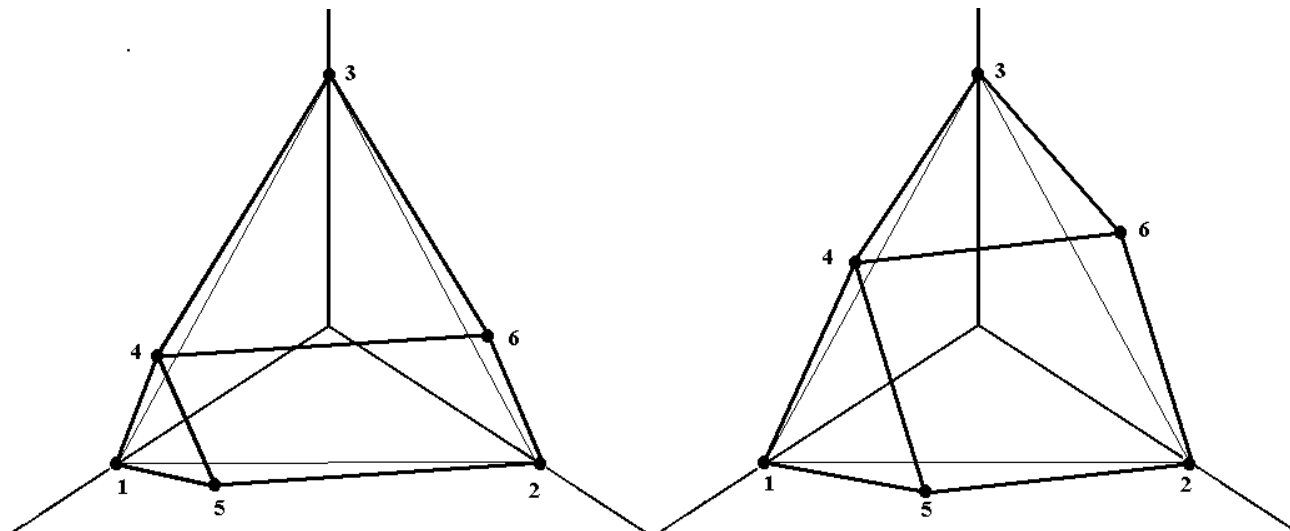


Рисунок 13.1 – Многогранник множества достижимости

Предположим, что под справедливым понимается делёж, одновременно пропорциональный, равноценный и эффективный. Тогда множество вершин  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  является частью универсального множества  $V(A, S)$ , к которому, в соответствии с общим алгоритмом, надо добавить пересечение множества  $G^d$  с множеством решений системы (13.11):  $g_1 = g_2 = g_3$ . Соответствующие матрицы дележей имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 0,32908 & 0,33328 & 0,33764 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0,57265 & 0,42735 & 0 \\ 0 & 0,21428 & 0,78572 \end{pmatrix}.$$

Пример 13.2. Рассмотрим задачу дележа при трёх участниках и двух делимых пунктах с матрицей важности  $\begin{pmatrix} 67,16799 & 66,16799 & 65,16799 \\ 31,83211 & 32,83211 & 33,83211 \end{pmatrix}$ . Эта матрица является выпуклой линейной комбинацией двух матриц из примера 13.1. Соответствующая матрица  $x$  справедливого дележа (при округлении до 6-го знака после запятой) такова:

$$\begin{pmatrix} 0,49631 & 0,50369 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае делёж также является пропорциональным, равноценным и эффективным. Различие между примерами 13.1 и 13.2 состоит в том, что в обоих случаях в примере 13.1 осуществляются два акта деления, а в примере 13.2 – только один.

Пример 13.3. Рассмотрим задачу дележа при двух участниках,  $L = 2$ ,  $M = 3$  и матрицей важностей  $A$ , представленной в Таблице 13.1. Многогранник  $G^d$  делимых пунктов показан на рисунке 13.2. Множество  $G^w$  состоит из 8 точек (см. также рисунок 13.3):

$$G^w = \{(0, 50), (15, 38), (30, 30), (45, 18), (35, 32), (50, 20), (65, 12), (80, 0)\}. \quad (13.16)$$

Недоминируемыми из них являются шесть точек:  $\{(0, 50), (15, 38), (35, 32), (50, 20), (65, 12), (80, 0)\}$ . Точка  $(30, 30)$  доминируема точкой  $(35, 32)$ , а точка  $(45, 18)$  – точкой  $(50, 20)$ . В соответствии с предложением 13.1 множество достижимости  $G$  состоит из 8 множеств  $G^d + g^i$ , где векторы  $g^i$  взяты из множества (13.17). Множество  $G$  представлено на рисунке 13.4.

Многогранник  $G^d$  делимых пунктов имеет 4 вершины (см. рисунок 13.2). Множество всех вершин 8-ми сдвинутых многогранников, показанных на рисунке 13.4 (всего 32 точки), входит в универсальное множество  $V(a, S)$ . Его паретовская часть показана на рисунке 13.5 (7 белых кружков). В соответствие с общим алгоритмом во множество  $V(a, S)$  должно быть добавлено пересечение границ множеств  $G^d + g^i$  с множеством, определяемым условиями (13.11). В данном случае условия (13.11) определяют прямую линию  $g_1 = g_2$ . Всего имеется 8 точек пересечений с 4-мя множествами вида  $G^d + g^i$  (см. рисунок 13.4).

Таблица 13.1 – Матрица важностей

Пункт	1	2
1	10	30
2	10	20
3	35	18
4	30	20
5	15	12
Всего	100	100

Та из них, у которой общее значение  $g_1 = g_2$  максимально, имеет координаты  $(56\frac{2}{3}, 56\frac{2}{3})$ . Она показана чёрным кружком на рисунке 13.5.

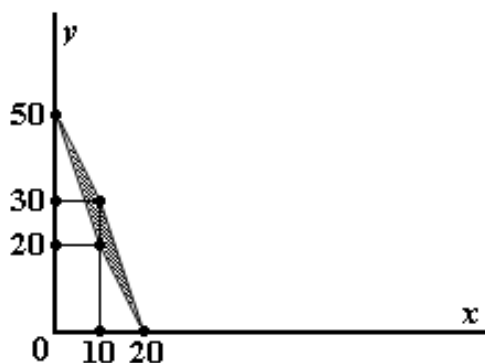


Рисунок 13.2 – Множество  $G^d$

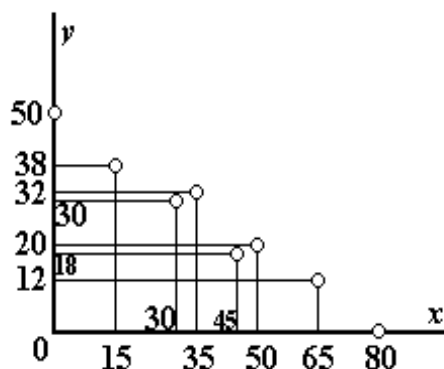


Рисунок 13.3 – Множество  $G^w$

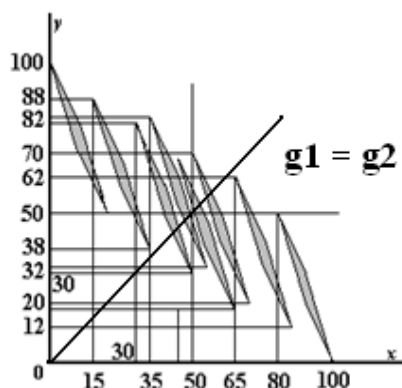


Рисунок 13.4 – Множество  $G$

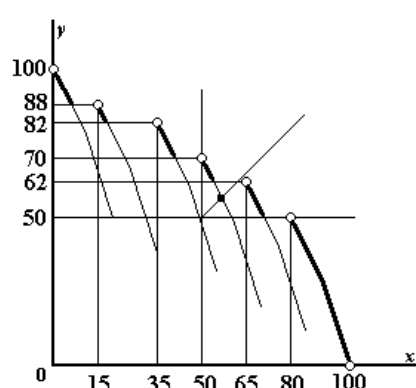


Рисунок 13.5 – Паретовская граница множества

Рассмотрим задачи оптимизации 4-6 для данной ситуации дележа. Задача 4 сводится к нахождению среди паретовских точек, показанных белыми кружками на рисунке 13.5, такой точки, у которой минимальная из двух координат будет максимальной. Очевидно, что таковой является точка  $(65, 62)$ . В задаче 5 на том же множестве точек надо найти такую, для которой модуль разницы между координатами будет минимальным. Таковой является та же самая точка  $(65, 62)$ . Заметим, что в статье [285] приводится простой пример, когда решения тех же самых двух задач оптимизации не совпадают. Задача 6 состоит в максимизации на всём множестве  $G$  (а не только на его паретовской границе) точки с максимальной координатой  $g_1$  при условии  $g_1 = g_2$ . Эта точка показана чёрным кружком на рисунке 13.5. Она имеет ко-

ординаты  $(56\frac{2}{3}, 56\frac{2}{3})$  и не является паретовской, поскольку доминируется точкой  $(65, 62)$  – решением других двух задач. Таким образом, пример демонстрирует, что универсальное множество  $V(a, S)$ , состоящее в данном случае из сорока точек, действительно содержит решения задачи справедливого дележа при различных определениях справедливости.

### 13.6 Некоторые выводы и заключение

В данном исследовании рассмотрена наиболее общая ситуация в рамках модели справедливого дележа, предложенной Брамсом и Тэйлором и развитая в работах других учёных. Именно, предполагается любое число участников при наличии как делимых, так и неделимых пунктов. При этих условиях установлена общая структура множества достижимости и разработан алгоритм, позволяющий найти конечное множество в пространстве доходов, названное универсальным множеством. Это название определяется тем, что такое множество содержит решения задачи о справедливом дележе для самых разнообразных представлениях о справедливости, во всяком случае – для всех, упомянутых к настоящему моменту в литературе, и любых их комбинациях.

Дальнейшее развитие связано с двумя основными направлениями. Первое направление находится в рамках той же модели Брамса-Тэйлора. Представляется целесообразным:

- разработать диалоговую программную систему, реализующую предложенные алгоритмы, и провести на ней серьёзные вычислительные эксперименты;
- рассмотреть важный вопрос о нахождении таких решений, которые обеспечивали бы минимальное число реальных актов деления; в частности, при отсутствии неделимых пунктов число актов деления не превышает  $m-1$ , что установлено в уже упомянутой работе [286], однако при наличии неделимых пунктов этот вопрос ранее не ставился;
- рассмотреть реальные ситуации, в которых применение подхода, основанного на справедливых дележах, представляется полезным и перспективным; в частности,



возможно использование этих идей при распределении финансирования на различные цели между регионами.

Второе направление связано с модификациями самой модели. Основная цель возможных модификаций – уменьшение требований к информации, запрашиваемой у участников, с одновременной возможностью получения содержательно понятных и глубоких результатов. Это требует дальнейшего анализа ряда конфликтных ситуаций и поиска адекватных им моделей распределительного типа, возможно, за счёт учёта многокритериальности при оценке участниками различных пунктов.

Результаты исследований, представленные в этом разделе, нашли отражение в работе [281]:

Рубчинский А.А. Квазисправедливый делёж с несколькими участниками)// В сборнике трудов XIII международной апрельской конференции по развитию экономики, 2013.

## 14 ИССЛЕДОВАНИЯ ПРАВИЛ ВЫБОРА ДЛЯ БОЛЬШОГО ЧИСЛА АЛЬТЕРНАТИВ

В данном разделе отчета представлены результаты по разработке и исследованию алгоритмов, осуществляющих выбор вариантом для большого числа альтернатив.

В подразделе 14.1 проанализированы основные подходы к решению задачи выбора вариантов для большого числа альтернатив. В подразделе 14.2 рассмотрены принципы работы современных поисковых систем, проанализированы основные этапы и способы выбора вариантом для большого числа альтернатив. В этом подразделе проанализированы также реальные интернет-данные поисковой системы и разработан подход, с помощью которого можно классифицировать проходящие поисковые запросы и составлять список из наиболее релевантных страниц. Здесь же приведены результаты по разработке и апробированию схем уменьшения факторной размерности с наименьшей потерей качества ранжирования. Кроме этого, в этом же подразделе представлены результаты по модификации алгоритмов кластеризации выборки, которые позволяют распределить запросы поисковых систем по смежным областям, где действуют одинаковые правила ранжирования. В отчете рассмотрена также модель суперпозиции надпороговых процедур, с помощью которой в задаче поиска осуществляется выбор наилучших альтернатив. В подразделе 14.3 сделаны некоторые выводы по работе.

### 14.1 Основные подходы к решению задачи выбора вариантов для большого набора альтернатив

Задача выбора вариантов с использованием быстрых алгоритмов на большом наборе альтернатив является важной для целей поиска и сортировки.

Пусть задано конечное множество  $A$  альтернатив, мощность которого больше или равна двум ( $\text{card}(A) \geq 2$ ). Любое подмножество  $X \in 2^A$  может быть предъявлено для выбора. Пусть задана некоторая функция выбора  $C(\cdot)$ , которая является отображением  $C: 2^A \rightarrow 2^A$  с ограничением  $C(X) \subseteq X$  для любого  $X \in 2^A$ . Здесь  $C$  обозначает

все возможные функции выбора над множеством  $A$ . Классическая парадигма теории выбора основана на экстремизационном подходе, который заключается в том, что у множества  $A$  есть некоторый критерий качества, а выбор включает все альтернативы, имеющие экстремальное значение по этому критерию. Критериальная модель выбора может быть поделена на однокритериальную и многокритериальную модель.

Наиболее простым примером задачи поиска является выбор альтернатив при наличии одного критерия. В таких задачах задается система ограничений, а сама процедура выбора заключается в максимизации или минимизации одного критерия с учетом заданных ограничений. В реальных задачах выбор альтернатив связан с использованием нескольких критериев. Как правило, в таком случае основным решением является сведение многокритериальной задачи к однокритериальной, что, однако, не всегда возможно. Более того, зачастую некоторые из критериев могут противоречить друг другу, и задача выбора сводится к предоставлению пользователю с учетом всех критериев некоторого компромиссного набора альтернатив, из которых он мог бы выбрать наиболее подходящие для себя варианты.

Каждая альтернатива  $x \in A$  может быть представлена в виде вектора, состоящего из  $n$  критериев,  $x_1, \dots, x_n$ . Задача заключается в построении преобразования  $\phi$  – правила агрегирования на  $A$  – такого, что  $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Другими словами, задача выбора вариантов заключается в выборе подмножества альтернатив из всего множества  $A$  при наличии нескольких критериев.

В случае, когда число критериев небольшое, задача выбора альтернатив может быть решена с достаточно высокой точностью и скоростью с использованием существующих процедур выбора. Однако когда число таких критериев становится очень большим, задача выбора становится все более трудоемкой. Задача выбора еще более усложняется, когда число альтернатив также становится очень большим. Заметим, что здесь и далее термин "очень большой" набор данных используется в рамках понятия "Большие данные" (Big Data), когда число альтернатив и критериев может исчисляться тысячами или миллионами. В результате этого возникает проблема компромисса между точностью и скоростью процедур выбора альтернатив. Чем выше

точность, тем больше критериев надо учитывать, тем более сложные с вычислительной точки зрения процедуры необходимо применять, и тем больше ресурсов (времени) потребуется на обработку информации. Уменьшение времени на поиск соответствует более грубому (приближенному) способу нахождения альтернатив, что отрицательно сказывается на точности. На данный момент существует большое число процедур выбора, которые хорошо работают при наличии небольшого числа альтернатив и небольшого числа критериев, которые, однако, при увеличении числа критериев и альтернатив требуют недопустимо больших вычислительных затрат. Невозможность использования этих способов приводит к необходимости применения приближенных способов выбора, которые значительно снижают качество результатов. Поэтому необходимо разработать новые процедуры выбора, способные производить выбор альтернатив с достаточно высокой точностью за приемлемое для конечного пользователя время.

В рамках исследования рассматривается область информационного поиска, а именно задача обучения ранжированию в сети Интернет. В связи с экспоненциальным ростом количества информации в сети Интернет, а также изменением формата представления данных и используемых технологий, остро встает необходимость разработки принципиально нового подхода к проблеме обучения ранжированию. За все историю сети Интернет существовало огромное количество различных поисковых систем. Одна из первых поисковых систем, AltaVista, заключалась в том, что она выводит пользователю несортированный по релевантности список адресов веб-сайтов, а также отмечает на странице результатов жирным текстом слова, полезные пользователю. Сегодня крупнейшие поисковые гиганты – Google, Yahoo, Microsoft, Yandex – учитывают множество факторов и ранжируют документы в порядке релевантности. Однако поиск до сих пор не идеален. На наиболее распространенные запросы поисковые системы могут дать свой ответ. Однако зачастую пользователям достаточно сложно найти какую-нибудь информацию на свой специфический запрос. Так, в 2011 году по оценкам экспертов [299] точность поисковой системы Microsoft Bing достигает 80%, в то время как в поисковой системе Google точность находится около 68%. Этот факт делает задачу обучения ранжированию, точнее, со-

вершенствование ранжирования, очень актуальной и в то же время проблемной. В настоящее время все без исключения поисковые системы используют труд сотен экспертов для постоянной корректировки поисковой выдачи по той или иной тематике. Однако невозможность бесконечного наращивания штата аналитиков обуславливает необходимость научных изысканий в области обучения ранжированию. Именно поэтому ведущие поисковые Веб-гиганты вкладывают огромные средства, чтобы совершенствовать поиск и тем самым сохранить конкурентные преимущества. Из существующих общедоступных алгоритмов наиболее популярен алгоритм SVM (метод опорных векторов) [300], который работает с точностью менее 51%.

Предметом исследования является машинное обучение ранжированию (Learning to rank), класс задач машинного обучения, заключающихся в автоматическом подборе ранжирующей модели по обучающей выборке, состоящей из множества списков и заданных слабых порядков на элементах внутри каждого списка. Слабый порядок обычно задаётся путём указания оценки для каждого элемента (например, «релевантен» или «не релевантен»; возможно использование и более чем двух градаций). Цель ранжирующей модели — наилучшим образом (в некотором смысле) приблизить и обобщить способ ранжирования в обучающей выборке на новые данные.

Целью исследования является создание новых, а также применение существующих способов ранжирования записей в поисковых системах для удовлетворения потребностей пользователей в поиске. В рамках исследования был выбран набор данных LETOR 4.0, предоставленный подразделением Microsoft Research корпорации Microsoft, на основе которого происходит построение ранжирующей модели. В отчете предлагается подход к созданию автоматизированной системы, способной самостоятельно обучаться на исходных данных, после чего классифицировать входящие запросы и объекты и автоматически назначать последним релевантность, формировать ранжированную поисковую выдачу.

Задачами исследования являются:

– изучение принципов и алгоритмов работы современных поисковых систем;

- разработка ранжирующей модели, с помощью которой происходит определение наиболее релевантных страниц в сети Интернет;
- тестирование ранжирующей модели на данных Microsoft LETOR 4.0;
- анализ результатов тестирования ранжирующей модели и их сравнение с результатами, полученными другими исследователями в данной области.

В отчете предложен способ ранжирования альтернатив, основанный на суперпозиции надпороговых процедур, который производит ранжирование веб-страниц с более высокой точностью по сравнению с общедоступным алгоритмом SVM для выбранного набора данных. Таким образом, применение предложенного способа дает возможность улучшить работу поисковых систем. Кроме того, в ходе исследования предложен ряд методов кластеризации, позволяющих применять алгоритм для решения задач большой размерности.

Стоит отметить, что предложенные правила выбора могут быть применены в других сферах. Примером могут служить задачи оценки предприятий, где необходимо оценить эффективность работы торговой точки (критерии – прибыль, оборот, привлекательность для инвестиций), которая характеризуется экономическими, географическими и другими факторами. Кроме того, предложенные правила выбора могут быть использованы при решении задачи обучения ранжированию, при оценке эффективности работы предприятий и других объектов в смежных областях.

## 14.2 Основная часть

### 14.2.1 Принципы работы современных поисковых систем

Первой стадией исследования является изучение принципа работы современных поисковых систем. На основе работ [303],[301],[304],[306] были выделены следующие стадии функционирования поисковой системы.

Первой стадией любой поисковой системы является индексирование веб-страниц. Процесс индексирования представляет собой добавление в базу данных роботом поисковой системы ссылок на веб-страницы сети Интернет и информации о

них. Чем больше индекс у поисковой системы, тем большую часть сети Интернет она может охватить, тем больше релевантной информации можно найти на запрос пользователя.

Вторая стадия представляет собой процесс ранжирования, то есть нахождения релевантных страниц. Раньше правила ранжирования задавались вручную, однако теперь из-за огромного числа веб-страниц, а также спама (в том числе – похожих страниц) устанавливать вручную правила ранжирования стало все сложнее и сложнее. В связи с этим был произведен переход от ручной установки правил ранжирования к автоматической установке, осуществляемой с помощью машинного обучения. Данный шаг является основным, информация о котором будет представлена ниже.

Согласно [305],[293],[298],[302],[289], существуют три основных подхода к решению задачи обучения ранжированию:

Поточечный подход. Заключается в том, что каждой странице выставляется некоторое значение релевантности запросу, по которому происходит сортировка всех веб-страниц. Примерами данного подхода являются оценка степени релевантности с помощью регрессии.

Попарный подход. Заключается в попарном сравнении веб-страниц между собой по степени релевантности. Результатом является упорядоченный по релевантности набор страниц.

Списковый подход. Данный подход представляет собой усовершенствованную версию попарного подхода. В отличие от последнего, алгоритм сравнивает не две отдельные страницы, а два набора веб-страниц.

Опишем основной принцип обучения поисковых систем ранжированию веб-страниц (см. рисунок 14.1) [305].

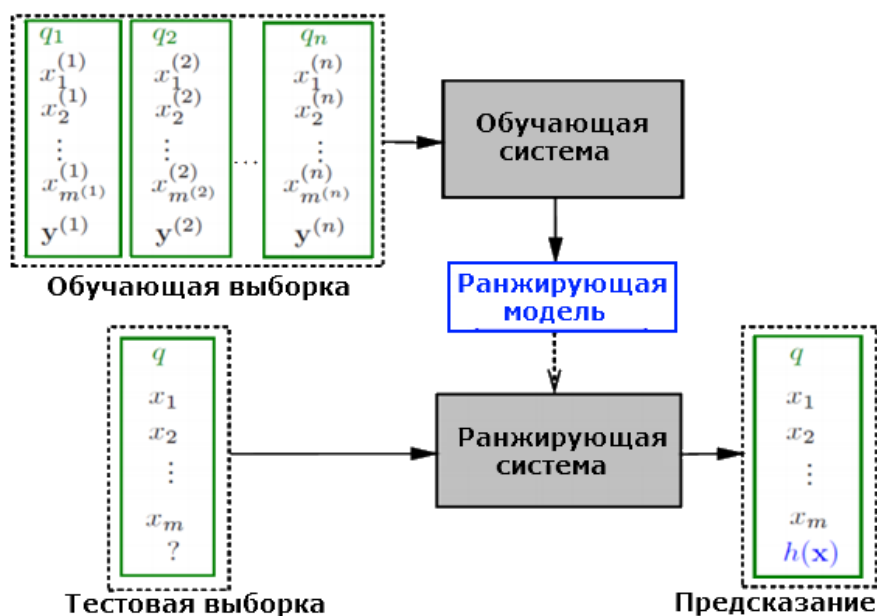


Рисунок 14.1 – Основной принцип обучения ранжированию

В самом начале составляется обучающая выборка. Проводится  $N$ -запросов. Некоторое количество страниц  $p_i$  оцениваются по этому запросу.

Предполагается, что каждой странице может быть представлена в виде набора оценок по заранее определенным факторам. Факторы представляют собой некоторые характеристики веб-страницы. Эти факторы можно поделить на три группы [307].

1. Факторы, не зависящие от запроса. Они непосредственно описывают статические свойства (характеристики) страницы. Примером могут служить такие факторы, как длина страницы, ее PageRank, длина URL и т.д.
2. Факторы, зависящие только от запроса. Например, длина запроса.
3. Факторы, зависящие как от запроса, так и от самого документа. Они представляют собой динамические характеристики страницы. Примером могут служить частота слов из запроса в заголовке документа, в его теле (основной части), либо во всем документе, а также близость слов.

Каждый фактор может быть получен (рассчитан) по формуле, либо по специальной математической модели. Можно сделать вывод, что поисковые системы не работают непосредственно с веб-страницами, а с информацией (факторами ранжирования), содержащейся на веб-странице.



Таким образом, каждой веб-странице машина ставит в соответствие вектор  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ , где  $m$  – количество факторов,  $\alpha_j$  – значение  $j$ -ого фактора.

Следующей стадией составления обучающей выборки является оценка релевантности веб-страниц. Под релевантностью документа понимается семантическое соответствие поискового запроса и информационного содержания документа [291]. Оценка релевантности веб-страниц осуществляется специальными обученными людьми поисковых компаний (ассессорами), которые ставят себя на место пользователей и пытаются найти веб-страницы наиболее релевантные запросу. Релевантность веб-страницы оцениваются по пятибалльной шкале.

Таким образом, обучающая выборка представляется в виде набора из  $N$  векторов (документов), каждый из которых представлен в следующем виде (см. Таблица 14.1):

Таблица 14.1 – Структура обучающей выборки

Документ $D$	Оценка релевантности $R$	Факторы $F$ , характеризующие документ $D$
$D_1$	$R(D_1)$	$\{f_1(D_1), \dots, f_n(D_1)\}$
$D_2$	$R(D_2)$	$\{f_1(D_2), \dots, f_n(D_2)\}$
...		
$D_N$	$R(D_N)$	$\{f_1(D_N), \dots, f_n(D_N)\}$
$\{D_i\} \Rightarrow \{R, F\}$		

где  $D = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$  – множество документов,  $R(D_i)$  – оценка релевантности документа  $D_i$ ,  $F = \{f_1(D_i), \dots, f_n(D_i)\}$  – множество значений факторов документа  $D_i$ ,  $N, n \in \mathbb{N}$  – количество документов и факторов в наборе данных.

По этой обучающей выборке с помощью обучающей системы составляется ранжирующая модель. Ранжирующая модель представляет собой некоторый набор правил, с помощью которых можно оценить релевантность веб-страниц [305].

Концепция поиска заключается в том, что пользователь вводит некоторый запрос (тестовая выборка), далее происходит вычисление значений факторов каждой веб-страницы и с помощью ранжирующей системы, построенной на основе ранжирующей модели, каждой странице ставится некоторое значение релевантности. В результате пользователю выводится список наиболее релевантных страниц.

В ходе изучения обучающих выборок различных поисковых систем, были выбраны данные из пакета данных LETOR 4.0, предоставленных подразделением Microsoft Research корпорации Microsoft, так как он был наиболее полным и хорошо задокументированным. Эти данные представляют собой некоторую часть обучающей выборки поисковой системы Microsoft Bing. В наборе данных содержится 1 175 000 документов, согласно компании Microsoft, количество факторов в наборе данных достаточно для обучения ранжирующей системы и последующей ее проверке [303].

Microsoft Research представляет собой комплексные наборы данных, содержащие описание веб-страниц с использованием набора из 136 факторов [303].

Каждый фактор вычисляется для следующих частей документа:

- тело документа (содержательная часть);
- якорь, то есть содержимое тега гиперссылки [Содержимое];
- заголовок документа;
- URL-адрес документа;
- весь документ.

Все факторы можно разделить на следующие смысловые группы.

1. Факторы, зависящие от запроса и непосредственно влияющие на релевантность:

- количество слов запроса в документе (covered query term number);
- соотношение слов запроса в документе (covered query term ratio);
- частота слов запроса в документе (term frequency);
- мера TF\*IDF;
- булева модель (boolean model);
- векторная модель (vector space model);
- мера BM25;
- языковая модель информационного поиска (LMIR).

2. Факторы, являющиеся характеристикой коллекции (запросов):

– мера IDF;

3. Факторы, характеризующие документы коллекции, которые могут влиять на релевантность:

– число входящих и исходящих ссылок (Inlink/Outlink number);

– рейтинг страницы документа и сайта, на котором он находится (PageRank/SiteRank);

– показатель качества/Показатель качества 2 (QualityScore/QualityScore 2);

– общее число кликов на ссылку документа и число кликов на ссылку документа на конкретный запрос (Query-URL/URL click count);

– время нахождения пользователя на странице (URL dwell time).

4. Факторы, характеризующие документы коллекции:

– длина потока (Stream length);

– длина потока нормированная на частоту слова (Stream length normalized term frequency);

– число слешей в URL-адресе документа (Number of slash in URL);

– длина URL-адреса документа (Length of URL).

Стандартный пакет LETOR 4.0 был разделен случайным образом на 5 частей (по 2000 запросов в каждом), из которых были составлены три выборки. Состав пакета LETOR 4.0 и цель каждой выборки в нем приведены в Таблице 13.2.

Таблица 13.2 – Состав пакета LETOR 4.0 [308]

Название выборки	Цель выборки	Количество частей	Количество запросов
Обучающая выборка	Построение ранжирующей системы	3	6000
Тестирующая выборка	Корректировка параметров ранжирующей модели	1	2000
Проверочная выборка	Оценка качества ранжирующей модели	1	2000
Всего:		5	10000

Таким образом, основная идея исследования заключается в построении по обучающей выборке ранжирующей модели, с помощью которой можно ранжировать

страницы, в соответствии с запросом. Построенная ранжирующая модель должна наилучшим образом приблизить и обобщить способ ранжирования в обучающей выборке на новые данные.

Ранжирующая модель может быть построена на основе всех 136 факторов. Однако ранжирующая система должна учитывать два важных критерия оценки ее эффективности – точность системы и скорость функционирования. Ранжирующая модель, составленная из сотни факторов, по определению не может быстро функционировать. Это объясняется тем, что одновременное использование 136 факторов для определения релевантности сильно усложняет систему. Различие между двумя документами только по одному фактору может привести к разной релевантности. Кроме того, среди 136 факторов существуют факторы, которые сильно зависят друг от друга и одновременное использование которых просто избыточно. Поэтому для упрощения ранжирующей модели было решено найти список факторов, наиболее сильно влияющих на релевантность. Эти ключевые факторы будут использованы в дальнейшем для определения релевантности веб-страницы, в то время как остальные факторы будут использоваться для повышения точности по мере необходимости. Процесс нахождения ключевых факторов (первый этап построения ранжирующей модели) выполняется с помощью процедуры анализа данных.

Вторым этапом построения ранжирующей модели является кластеризация данных. В ходе анализа данных компании Microsoft было выявлено, что находящиеся запросы в обучающей выборке принадлежат разным предметным областям, причем в этих предметных областях ключевые факторы ранжирования веб-страниц различны. Это означает, что не существует единых правил ранжирования документов. Однако было найдено экспериментальным путем, что внутри предметных областей ключевые факторы ранжирования совпадают. Это делает необходимым процесс кластеризации запросов по предметным областям и построение правил выбора по каждому кластеру. Принцип построения ранжирующей модели приведен на рисунке 14.2.

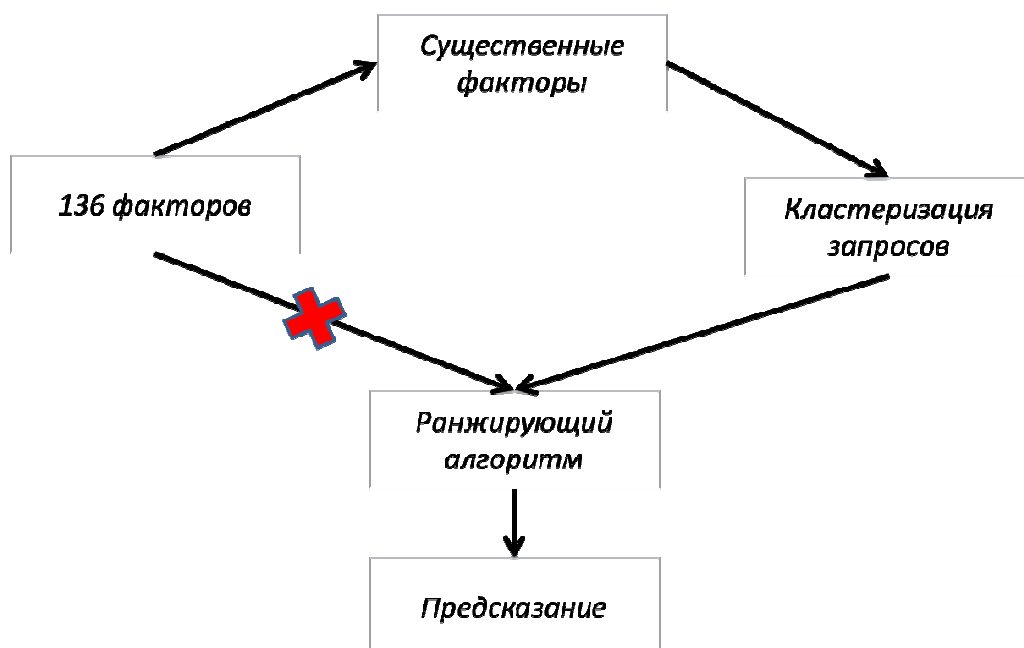


Рисунок 14.2 – Принцип построения ранжирующей модели

## 14.2.2 Анализ данных

### 14.2.2.1 Предварительный анализ данных

Набор данных LETOR является избыточным по числу факторов, многие из которых, по сути, являются комбинациями друг друга. Для обоснования данной точки зрения был проведен ряд подготовительных процедур с целью определения степени влияния факторов на релевантность объектов выборки, а также обоснования возможности исключения одних и использования впоследствии других факторов.

Для этого были проведены следующие операции с данными:

- логарифмирование данных;
- нормировка данных;
- построение корреляционной матрицы;
- диагонализация матрицы связи [297];
- регрессионный анализ.

Разработан программный комплекс, производящий вышеописанные операции автоматически. При поступлении нового пакета обучающих данных, робот само-

стоятельно уменьшает факторную размерность и выделяет только те факторы, которые являются наиболее значимыми для данной выборки.

Логарифмирование значений факторов. Для устранения эффекта масштаба было произведено логарифмирование ряда факторов. Данная процедура выполняется сразу после поступления данных на обработку.

Нормировка данных. Для возможности сравнения факторов между собой, все значения факторов были нормированы в диапазоне от 0 до 1 по следующей формуле:

$$V_{\text{нов}} = \frac{V_{\text{стар}} - V_{\text{min}}}{V_{\text{max}} - V_{\text{min}}},$$

где  $V_{\text{нов}}$  – новое значение после нормализации данных,  $V_{\text{стар}}$  – старое значение до нормализации данных,  $V_{\text{min}}$  – минимальное значение фактора,  $V_{\text{max}}$  – максимальное значение фактора.

Построение корреляционной матрицы. Для нахождения наиболее схожих между собой факторов, выполняется корреляционный анализ. Получаемая корреляционная матрица представляет собой матрицу значений индекса попарной корреляции (индекса Пирсона) между всеми 136 факторами выборки LETOR.

Диагонализация матрицы связи. Диагонализация матрицы связи позволяет получать группы с высоким уровнем корреляции между факторами в группе. Проведение этой процедуры обусловлено необходимостью исключения «лишних» факторов, то есть таких, которые хорошо коррелированы и одновременное использование которых приводит к избыточности векторного представления исходных данных. Иными словами, уменьшается размерность векторов факторов без существенной потери уникальности описания объектов.

Для получения групп близких между собой критериев были применены несколько алгоритмов диагонализации матрицы связи. Были реализованы и испытаны алгоритмы «Спектр», «Объединение» [297] и алгоритм автоматической классификации по графам «КРАБ» [290].

По результатам разбиения был выбран доработанный алгоритм «Объединение». Экспериментальным путем было показано, что оптимальным уровнем значимости для решения данной задачи является уровень, равный 0,85.

Регрессионный анализ. Выбор фактора из каждой группы происходит посредством проведения регрессии внутри группы. Выбирается такой фактор, который наибольшим образом влияет на релевантность документа. При этом проверяется значимость фактора и оценивается качество регрессии.

В ходе исследования было опробовано несколько схем уменьшения факторной размерности выборки, и одной из наиболее простых схем стало построение регрессионных моделей.

По оставшимся после диагонализации факторам выборки строится регрессия (зависимая переменная – релевантность), после чего проверяется значимость каждого фактора на уровне доверия 5% по критерию Стьюдента, незначимые факторы исключаются. Качество регрессии проверяется посредством анализа значения коэффициента детерминации. Далее выбирается набор наиболее значимых факторов, положительно и отрицательно влияющих на релевантность, составляется новая сокращенная выборка.

#### 14.2.2.2 Кластеризация данных

Следующим этапом является кластеризация данных. Выбранные данные представляет собой набор, состоящий из большого числа запросов, взятых из разных областей (тематик). Для каждой области релевантность документа может зависеть от разных факторов. Поэтому важнейшей задачей является разбиение всего пространства на подпространства, в которых работают одинаковые принципы (правила) ранжирования. Ниже приведем основные методы кластеризации:

- туннельная кластеризация;
- туннельная кластеризация с амортизацией отказов;
- интервальная кластеризация;
- алгоритм минимального покрывающего дерева (модификация КРАБ);

– алгоритм кластеризации k-средних.

Туннельная кластеризация [294],[295],[288]. Для классификации запросов был применен туннельный метод кластеризации. Выбор этого метода обусловлен его преимуществами по сравнению с иными методами кластерного анализа, а именно:

- этот подход позволяет выявить однородные совокупности без начального определения количества кластеров и их состава;
- данный алгоритм позволяет проводить кластеризацию в случае, когда система показателей для разных объектов имеет одну и ту же структуру, но отличается по абсолютному значению.

Предварительно из каждого запроса выбирается эталонный объект, т.е. тот объект, который наибольшим образом отражает структуру страниц данного запроса.

Суть метода заключается в следующем: на оси абсцисс откладываются номера факторов, которые характеризуют свойства объекта, ось ординат представляет собой ось значений этих факторов. Таким образом, для каждого эталонного объекта выделяется набор точек, соответствующий ее свойствам. Далее строится кусочно-линейная функция путем соединения этих точек прямыми линиями. Такая процедура производится для каждого объекта. Таким образом, для  $n$  объектов будет построено  $n$  функций (кривых). Кластеры формируются по результатам применения определенного алгоритма исходя из схожести этих функций. На данный момент был рассмотрен следующий алгоритм: выбирается некоторый  $i$ -й объект, который будет считаться средним элементом кластера. Далее выбирается некоторый  $j$ -й объект. Если разница между значениями факторов этих объектов не превосходит порогового значения  $\epsilon$ , то такие объекты будут принадлежать одной группе.

На рисунке 14.3 показан иллюстративный пример работы алгоритма туннельной кластеризации.



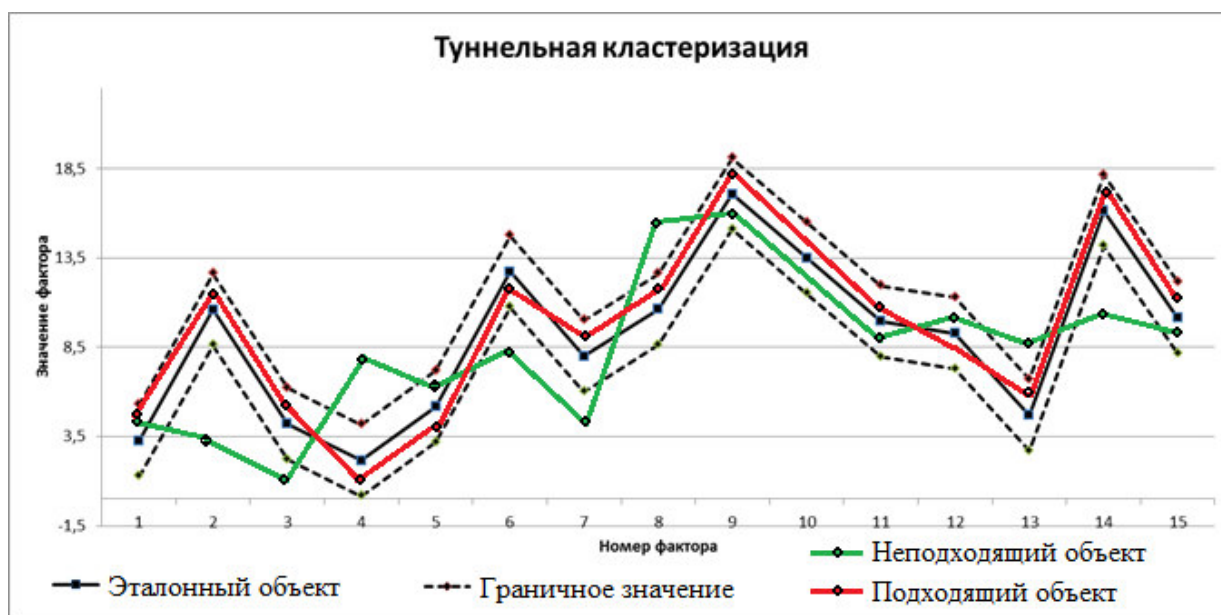


Рисунок 14.3 – Пример работы алгоритма туннельной кластеризации

Главным преимуществом туннельной кластеризации является ее быстрота, что критически важно при работе с большими объемами данных. Однако туннельная кластеризация становится все более неточной и неэффективной с увеличением количества факторов.

Туннельная кластеризация с амортизацией отказов. Из-за большой размерности пространства результаты туннельной кластеризации становятся уязвимы к «шумам» – резким различиям между объектами по одному или нескольким факторам. Может возникнуть такая ситуация, что очень похожие объекты не попадут в один кластер из-за разницы в значении незначимых всего нескольких показателей. Такое расхождение может быть вызвано, например, ошибкой при вычислении значения фактора на этапе индексирования страницы.

Здесь предлагается использовать следующий подход. Перед проведением кластеризации выделяется набор факторов, значимость которых играет второстепенное значение. То есть, они могут неявно оказывать влияние на релевантность. Такое подмножество может быть выделено, например, исходя из проведенной ранее регрессии, или же основываясь на результатах работы алгоритма надпороговой суперпозиции (факторы, не вошедшие в дерево решений, считаются малозначимыми).

Далее задается предельное число несовпадений (непопаданий в туннель по текущему значению фактора) по значимым и второстепенным факторам, в рамках ко-

торого отклонения допустимы. Например, пусть имеется множество факторов  $F$  мощностью  $N_F$ . Оно условно делится на два подмножества: множество  $F_I$  значимых факторов и множество  $F_{II}$  второстепенных факторов. Для каждого из подмножеств задаются предельные значения несовпадений  $V_{FI}$  и  $V_{FII}$ .

В процессе работы алгоритма подсчитывается число непопаданий точки в  $\varepsilon$ -коридор для обоих подмножеств, и если ни одно из значений  $V_{FI}$  и  $V_{FII}$  не достигается, точка включается в кластер.

Интервальная кластеризация. Авторами проекта предложена интервальная кластеризация запросов поисковых систем по тематике, которая представляет собой модификацию туннельной кластеризации. В данном алгоритме эталоном является не одна страница запроса, а их набор, который представлен в виде интервалов. Это значит, что каждый запрос  $qid$  представляется не набором точек, а набором интервалов.

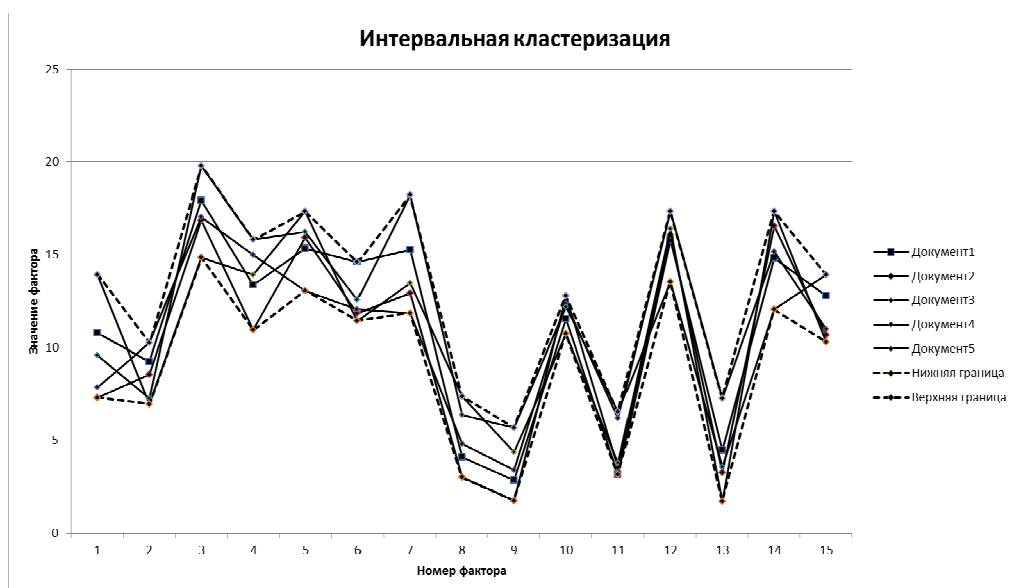


Рисунок 14.4 – Принцип работы интервальной кластеризации

На оси абсцисс откладываются номера факторов, которые характеризуют свойства запроса, ось ординат представляет собой ось интервальных значений этого запроса.

Два запроса являются схожими, если при наложении интервалов по каждому фактору не менее  $k$ -процентов точек находятся в одном и том же диапазоне (см. рисунок 14.4).

В ходе изучения обучающей выборки было найдено, что одновременное применение максимизации/минимизации значений факторов существенно не повышает точность ранжирования. Однако одновременное применение надпороговых процедур по нескольким факторам может дать необходимый результат. Другими словами, последовательная процедура исключения веб-страниц (объектов) уменьшает количество нерелевантных объектов и увеличивает точность ранжирования. Эта процедура является основой для разрабатываемого алгоритма.

Алгоритм минимального покрывающего дерева (модификация КРАБ) [290].

Алгоритм минимального покрывающего дерева (далее - МПД) сначала строит на графе минимальное покрывающее дерево, а затем последовательно удаляет ребра с наибольшим весом. Ниже на рисунке 14.5 показан пример МПД для 9 объектов в двухмерном пространстве.

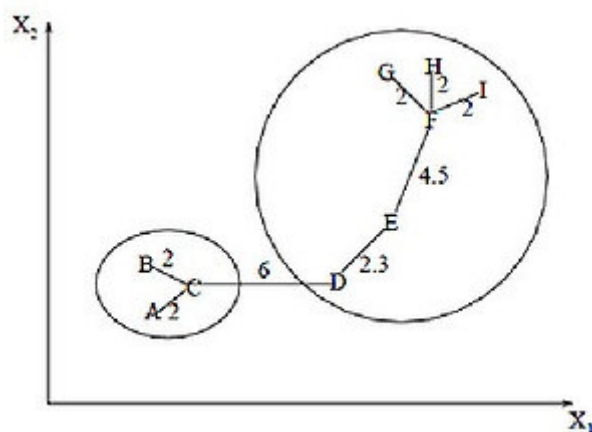


Рисунок 14.5 – Пример работы алгоритма МПД

В исследовании была использована модификация алгоритма построения минимального покрывающего дерева – алгоритм автоматической классификации КРАБ. Он предназначен для агрегирования элементов, заданных матрицей расстояний между ними.

Алгоритм строит МПД, разбивает его на таксоны посредством алгоритма Прима, а затем оценивает качество разбиения с помощью следующей характеристике:

$$L = \ln\left(\frac{D \cdot H}{G \cdot R}\right), \quad (14.1)$$

где  $R$  – оценка средней длины внутренних ребер подмножеств,

$$R = \frac{1}{K} \sum_{q=1}^K \frac{1}{M_q - 1} \sum_{i=1}^{M_q - 1} R(i, q),$$

причем  $M_q$  – число элементов, агрегированных в  $q$ -м под-

множестве,  $R(i, q)$  – длина  $i$ -го ребра в  $q$ -м подмножестве. Поскольку оценка  $R$  учитывается в знаменателе функционала  $L$ , то чем меньше расстояния внутри каждого подмножества и, следовательно, меньше их сумма, тем выше значение функционала  $L$ .

Другой параметр в (14.1), величина  $D$  – оценка средней длины ребер, соединяющих подмножества в кратчайшем наименьшем пути между собой:

$$D = \frac{1}{K - 1} \sum_{q=2}^K d_q$$

где  $d_q$  – длина ребра, в кратчайшем наименьшем пути между  $q$ -м и  $q-1$  подмножествами.

Третий параметр в (14.1), величина  $G$  – средний перепад (градиент) расстояний между элементами на границах подмножеств

$$G = \frac{1}{K - 1} \sum_{q=2}^K \frac{R_{\min}}{d_q},$$

где  $R_{\min}$  – наименьшее из примыкающих к  $d_q$  ребер  $q$ -го и  $(q-1)$ -го подмножеств.

Наконец, четвертый параметр в (14.1), величина  $H$  – оценка равномерности распределения элементов по  $K$  подмножествам, изменяющаяся в диапазоне от нуля (когда в одно из  $K$  требуемых подмножеств не попало ни одного элемента) до единицы (когда в каждом из  $K$  подмножеств содержится ровно  $[M/K]$  элементов, где  $M$  – общее число элементов в исходном подмножестве). Итак,

$$H = K^2 \cdot \prod_{q=1}^K \frac{M_q}{M}.$$

С помощью характеристики (14.1) можно определить степень принадлежность объекта кластеру. Следует отметить, что данный алгоритм хорошо работает с небольшими выборками, например, при разбиении кластера на подкластер. Однако, он

неприменим при первичной кластеризации по причине больших требований к памяти и высокой теоретической сложности.

Алгоритм кластеризации k-средних. Алгоритм кластеризации k-средних [309] разбивает множество документов на заранее известное количество кластеров  $k$ . На первом шаге происходит случайное составление  $k$  кластеров. Основная идея алгоритма заключается в том, что на каждой итерации происходит перевычисление центра масс для каждого кластера, полученного на предыдущем шаге, затем документы разбиваются на кластеры вновь в соответствии с тем, какой из новых центров оказался ближе по выбранной метрике (использовалось евклидово расстояние). Алгоритм завершается, когда на какой-то итерации не происходит изменения кластеров.

Основной идеей применения алгоритма k-средних является нахождение скопления высоко релевантных документов (принадлежность к запросам  $q_{id}$  не учитывается). Для этого используется вышеописанный алгоритм k-средних. Опишем принцип применения алгоритма кластеризации к выбранному набору данных:

- набор данных представляется как единое целое (все запросы обучающей выборки);
- применяется алгоритм ранжирования по набору данных; если достигнут заданный процент  $k\%$  высоко релевантных документов от общего числа документов, то переходим к пункту 5, иначе – к пункту 3;
- применяется алгоритм кластеризации k-means для двух кластеров и выборке высоко релевантным документов;
- для каждого кластера переходим к пункту 2;
- сформированный набор данных представляется как единый кластер.

Другими словами, происходит последовательное деление пространства на подпространства, в которых можно ранжировать документы. Таким образом, создаются группы схожих документов.

В результате выполнения алгоритма формируется набор кластеров, в каждом из которых можно отличить высоко релевантные документы от низко релевантных документов с достаточно высоким уровнем точностью.

### 14.2.2.3 Правила выбора

Наиболее важным этапом является ранжирование данных. Ранжирование заключается в формировании некоторых правил, по которым можно отличить релевантные документы от нерелевантных документов, а также оценить каждый из них. Основной особенностью ранжирующей модели является то, что она должна быть построена на основе таких правил выбора, вычислительная сложность которых не должна существенно зависеть от количества идущих к ней на вход объектов. В результате были разработаны следующие правила выбора:

- модель суперпозиции надпороговых правил с использованием эталонного фактора;
- модель суперпозиции надпороговых правил с использованием функции распределения.

Кроме того, в рамках исследования были применены следующие существующие правила выбора:

- Парето-оптимальные границы;
- матрично-векторное представление процедур выбора;
- лексиминные процедуры.

Суперпозиция надпороговых процедур. Как было описано ранее, каждая альтернатива  $x$  из множества  $A$  может быть оценена набором  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , где  $n$  – число критериев. При этом в зависимости от контекста каждый критерий  $x_i$ , где  $i=1, \dots, n$ , имеет определенное значение  $x_i^*$ , являющееся порогом качества.

Сущность надпороговых процедур [292] заключается в выборе таких альтернатив из  $A$ , у которых значение по критерию  $x_i$  выше (или ниже) некоторого порога качества  $x_i^*$ . При использовании надпороговых процедур альтернативы, не удовлетворяющие заданному условию, исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Надпороговые модели имеют значительные преимущества над традиционными моделями выбора, использующими парные сравнения. Во-первых, попарное сравнение альтернатив является для больших наборов данных вычислительно сложной задачей (сложность  $O(n^2)$ ), в то время как при использовании надпороговых процедур требуется всего  $O(n)$  операций, где  $n$  – число критериев. Во-вторых, надпороговые модели являются более гибкими, так как пороговые значения могут быть заданы вручную или вычислены динамически. Кроме того, эти пороговые значения могут варьироваться в процессе корректировки модели. В-третьих, в рамках надпороговых моделей возможно использование экспертных настроек таких моделей.

Принцип суперпозиции заключается в последовательной композиции функций  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  по каждому критерию, где  $n$  – число критериев. Стоит отметить, что операция суперпозиции не является коммутативной, т.е. изменение последовательности функций ведет к различным результатам:

$$f_1(f_2(x)) \neq f_2(f_1(x)).$$

Надпороговый подход, основанный на идее суперпозиции, заключается в последовательной композиции надпороговых функций  $f_1(x), \dots, f_n(x)$ , т.е. тех функций, значения альтернатив по которым должны быть больше (или меньше) назначенных порогов. Таким образом, основным принципом суперпозиции надпороговых процедур является последовательное применение фильтрующей надпороговой процедуры к данным так, что выбор предыдущей надпороговой процедуры передается на вход следующей процедуре выбора. Другими словами, количество альтернатив с каждым шагом модели сокращается. С каждой итерацией происходит обновление эталонных значений (порогов) и выборки на основании решений, принятых на предыдущих шагах. В результате строится система ограничений, с помощью которой происходит выбор наилучших для конкретного пользователя альтернатив.

Опишем два основных принципа определения последовательности и направлений надпороговых отсечений по критериям, а также значений порогов по каждому критерию для выбора наилучших альтернатив.

Модель суперпозиции надпороговых правил с использованием эталонного фактора. В первом случае, последовательность применения надпороговых процедур может быть осуществлена с использованием эталонного критерия. Критерий называется эталонным  $\varphi^*$ , если значение разброса наилучших альтернатив по данному критерию является минимальным среди значений разбросов по всем остальным критериям.

$$\varphi^* = \{\varphi_i \in \varphi \mid \forall j, j \neq i: \max_{x \in A^*} \varphi_i(x) - \min_{x \in A^*} \varphi_i(x) \leq \max_{x \in A^*} \varphi_j(x) - \min_{x \in A^*} \varphi_j(x)\},$$

где  $\varphi$  – множество всех критериев,  $A^*$  – множество всех наилучших альтернатив,  $A^* \subset A$ .

Другими словами, эталонный критерий – это тот критерий, по которому наблюдается наибольшее совпадение между наилучшими альтернативами. Таким образом, выбирается наиболее «кучный» критерий. Пример выбора эталонного фактора показан на рисунке 14.6.

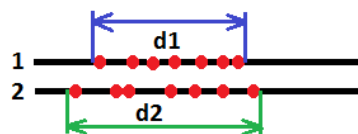


Рисунок 14.6 – Выбор эталонного критерия. (Критерий 1 предпочтительнее критерия 2, т.к.  $d1 < d2$ )

Эталонный критерий определяет последовательность применения суперпозиции надпороговых правил (составление дерева исключений). Направление отсечения по порогу осуществляется в зависимости от того, надо ли минимизировать или максимизировать критерий. Значение порога может быть как заранее установлено (среднее, медиана, некоторое фиксированное значение), так и меняться в процессе выбора последовательности отсечений.

Последовательность отсечений выполняется в соответствии со следующим правилом. Надпороговый выбор осуществляется по тому критерию, с помощью которого при применении надпороговой процедуры наблюдается наименьший разброс наилучших альтернатив по эталонному критерию (наибольшая в диапазоне по эталонному критерию доля наилучших альтернатив). По найденному критерию производится применение модели надпорогового выбора, в результате чего количество



альтернатив сокращается и выбранный критерий исключается из дальнейшего рассмотрения, после чего процедура выбора последовательности отсечений повторяется. Процедура выбора последовательности отсечений происходит до тех пор, пока все критерии не будут использованы, либо пока не будут исключены все альтернативы, не являющихся эффективными.

Таким образом, в результате применения модели суперпозиции надпороговых правил с использованием эталонного фактора, происходит определение правила выбора (построения дерева исключений) наилучших альтернатив.

Блок-схема модели представлена на рисунке 14.7.

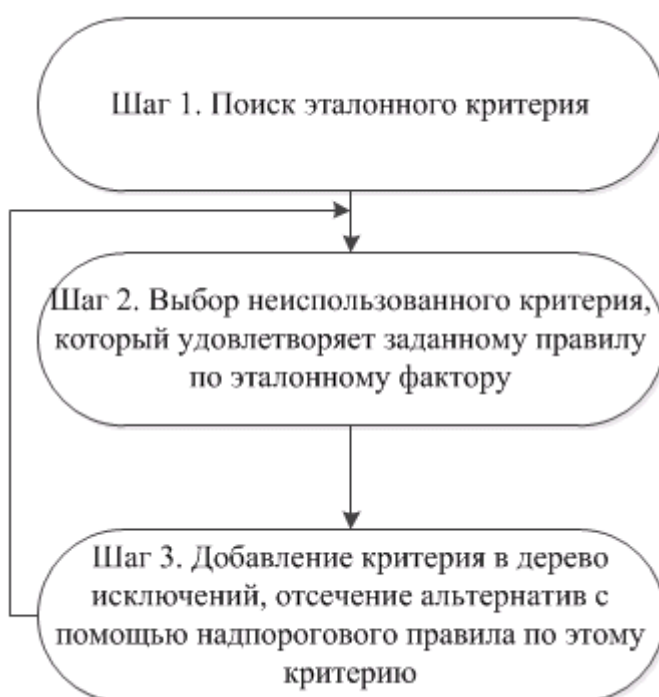


Рисунок 14.7 – Блок-схема модели суперпозиции надпороговых правил

В результате было проведено два теста. В первом тесте основной задачей было отличить релевантные страницы (значение релевантности “3” и “4”) от нерелевантных страниц. Во втором тесте основной задачей было отличить высоко релевантные страницы от всех остальных. Результаты проведения тестов приведены в Таблице 14.3.

Таблица 14.3 – Результаты тестирования правила выбора

Название теста	Процент запросов с точностью ранжирования				Средняя точность ранжирования
	<40%	40%-60%	60%-90%	>90%	

Тест 1	35%	13%	12%	40%	<b>65%</b>
Тест 2	10%	8%	17%	65%	<b>84%</b>

Приведенные в Таблице 14.3 результаты показывают, что разработанная модель позволяет ранжировать записи с высокой точностью. В первом тесте можно определить релевантность страницы с точностью 65%, во втором тесте – с точностью 84%.

Стоит отметить, что на данный момент точность модели недостаточно высокая, что может быть объяснено несколькими причинами.

Первой причиной являются ошибки экспертов. В обучающей выборке выставление релевантности осуществляется людьми, а это значит, что существует вероятность того, что релевантность документа была задана неверно. Данная проблема может быть решена с помощью повторного определения релевантности сомнительных документов, а также с помощью допущения ошибок в обучающей выборке, то есть осуществление перехода к вероятностной модели.

Второй причиной является недостаточное количество факторов ранжирования. Это означает, что, возможно, при ранжировании записей не учитывался фактор, который достаточно сильно влияет на релевантность в конкретном запросе. Кроме того, существует вероятность того, что список предоставленных 136 факторов недостаточен, то есть в обучающей выборке отсутствуют факторы, с помощью которых можно отличить релевантную информацию от нерелевантной. Данная проблема решается с помощью введения в ранжирующую модель дополнительных факторов, которые не были учтены ранее.

Низкая точность ранжирования основных поисковых систем может быть объяснена проблемой “подгонщиков” сайтов. Процедура подгона сайтов заключается в искусственном повышении позиции сайта. В случае, когда искусственный подгон был осуществлен для релевантных страниц, общее качество поиска не снижается. Однако в основном подгон осуществляется для нерелевантных страниц со спамом, что незамедлительно ухудшает качество поиска. Эта проблема достаточно актуальна для любой поисковой системы; выходом из этой ситуации является ручная правка или разработка специальных методов, с помощью которых можно определить со-

держание страницы (является ли она нежелательной, содержит ли она спам или вирусы и т.д.).

Модель суперпозиции надпороговых правил с использованием функции распределения. Модель суперпозиции надпороговых правил с использованием функции распределения заключается в выборе последовательности пороговых отсечений с использованием функции распределения.

Всё множество альтернатив может быть поделено на две группы: множество наилучших альтернатив и остальные. Каждая группа может быть представлена в виде набора функций распределения значений по каждому критерию. Значение порога по каждому критерию может быть определено как такое значение, по которому разница между двумя функциями распределения является максимальной.

$$V^* = \max_{x \in X} |F_1(x) - F_2(x)|,$$

где  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  – значение функций распределения наилучших альтернатив и остальных.

Пример определения порога приведен на рисунке 14.8.

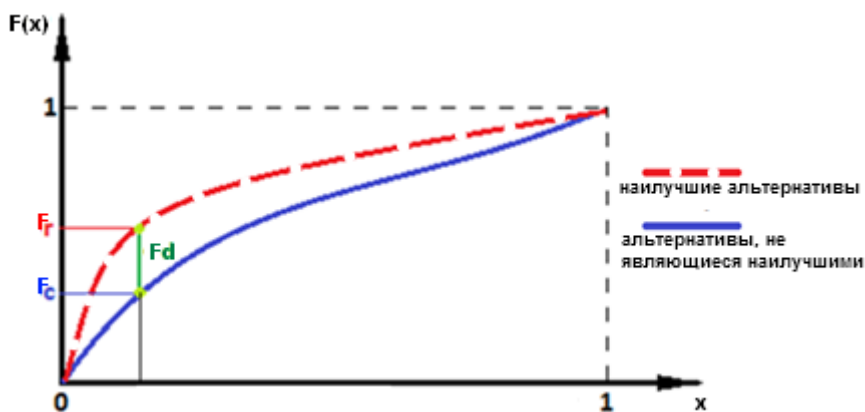


Рисунок 14.8 – Определение значения порога по каждому критерию

Последовательность отсечений выполняется в соответствии со следующим правилом. Надпороговый выбор осуществляется по тому критерию, по которому разница между двумя функциями распределения является наибольшей. По этому критерию применяется надпороговое правило выбора, в результате чего количество альтернатив сокращается и выбранный критерий исключается из дальнейшего рас-

смотрения, после чего процедура построения функций распределения, а также выбора последовательности отсечений повторяется. Процедура выбора последовательности отсечений повторяется до тех пор, пока все критерии не будут использованы, либо пока не будут исключены все альтернативы, не являющиеся эффективными.

Таким образом, в результате применения модели суперпозиции надпороговых правил с использованием функции распределения, происходит определение правила выбора (построения дерева исключений) наилучших альтернатив.

Ниже приводятся результаты тестирования модели.

Статистика по данным LETOR, использованным в тестировании указана в Таблице 14.4.

Таблица 14.4 – Статистика по тестовой подвыборке

Всего объектов	235000	Объектов в тестовой выборке	16627
Число релевантных объектов	6012	Число релевантных объектов в выборке	1404
Процент релевантных объектов	2,56	Процент релевантных объектов*	8,44

При проведении данного теста релевантными считались объекты, имеющие релевантность 3 и 4. Для тестирования модели была взята часть данных, состоящая из тех запросов, в которых доля релевантных объектов составляет не менее 8%. Это было сделано для проверки работоспособности модели на менее зашумленных данных, чем в общей выборке.

Результаты до и после работы модели (точность выделения релевантных групп) приведены в Таблице 14.5.

Таблица 14.5 Результаты выделения релевантных объектов

Минимальный процент релевантных объектов	26
Максимальный процент релевантных объектов	75,1
Средний процент релевантных объектов	41,3

Парето-оптимальные границы. В основе правила выбора лежит принцип оптимальности по Парето. Каждый фактор, характеризующий документ, максимизируется, минимизируется, либо не учитывается (ни максимизируется, ни минимизируется).

ся) исходя из его смысла или знака регрессии. В соответствии с этими правилами происходит поиск документов оптимальных по Парето. Парето-оптимальные решение – это такой набор точек  $A$ , что не найдется любой другой точки  $X$ , лучшей, чем  $A$ :

$$C(A) = \{y \in A \mid \nexists x \in X: (\forall i: u_i(x) - \varepsilon_i(x) \geq u_i(y) + \varepsilon_i(y) \ \& \ \exists i_0: u_{i_0}(x) - \varepsilon_{i_0}(x) > u_{i_0}(y) + \varepsilon_{i_0}(y))\}.$$

Стоит отметить, что для каждого фактора вводится некоторый уровень погрешности  $\varepsilon$ . В ходе тестирования правила выбора была показана его неэффективность на выбранном наборе данных. Первой причиной неэффективности указанного правила является его высокая вычислительная сложность, т.к. он производит сравнение каждого объекта со всеми другими. Второй причиной неэффективности способа является неочевидность максимизации/минимизации значений факторов, находящихся в выбранном наборе данных, что приводит к низкой точности прогнозирования описанного правила.

Матрично-векторное представление процедур выбора. В качестве правил ранжирования были испытаны разработанные матрично-векторные представления решений выбора победителей [296], основанных на правиле большинства.

Под решением выбора победителя понимается ранжирующая процедура, посредством которой из исходного множества альтернатив по набору оценочных факторов выделяется подмножество победителей.

Были испытаны следующие модели:

- победитель Кондорсе;
- ядро;
- непокрытое множество;
- незахваченное множество;
- минимальное внешне устойчивое множество.

Пусть дан набор альтернатив {a,b,c}, которые оцениваются по трем факторам  $f_1, f_2, f_3$ . Исходя из смысла каждого фактора делается вывод об их влиянии на порядок ранжирования альтернатив. Вначале строится мажоритарный граф альтернатив, по которому формируется мажоритарная матрица. Ниже в Таблице 14.6 приведен пример для трех альтернатив и трех факторов.

Таблица 14.6 – Начальное представление данных

	f1	f2	f3	Score
a	0	1	0	1
b	1	1	0	2
c	1	0	1	0
Trend	1	1	-1	

Как видно из примера выше,  $b > a > c$ .

Мажоритарная матрица (далее – матрица M) строится следующим образом. Пусть  $i, j$  – сравниваемые альтернативы, тогда  $a_{ij}=1$  если  $Score(i) > Score(j)$ , и  $a_{ij}=0$ , если  $Score(i) < Score(j)$ . Мажоритарная матрица для нашего примера будет иметь вид, показанный в Таблице 14.7.

Таблица 14.7 – Мажоритарная матрица

	a	b	c
a	0	0	1
b	1	0	1
c	0	0	0

Помимо мажоритарной матрицы, вычисляется матрица ничьих (далее – матрица T). Пусть  $i, j$  – сравниваемые альтернативы, тогда  $a_{ij}=1$  если  $Score(i) = Score(j)$ , иначе  $a_{ij}=0$ . Для нашего примера матрица ничьих T примет следующий вид (см. Таблицу 14.8).

Таблица 14.8 – Матрица ничьих

	a	b	c
a	0	0	0
b	0	0	0
c	0	0	0

Также вводится характеристический вектор  $a$ , размерность которого равна общему числу альтернатив, а элемент  $a_i$  которого равен 1, если соответствующая альтернатива вовлечена в процедуру сравнения, и 0 в противном случае. В данной работе вектор  $a$  всегда состоит из 1.

Рассмотрим теперь правило, согласно которому вычисляется победитель по Кондорсе ( $cw$  – Condorcet winner):

$$cw = \overline{\overline{(M + E) \cdot a}},$$

где  $E$  – единичная матрица,  $M$  – мажоритарная матрица,  $a$  – характеристический вектор. Следует отметить, что в данных моделях операции сложения и умножения являются булевыми.

В нашем примере победителем Кондорсе является альтернатива  $b$ .

При большом числе альтернатив победители очередной итерации занимают соответствующее место и исключаются из дальнейшего рассмотрения. Процедура определения победителей рекурсивно повторяется до тех пор, пока все альтернативы не будут отранжированы.

Ниже приведены модели, использованные при проведении экспериментов с ранжирующей моделью:

Ядро:

$$cr = \overline{\overline{(M + T + E) \cdot a}}.$$

Версии непокрытого множества:

$$UCNa1 = \overline{\overline{(M \cdot M + M + T + E) \cdot a}};$$

$$UCNa2 = \overline{\overline{(M \cdot T + M \cdot M + M + T + E) \cdot a}};$$

$$UCNa3 = \overline{\overline{(T \cdot M + M \cdot M + M + T + E) \cdot a}};$$

$$UCNa4 = \overline{\overline{(T \cdot M + M \cdot T + M \cdot M + M + T + E) \cdot a}};$$

$$UCNa5 = \overline{\overline{\overline{(T \cdot T + T \cdot M + M \cdot T + M \cdot M + M + T + E) \cdot a}}}}$$

$$UCNc1 = \overline{\overline{\overline{(M \cdot M + M + E) \cdot a}}}}$$

$$UCNc2 = \overline{\overline{\overline{(M \cdot T + M \cdot M + M + E) \cdot a}}}}$$

$$UCNc3 = \overline{\overline{\overline{(T \cdot M + M \cdot M + M + E) \cdot a}}}}$$

$$UCNc4 = \overline{\overline{\overline{(T \cdot M + M \cdot T + M \cdot M + M + E) \cdot a}}}}$$

$$UCNc5 = \overline{\overline{\overline{(T \cdot T + T \cdot M + M \cdot T + M \cdot M + M + E) \cdot a}}}}$$

$$UC2b = \overline{\overline{\overline{\left( \overline{R + \overline{R}^{ir}} \right) \cdot a}}}}, \text{ где } R = \overline{\overline{\overline{(M \cdot T + M \cdot M + M + E) \cdot a}}}$$

$$UC3b = \overline{\overline{\overline{\left( \overline{R + \overline{R}^{ir}} \right) \cdot a}}}}, \text{ где } R = \overline{\overline{\overline{(T \cdot M + M \cdot M + M + E) \cdot a}}}$$

Незахваченное множество:

$$UCP = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{(M \cdot T \cdot M + M \cdot M \cdot M + T \cdot M + M \cdot T + M \cdot M + M + E) \cdot a}}}}}}}}$$

Минимальное внешне устойчивое множество:

$$MES = (M + E) \cdot \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{(T \cdot M + M \cdot M + M + T + E) \cdot a}}}}}}}}$$

Экспериментально было доказано, что наилучший результат (наиболее качественное ранжирование) достигается использованием версий UCNa3, UCNb2, UCNb3, UCNc3, UCNc4 непокрытого множества, а также использованием минимального внешне-устойчивое множества (MES).

Применение матрично-векторных процедур показывает наилучший результат на малых кластерах или при «тонком» ранжировании однородных данных в силу их высокой вычислительной сложности равной  $O(n^3)$ . Однако, алгоритмы работы с матрицами, во-первых, используют булевы операции, а во-вторых, хорошо распа-



раллеливаются, что снижает требования к оборудованию и позволит в перспективе применять матрично-векторные процедуры выбора к большим объемам данных.

Лексиминные процедуры. Перед выполнением лексиминных процедур необходимо провести n-градационное деление. Это объясняется тем, что в основе лексиминных процедур лежит выявление максимальных (минимальных) значений, а в случае, если фактор имеет сотни или даже тысячи различных значений с разницей в тысячные, отказ от n-градационного деления приведет к совершенно неправильным результатам.

Опишем принцип n-градационного деления.

Градационное деление. Градационное деление позволяет осуществить переход к дискретной модели. Первым этапом n-градационного деления является построение гистограмм, с помощью которых можно выявить диапазоны значений факторов и их количество в каждом диапазоне. В зависимости от близости по диапазону и числу элементов в каждом из них, вся выборка делится на n-классов. Пример 5-градационного деления показан на рисунке 14.9.

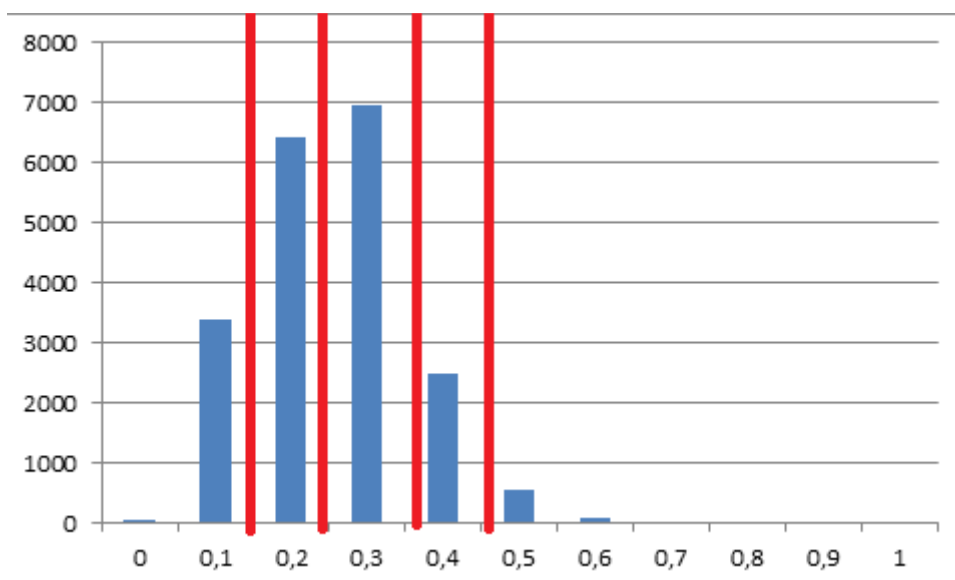


Рисунок 14.9 – Пример 5-градационного деления

Полученные группы разбиения: 0-0,1(1); 0,2 (2); 0,3 (3); 0,4 (4); 0,5-1 (5).

В соответствии с построенными группами разбиения производится замена значений критериев.

Лексиминные процедуры очень часто используются в процедурах выбора. Существует 5 вариантов (агрегирующих функций) лексиминных процедур.

#### Вариант 1. Подсчет количества минимумов $m$ .

Основная идея процедуры заключается в том, что берутся два документа и в них происходит поиск количества наихудших (минимальных) значений  $m$ . Документ, имеющий меньше таких значений, объявляется победителем.

Пример 14.1. Есть два вектора  $(1;1;2;3;4;3;5;3)$  и  $(1;1;1;3;5;3;4;5)$ . Для первого вектора количество минимальных значений (в данном случае – 1) два, для второго – 3. Следовательно, второй документ хуже первого.

В случае если количество минимальных значений одинаково, то происходит подсчет количества вторых наихудших значений и у кого их меньше, то лучше.

Таким образом, для каждого документа считается количество “побед” над остальными документами и затем происходит ранжирование документов в соответствии с их количеством.

#### Вариант 2. Подсчет количества максимумов $M$ .

Основная идея процедуры заключается в том, что берутся два документа и в них происходит поиск количества наилучших (максимальных) значений  $M$ . Документ, имеющий больше таких значений, объявляется победителем.

Пример 14.2. Есть два вектора  $(1;1;2;3;4;3;5;3)$  и  $(1;1;1;3;5;3;4;5)$ . Для первого вектора количество максимальных значений (в данном случае – 5) одно, для второго – 2. Следовательно, второй документ лучше первого.

В случае если количество максимальных значений одинаково, то происходит подсчет количества вторых наилучших значений и у кого их больше, тот лучше.

Таким образом, для каждого документа считается количество “побед” над остальными документами и затем происходит ранжирование документов в соответствии с их количеством.

Вариант 3. Агрегированный подсчет количества минимумов и максимумов,  $\alpha=0.1$ .

Основная идея этой агрегированной процедуры заключается в том, что берутся два документа и в них происходит поиск количества наихудших (минимальных) значений  $m$  и наилучших (максимальных) значений  $M$ . Затем происходит вычисление функции  $F$ , равной:

$$F = \alpha \cdot M + (1 - \alpha) \cdot m, \text{ где } \alpha=0.1.$$

Таким образом,

$$F = 0,1 \cdot M + 0,9 \cdot m.$$

Документ, имеющий большее значение функции  $F$ , объявляется победителем.

Пример 14.3. Есть два вектора  $(1;1;2;3;4;3;5;3)$  и  $(1;1;1;3;5;3;4;5)$ . Для первого вектора количество минимальных значений (в данном случае – 1) два, для второго – 3. Для первого вектора количество максимальных значений (в данном случае – 5) одно, для второго – 2.  $F_1 = 0.1+0.9 \cdot 2=1.9$ ,  $F_2 = 0.1 \cdot 2+0.9 \cdot 3=2.9$ . Следовательно, второй документ лучше первого.

Таким образом, для каждого документа считается количество “побед” над остальными документами и затем происходит ранжирование документов в соответствии с их количеством.

Вариант 3. Агрегированный подсчет количества минимумов и максимумов,  $\alpha=0.2$ .

Основная идея этой агрегированной процедуры заключается в том, что берутся два документа и в них происходит поиск количества наихудших (минимальных) значений  $m$  и наилучших (максимальных) значений  $M$ . Затем происходит вычисление функции  $F$ , равной:

$$F = \alpha \cdot M + (1 - \alpha) \cdot m, \text{ где } \alpha=0.2.$$

Таким образом,

$$F = 0,2 \cdot M + 0,8 \cdot m.$$

Документ, имеющий большее значение функции  $F$ , объявляется победителем.

Пример 14.4. Есть два вектора (1;1;2;3;4;3;5;3) и (1;1;1;3;5;3;4;5). Для первого вектора количество минимальных значений (в данном случае – 1) два, для второго – 3. Для первого вектора количество максимальных значений (в данном случае – 5) одно, для второго – 2.  $F_1 = 0.2+0.8 \cdot 2=1.8$ ,  $F_2 = 0.2 \cdot 2+0.8 \cdot 3=2.8$ . Следовательно, второй документ лучше первого.

Таким образом, для каждого документа считается количество “побед” над остальными документами и затем происходит ранжирование документов в соответствии с их количеством.

Вариант 3. Агрегированный подсчет количества минимумов и максимумов,  $\alpha=0.3$ .

Основная идея этой агрегированной процедуры заключается в том, что берутся два документа и в них происходит поиск количества наихудших (минимальных) значений  $m$  и наилучших (максимальных) значений  $M$ . Затем происходит вычисление функции  $F$ , равной:

$$F = \alpha \cdot M + (1 - \alpha) \cdot m, \text{ где } \alpha=0.3.$$

Таким образом,

$$F = 0,3 \cdot M + 0,7 \cdot m.$$

Документ, имеющий большее значение функции  $F$ , объявляется победителем.

Пример 14.5. Есть два вектора (1;1;2;3;4;3;5;3) и (1;1;1;3;5;3;4;5). Для первого вектора количество минимальных значений (в данном случае – 1) два, для второго – 3. Для первого вектора количество максимальных значений (в данном случае – 5) одно, для второго – 2.  $F_1 = 0.3+0.7 \cdot 2=1.7$ ,  $F_2 = 0.3 \cdot 2+0.7 \cdot 3=2.4$ . Следовательно, второй документ лучше первого.

Таким образом, для каждого документа считается количество “побед” над остальными документами и затем происходит ранжирование документов в соответствии с их количеством.

### 14.3 Некоторые выводы

В ходе исследования были проанализированы реальные интернет-данные поисковой системы и разработан подход, с помощью которого можно классифицировать приходящие поисковые запросы и составлять список из наиболее релевантных страниц. Важнейшей частью предлагаемого подхода является анализ данных, который позволяет найти ключевые и избыточные факторы. В процессе работы разработаны и апробированы схемы уменьшения факторной размерности с наименьшей потерей качества ранжирования. Также были доработаны алгоритмы кластеризации выборки, а именно, модификация туннельной кластеризации, модификация алгоритма минимального покрывающего дерева КРАБ, а также модификация кластеризации  $k$ -средних, которые позволяют распределить запросы поисковых систем по смежным областям, где действуют одинаковые правила ранжирования. В ходе исследования была экспериментально подтверждена эффективность рассматриваемого подхода и определены несколько направлений его развития. Результаты, полученные в результате работы предложенного подхода, не являются окончательными, но уже могут быть применены в решении практических задач.

Также была разработана серия методов, способных серьезно упростить и ускорить процесс обучения ранжированию и автоматизации информационного поиска. В отчете предложена модель суперпозиции надпороговых процедур, с помощью которой в задаче поиска осуществляется выбор наилучших для конкретной ситуации альтернатив. Суперпозиция надпороговых процедур заключается в последовательной композиции надпороговых функций  $f_1(x), \dots, f_n(x)$ , т.е. тех функций, значения альтернатив по которым должны быть больше (или меньше) назначенных порогов. В отчете предложено два способа определения последовательности применения правил надпорогового выбора: с использованием эталонного критерия и с использованием функции распределения. Отличительной особенностью способов является их низкая вычислительная сложность, а также гибкость. Кроме того, модель отличается достаточно высокой точностью выбора наилучших альтернатив по сравнению с существующими аналогами. Модель наиболее полезна при наличии очень большого числа альтернатив, характеризуемых очень большим набором критериев. В даль-

нейшем планируется усовершенствовать предложенную модель, особенно ту её часть, которая отвечает за построение дерева решений и отсечение неоптимальных шагов.

В ходе исследования были также апробированы матрично-векторные представления процедур выбора, нахождения парето-оптимальных границ, лексиминные процедуры.

Был разработан программный комплекс, позволяющий производить анализ данных, предварительную обработку, кластеризацию, обучение системы (методы подбора эффективных границ значений факторов в алгоритмах адаптивной фильтрации; построение деревьев выбора факторов; построение моделей ранжирования для каждого кластера), тестирование алгоритмов ранжирования.

В настоящее время к публикации готовится серия статей по указанной теме.

## 15 ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТИВНОСТИ УНИВЕРСИТЕТОВ С ПОМОЩЬЮ ОБОЛОЧЕЧНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ

В этом разделе отчета представлены результаты оценивания результативности университетов с помощью оболочечного анализа данных.

В современном мире управление любыми социально-экономическими объектами, в том числе ВУЗами, тесно связано с оценкой их деятельности. В связи с этим возникает задача выбора критериев и модели их агрегирования при составлении интегрального показателя качества научной и учебно-образовательной деятельности того или иного учебного заведения. Существует два принципиально отличных друг от друга подхода к построению модели агрегирования. В первом случае органы, регулирующие образовательную и научную деятельность ВУЗов, пользуются линейными свертками критериев, определяя важность критериев с помощью экспертных оценок. После этого все университеты, зная заранее входящие в рейтинг критерии (а также их относительные важности), стараются организовывать свою деятельность таким образом, чтобы получить как можно больше средств из федерального бюджета.

Существует и другой подход, представленный ниже, в котором для достижения максимальной результативности ВУЗов (а, значит, и объема финансирования) учебным заведениям приходится ориентироваться на лидеров в своей специализации и пытаться конкурировать с ними. Однако в области оценки результативности ВУЗов пока не выработано определенной методики, используются различные модели, в которых оцениваются различные аспекты их деятельности. Данная работа имеет целью собрать и систематизировать этот опыт в различных странах путем применения оболочечного анализа данных и оценить научно-образовательный потенциал российских ВУЗов.

В подразделе 15.1 приведен обзор существующей литературы, посвященной оценке результативности деятельности ВУЗов с помощью различных моделей оболочечного анализа данных (англ. Data Envelopment Analysis – DEA). В подразделе 15.2 проанализирован существующий зарубежный опыт практического использова-

ния этих моделей в Великобритании, Германии, Греции, Австралии, Канаде. В подразделе 15.3 проведен сравнительный анализ результативности российских ВУЗов с помощью метода оболочечного анализа с постоянной отдачей от масштаба. Кроме этого, в этом же подразделе проведено сравнение результативности российских ВУЗов с зарубежными университетами. В подразделе 15.4 сделаны некоторые выводы из проведенного исследования.

### 15.1 Обзор моделей оболочечного анализа данных

Основная идея непараметрической модели DEA [316] заключается в представлении эффективности<sup>15</sup> университета (в общем случае любой фирмы, производящей какой-либо продукт) в виде отношения его результатов (выходных параметров) к потраченным ресурсам (входным параметрам).

Рассмотрим задачу дробно-линейного программирования

$$\max_{u_i, v_j} \left( e_k = \frac{\sum_{i=1}^M u_{ik} x_{ik}}{\sum_{j=1}^N v_{jk} q_{jk}} \right), \quad (15.1)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^M u_{ik} x_{ik}}{\sum_{j=1}^N v_{jk} q_{jk}} \leq 1, k = 1, \dots, R; \\ \forall i, j: u_i > 0, v_j > 0, \end{cases} \quad (15.2)$$

где  $R$  – количество анализируемых университетов,  $M$  – количество выходных параметров,  $N$  – количество входных параметров,  $x_{ik}$  –  $i$ -й выходной параметр  $k$ -го университета,  $q_{jk}$  –  $j$ -й входной параметр  $k$ -го университета,  $u_{ik}$  и  $v_{jk}$  – весовые коэффициенты, представляющие важность соответствующих входных или выходных параметров. Здесь  $e_k$  представляет собой эффективность  $k$ -го университета.

Задача (15.1) представляет собой формулировку модели DEA. Основное преимущество данной модели заключается в автоматическом выборе весовых коэффици-

---

<sup>15</sup> В западной академической литературе результативность часто используется как синоним эффективности, поэтому мы часто будем использовать оба термина, особенно в части, касающейся обзора западных работ.



циентов  $u_{ik}$  и  $v_{jk}$  для каждого входного и выходного параметра, согласно критерию (15.1).

Кроме того, задача дробно-линейного программирования (15.1) с ограничениями (15.2) может быть приведена к задаче линейного программирования с помощью преобразования, предложенного Charnes и Cooper в [318]

$$\min_{\theta_k, \lambda} \theta_k \quad (15.3)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -q_k + Q \cdot \lambda \geq 0; \\ \theta_k x_k - X \cdot \lambda \geq 0; \\ \lambda \geq 0, \end{cases} \quad (15.4)$$

где  $\theta_k$  – скаляр, представляющий эффективность  $k$ -го университета,  $\lambda$  –  $R \times 1$  вектор констант,  $Q$  –  $M \times R$  матрица выходных параметров всех университетов,  $X$  –  $N \times R$  матрица входных переменных. В данной формулировке константа  $\theta_k$  лежит в отрезке  $[0,1]$ , причем значение  $\theta_k = 1$ , указывает на 100%-ю эффективность  $k$ -го университета относительно данной выборки и выбранных параметров входа и выхода.

Модель (15.3) с ограничениями (15.4) носит название модели DEA с постоянной отдачей от масштаба (*англ.* Constant Return to Scale – CRS). Согласно [319], применение такой модели DEA оправдано в том случае, когда все анализируемые университеты оперируют в оптимальном для них объеме выпуска.

В результате решения одной из двойственных задач (см. формулы (15.1)-(15.2) или (15.3)-(15.4)) находится оптимальный коэффициент результативности для каждого ВУЗа. Этот балл рассчитывается путем повторения вышеописанной процедуры индивидуально для каждого учебного заведения относительно тех, которые находятся в выборке. Значения этого показателя меньше или равны 1. В первом случае ВУЗ считается менее эффективным относительно других, во втором – максимально результативным относительно исследуемой выборки.

Построение границ эффективности по методу DEA позволяет получить представление об относительном положении ВУЗа. Последнее характеризует его ключевую деятельность в многомерном пространстве входных и выходных параметров на



например, ВУЗа под номером 4 рассчитывается как отношение отрезка  $O4'$  к отрезку  $O4$ . Для этого университета наиболее ближайшими эффективными ВУЗами будут 2 и 5, именно их относят к группе эталонов (peers) для этих неэффективных университетов. В свою очередь,  $1'$ ,  $3'$ ,  $4'$  являются проекциями неэффективных ВУЗов на границу эффективности. Соответствующие для них значения  $x_1, x_2$  и  $q$  представляют собой для низкорезультативных ВУЗов эффективные цели (targets), т.е. значения входных и выходных переменных, которые для них по данной выборке считаются оптимальными.

Кроме рассмотренной выше модели (15.3), отдельно принято выделять версию DEA с учетом эффекта масштаба. Она заключается в добавлении еще одного ограничения к (15.4)

$$1^T \lambda = 1. \quad (15.5)$$

Эта версия модели (15.3) с ограничениями (15.4)-(15.5) носит название модели DEA с переменной отдачей от масштаба (*англ.* Variable Return to Scale). Ограничение (15.5) гарантирует сравнение неэффективных университетов только относительно ВУЗов приблизительно такого же размера, что не обязательно в модели с постоянной отдачей от масштаба. В работе [328] также предлагается *промежуточная* модель DEA, в которой есть возможность оценивать некоторые параметры входа и выхода с точки зрения постоянной отдачи от масштаба, а некоторые с точки зрения промежуточной. Такой подход позволяет уменьшить разрыв между оценками, полученными с помощью различных моделей DEA.

В модели DEA существует возможность оценить эффект масштаба (*англ.* Scale Economies) с помощью следующей формулы

$$SE = \frac{\theta_{CRS}}{\theta_{VRS}}, \quad (15.6)$$

где  $SE$  – эффект масштаба,  $\theta_{CRS}$  – значение эффективности, полученное с помощью модели CRS,  $\theta_{VRS}$  – значение эффективности, полученное с помощью модели VRS.

Модель DEA с переменной отдачей от масштаба удобнее всего иллюстрировать в случае, когда объекты имеют единственный параметр входа и выхода (например,

как на рисунок 15.2). Наиболее высокой эффективности ВУЗ достигает в точке 3, для которой характерна максимально возможная результативность вложенного ресурса. Это случай постоянной отдачи от масштаба. Как правило, в течение жизненного цикла у университетов происходит смена эффекта масштаба. Может наблюдаться возрастающая отдача от масштаба, особенно на первых этапах введения новых образовательных продуктов или реализации инновационно-научных проектов в учебном заведении (например, отрезок, представленный ВУЗами 1 и 3). После достижения точки насыщения появляется убывающая отдача от масштаба (см. отрезок, который соединяет университеты под номером 3 и 5).

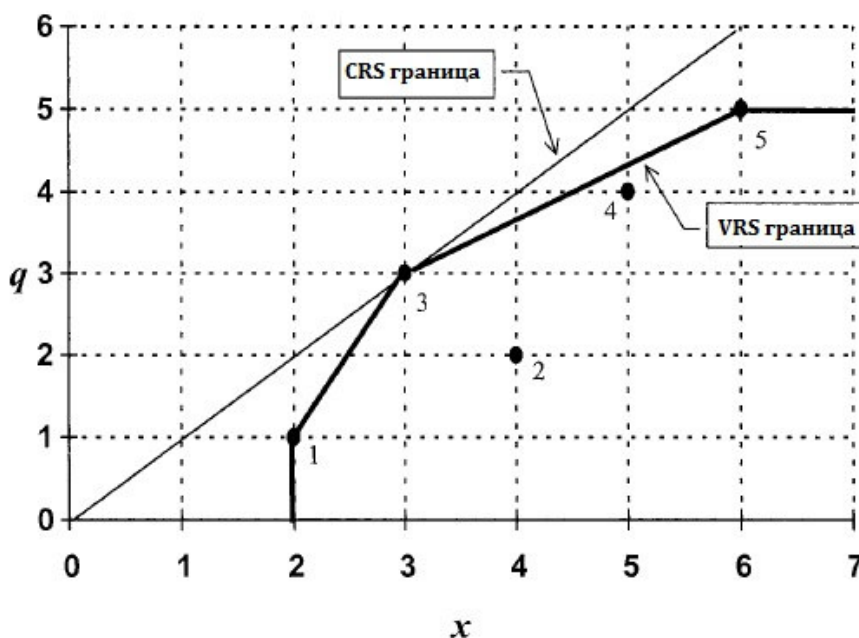


Рисунок 15.2 – Графическое представление модели с переменной и постоянной отдачей от масштаба [319]

Отметим, что модель (15.3) с ограничениями (15.4) является *ориентированной на вход*, то есть эффективность анализируется с точки зрения того, можно ли уменьшить расход ресурсов, производя при этом неизменное количество продукта. Однако понятие эффективности можно анализировать с точки зрения того, можно ли повысить результаты, не увеличивая при этом расход ресурсов. Для второго случая существует модель DEA, *ориентированная на выход*. Более формально

$$\max_{\varphi_k, \lambda} \varphi_k \quad (15.7)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -\varphi_k \cdot q_k + Q\lambda \geq 0, \\ x_k - X\lambda \geq 0, \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (15.8)$$

Здесь все переменные кроме  $\varphi_k$  обозначают те же величины, что и в формулах (15.3)-(15.4). В данной модели величина  $\varphi_k$  изменяется от 1 до  $\infty$ , поэтому результативность каждого университета принято оценивать величиной  $\frac{1}{\varphi_k}$ . Отметим, что к модели (15.7) также может быть добавлено ограничение (15.5).

Вектор коэффициентов  $\lambda$  можно содержательно интерпретировать как набор теневых цен соответствующих входных и выходных параметров. Теневая цена – это максимальная стоимость, которую университет мог бы заплатить за увеличение данного параметра на единицу. Теневые цены характеризуют эффективность использования каждого из ресурсов.

При решении задачи линейного программирования (15.3) или (15.7) при ограничениях (15.4), (15.4)-(15.5) или (15.8) может возникать ситуация неадекватного оценивания вектора теневых цен. Для того чтобы избежать этой ситуации, Coelli в [Coelli 2005], а также многие авторы, занимающиеся эмпирическим применением модели DEA к оценке эффективности, предлагают методику ценностных суждений. Суть ее заключается во введении дополнительных ограничений на элементы вектора  $\lambda$ :

$$\lambda_{inf} \leq \lambda \leq \lambda_{sup}, \quad (15.9)$$

где  $\lambda_{inf}$  – вектор нижних ограничений на теневые цены, а  $\lambda_{sup}$  – вектор верхних ограничений. Здесь возникают трудности с выбором данных векторов, так как они должны отражать экспертное мнение. Один из подходов к этой проблеме представлен в [329]. Предлагается методика установления нижних и верхних ограничений с помощью определения оптимальных обменных соотношений между параметрами

входа и выхода. На практике каждый автор предлагает свои оценки  $\lambda_{inf}$  и  $\lambda_{sup}$ , исходя из своих собственных соображений.

## 15.2 Анализ практики оценки эффективности университетов

Далее мы анализируем работы, в которых используются DEA модели для оценки эффективности деятельности ВУЗов. Насколько нам известно, в отечественной литературе эти модели не получили должного распространения. Нам известна только одна из таких работ. В ней оценена классическая модель DEA, где в качестве ресурсной обеспеченности учебных заведений рассматривались численность студентов, удельный вес штатных профессорско-преподавательских сотрудников с ученой степенью в общей численности, а также фондовооруженность. В качестве результатов исследовались рейтинг качества приема в вузы и научной, публикационной активности. Кроме этого, была оценена модель, которая в качестве результатов, дополнительно к перечисленным выше, включала соотношение бюджетного и конкурсного внебюджетного финансирования ВУЗов. В этой работе на примере 30 российских вузов было показано, что более точные и согласованные с международной практикой оценки результативности российских ВУЗов получаются с учетом показателей структуры финансирования университетов [310]. В связи с этим в обзорной части отчета внимание будет сконцентрировано на работах, в которых проводится анализ зарубежных университетов.

### Великобритания.

В [322] оценивается эффективность 109 английских университетов за 2000/2001 учебный год. Большое внимание уделяется выбору входных и выходных переменных для модели DEA. Предлагается следующий набор параметров для проведения оценки.

#### Входные переменные:

– качество обучающихся в университете студентов (рассчитывается как численность студентов, умноженная на их средний балл);

- численность аспирантов;
- численность ППС;
- амортизация ВУЗа;
- расходы на библиотечные нужды и компьютерное оснащение;
- административные расходы не входящие в амортизацию.

Выходные переменные:

- показатель исследовательской деятельности (рассчитывается как количество грантов, полученных университетом);
- количество ученых степеней, выданных на программах послевузовской подготовки;
- качество выпускников. Этот показатель рассчитывается следующим образом

$$GradQual = N_1 \cdot 30 + N_2 \cdot 25 + N_3 \cdot 20 + N_4 \cdot 15 + N_5 \cdot 10,$$

где  $N_i$  – численность выпускников, получивших диплом  $i$ -ой категории<sup>17</sup>.

В модель включено достаточно много объясняющих переменных, но в результате проведения проверки влияния отдельных факторов на итоговые оценки эффективности [327] оказалось, что два входных параметра — численность ППС и расходы на библиотечные нужды несущественно влияют на результаты работы модели. Проводится оценка для полного и усеченного набора входных-выходных параметров, за исключением численности ППС и расходов на библиотечные нужды.

В работе делается попытка определить наличие структурного различия между университетами, которые принадлежат различным категориям.

Категория 1 – 47 ВУЗов, имевших статус университета до вступления в силу закона о высшем и дальнейшем образовании<sup>18</sup> 1992 года;

Категория 2 – 34 ВУЗа, получившие статус университета после 1992 года;

<sup>17</sup> Всего в Англии существует пять категорий дипломов.

<sup>18</sup> Имеется в виду нормативный акт Further and Higher Education Act 1992 [<http://www.legislation.gov.uk/ukpga/1992/13/contents>];

Категория 3 – 28 колледжей, специализирующихся на подготовке специалистов в таких областях знаний, как музыка, театр, образование и т.п.

Средние значения эффективности для всех трех групп университетов приведены ниже (Таблице 15.1). Использована стандартная формулировка DEA модели с постоянной и переменной отдачей от масштаба. Для каждого университета вычисляется эффект масштаба как отношение оценок эффективности, полученных с помощью моделей с постоянной и переменной отдачей.

Таблица 15.1 – Средние значения эффективности и количество эффективных университетов

	Модель с полным набором данных		Модель с усеченным набором данных	
	Для всей выборки	94.61%	61 из 109	92.51%
Для категории 1	96.34%	28 из 47	94.25%	24 из 47
Для категории 2	94.25%	18 из 34	92.80%	15 из 24
Для категории 3	92.14%	15 из 28	89.27%	12 из 28

Как и следовало ожидать, результаты двух моделей с различным набором входных и выходных параметров согласуются между собой. При использовании усеченного набора данных эффективность университетов оказалась в среднем незначительно меньше, однако в целом уровень эффективности английских университетов является высоким. Этот факт аналогичен тем, что были получены ранее у других авторов [313].

В работе проверяется наличие структурных различий в оценках эффективности университетов, принадлежащих различным категориям. В основе этого лежит исследование [317]. В результате подобных различий выявлено не было. Действительно во всех категориях средняя эффективность лежит на уровне примерно 90%, а число эффективных университетов составляет порядка 50% от общего числа анализируемых ВУЗов.

Так как ВУЗы из различных групп имеют различные источники финансирования, делается вывод о том, что это не влияет на эффективность деятельности, по крайней мере, английских университетов.



В [313], как и в предыдущей статье, анализируется эффективность английских университетов. Однако анализ проводится с другой точки зрения – авторы выбирают входные и выходные параметры модели таким образом, чтобы оценить эффективность деятельности ВУЗа со стороны понесенных им издержек и потраченных ресурсов.

В рамках первого подхода эффективность ВУЗа оценивается с точки зрения того, насколько эффективно университету удалось распределить имевшиеся у него финансовые средства для достижения результатов. Во втором случае деятельность ВУЗа оценивается с точки зрения того, насколько эффективно (относительно других) он смог использовать факторы производства (ресурсы) для достижения целей.

В статье производится оценка 45 английских университетов с помощью модели DEA. Данные для проведения анализа взяты за 1992 год. Для того чтобы оценить эффективность в рамках двух различных подходов, описанных выше, авторы статьи формируют два различных набора входных и выходных параметров (Таблица 15.2).

Для нахождения значений эффективности применяются две стандартные спецификации модели DEA – с постоянной и переменной отдачей от масштаба.

Таблица 15.2 – Различные наборы показателей эффективности

Эффективность по издержкам		Эффективность по ресурсам	
Вход	Выход	Вход	Выход
Совокупные издержки; Расходы на научные проекты.	Численность выпускников; Количество выданных научных степеней; Рейтинг научной и публикационной активности.	Численность студентов; Численность аспирантов; Численность ППС; Рейтинг качества абитуриентов; Расходы на научные проекты; Расходы на библиотеки и компьютерное оснащение.	Численность выпускников; Количество выданных научных степеней; Рейтинг научной и публикационной активности.

Как видно из Таблицы 15.2, разница в выборе параметров прослеживается только во входных переменных. В первом случае они представляют собой издержки ВУЗа, а во втором – имеющиеся у него ресурсы.

Оценивая эффективность по издержкам, авторы учитывают тот факт, что университеты, сфокусированные на научном направлении подготовки студентов, несут большие издержки, чем те ВУЗы, которые имеют прикладную направленность.

Вследствие этого все университеты, входящие в анализируемую выборку, были разбиты на три подгруппы:

- научное направление подготовки: больше 55% студентов обучаются на кафедрах, представляющих научное направление (*англ.* Science orientation);
- сбалансированное направление подготовки: аналогичное число студентов находится в границах от 45% до 55% (*англ.* Balanced orientation);
- ненаучная направленность подготовки: аналогичное число студентов меньше чем 45% (*англ.* Non-science orientation).

Значения эффективности по издержкам вычисляются с помощью следующего алгоритма. Сначала оценивается эффективность только университетов из 1-й подгруппы, после этого к ним добавляются все университеты из 2-й подгруппы, и значения эффективности пересчитываются для выборки, состоящей из двух подгрупп. На третьем шаге оценивается эффективность всех 45 университетов, представленных в выборке.

При таком подходе ВУЗы, бывшие эффективными на одной из стадий описанного выше алгоритма, часто становятся неэффективными при добавлении в выборку новых университетов из других подгрупп. Данный эффект демонстрирует тот факт, что ВУЗы с научной направленностью имеют более высокие издержки, за счет этого они становятся неэффективными при включении в анализ ВУЗов, имеющих прикладной характер подготовки специалистов.

Для того чтобы избежать подобных явлений, авторы вносят следующую поправку. Итоговой оценкой эффективности университета входящего в  $i$ -ю подгруппу ( $i = 1, 2, 3$ ) является оценка, полученная им на  $i$ -м шаге алгоритма. Таким образом, для каждого из этапов определяются свои значения эффективности, которые приведены в Таблицу 15.3.

Таблица 15.3 – Значения эффективности университетов по издержкам

	Научное направление		Сбалансированное направление		Все университеты		Итоговые значения	
	CRS	VRS	CRS	VRS	CRS	VRS	CRS	VRS
Среднее значение	90.42	95.42	81.12	88.25	71.36	83.14	85.76	92.74
Минимум	66.86	71.15	43.45	54.02	36.73	49.18	45.04	49.18

Количество эффективных университетов	3	7	6	13	4	15	11	27
Количество университетов	12		25		45		45	

На основе полученных результатов делаются выводы о деятельности английских ВУЗов. Авторы обращают внимание на тот факт, что только значения оценок трех больших университетов (с численностью студентов больше 10 000) существенно увеличились при переходе от CRS к VRS модели. При этом эти университеты все же остались неэффективными. Делается вывод о невозможности достижения состояния эффективного функционирования только за счет размера ВУЗа.

Следующая часть работы [313] представляет собой расчет эффективности ВУЗов с учетом их ресурсной обеспеченности. При подсчете данной характеристики авторами была замечена часто встречающаяся на практике проблема «неадекватного» оценивания коэффициентов, используемых моделью DEA. Для вычисления более реалистичных оценок применяются так называемые оценочные суждения, то есть фактически строятся дополнительные ограничения на коэффициенты базовой модели DEA.

Авторы предлагают три различных варианта оценочных суждений, которые вводятся в модель последовательно. Для каждого этапа, таким образом, рассчитываются отдельные оценки эффективности для каждого университета из выборки. Результаты работы с моделью приведены в Таблице 15.4.

Таблица 15.4 – Ресурсная эффективность с использованием оценочных суждений

	Без суждений	Суждение 1	Суждение 2	Суждение 3
Среднее	97.16	93.83	95.27	95.98
Минимум	77.85	68.65	75.97	77.85
Количество эффективных университетов	27	14	19	23
Максимальное изменение эффективности	–	-13.69	-11.87	-16.79

Можно сделать вывод о том, что с введением дополнительных ограничений на коэффициенты модели DEA эффективность университетов в среднем по выборке снизилась. Это говорит о целесообразности использования выбранного подхода, так как полученные в первом столбце таблицы оценки эффективности, по мнению авторов, не представляли реальной картины, которая существовала в английском образовании в 1997 г.

В [315] проводится оценка эффективности 52 английских университетов. Процесс оценивания касается только факультетов химии и физики. Выбираются соответствующие переменные для модели DEA

Выходные переменные:

- численность студентов бакалавриата;
- численность студентов магистратуры<sup>19</sup>;
- численность студентов аспирантуры<sup>20</sup>;
- рейтинг публикационной и научной деятельности.

Четыре фиктивные переменные, отражающие оценку работы департамента. В Англии существует внутренняя система оценки факультетов, в ней присутствуют четыре градации: Star, A+, A, A-.

Входные параметры:

- общие издержки;
- расходы на техническое оборудование;
- расходы на исследования.

Входные параметры представляют собой издержки факультетов, поэтому получаемые оценки эффективности являются измерением результативности по издержкам.

Основной целью работы является оценка не только общей результативности факультетов, но и их научной и образовательной аспектов деятельности. Для оценки

---

<sup>19</sup> Имеются в виду студенты программ taught postgraduate;

<sup>20</sup> Подразумеваются студенты программ research postgraduate.

отдельных компонент эффективности предлагается следующая модификация модели DEA

$$\max_{u_i, v_j} \left( e_k = \frac{\sum_{i=1}^8 u_i y_{ik}}{\sum_{j=1}^3 v_j x_{jk}} \right), k = 1, \dots, n \quad (15.10)$$

при ограничениях

$$t_k = \frac{\sum_{i=1}^2 u_i y_{ik}}{\sum_{j=1}^2 q_j v_j x_{jk}}, k = 1, \dots, n \quad (15.11)$$

$$r_k = \frac{\sum_{i=3}^8 u_i y_{ik}}{\sum_{j=1}^2 (1-q_j) v_j x_{jk} + v_3 x_{3k}}, k = 1, \dots, n \quad (15.12)$$

$$\begin{cases} 0 \leq t_k \leq 1; \\ 0 \leq r_k \leq 1; \\ 0 \leq q_1 \leq 1; \\ 0 \leq q_2 \leq 1; \\ u_i \geq 0; \\ v_j \geq 0. \end{cases} \quad (15.13)$$

где  $n$  – число университетов в выборке,  $y_{ik}$  – значение  $i$ -го выходного параметра ( $i = 1, \dots, 8$ ) для  $k$ -го университета,  $x_{jk}$  – значение  $j$ -го входного параметра ( $j = 1, 2, 3$ ) для  $k$ -го университета,  $u_i, v_j$  – веса выходных и входных параметров,  $e_k$  – эффективность  $k$ -го университета,  $q_1$  – часть общих расходов, связанная с образовательной деятельностью факультета,  $q_2$  – часть расходов на техническое оборудование, связанная с образовательной деятельностью факультета,  $t_k$  – образовательная эффективность  $k$ -го университета<sup>21</sup>,  $r_k$  – исследовательская эффективность  $k$ -го университета<sup>22</sup>.

Проблема (15.10) с ограничениями вида (15.11)-(15.13) может быть трансформирована в задачу линейного программирования преобразованием, предложенным в [318].

<sup>21</sup> Здесь предполагается, что за образование отвечают первые два входных и выходных параметра, представленные в списке выше.

<sup>22</sup> За исследовательскую деятельность отвечают все остальные параметры, которые не включены в показатель  $t_k$ .

Кроме того, как и в [322], автор предлагает систему ценностных суждений для того, чтобы получить более реалистичные оценки коэффициентов  $u_i$  и  $v_j$ . Описательная статистика полученных оценок эффективности приведена в Таблице 15.5.

Таблица 15.5 – Исследовательская и образовательная эффективность

Вид эффективности	Химические факультеты		Физические факультеты	
	Образовательная	Научная	Образовательная	Научная
Среднее значение	66,59%	87,56%	64,79%	84,93%
Минимальное значение	34	63	32	54
Количество эффективных ВУЗов	3	8	1	8

Из полученных в [322] результатов видно, что английские вузы в среднем дальше от границы образовательной результативности, чем границы исследовательской результативности. Можно также предположить, что английские вузы отличаются друг от друга по результатам образовательной деятельности в большей степени, чем по результатам научной работы (хотя прямых указаний на это нет). Полученная картина представляется интересной, т.к. в исследованиях немецких и российских университетов, что будет показано далее в статье, наблюдается противоположная ситуация, при которой вузы оказываются в среднем ближе к границе образовательной результативности, чем к исследовательской.

Таким образом, в [315] реализуются модификации базовой модели DEA с целью получения возможности оценки одновременно нескольких компонент эффективности. Аналогично с [322] используются ценностные суждения, которые позволяют более точно восстановить форму границы эффективности.

В [320] предлагается четыре версии базовой модели DEA, с помощью которых оцениваются четыре различных вида эффективности английских университетов за период с 1980/1981 до 1992/1993 учебные годы.

1. Техническая эффективность (*англ.* Technical Efficiency – TE). Рассчитывается с помощью стандартной модели (15.7) с ограничениями (15.8);

2. Эффективность от масштаба (*англ.* Scale Efficiency – SE). Рассчитывается как отношение технической эффективности к эффективности при переменной отдаче от масштаба, то есть эффективности, полученной с помощью модели (15.7) с ограничениями (15.8) и (15.5);

3. Чистая техническая эффективность (*англ.* Pure Technical Efficiency – PTE). Рассчитывается с помощью решения следующей задачи линейного программирования

$$\max_{\varphi, \lambda} \varphi \quad (15.14)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -\varphi \cdot q_k + Q\lambda \geq 0, \\ X\lambda - x_k = 0, \\ 1^T \lambda = 1, \\ \lambda \geq 0, \end{cases} \quad (15.15)$$

где все обозначения совпадают с описанными в первой части раздела,  $\frac{1}{\varphi}$  представляет значение чистой технической эффективности.

4. Эффективность загрузки (*англ.* Congestion Efficiency – CE). Рассчитывается как отношение эффективности с переменной отдачей от масштаба к чистой технической эффективности.

Также показано, что значения всех четырех видов эффективности связаны между собой следующим равенством:

$$TE_i = SE_i \cdot CE_i \cdot PTE_i, \quad (15.16)$$

где  $i$  — номер университета в оцениваемой выборке.

Для того чтобы оценивать эффективность, предлагаются следующие показатели, влияющие на нее.

Входные переменные:

- численность сотрудников университета;
- численность студентов бакалавриата;
- численность магистров и аспирантов;

– совокупные расходы (включаются все издержки, кроме расходов на профессорско-преподавательский состав).

Выходные переменные:

- доход от исследовательской и консультационной деятельности ВУЗа;
- количество выданных дипломов бакалавриата;
- количество магистерских и аспирантских дипломов.

Таким образом, выбранная в [320] модель позволяет оценить эффективность университетов по их издержкам, так как входными переменными для нее выбраны расходы.

Итоговые значения эффективности представлены ниже (см. рисунок 15.3). Из него следует, что университеты за рассматриваемый в статье период смогли в среднем увеличить техническую эффективность на 10-12%. Это произошло благодаря росту остальных трех составляющих эффективности. Обратим внимание, что результаты очень хорошо подтверждают формулу (15.16). В каждый момент времени поведение технической эффективности определяется значениями остальных трех компонент.

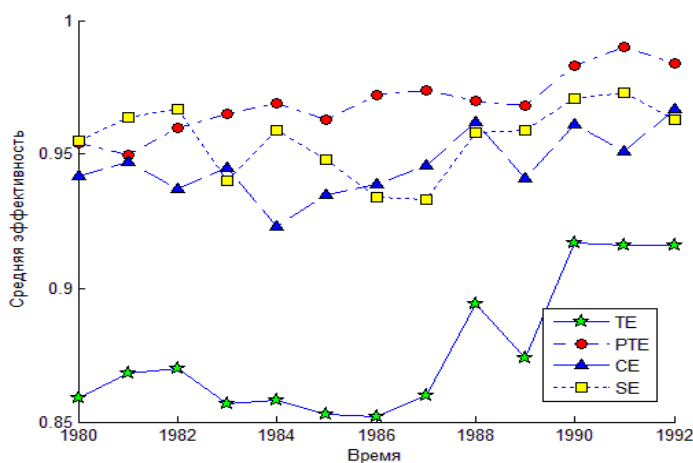


Рисунок 15.3 – Средние значения эффективности за исследуемый период

Таким образом, английские университеты, согласно рассмотренным выше статьям выполняют свои функции достаточно эффективно. Большинство ВУЗов оперирует на уровне эффективности 90-95%.



## Греция.

В [323] анализируется эффективность 20-ти греческих университетов.

Анализ проводится тремя различными способами. Первая модель представляет собой простой анализ на основе ранжирования ВУЗов по значениям, выбранных в работе показателей эффективности деятельности университетов. Выбор критериев, по которым будет проводиться дальнейшее сравнение ВУЗов, основан на рекомендациях, представленных в [321]. Согласно данному источнику показатели эффективности должны удовлетворять следующим требованиям:

- совместимость с целью университета (образовательная или исследовательская);
- возможность количественного измерения и стандартизации (необходимо для сравнения различных университетов по показателям);
- простота и совместимость с тем, что данный показатель должен измерять;
- быть приемлемым для всех университетов в исследуемой выборке.

Авторы остановили свой выбор на следующих показателях эффективности ВУЗов:

- операционные издержки<sup>23</sup> в расчете на одного выпускника ( $D_1$ );
- численность выпускников на численность профессорско-преподавательского состава ( $D_2$ );
- численность активных студентов, работающих или участвующих в исследованиях, проводимых университетом на численность выпускников ( $D_3$ );
- доход от исследовательской деятельности на одного преподавателя ( $D_4$ );
- численность студентов на численность выпускников ( $D_5$ ).

Для всех 20-ти ВУЗов из выборки были собраны данные по представленным выше показателям. Проведено ранжирование, которое показало лидера по каждому из показателей. Результаты представлены в Таблице 15.6.

---

<sup>23</sup> В данном случае имеются в виду расходы ВУЗа, связанные с подготовкой и организацией образовательного процесса.

Таблица 15.6 – Верхние позиции рейтинга 20-ти греческих университетов согласно различным моделям оценки

Рейтинг, первые пять мест	Номера университетов с большим значением индикаторов			
	D1	D2	D3	D5
№1	N8	N8	N6	N6
№2	N4	N9	N8	N18
№3	N9	N4	N9	N12
№4	N7	N19	N4	N14
№5	N10	N6	N2	N20

Следующий способ оценки, применяющийся в работе, это модель DEA; авторы выбирают следующий набор входных параметров:

- численность ППС;
- численность административных сотрудников;
- численность студентов;
- операционные издержки, не включающие в себя расходы на заработные платы сотрудникам университета.

Выходными параметрами при этом считаются:

- численность выпускников;
- доходы от научно-исследовательской деятельности университета.

В статье используется модель DEA с постоянной отдачей от масштаба и ориентацией на входные параметры. Также из представленного выше набора переменных формируются две модели, различные с точки зрения используемых переменных. Первая (А) включает в себя выходной показатель дохода от научно-исследовательской деятельности. Вторая (В) модификация – не учитывает этого.

Результаты этих методов оценки эффективности представлены в Таблице 15.6. Высокий коэффициент детерминации и невысокое *p*-значение говорят о статистической значимости и объясняющей способности построенных эконометрических моделей.

В статье авторы делают вывод о том, что результаты различных моделей согласуются между собой.

### Австралия.

В работе [314] с помощью модели DEA оцениваются три различных аспекта эффективности австралийских университетов.

В первую очередь анализируется общая эффективность университетов (*англ.* Overall Efficiency). Для этого выбираются следующие показатели эффективности.

Входные параметры (для всех аспектов эффективности входные параметры одинаковые):

- численность научных сотрудников;
- численность административных сотрудников.

Выходные параметры для общей эффективности:

- численность студентов;
- численность аспирантов;
- сумма полученных университетом грантов на исследования.

Следующим аспектом эффективности является качество преподавания в оцениваемом ВУЗе (*англ.* Performance on delivery of educational services). Выбираются следующие выходные параметры:

- процент отчисленных студентов;
- средняя успеваемость студентов;
- доля студентов, работающих полный рабочий день в течение обучения.

В результате сокращения государственного финансирования австралийских ВУЗов университетам приходится активно привлекать студентов, готовых платить за образование. В статье также предлагается набор выходных параметров для оценки эффективности привлечения платежеспособных студентов к обучению в университете (*англ.* Performance on fee-paying enrolments):

- численность иностранных студентов, оплачивающих обучение;
- численность отечественных аспирантов, не оплачивающих обучение.

В работе используется DEA VRS модель, ориентированная на максимизацию выходных параметров. Автор объясняет такой выбор различных версий модели возможностью менеджмента ВУЗа контролировать входные параметры, а также сильной зависимостью эффективности деятельности университета от его размера. Действительно, чем больше ВУЗ, тем легче ему оперировать на рынке образовательных услуг, следовательно, тем больше его эффективность.

Результаты работы моделей для выборки из 36-ти ВУЗов (за 1995 год) представлены в Таблице 15.7.

Таблица 15.7 – Сравнительный анализ работы трех моделей

	Средняя эффективность	Стандартное отклонение	Минимальная эффективность	Количество ВУЗов на границе
Модель 1	95.53%	10.11	44.88%	23 из 36
Модель 2	96.67%	3.50	87.83%	11 из 36
Модель 3	63.39%	29.07	15.32%	10 из 36

Полученные результаты свидетельствуют о том, что по этому направлению деятельности группа австралийских вузов «развалилась» по показателю эффективности, т.е. по способности привлекать иностранных студентов они сильно отличаются друг от друга.

В следующей работе [312] анализируется эффективность 36 австралийских университетов за 1995 год. Выбирается четыре входных и два выходных параметра.

Входные параметры:

- численность ППС в эквиваленте полной занятости;
- численность неакадемического персонала;
- издержки университета, не связанные с выплатой заработных плат;
- внеоборотные активы, как прокси-переменная для акционерного капитала.

Выходные параметры:

- численность студентов в эквиваленте полной занятости;
- размер грантов, полученных университетом для проведения научных исследований.

Оценка эффективности проводится в несколько этапов. Сначала анализируются все исследуемые ВУЗы, затем все университеты разбиваются на кластеры и каждый кластер оценивается в отдельности. При разделении выборки на группы используется отношение двух показателей: численность студентов в эквиваленте полной занятости к размеру полученных грантов. В результате проведения эмпирического анализа было выявлено, что все университеты разбиваются на три кластера по указанному признаку.

Для проведения оценки используется модель DEA VRS, а также для каждого университета вычисляется эффект масштаба. Результаты представлены в Таблице 15.8.

Таблица 15.8 – Распределение эффективности для Австралийских университетов

Интервал эффективности	Все университеты	Кластер 1 (высокий показатель)	Кластер 2 (низкий показатель)
0 – 0.6	3	6	0
0.6 – 0.8	3	0	5
0.8 – 0.85	6	0	5
0.85 – 0.9	11	12	0
0.9 – 0.95	14	18	11
0.95 – 1	64	65	79

Делается попытка классифицировать университеты по их местоположению (город или сельская местность). Однако полученные на основе такого разбиения результаты оказались сильно схожими с результатами, полученными с помощью методики описанной выше. Разбиение университетов на кластеры на основе статистических методов (К-средние, метод ближайшего соседа) также не дает ничего нового после проведения оценки эффективности с помощью DEA. Делается вывод об относительно высоком уровне эффективности австралийских университетов.

#### Германия.

В [330] делается попытка измерить эффективность немецких университетов, а также выделить стратегические группы ВУЗов в системе высшего образования. Проводится анализ 73 государственных университетов. Данные для входных и выходных параметры модели DEA собраны за период с 1997 по 1999 гг.

В первой части работы оценивается эффективность на основе 5 различных моделей DEA. При выборе параметров для проведения оценки делается акцент на различии университетов по направлению подготовки (естественные или социальные науки), а также по качеству образовательной и исследовательской деятельности. Все использованные в работе модели представлены в Таблице 15.9.

Таблица 15.9 – Различные спецификации моделей DEA

	Вход	Выход
Модель 1 Исследовательская эффективность	1) Расходы на персонал 2) Все остальные расходы	Публикации по социальным наукам Публикации по естественным наукам
Модель 2 Образовательная эффективность	1) Расходы на персонал 2) Все остальные расходы	Выпускники естественных наук Выпускники социальных наук
Модель 3 Эффективность ВУЗа по подготовке специалистов в области социальных наук	1) Расходы на персонал 2) Все остальные расходы	Публикации по социальным наукам Выпускники социальных наук
Модель 4 Эффективность ВУЗа по подготовке специалистов в области естественных наук	1) Расходы на персонал 2) Все остальные расходы	Публикации по естественным наукам Выпускники естественных наук
Модель 5 Общая эффективность	1) Расходы на персонал 2) Все остальные расходы	Публикации по естественным наукам Выпускники естественных наук Публикации по социальным наукам Выпускники социальных наук

Здесь естественными науками считаются математика, медицина, химия, физика, биология, сельское хозяйство, инженерные специальности. Социальные науки – право, экономика, социология, лингвистика, а также творческие специальности. Таким образом, каждая из предложенных моделей отвечает за свой вид эффективности университета. Отметим, что во всех моделях издержки университета выбираются входными параметрами, то есть оценивается эффективность по издержкам.

Результаты работы различных моделей представлены в Таблице 15.10. Можно сделать вывод о том, что в среднем образовательная эффективность выше, чем исследовательская, а эффективность подготовки специалистов в области естественных наук выше, чем в подготовке специалистов социальных наук. Общая эффективность, в свою очередь, выше всех остальных, поскольку в данной модели комбинируются оценки эффективности, полученные из остальных моделей.

Таблица 15.10 – Эффективность согласно различным моделям

	Модель 1	Модель 2	Модель 3	Модель 4	Модель 5
Среднее	0.449	0.628	0.460	0.586	0.719
Минимум	0.001	0.108	0.014	0.005	0.165
Стандартное отклонение	0.297	0.232	0.301	0.267	0.236
Количество эффективных ВУЗов	4	5	3	5	13

Корреляция между моделями с различными комбинациями входных и выходных параметров приведена в Таблице 15.11. Логично было бы ожидать отрицательную корреляцию между моделями М1 и М2 (то есть между образовательной и исследовательской эффективностью), а также между М3 и М4. Это обусловлено тем, что направляя ресурсы в одно из направлений развития, ВУЗ неизбежно будет отставать в другом. Однако на практике этого не происходит, мы видим низкую положительную корреляцию между результатами разных моделей. Автор утверждает, что это может являться одним из индикаторов отсутствия стратегических групп, основанных на различии в направлении деятельности университета.

Таблица 15.11 – Корреляция различных моделей

	Модель 1	Модель 2	Модель 3	Модель 4	Модель 5
Модель 1	1				
Модель 2	0.188	1			
Модель 3	0.834	0.351	1		
Модель 4	0.217	0.750	0.073	1	
Модель 5	0.594	0.835	0.682	0.620	1

Во второй части работы [330] делается попытка определить наличие стратегических групп по направлению деятельности ВУЗов (исследовательская и образовательная специализация) и специализации подготовки выпускников (социальные или естественные науки). Основная идея заключается в построении квантильной регрессии объясняющих переменных на полученные с помощью DEA оценки эффективности. Напомним, что квантильная регрессия в соответствии с [325] представляется в виде

$$Y = X \cdot \beta + u, \quad (15.17)$$

где  $Y$  –  $n \times 1$  вектор значений зависимой переменной,  $X$  –  $n \times k$  матрица объясняющих переменных,  $u$  –  $n \times 1$  вектор ошибок,  $\beta$  –  $k \times 1$  вектор коэффициентов для

оценки,  $n$  – количество наблюдений,  $k$  – количество объясняющих переменных. Тогда квантильная регрессия уровня  $\tau$  может быть сведена к решению следующей задачи линейного программирования при ограничениях (15.17)

$$\min_{\beta^+, \beta^-, u^+, u^-} \{ \tau \cdot 1'_n u^+ + (1 - \tau) 1'_n \cdot u^- \}, \quad (15.18)$$

где  $\beta_j^+ = \max(\beta_j, 0)$ ,  $\beta_j^- = -\min(\beta_j, 0)$ ,  $u_j^+ = \max(u_j, 0)$ ,  $u_j^- = -\min(u_j, 0)$ .

В нашем случае вектор  $Y$  представляет собой значения эффективности, вычисленные с помощью модели DEA. В работе используется два значения параметра  $\tau$ , а именно 0.75 и 0.25. Таким образом, анализ фокусируется на различных группах университетов. В первом случае модель квантильной регрессии произведет расчет вектора неизвестных параметров  $\beta$  для высокоэффективных университетов, во втором случае – для низкоэффективных. Набор объясняющих переменных представлен в Таблице 15.12.

Таблица 15.12 – Набор объясняющих переменных для проведения регрессии и выявления стратегических групп университетов

Стратегические переменные: направление деятельности университета (исследовательская, образовательная)	Стратегические переменные: направление подготовки выпускников (естественные или социальные дисциплины)
1) Отношение количества публикаций по естественным наукам к количеству выпускников 2) Отношение количества публикаций по социальным наукам к количеству выпускников	1) Доля публикаций по естественным дисциплинам 2) Доля выпускников обучавшихся естественным наукам
Общие для обеих моделей объясняющие переменные	
1) Количество грантов 2) Численность студентов 3) Возраст университета 4) Численность людей, живущих рядом с университетом 5) Нахождение университета на западе (фиктивная переменная) 6) Обучение медицинской специальности (фиктивная переменная) 7) Количество университетов в округе	

Оказалось, однако, что влияние стратегических переменных на значения эффективности незначимо. Следовательно, нельзя сделать вывод о разделении немецких университетов на группы по направлению деятельности и подготовки выпускников.

Канада.



В [326] дополнительно учитываются влияние факторов среды на разброс оценок эффективности.

Входным параметром для модели DEA (зависимой переменной для модели SFA) выбираются общие издержки, понесенные ВУЗом. Выходные параметры для модели DEA представлены ниже:

- численность абитуриентов бакалавриата, подавших документы на научные направления подготовки;
- численность абитуриентов бакалавриата, подавших документы на другие направления подготовки;
- численность абитуриентов магистратуры;
- численность абитуриентов в аспирантуру;
- финансовые средства, выделенные спонсорами на исследовательские проекты университета;
- средняя зарплата ППС;
- количество различных грантов;
- наличие PhD-программ.

Модель DEA использует два различных набора входных и выходных параметров (полный и усеченный наборы, для усеченного набора некоторые выходные переменные модели становятся переменными среды). Для анализа влияния факторов среды на полученные с помощью DEA оценки эффективности проводится регрессионный анализ, то есть оценка модели DEA проходит в два этапа.

Результаты оценок, полученных с помощью различных модификаций модели DEA, представлены в Таблице 15.13. Выборка содержит 45 канадских университетов за 1992/1993 год.

Таблица 15.13 – Результаты DEA модели

	DEA		DEA с учетом параметров окружающей среды	
	Усеченный набор данных	Полный набор данных	Усеченный набор данных	Полный набор данных
Среднее значение	0.914	0.974	0.922	0.975
Медиана	0.961	1	0.956	0.989

Стандартное отклонение	0.106	0.061	0.078	0.035
Количество эффективных университетов	18	35	3	5

Учет влияния параметров окружающей среды сказался на числе эффективных университетов. Кроме того, видно, что канадские университеты являются достаточно эффективными.

### 15.3 Исследование российских государственных ВУЗов

Информация для оценки результативности российских ВУЗов с учетом их ресурсной обеспеченности была взята из базы данных мониторинга деятельности образовательных учреждений высшего профессионального образования в сфере исследований и разработок и кооперации с организациями предпринимательского сектора, данных по ВУЗам Министерства образования и науки РФ за отчетный период, а также данных из открытых источников (проекта «Общественный контроль за процедурами приема в ВУЗы как условие обеспечения равного доступа к образованию»). В выборку с учетом полноты и корректности представления данных вошло 200 ВУЗов. Так как группы, многочисленные по количеству объектов, состояли из ВУЗов технического (78 вузов) и классического (59 вузов) профиля, было принято решение на их примере провести сравнительный анализ результативности ВУЗов с учетом их ресурсного потенциала. Для этого был использован один из классических непараметрических методов оценки относительной результативности ВУЗов по выборке – метод оболочечного анализа с постоянной отдачей от масштаба. В данной работе метод DEA при предпосылке постоянной отдачи от масштаба был применен для оценки образовательного и научно-учебного потенциала технических и классических ВУЗов, как наиболее представительных по численности подвыборок ВУЗов по профилю их специализации. Для анализа образовательного потенциала (модели 1) ВУЗов в качестве входных параметров были использованы такие показатели, как удельное бюджетное финансирование ВУЗов, удельный вес обладателей ученых

степеней ППС в общей численности ППС и совокупная численность ППС. В качестве показателей результата в модели 1 при данном наделении ресурсов представлены средний балл первокурсников, поступивших по ЕГЭ, и суммарный контингент, т.е. численность студентов, обучающихся на бюджетных и платных местах. Этот набор выходных индикаторов характеризует выбор студентов ВУЗов именно этого профиля с учетом их численности и качества академической подготовки

Модель 2 в качестве ориентира оценивала результативность ВУЗов по научно-учебному профилю. В этом случае входные показатели сходны с моделью, учитывающей только образовательную деятельность ВУЗов, в части удельного бюджетного финансирования ВУЗа и уровня «остепененности» ППС. Кроме них, был дополнительно включен средний балл ЕГЭ. Эти показатели отражают тот потенциал абитуриентов, который ВУЗ привлекает в лице студентов и может использовать для повышения уровня своей исследовательской деятельности, в том числе для развития соответствующей кооперации ППС со студентами в рамках работы над совместными научно-исследовательскими проектами. В качестве результирующих показателей, кроме суммарного контингента, были включены взвешенный удельный вес молодых ППС в общей численности ППС и публикационная активность сотрудников ВУЗа, а именно, число научных статей в рецензируемых журналах в расчете на 100 сотрудников.

Спецификация обеих моделей в данном виде стала возможной как для технических, так и классических ВУЗов, поскольку отсутствовала корреляционная зависимость в группе входных и результирующих показателей по данным ВУЗам. Таблицы 15.14, 15.15 и 15.16, 15.17 представляют корреляционные матрицы входных и выходных показателей по обоим моделям для технических и классических ВУЗов соответственно.

Таблица 15.14 – Корреляционная матрица входных и выходных показателей для модели 1, для технических ВУЗов

	stud	ege	ubf	Pds	pps
stud	1.0000				
ege	0.1601	1.0000			
ubf	0.0681	0.5784*	1.0000		
pds	-0.0031	0.0889	0.0033	1.0000	
pps	-0.2885	-0.0186	0.0070	0.0996	1.0000

Обозначения: stud – суммарный контингент, ege – средний балл первокурсников, поступивших по ЕГЭ, ubf – удельное бюджетное финансирование (объем бюджетного финансирования в расчете на одного студента), pds – уровень остепененности профессорско-преподавательского состава (удельный вес кандидатов и докторов наук в общей численности профессорско-преподавательского состава), pps – совокупная численность профессорско-преподавательского состава (ППС).

Примечание. Символом \* отмечены статистически значимые коэффициента парной корреляции на 1% уровне значимости.

Таблица 15.15 – Корреляционная матрица входных и выходных показателей для модели 2, для технических ВУЗов

	ypps	pub	stud	ubf	pds	ege
ypps	1.0000					
pub	0.0616	1.0000				
stud	-0.0500	0.2880	1.0000			
ubf	-0.0764	-0.0328	0.0681	1.0000		
pds	0.3792*	-0.1336	-0.0031	0.0033	1.0000	
Ege	-0.0280	-0.0371	0.1601	0.5784*	0.0889	1.0000

Обозначения: ypps – взвешенный вес молодых ППС (кадрового резерва) в общей численности ППС, pub – публикационная активность сотрудников (число научных статей в рецензируемых журналах в расчете на 100 сотрудников), stud – суммарный контингент, ubf – удельное бюджетное финансирование (объем бюджетного финансирования в расчете на одного студента), pds – уровень остепененности профессорско-преподавательского состава, ege – средний балл первокурсников, поступивших по ЕГЭ.

Таблица 15.16 – Корреляционная матрица входных и выходных показателей для модели 1, для классических ВУЗов

	stud	ege	ubf	pds	pps
stud	1.0000				
ege	0.4694*	1.0000			
ubf	0.3941*	0.2167	1.0000		
pds	-0.0633	-0.0941	-0.0393	1.0000	
pps	0.3013	0.1637	0.1589	0.1536	1.0000

Обозначения: stud – суммарный контингент, ege – средний балл первокурсников, поступивших по ЕГЭ, ubf – удельное бюджетное финансирование (объем бюд-

жетного финансирования в расчете на одного студента), pds – уровень остепененности профессорско-преподавательского состава (удельный вес кандидатов и докторов наук в общей численности профессорско-преподавательского состава), prps – совокупная численность профессорско-преподавательского состава (ППС).

Таблица 15.17 – Корреляционная матрица входных и выходных показателей для модели 2, для классических ВУЗов

	ypps	pub	stud	ubf	pds	ege
ypps	1.0000					
pub	-0.2201	1.0000				
stud	-0.1123	-0.1903	1.0000			
ubf	-0.2317	0.1378	0.3941*	1.0000		
pds	0.2575	-0.2694	-0.0633	-0.0393	1.0000	
Ege	-0.0365	-0.1421	0.4694*	0.2167	-0.0941	1.0000

Обозначения: ypps – взвешенный вес молодых ППС (кадрового резерва) в общей численности ППС, pub – публикационная активность сотрудников (число научных статей в рецензируемых журналах в расчете на 100 сотрудников), stud – суммарный контингент, ubf – удельное бюджетное финансирование (объем бюджетного финансирования в расчете на одного студента), pds – уровень остепененности профессорско-преподавательского состава, ege – средний балл первокурсников, поступивших по ЕГЭ.

Результаты расчетов по обеим моделям для технических и классических ВУЗов представлены на рисунках 15.4-15.7. По уровню результативности технические ВУЗы можно разбить на три группы:

- до 0.6 – низкая результативность;
- от 0.6 до 0.8 – средняя результативность;
- от 0.9 до 1 – высокая результативность.

Для классических ВУЗов наблюдается более сложная картина. Университетов средней результативности становится довольно мало, расслоение более зримое. Если сохранить ту же градацию, что и для технических ВУЗов, то группы получатся примерно равными. Однако группы ВУЗов с низкой и высокой результативностью сосредоточены на границах (особенно группа с низкой результативностью практически вся сосредоточена вокруг показателя 0.5, т.е. заметно смещена). В свою оче-

редь, группа со средней результативность «размазана» и, если и говорить о смещении, то, скорее, в сторону значения 0.6, т.е. к нижней границе, а не к верхней, как в группах с низкой и высокой результативностью. Так что деление на группы так, как это оправдано для технических ВУЗов, не столь убедительно для классических университетов. Это означает, что для ВУЗов этого профиля нет содержательных оснований различать результативность в размере 0.5 и 0.6.

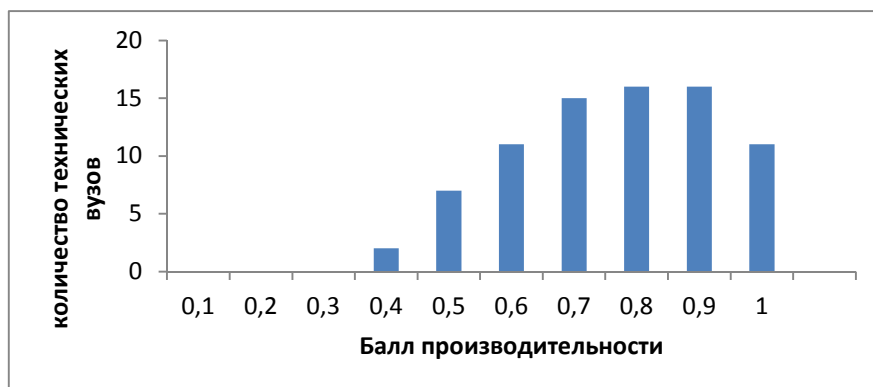


Рисунок 15.4 – Распределение баллов результативности для технических ВУЗов по модели 1



Рисунок 15.5 – Распределение баллов результативности для технических ВУЗов по модели 2

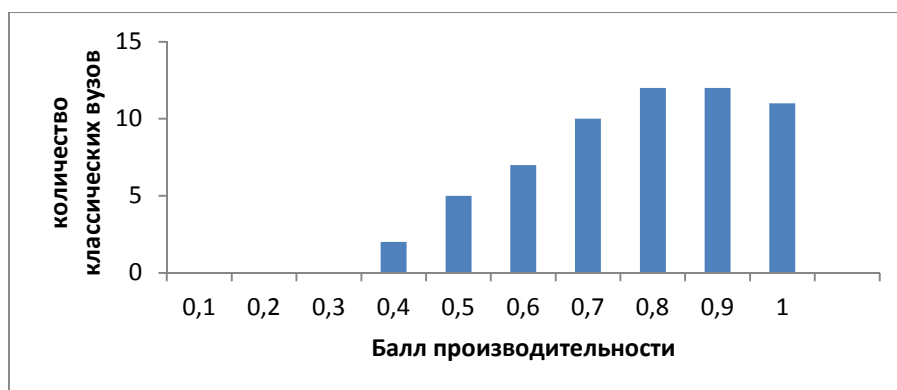


Рисунок 15.6 – Распределение баллов результативности для классических ВУЗов по модели 1

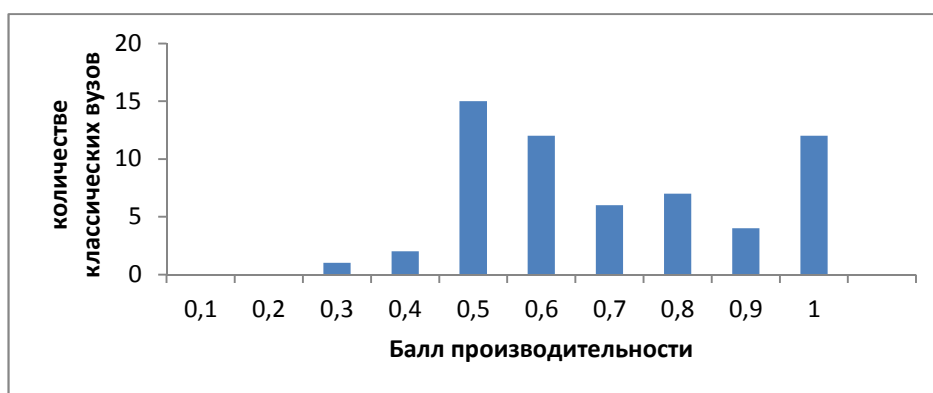


Рисунок 15.7 – Распределение баллов результативности для классических ВУЗов по модели 2

Из рисунков 15.4 и 15.6 видно, что распределение ВУЗов по уровню результативности в рамках образовательной деятельности было сходно как для группы технических, так и классических ВУЗов. При этом наблюдался сравнимый удельный вес относительно результативных ВУЗов в диапазоне между 80-90%. Удельный вес наиболее результативных ВУЗов был выше для группы классических ВУЗов. Это может быть отчасти связано с тем, что в этой группе количество исследованных ВУЗов было на 24.4% меньше, чем в группе технических. Чем меньшее количество анализируемых ВУЗов, тем большее число ВУЗов может оказаться на границе результативности, соответственно, будет наблюдаться меньший разброс в баллах результативности. Таким образом, размер выборки исследуемых ВУЗов может иметь решающее значение, особенно при принятии управленческих решений в отношении ВУЗов. В нашем случае это не привело к осуществленным различиям в итоговых

оценках. Так, удельный вес наиболее результативных ВУЗов в общем числе классических превысил аналогичный показатель по техническим учебным заведениям всего на 4.5 п.п.

В свою очередь, по модели 2 (рисунки 15.5 и 15.7) стоит отметить, что в группу высокорезультативных классических ВУЗов попало на 3.7 процентных пункта выше, чем в соответствующую группу технических. Это также может быть связано с разной размерностью исследуемых подвыборок. Однако стоит обратить особое внимание, что в группе технических ВУЗов наблюдался более высокий потенциал учебных заведений в научно-учебной работе в диапазоне 70-90% от максимально результативных ВУЗов. Эти ВУЗы составили 46.2% от общего числа анализируемых технических ВУЗов. Напротив, в классических ВУЗах наибольший удельный вес был у тех из них, у которых этот потенциал достиг только среднего уровня, т.е. 50-60%. На последние пришлась почти половина выборки (45.8%).

Кроме этого, модель 2 (см. рисунок 15.5) для технических ВУЗов дает более интересные результаты, расслаивает ВУЗы на три группы, показывающие низкую, среднюю и высокую результативности. В группе со средними показателями результативности оказались очень известные технические университеты, имеющие довольно высокий бренд. Это свидетельствует о том, что их показатели результативности ниже потенциально возможных, при наличии у них данных ресурсов. Если не соотносить возможности этой группы ВУЗов с их ресурсной обеспеченностью, то мы могли бы говорить о высоких показателях, но в соотношении с ресурсами потенциал этих ВУЗов недоиспользован. Именно в связи с этим они оказались в группе со средними показателями результативности.

Напротив, в группу ВУЗов с высокой результативностью вошли сильные региональные ВУЗы, которые более активно используют свой потенциал и даже при невысокой ресурсной обеспеченности достигают значимых результатов. Для классических ВУЗов, как и для технических, расчеты по 2 модели более убедительны, чем по 1 модели. Однако управленческая задача в целях разработки разной политики по отношению к ВУЗам разной результативности состоит в правильности проведения границы между группой классических университетов с низкой и средней ре-



зультативностью, что важно для содержательных комментариев. У ВУЗов, демонстрирующих показатели средней результативности, есть потенциал развития с опорой на собственные ресурсы, тогда как ВУЗы низкой результативности отличаются низкими показателями, как в образовательной, так и в научной деятельности, не могут привлечь сильных мотивированных студентов и не обладают достаточными финансовыми ресурсами.

Отдельно стоит подчеркнуть, что фактор публикационной активности существенно влияет на показатель результативности ВУЗов. Это справедливо как для технических (см. рисунки 15.4 и 15.5), так и для классических университетов (см. рисунки 15.6 и 15.7). Не так важно, считать ли значимой парную корреляцию между баллами ЕГЭ и удельным финансированием или не считать, эта связь не играет существенной роли (см. Таблицы 15.16 и 15.17). Однако публикационная активность меняет ландшафт – без нее преобладала бы красивая гладкая гистограмма с нарастанием для баллов эффективности ВУЗов по мере роста их результативности и некоторое снижение числа ВУЗов на границе результативности. Напротив, с учетом публикационной активности наблюдается «разваливание» ВУЗов на группы по результативности. При этом анализ списка ВУЗов показывает, что есть ВУЗы, которым публикационная активность позволяет приблизиться к порогу результативности, есть ВУЗы, на которые это не очень влияет, а есть, которые несут «существенные потери» при включении этого фактора в анализ. Это означает, что при принятии управленческих решений при расчете результативности ВУЗов есть смысл исключить ВУЗы, для которых есть барьеры на пути к публикациям, поскольку это может дать значимое (и неоправданное) снижение оценки их результативности.

Как было отмечено ранее, оба типа ВУЗов обладали в среднем более высоким потенциалом в области образовательной деятельности, чем в научно-учебной (см. Таблицу 15.18). Кроме этого, если приоритеты по образовательной деятельности в среднем разделяли как технические, так и классические ВУЗы (дисперсия баллов результативности для модели 1 меньше, чем для модели 2), то фокус на научно-образовательной деятельности представлен не во всех ВУЗах. В этом отношении как

технические, так и классические ВУЗы в среднем более далеки от границы своих потенциальных возможностей.

Таблица 15.18 – Описательные статистики баллов результативности для технических и классических ВУЗов

	Модель 1	Модель 2
Описательные статистики баллов результативности для технических ВУЗов		
Среднее значение ( <i>проценты</i> )	71.68	66.22
Дисперсия ( <i>проценты</i> )	2.78	4.61
Описательные статистики баллов результативности для классических ВУЗов		
Среднее значение ( <i>проценты</i> )	73.36	65.57
Дисперсия ( <i>проценты</i> )	3.12	4.42

Если говорить о том, насколько согласуются две миссии российских ВУЗов (модели 1 и 2) на основе полученных баллов результативности, то стоит подчеркнуть, что для технических ВУЗов коэффициент парной корреляции этих оценок, как и коэффициент ранговой корреляции (коэффициент Спирмена), были статистически значимыми на 1% уровне значимости и равнялись 35.1 и 36.4% соответственно. Напротив, в группе классических ВУЗов наблюдается меньшая согласованность стратегических ориентиров для учебных заведений. Так, коэффициент парной корреляции баллов результативности классических ВУЗов по этим двум моделям был менее 20% (19.9%) и незначим, а коэффициент Спирмена – 22.7% со значимостью на 1% уровне.

При международном сопоставлении (на основе результатов подраздела 15.2), с одной стороны, можно отметить, что российские ВУЗы в среднем по уровню эффективности уступают канадским [326] и английским университетам. Например, в [322] показано, что средняя эффективность даже тех английских ВУЗов, которые специализируются в области музыкального или театрального искусства, превышает 90%. А минимальный уровень баллов эффективности всех английских ВУЗов с учетом их научного профиля достигает 66.86% [313]. Последнее сравнимо с текущим положением государственных российских ВУЗов при анализе их научно-образовательного потенциала (см. Таблицу 15.18). Однако по образовательной деятельности в среднем

российские классические (73.36%) и технические ВУЗы (71.68%) выглядят более эффективными по сравнению с химическими (66.59%) и физическими (64.79%) факультетами английских ВУЗов, по научной деятельности ситуация обратная [322].

С другой стороны, российские ВУЗы сравнимы с австралийскими по средней эффективности, при этом в нашем случае выявлен меньший разброс в баллах эффективности, чем это было характерно для последних [314]. Кроме этого, российские ВУЗы являются более эффективными, чем их немецкие конкуренты, у которых среднее значение эффективности по одной из моделей достигло только 71.9% [330].

Таким образом, проведенные расчеты подтверждают гипотезу о том, что для принятия адекватных управленческих решений на основе результатов оценки результативности ВУЗов необходимо проводить анализ их результативности в однородных (сравнимых по профилю и базовым характеристикам) ВУЗов, при этом располагать достаточным количеством наблюдений, порядка 60 наблюдений при исследовании 4 входных показателей. Кроме этого, важно разработать такую систему входных и выходных показателей, чтобы они учитывали миссию или стратегические ориентиры для всех ВУЗов, входящих в выборку. Различные системы входных и выходных показателей для модели DEA оценки эффективности ВУЗов, проанализированные в данном разделе, приведены в Приложении Г.

#### 15.4 Некоторые выводы

Проведенный анализ практического опыта оценки результативности ВУЗов показал, что классическая модель DEA получила широкое распространение в прикладных исследованиях по оценке эффективности работы ВУЗов. Эти модели могут быть модифицированы. Например, в них могут быть включены оценочные суждения (дополнительные ограничения на коэффициенты модели DEA), использована кластеризация множества анализируемых университетов (см. [313] и [322]) или проведен учет параметров среды (см. [326]).

Часто возникает вопрос о сопоставимости различных моделей оценки эффективности и целесообразности использования той или иной методики на практике. В

проанализированных нами работах [324] и [326] делается попытка ответить на данный вопрос и сделать вывод о границах применимости моделей. Однако приходится признать, что сформулировать и представить четкие границы использования данных методов вряд ли возможно. Это обусловлено тем, что эти модели работают с реальными данными и очень сильно зависят от исследуемого объекта.

В эмпирической части был проанализирован потенциал российских государственных ВУЗов как в области образовательной, так и научно-учебной деятельности. На основе проведенных расчетов можно заключить, что по образовательному профилю технические и классические ВУЗы показали сравнимое распределение баллов результативности. При этом больше половины исследуемых ВУЗов в обеих подгруппах были представлены (55.1 и 59.3% для технических и классических ВУЗов соответственно) теми ВУЗами, чей балл результативности превышает или равен 80%, т.е. относительно производительными ВУЗами. С другой стороны, технические ВУЗы характеризовались в среднем более высоким потенциалом для научно-образовательной деятельности, чем это наблюдалось внутри группы классических ВУЗов. Так, у 46.2% технических ВУЗов балл результативности в отношении достижения этой миссии составил от 70 до 90%. В группе классических ВУЗов преобладали учебные заведения со средним потенциалом в отношении научно-образовательной деятельности, а именно 50-60% от потенциально возможного по анализируемой выборке ВУЗов.

Кроме этого было показано, что подобные расчеты результативности ВУЗов необходимо проводить для учебных заведений, сравнимых по профилю и базовым характеристикам. Для этого требуется выборка, в состав которой войдет около 60 наблюдений, чтобы было возможно проводить соответствующие расчеты для 4 ресурсных параметров. Кроме этого, важно разработать такую систему входных и выходных показателей, чтобы они оценивали реализацию миссии или достижение стратегических ориентиров всех ВУЗов, которые их формулируют в своих программах развития.

Отмечая прикладные результаты эмпирического исследования, стоит выделить, что расчеты по модели 2 (которая учитывает результативность ВУЗов по научно-

учебному профилю) позволяют выявить группы ВУЗов с высокой, средней и низкой результативностью. При расчете баллов результативности в однородных группах ВУЗов (отдельно для технических и классических университетов) получаются содержательно убедительные результаты. При использовании публикационной активности можно для отдельных ВУЗов сделать «скидку» на закрытость их научных исследований, а, значит, ориентироваться для них на расчеты показателей без публикационной активности. Границы значений показателей при делении ВУЗов на группы с низкой, средней и высокой результативностью, можно установить одинаковые для технических и классических университетов:

- до 0.6 – низкая результативность;
- 0.6 до 0.9 – средняя;
- выше 0.9 – высокая результативность.

Результаты исследований, представленные в этом разделе, нашли отражение в работе [310],[311]:

1. Абанкина И.В., Алескеров Ф.Т., Белоусова В.Ю., Бонч-Осмоловская А.А., Горденцева Т., Зиньковский К.В., Князев Е.А., Коган Ю., Огородничук Д.Л., Петрущенко В.В. Картина вузов в свете данных из структурированных и неструктурированных источников информации// В кн.: XIII Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества. В 4 кн. Кн. 1. М.: Издательский дом НИУ ВШЭ, 2012. с.297-303.
2. Abankina I.V., Aleskerov F.T., Belousova V.Y., Bonch-Osmolovskaya A.A., Petruschenko V.V., Ogorodniychuk D., Yakuba V.I., Zin'kovsky K.V. University efficiency evaluation with using its reputational component// Proceedings of the 4th International Conference on Applied Operational Research. Bangkok: Tadbir Operational Research Group, 2012. pp.244-253.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При выполнении проекта получены следующие основные результаты, могут быть сделаны следующие выводы и рекомендации:

– исследованы алгебраические свойства вероятностной модели IANC (Impartial Anonymous and Neutral Culture model) в задаче оценивания степени манипулируемости правил коллективного выбора, структура классов эквивалентности;

– найдено, насколько индекс манипулируемости в модели IANC отличается от индекса в базовой модели IC (Impartial Culture model); показано, в каких случаях эта разность индексов близка к нулю, а в каких достаточно велика, чтобы быть причиной изменений в относительной манипулируемости правил коллективного выбора при переходе от IC к IANC;

– в случаях, когда индекс в IC равен индексу в IANC, получены более точные результаты вычислительных экспериментов в модели IANC;

– показано, что задачи организации государственно-частного партнерства по выполнению капиталоемких проектов, организации взаимодействия региональных брокеров и оценки целесообразности инвестирования капитала в перепрофилирование предприятий с целью их последующего позиционирования на интересующих инвестора рынках могут рассматриваться как игровые задачи на полиэдральных множествах допустимых стратегий игроков и могут решаться в рамках проведения конкурсных процедур, в которых организаторы процедур могут выбирать начальные допустимые ставки игроков из решения вспомогательных задач дискретной оптимизации;

– показана возможность использования методов дискретной оптимизации и линейного программирования для обоснованного отыскания начальных цен (ставок) в конкурсных процедурах;

– показано, что при организации движения поездов на наиболее загруженных участках сети железных дорог, на которых объем заявок на перевозки превосходит пропускную способность этих участков, и при рационализации использования взлетно-посадочных полос аэропортов, конкурсные процедуры могут способство-

вать более равномерному распределению нагрузки на "узкие места" и повышению за счет этого экономической эффективности соответствующих систем;

– проанализированы теоретико-игровые модели выборов в совет директоров акционерной компании;

– показано, что преимущества той или иной процедуры голосования зависят от структуры собственности: при наличии доминирующего собственника прямое голосование будет сопровождаться меньшими издержками принятия решений; при разпыленной структуре собственности прямое голосование сопровождается издержками создания коалиций;

– показано, что кумулятивное голосование упрощает процесс формирования совета директоров, представляя всех собственников в равной мере; кумулятивное голосование является прозрачной процедурой голосования, так как позволяет участникам заранее рассчитать гарантированное число мест и равновесное распределение;

– показано, что при наличии разнообразных механизмов защиты прав миноритариев прямое голосование может иметь преимущества в виде более согласованного и работоспособного совета директоров, защиты компании от поглощения и внутренних корпоративных конфликтов;

– проанализирован проциклический эффект от введения системы банковского регулирования Базель II; даны рекомендации по снижению этого эффекта;

– исследована зависимость использования деривативов европейскими банками от стоимости этих организаций;

– показано, что эффективно использующие деривативы фирмы имеют большую стоимость; было выявлено, что влияние деривативов на стоимость банка значительно различается для системно-значимых и иных банков в части влияния доходности по хеджирующим деривативам и стоимостью банка;

– в рамках теории важности критериев разработаны два аналитических ординальных решающих правила (основанных на предположении существования кардинальных коэффициентов важности) и одно алгоритмическое ординальное решающее правило (не опирающегося на такое предположение) для многокритериальных задач

принятия решений, в которых все критерии упорядочены по важности и имеют шкалу первой порядковой метрики;

– модифицирован метод анализа текстов с помощью аннотированных суффиксных деревьев;

– модифицированный метод аннотированных суффиксных деревьев применен для установления связей между корпусами текстов и совокупностью ключевых словосочетаний, для установления связей между корпусами текстов и таксономией предметной области, для автоматизации построения таксономии с использованием компетентных разработок и ресурсов интернета;

– введены и исследованы усредненные стохастические меры информативности, определенные на множестве случайных признаков недетерминистской системы;

– найдены асимптотические формулы оценок числовых характеристик геометрической меры информативности по длине относительно отношения типа шум-сигнал;

– поставлены и исследованы некоторые оптимизационные задачи нахождения минимальных и устойчивых к зашумлению представлений контурных изображений с помощью геометрической меры информативности по длине;

– в рамках исследования поведенческой модели биржи поставлена и решена оптимизационная задача нахождения порога разделения кризисных и регулярных событий;

– исследована задача о совпадении позиций кандидатов в модели вероятностного голосования в случае предельной нейтральности избирателей при конвергентных позициях;

– построены аксиоматики для основных индексов влияния в задаче голосования с квотой;

– исследована задача расширения классической модели обобщенных паросочетаний на случай предпочтений, являющихся простейшими полупорядками; показано, что всегда существует устойчивое паросочетание и, обратно, любое устойчивое



паросочетание можно получить, рассмотрев некоторое линейное расширение исходных предпочтений агентов;

– в рамках применения модели обобщенных паросочетаний к анализу абитуриентской компании, получены необходимые и достаточные условия эффективности устойчивого паросочетания с точки зрения абитуриентов;

– в рамках применения методов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе построены агрегированные ранжирования стран по уровню их демократического развития;

– в рамках применения методов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе построена классификация стран по степени их конкурентоспособности с помощью методов теории коллективного выбора;

– разработана обучающее программное обеспечение, решающее задачи оптимального выбора и ранжирования альтернатив (электронное приложение к учебнику и задачнику Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. «Бинарные отношения, графы и коллективные решения»);

– в рамках модели справедливого дележа и для различных определений справедливости рассмотрена наиболее общая постановка (предполагается любое число участников при наличии как делимых, так и неделимых пунктов); установлена общая структура множества достижимости и разработан алгоритм, позволяющий найти конечное множество в пространстве доходов;

– разработаны, исследованы или модифицированы алгоритмы выбора вариантов для большого числа альтернатив (в частности, для интернет-данных);

– разработан метод классификации поисковых запросов и формирования списка наиболее релевантных страниц; модифицирован метод поиска наилучших альтернатив с помощью модели суперпозиции надпороговых процедур;

– с помощью модели оболочечного анализа данных (Data Envelopment Analysis – DEA) проанализирован потенциал российских государственных ВУЗов как в области образовательной, так и научно-учебной деятельности; выявлены группы ВУ-

Зов с высокой, средней и низкой результативностью относительно научно-учебной деятельности.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

### Раздел 1

1. Aleskerov F, Karabekyan D, Sanver M. R., Yakuba V. On the degree of manipulability of multi-valued social choice rules// *Homo Oeconomicus*, 28(1/2), 2011, pp.205-216.
2. Aleskerov F, Kurbanov E. Degree of manipulability of social choice procedures// Alkan et al. (eds.) *Current Trends in Economics*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1999. pp.13-28.
3. Burnside W. *Theory of groups of finite order*. – Cambridge University Press, 1897.
4. Egecioglu O. Uniform Generation of Anonimous and Neutral Preference Profiles for Social Choice Rules// *Technical Report TR2005-25*, 2005. Department of Computer Science, UCSB.
5. Egecioglu O, Giritligil A.E. Public Preference Structures with Impartial Anonimous and Neutral Culture Model// *Monte Carlo Methods and Applications*, 15(3), 2009, pp.241-255.
6. Gibbard A. Manipulation of voting schemes// *Econometrica*, 41, 1973, pp.587-601.
7. Kelly J. Minimal Manipulablflity and Local Strategy-Proofness// *Social Choice and Welfare*, 5, 1988, pp.81-85.
8. Kelly J. Almost all social choice rules are highly manipulable, but few aren't// *Social Choice and Welfare*, 10, 1993, pp.161-175.
9. [Lepelley & Valognes 2002] Lepelley D, Valognes F. Voting Rules, Manipulability and Social Homogeneity// *Public Choice*, 116(1/2), 2003, pp.165-184.
10. Nitzan S. The vulnerability of point-voting schemes to preference variation and strategic manipulation// *Public Choice*, 47, 1985, pp.349–370.
11. Pattanaik P. *Strategy and group choice*. – North-Holland, Amsterdam, 1978.
12. Pritchard G, Wilson M. Exact results on manipulability of positional voting rules// *Social Choice and Welfare*, 29, 2007, pp.487-513.

13. Satterthwaite M. Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions// Journal of Economic Theory, 10, 1975, pp.187-217.
14. Veselova Y. The difference between manipulability indexes in IC and IANC models// HSE Series: Economics WP BRP 09/E/2012, – 25p.

## Раздел 2

15. Петров А.Ф. Теоретико-игровой подход к математическому моделированию государственно-частного партнерства// ВКР, ВШЭ, Факультет бизнес-информатики, 2012, Научный руководитель А.С. Беленький.
16. Беленький А.С., Юнусова А.И. Теоретико-игровой подход к проблеме регулирования тарифов на транзитные контейнерные перевозки на железнодорожном транспорте России// Транспорт: Наука, Техника, Управление, ВИНТИ РАН, 6, 2011, с.3-8.
17. Каминская А.Ю. Разработка механизма управления сегментами железной дороги на основе комбинаторного аукциона и анализ его свойств// ВКР, НИУ ВШЭ, Факультет бизнес-информатики, 2011, Научный руководитель А.С. Беленький.
18. Катенко Е.А. Конструирование экономического механизма, стимулирующего авиакомпанию к выбору расписания использования взлетно-посадочной полосы, наиболее выгодного для аэропорта федерального значения// ВКР, НИУ ВШЭ, Факультет государственного и муниципального управления, 2012, Научный руководитель А.С. Беленький.
19. Королев Ю.М. Об одной задаче выпуклого программирования, ее обобщении и приложениях// ВКР, НИУ ВШЭ, Факультет бизнес-информатики, 2012, Научный руководитель А.С. Беленький.
20. Смирнова М.Н. Математическое моделирование деятельности биржевого брокера// ВКР, ВШЭ, Факультет бизнес-информатики, 2010, Научный руководитель А.С. Беленький.

21. Смирнова М.Н. Разработка и исследование свойств математической модели для анализа механизма государственно-частного партнерства в государственных закупках// ВКР, ВШЭ, Факультет бизнес-информатики, 2012, Научный руководитель А.С. Беленький.
22. Халл Д. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. – Вильямс, Москва, 2007.
23. Шор Н.З. Квадратичные оптимизационные задачи// Техническая кибернетика, 1, 1987, с.125-138.
24. Belenky A., Minimax planning problems with linear constraints and methods for their solving// Automation and Remote Control, 42(10), 1981, pp.1409-1419.
25. Belenky A. A 2-Person Game on a Polyhedral Set of Connected Strategies// Computers and Mathematics with Applications, 33(6), 1997, pp.99-125.
26. Belenky A. Analyzing the potential of a firm: an operations research approach// Mathematical and Computer Modelling, 35(13), 2002, pp.1405-1424.
27. Belenky A. Operations Research in Transportation Systems: Ideas and Schemes of Optimization Methods for Strategic Planning and Operations Management. – Springer, New York, 2010.
28. Belenky A. Understanding the Fundamentals of the U.S. Presidential Election System. – Springer, New York, 2012.
29. Belenky A. Two games with connected player strategies in systems economic studies// Computers and Mathematics with Applications (to appear in 2013-2014).
30. Belenky A. Finding equilibriums in game public-private partnership problems on polyhedral player strategies// Mathematical and Computer Modelling (to appear in 2013-2014).
31. Belenky A. Optimal allocation of financial resources in public procurement by mathematical programming techniques// Доклад на Втором Российском Экономическом Конгрессе, Суздаль (принят к публикации в феврале 2013 г.).

32. Bodlaender H. et. al. Computational complexity of norm-maximization// *Combinatorica*, 10(2), 1990, pp.203-225.

### Раздел 3

33. Верников А.В. Особенности работы совета директоров в российской компании с высококонцентрированной собственностью// В кн. «Корпоративное управление и работа совета директоров в российских компаниях» / под ред. А.А. Филатова и К.А. Кравченко. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2008, с.309-322.
34. Долгопятова Т.Г. Корпоративные конфликты и риски доминирующих собственников// *Журнал Новой экономической ассоциации*, 1(13), 2012, с.158-160.
35. Долгопятова Т.Г., Ивасаки И., Яковлев А.А. Российская корпорация: внутренняя организация, внешние взаимодействия, перспективы развития. – М.: Юстицинформ, 2009.
36. Капелюшников Р.И. Незащищенность прав собственности и её экономические последствия: российский опыт// *Журнал Новой экономической ассоциации*, 1(13), 2012, с.150-153.
37. Карпов А.В. Модель голосования на выборах совета директоров акционерной компании// *Журнал Новой экономической ассоциации*, 4(12), 2011, с.10-23.
38. Карпов А.В. Влияние процедуры выборов в совет директоров на деятельность компании// *Журнал Новой экономической ассоциации*, 4(16), 2012, с.10-25.
39. Культина М.В. Равновесия по Нэшу в игре голосования/ Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. СПб: СПбГУ, 1998.
40. Паппэ Я.Ш., Галухина Я.С. Российский крупный бизнес: первые 15 лет. Экономические хроники 1993-2008 гг. – М.: ГУ ВШЭ, 2009.
41. Федеральный закон «Об акционерных обществах» от 26.12.1995 № 208-ФЗ// Собрание законодательства Российской Федерации. 1996. № 1. ст. 1.

42. Федеральный закон «Об обществах с ограниченной ответственностью» от 08.02.1998 N 14-ФЗ// Собрание законодательства Российской Федерации. 1998. № 7. ст. 785.
43. Федеральный закон «О внесении изменений в Федеральный закон "Об акционерных обществах"» от 24.02.2004 г. №5-ФЗ// Собрание законодательства Российской Федерации. 2004. № 11. ст. 913.
44. Яковлев А.А. Агенты модернизации. – М.: ГУ ВШЭ, 2006.
45. Austin D.V. Reflections of a Corporate Conflict Freak// *Managerial Finance*, 18(7), 1992, pp.34-58.
46. Ballantine H.W. A Critical Survey of the Illinois Business Corporation Act// *The University of Chicago Law Review*, 1(3), 1934, pp.357-393.
47. Bhagat S., Brickley J.A. Cumulative Voting: The Value of Minority Shareholder Voting Rights// *Journal of Law and Economics*, 27(2), 1984, pp.339-365.
48. Cai J., Garner J.L., Walking R.A. Electing Directors// *The Journal of Finance*, 64(5), 2009, pp.2389-2421.
49. Cole A.T.Jr. Legal and Mathematical Aspects of Cumulative Voting// *2 South Carolina Law Quarterly*, 3, 1950, pp.225-244.
50. Cooper D.A. The Potential of Cumulative Voting to Yield Fair Representation// *Journal of Theoretical Politics*, 19(3), 2007, pp.277-295.
51. Cox G.W. SNTV and d'Hondt are `Equivalent'// *Electoral Studies*, 10(2), 1991, pp.118-132.
52. Dalebout R.S. Cumulative Voting for Corporate Directors: Majority Shareholders in the Role of Fox Guarding a Hen House// *Brigham Young University Law Review*, 4, 1989, pp.1199-1226.
53. Danielson M.G., Karpoff J.M. On the uses of corporate governance provisions// *Journal of Corporate Finance*, 4(4), 1998, pp.347-371.
54. Dodd P., Warner J.B. On Corporate Governance: a Study of Proxy Contests// *Journal of Financial Economics*, 11(1), 1983, pp.401-438.

55. Droop H.R. On Methods of Electing Representatives// Journal of the Statistical Society of London, 44(2), 1881, pp.141-202.
56. Duvall R.M., Austin D.V. Predicting the Results of Proxy Contests// The Journal of Finance, 20(3), 1965, pp.464-471.
57. Emerson F.D., Latham F.C. Proxy Contests: A Study in Shareholder Sovereignty// California Law Review, 41(3), 1953, pp.393-438.
58. Easterbrook F.H., Fischel D.R. Voting in Corporate Law// Journal of Law and Economics. Corporations and Private Property: A Conference Sponsored by the Hoover Institution. 26 (2), 1983, pp.395-427.
59. Felsenthal D.S. Is cumulative Voting Really Different from One-man, One-vote?// Electoral Studies, 4(2), 1985, pp.141-148.
60. Forjan J.M. The wealth effects of shareholder-sponsored proposals// Review of Financial Economics, 8(1), 1999, pp.61-72.
61. Gerstenberg C.W. Material of corporation finance. – Fourth Edition. NY: Prentice-Hall, Inc., 1922.
62. Ghosh C., Owers J.E., Rogers R.C. Proxy Contests: A Re-examination of the Value of the Vote Hypothesis// Managerial Finance, 18(7), 1992, pp.3-18.
63. Glasser G.J. Game Theory and Cumulative Voting for Corporate Directors// Management Science, 5(2), 1959, pp.151-156.
64. Glazer A., Glazer D., Grofman B. Cumulative voting in corporate elections: Introducing strategy into the equations// South Carolina Law Review, 35(2), 1984, pp.295-309.
65. Goldberg C.B. The Accuracy of Game Theory Predictions for Political Behavior: Cumulative Voting in Illinois Revisited// The Journal of Politics, 56(4), 1994, pp.885-900.
66. Gordon J.N. Institutions as Relational Investors: A New Look at Cumulative Voting// Columbia Law Review, 94(1), 1994, pp.124-192.
67. Heron R.A., Lewellen W.G. (1998). An Empirical Analysis of the Reincorporation Decision// Journal of Financial and Quantitative Analysis, 33(4), 1998, pp.549-568.



68. Hoag C., Hallett G. Proportional Representation. – New York: The Macmillan Company, 1926.
69. Hupp J.W. Corporations: Officers and Directors: Relationship between Cumulative Voting and Removal Provisions// Michigan Law Review, 51(5), 1953, pp.744-747.
70. Ikenberry D., Lakonishok J. Corporate Governance Through the Proxy Contest: Evidence and Implications// The Journal of Business, 66(3), 1993, pp.405-435.
71. Maug E., Rydqvist K. Do Shareholders Vote Strategically? Voting Behavior, Proposal Screening, and Majority Rules// Review of Finance, 13(1), 2009, pp.47-79.
72. Mills L.R. The Mathematics of Cumulative Voting// Duke Law Journal, 28(1), 1968, pp.28-43.
73. Mishra S. Confidential and Cumulative Voting 2008 Background Report// RiskMetrics group. 2008. [Электронный ресурс] Режим доступа [http://va.issproxy.com/resourcecenter/publications/Background\\_Reports/2008/CC\\_2008.pdf](http://va.issproxy.com/resourcecenter/publications/Background_Reports/2008/CC_2008.pdf), свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: январь 2013 г.).
74. Personick M.E. 2006 Background Report: Confidential and Cumulative Voting// Institutional Shareholder Services. 2006. [Электронный ресурс] Режим доступа [http://va.issproxy.com/resourcecenter/publications/Background\\_Reports/2006/CC.pdf](http://va.issproxy.com/resourcecenter/publications/Background_Reports/2006/CC.pdf), свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: январь 2013 г.).
75. Personick M.E. IRRC Corporate Governance Service 2003 Background Report F: Voting Issues: Confidential and Cumulative Voting. 2003. [Электронный ресурс] Режим доступа [http://va.issproxy.com/resourcecenter/publications/Background\\_Reports/2003/Conf-Cum03.pdf](http://va.issproxy.com/resourcecenter/publications/Background_Reports/2003/Conf-Cum03.pdf), свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: январь 2013 г.).
76. Rechner P.L., Sundaramurthy C. Dalton D.R. Corporate Governance Predictors of Adoption of Anti-Takeover Amendments: An Empirical Analysis// Journal of Business Ethics, 12(5), 1993, pp.371-378.
77. Rutterford J. The Shareholder Voice: British and American Accents, 1890-1965// Enterprise & Society, 13(1), 2012, pp.120-153.

78. Sawyer J., MacRae D.Jr. Game Theory and Cumulative Voting in Illinois: 1902-1954// The American Political Science Review, 56(4), 1962, pp.936-946.
79. Selten R. A reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games// International Journal of Game Theory, 4(1), 1975, pp.25-55.
80. Stevens W.H.S. Stockholders' Voting Rights and the Centralization of Voting Control// The Quarterly Journal of Economics, 40(3), 1926, pp.353-392.
81. Sundaramurthy C. Corporate Governance Within the Context of Antitakeover Provisions// Strategic Management Journal, 17(5), 1996, pp.377-394.
82. Sundaramurthy C., Mahoney J.M., Mahoney J.T. Board Structure, Antitakeover Provisions, and Stockholder Wealth// Strategic Management Journal, 18(3), 1997, pp.231-245.
83. Swanson D.W. Corporations: Statutes Providing for Both Cumulative Voting and Classified Boards// Michigan Law Review, 55(1), 1956, pp.139-141.
84. Terekhov V. Three Essays on Investor Protection. A Thesis in the Department of Economics. Concordia University. Montreal. Canada, 2011. [Электронный ресурс] Режим доступа [http://spectrum.library.concordia.ca/974066/1/Terekhov\\_PhD\\_S2012.pdf](http://spectrum.library.concordia.ca/974066/1/Terekhov_PhD_S2012.pdf), свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: январь 2013 г.).
85. Ventoruzzo M. Empowering Shareholders in Directors' Elections: A Revolution in the Making// European Company and Financial Law Review, 8(2), 2011, pp.105-144.
86. Williams C.M. Cumulative Voting// Harvard Business Review, 33(3), 1955, pp.108-114.
87. Yermack D. Shareholder Voting and Corporate Governance// The Annual Review of Financial Economics, 2, 2010, pp.103-125.
88. Zahra S.A., Pearce II J.A. Boards of Directors and Corporate Financial Performance: A Review and Integrative Model// Journal of Management, 15(2), 1989, pp.291-334.
89. Zhao A., Brehm A.J. Cumulative voting and the conflicts between board and minority shareholders// Managerial Finance, 37(5), 2011, pp.465-473.

#### Раздел 4

90. Алескеров Ф., Андриевская И., Пеникас Г., Солодков В. «Анализ математических моделей Базель II», М., Физматлит, 2010 (ISBN 978-5-9221-1142-3), 286 с.
91. Андриевская И.К., Пеникас Г.И., Пильник Н.П. Моделирование динамики рисков по Базелю II// Банковское Дело, 11, 2010, с.66-71.
92. Andrievskaya I.K., Penikas H.I. Copula-application to modeling Russian banking system capital adequacy according to Basel II IRB-approach// Model Assisted Statistics and Applications, 7, 2012, pp.267-280.
93. Аналитический документ о степени соответствия внутрибанковских подходов к управлению кредитным риском банков – участников проекта "Банковское регулирование и надзор (Базель II)" Программы сотрудничества Евросистемы с Банком России минимальным требованиям IRB-подхода Базеля II, 2010.
94. Бортников Г. Антициклическое регулирование адекватности капитала// Управление в кредитной организации, 6, 2009.
95. Бродский Б.Е., Пеникас Г.И. Сафарян И.А. Обнаружение структурных сдвигов в моделях копул// Прикладная эконометрика, 4(16), 2009, с.3-15.
96. Gomayun N., Penikas H., Titova Y. Do Hedging and Trading Derivatives Have the Same Impact on Public European Bank's Value and Share Performance?// WP BRP 09/FE/2012.
97. Allayannis G., Weston J. P. The Use of Foreign Currency Derivatives and Firm Market Value// Darden School Working Paper No.97-23, October, 1998.
98. Bartram S. M., Brown G. W., Conrad J. S. The Effects of Derivatives on Firm Risk and Value// URL: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1210422>, January 2009.
99. BIS 80th Annual Report 2009/2010, Basel, Switzerland.
100. Basel Committee on Banking Supervision "Countercyclical capital buffer proposal"// Consultative Document, 2010.

101. Bebczuk R., Burdisso T., Carrera J., Sangiácomo M. A new look into credit procyclicality: International panel evidence// BIS CCA Conference, 2010.
102. Borio C, Furfine C. Lowe P. Procyclicality of the financial system and financial stability: issues and policy options// BIS Papers No.1, 2001.
103. Caprio G. Jr. Safe and Sound Banking: A Role for Countercyclical Regulatory Requirements?// IIS discussion paper, 2009.
104. Committee of European Banking Supervisors “Position paper on a counter-cyclical capital buffer”, 2009.
105. Danielsson J., Jonsson A. Countercyclical Capital and Currency Dependence// Financial Markets, Institutions & Instruments, 14(5), 2005, pp.329-348.
106. Drehmann M., Borio C., Gambacorta L., Jiménez G., Trucharte C. Countercyclical capital buffers: exploring options// BIS Working Papers No.317, 2010.
107. Elsinger H., Lehar A., Summer M. Risk Assessment for Banking Systems// Management Science, 52(9), 2006, pp.1301-1314.
108. Financial Stability Forum “Report of the Financial Stability Forum on Addressing Procyclicality in the Financial System”, 2009.
109. Geczy C. C., Minton B. A., Schrand C. M. Why Firms Use Currency Derivatives// The Journal of Finance, 52(4), 1997, pp.1323-1354.
110. Gordy M., Howells B. Procyclicality in Basel II: Can we treat the disease without killing the patient?// Journal of Financial Intermediation, 15, 2006, pp.395-417.
111. Griffith-Jones S. Implications of Basel II for Stability and Growth in Developing Countries; Proposals for Further Research and Action// Institute of Development Studies, prepared for Ibase Rio Meeting on Financial Liberalization and Global Governance, 2007.
112. Griffith-Jones S., Ocampo J.A., Ortis A. Building on the counter-cyclical consensus: A policy agenda// Initiative for Policy Dialogue, 2009.

113. Faff R., Nguyen H. Are Financial Derivatives Really Value Enhancing?// Australian Evidence, School of Accounting, Economics and Finance, School Working Paper, 2007.
114. Ferguson N. The ascent of money. – M.: Astrel: Corpus., 2010.
115. Hofmann B. Procyclicality: The Macroeconomic Impact of Risk-Based Capital Requirements// Financial Markets and Portfolio Management, 19(2), 2005, pp.176-197.
116. Hull J.C. Options, Futures and Other Derivatives. Prentice Hall Finance Series, 4th edition, 2000.
117. Jablecki J. The impact of Basel I capital requirements on bank behavior and the efficacy of monetary policy// International Journal of Economic Sciences and Applied Research, 2(1), 2009, pp.16-35.
118. Jackson P. Capital Requirements and Bank Behaviour: The Impact of Basle Accord// BIS. WP No.1, 1999.
119. International Accounting Standard 39. Financial Instruments: Recognition and Measurement, 2009.
120. Illing M., Paulin G. Basel II and the Cyclicity of Bank Capital// Canadian Public Policy, 31(2), 2005, pp.161-180.
121. Kapitsinas S. The Impact of Derivative usage on Firm Value: Evidence from Greece, Center of Financial Studies, Department of Economics, University of Athens. MPRA Paper No.10947, 2008.
122. Kashyap A., Stein C. Cyclical Implications of the Basel-II Capital Standards// Federal Reserve Bank of Chicago Economic Perspectives 28, 2004, pp.18-31.
123. Liebig Th., Porath D., Weder di Mauro B., Wedow B. How will Basel II affect bank lending to emerging markets? An analysis based on German bank level data// DP Series 2 'Banking and Financial Supervision' No 05/2004, 2004.
124. Morone M., Cornaglia A., Mignola G. Economic Capital Assessment via Copulas: Aggregation and Allocation of Different Risk Types// Intesa-Sanpaolo, 2007.

125. Nachane D., Ghosh S., Ray P. Basel II and bank lending behavior: some likely implications for monetary policy// MPRA Paper No. 3841, 2006.
126. Nance D.R., Smith C.W., Smithson C.W. On the Determinants of Corporate Hedging// *The Journal of Finance*, 48, 1993, pp.267-284.
127. Ocampo J.A. Capital Account and Counter-Cyclical Prudential Regulations in Developing Countries// *Informes y estudios especiales series*, 6, 2003.
128. Ozdemir B., Miu P. Basel II Implementation. A Guide to Developing and Validating a Compliant, Internal Risk Rating System// McGraw-Hill. [Chapter 4. Pillar II, Challenges, and Dealing with Procyclicality], 2009.
129. Pederzoli C., Torricelli C., Tsomocos D.P. Rating systems, procyclicality and Basel II: an evaluation in a general equilibrium framework// *Annals of Finance*, 6(1), 2010, pp.33-49.
130. Repullo R., Suarez J. The Procyclical Effects of Basel II// CEPR Discussion Paper No. DP6862, 2008.
131. Repullo R., Saurina J., Trucharte C. Mitigating the Procyclicality of Basel II// CEPR Discussion Papers 7382, 2009.
132. Rosenberg J., Schuermann T. A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-Tailed Risks// *Journal of Financial Economics*, 79, 2006, pp.569-614.
133. Schuermann T., Kuritzkes A., Weiner S. Risk Measurement, Risk Management and Capital Adequacy of Financial Conglomerates// *Brookings-Wharton Papers in Financial Services* Herring, R. and R. Litan, 2003, pp.141-194.
134. The role of valuation and leverage in procyclicality// FSF-CGFS Working Group, 2009.
135. Turner P. Procyclicality of Regulatory Ratios?// CEPA Working Paper Series III, Working Paper No.13, BIS, 2000.
136. Wooldridge J.M. *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*. – Cambridge, MA: MIT Press, 2002.

## Раздел 5

137. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений: Учебник. Изд. третье, перераб. и доп. – М.: Университетская книга, Логос, 2006.
138. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений: Учебное пособие. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2008.
139. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Аналитические решающие правила, использующие упорядоченность по важности критериев со шкалой первой порядковой метрики// Автоматика и телемеханика, 5, 2012, с.84-96.
140. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Алгоритмическое решающее правило, использующее ординальные коэффициенты важности критериев со шкалой первой порядковой метрики// Журнал вычислительной математики и математической физики, 52(1), 2012, с.43-59.
141. Осипова В.А., Подиновский В.В., Яшина Н.П. О непротиворечивом расширении отношений предпочтения в задачах принятия решений// Журнал вычислительной математики и математической физики, 24(6), 1984, с.831-840.
142. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2, 1975, с.330-344.
143. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности однородными критериями// Автоматика и телемеханика, 11, 1976, с.118-127.
144. [Подиновский 1978] Подиновский В.В. Коэффициенты важности критериев в задачах принятия решений. Порядковые, или ординальные, коэффициенты важности// Автоматика и телемеханика, 10, 1978, с.130-141.
145. Подиновский В.В. Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений// Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н.Н. Моисеева. – М.: Наука, 1979, с.117-145.

146. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи оптимизации с упорядоченными по важности критериями// Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании / Под ред. Е.Г. Гольштейна. – М.: Наука, 1991, с.308-324.
147. Подиновский В.В. Количественная важность критериев с дискретной шкалой первой порядковой метрики// Автоматика и телемеханика, 8, 2004, с.196-203.
148. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2007.
149. Подиновский В.В., Потапов М.А. Важность критериев в многокритериальных задачах принятия решений: теория, методы, софт и приложения// Открытое образование, 2, 2012, с.55-61.
150. Подиновский В.В. Количественная важность критериев и аддитивные функции ценности// Журнал вычислительной математики и математической физики, 53(1), 2013, с.133-142.
151. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993.
152. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. – М.: Радио и связь, 1992.
153. Fishburn P.C. Decision and value theory. – New York: Wiley, 1964.
154. Podinovski V.V. Multicriteria optimization problems involving importance-ordered criteria// Modern Mathematical Methods of Optimization / Elster K.-H. (ed.). Berlin: Akademie Verlag, 1993, pp.254-267.
155. Podinovski V.V. Problems with importance-ordered criteria// User-Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis and Support / J. Wessels and A. P. Wierzbicki (Eds.). Lecture Notes in Economics and Math. Systems, 397. – Berlin: Springer, 1993. pp.150-155.
156. Podinovski V.V. The quantitative importance of criteria for MCDA// J. of Multi-Criteria Decision Analysis, 11, 2002, pp.1-15.



157. Podinovski V.V. On the use of importance information in MCDA problems with criteria measured on the first ordered metric scale// J. of Multi-Criteria Decision Analysis, 15, 2009, pp.163-174.
158. Podinovski V.V. Sensitivity analysis for choice problems with partial preference relations// European journal of operational research, 221, 2012, pp.198-204.

#### Раздел 6

159. Ефименко И.В., Хорошевский В.Ф. Онтологическое моделирование экономики предприятий и отраслей современной России: Российские исследования и разработки в области онтологического инжиниринга и бизнес-онтологий// Препринт WP7/2011/08, М.: Изд. дом ВШЭ, 2011. – 76с.
160. Лукашевич Н.В. Тезаурусы в Задачах Информационного Поиска. – М.: Изд-во Московского университета, 2011. – 465 с.
161. Миркин Б.Г., Черняк Е.Л., Чугунова О.Н. Метод аннотированного суффиксного дерева для оценки степени вхождения строк в текстовые документы// Бизнес-Информатика, 3(21), 2012, с.31-41.
162. Рубрикатор РЖ «Математика». URL:  
<http://www.viniti.ru/russian/math/files/271.htm> (дата обращения 15.05. 2012).
163. Справочные материалы ВАК [http://vak.ed.gov.ru/ru/help\\_desk/](http://vak.ed.gov.ru/ru/help_desk/)
164. Черняк Е.Л., Чугунова О.Н., Аскарлова Ю.А., Насименто С., Миркин Б.Г. Автоматизация использования таксономий для аннотирования текстовых документов// Сб. конференции «Анализ Изображений, Сетей и Текстов"», Екатеринбург, 2012, с.97-103.
165. Чесноков С.В. Детерминационный Анализ Социально-Экономических Данных. – 2-е изд. – М.: URSS, 2009. – 168 с.
166. ACM Computing Classification System, 1998. URL:  
<http://www.acm.org/about/class/1998> (дата обращения: 09.09.2010).
167. Grau B.C., Parsia B., Sirin E. Working with Multiple Ontologies on the Semantic Web – International Semantic Web Conference, 2004.

168. Gusfield D. Algorithms on Strings, Trees, and Sequences. – Cambridge University Press, 1997. – 536 p.
169. Han J., Kamber M., Pei J. Data Mining: Concepts and Techniques. – Third Edition. – Morgan Kaufmann, 2011. – 703 p.
170. Huang C., Yin J., Hou F. Text clustering using a suffix tree measure// Journal of Computers, 10(6), 2011, pp.2180-2186.
171. Kittur A., Chi E.H., Suh B. What's in Wikipedia? Mapping Topics and Conflict Using Socially Annotated Category Structure// Studying Wikipedia, CHI 2009.
172. Manning C., Schütze H. Foundations of Statistical Natural Language Processing. – MIT Press, 1999. – 556 p.
173. Mirkin B. Clustering for Data Mining: A Data Recovery Approach – Chapman & Hall/CRC, 2005. – 276 p.
174. Mirkin B.G., Amorim R. Minkowski metric, feature weighting and anomalous cluster initializing in K-Means clustering // Pattern Recognition, 45, 2012, pp.1061-1075.
175. Nascimento S., Mirkin B.G. Additive spectral method for fuzzy cluster analysis of similarity data including community structure and affinity matrices// Information Sciences, 183, 2012, pp.16-34.
176. Pampapathi R., Mirkin B., Levene M. A suffix tree approach to anti-spam email filtering// Machine Learning, 65(1), 2006, pp.309-338.
177. Ponzetto S.P., Strube M. Deriving a Large Scale Taxonomy from Wikipedia// Proceedings of AAAI. 2007.
178. Robinson P.N., Bauer, S. Introduction to Bio-Ontologies – Chapman & Hall/CRC, 2011. – 468 p.
179. Stepp R., Michalski R.S. Conceptual clustering of structured objects: A goal-oriented approach// AI Journal, 28, 1986, pp.43-69.
180. van Hage W.R., Katrenko S., Schreiber G., A Method to Combine Linguistic Ontology-Mapping Techniques// International Semantic Web Conference, 2005.

181. Wu F., Weld D. Automatically refining Wikipedia Infobox Ontology// Proceeding of WWW, 2008.
182. Zamir O., Etzioni. O. Web document clustering: A feasibility demonstration// Proceedings of SIGIR'98, University of Washington, Seattle, USA, 1998.
183. Zirm C., Nastase V., Struve M. Distinguishing between Instances and Classes in the Wikipedia Taxonomy// Proceedings of ESWC, 2008.

#### Раздел 7

184. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. – М.: Финансы и статистика, 1989.
185. Броневи́ч А.Г., Лепский А.Е. Применение теории нечетких мер к оцениванию информативности полигонального представления контура изображения// Сб. трудов Межд. науч.-практич. семинара «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте», М.: Наука, Физматлит, 2001, с.112-116.
186. Броневи́ч А.Г., Лепский А.Е. Аксиоматический подход к задаче нахождения оптимального полигонального представления контура// Интеллектуальные системы, 9 (1-4), 2005, с.121-134.
187. Деза Е.И., Деза М.-М. Энциклопедический словарь расстояний. – М.: Наука, 2008.
188. Лепский А.Е. Применение стохастических монотонных мер в задачах выделения информативных признаков контурных изображений// Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Черногория, г. Будва, 2012 г.: Сборник докладов. М.: Торус Пресс, 2012., с.358-361.
189. Митропольский А.К. Теория моментов. – М.: гос. изд. колх. и совх. лит-ры, 1933.
190. Сендов Б. Некоторые вопросы теории приближения функций и множеств в хаусдорфовой метрике// Успехи мат. наук, 24(5), 1969, с.141-178.

191. Bronevich A.G., Semeriy O.S. An Information Measure-Based Grayscale Image Segmentation// Pattern Recognition and Image Analysis, (2), 2006, pp.201-207.
192. de Cooman G. Precision-imprecision equivalence in a broad class of imprecise hierarchical uncertainty models// Journal of Statistical Planning and Inference, 105, 2002, pp.175-198.
193. Horng J.-H. An adaptive smoothing approach for fitting digital planar curves with line segments and circular arcs// Pattern Recognition Letters, 24, 2003, pp.565-577.
194. Jolliffe I.T. Principal Component Analysis, Series: Springer Series in Statistics, 2nd ed. – Springer, NY, 2002, XXIX, 487 p.
195. Lepskiy A. Stochastic Measure of Informativity and Its Application to the Task of Stable Extraction of Features// Synergies of soft computing and statistics for intelligent data analysis, AISC 190, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013, pp.553-561.
196. Pei S.-C., Horng J.-H. Optimum approximation of digital planar curves using circular arcs// Pattern Recognition. 29 (3), 1996, pp.383-388.
197. Sugeno M. Fuzzy measure and fuzzy integral// Trans. SICE, 8, 1972, pp.95-102.

#### Раздел 8

198. Abreu D., Brunnermeier M.K. Bubbles and Crashes// Econometrica, 71(1), 2003, pp.173-204.
199. Aleskerov F., Egorova L. Is it so bad that we cannot recognize black swans?// Economic Letters, 117(3), 2012, pp.563-565.
200. Estrada J. Black swans in emerging markets// Journal of Investing, 18(2), 2009, pp.50-56.
201. Harras G., Sornette D. How to grow a bubble: A model of myopic adapting agents// Journal of Economic Behavior & Organization, 80(1), 2011, pp.137-152.
202. Irle A., Kauschke J., Lux T., Milakovic M. Switching rates and the asymptotic behavior of herding models// Advances in Complex Systems, 14(3), 2011, pp.359-376.

203. Kaltwasser P.R. Uncertainty about fundamentals and herding behavior in the FOREX market// *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, 389(6), 2010, pp.1215-1222.
204. Raberto M., Cincotti S., Focardi S., Marchesi M. Agent-based simulation of a financial market// *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, 299(1-2), 2001, pp.319-327.
205. Sornette D. Dragon-Kings, Black Swans and the Prediction of Crises// *International Journal of Terraspace Science and Engineering*, 2(1), 2009, pp.1-18.

#### Раздел 9

206. Anderson R., Zame W. Genericity with Infinitely Many Parameters// *Advances in Theoretical Economics*, 1(1), 2001, pp.1-62.
207. Ashworth S., Bueno de Mesquita E. Elections with platform and valence competition// *Games and Economic Behavior* 67(1), 2009, pp.191-216.
208. Banks J., Duggan J. Probabilistic Voting in the Spatial Model of Elections: The Theory of Office-Motivated Candidates// in David Austen-Smith and John Duggan, eds., *Social Choice and Strategic Decisions*. – Springer, New York, 2005.
209. Coughlin P., Nitzan S. Electoral Outcomes with Probabilistic Voting and Nash Social Welfare Maxima// *Journal of Public Economics* 15, 1981, pp.113-121.
210. Duggan J. Equilibrium Equivalence Under Expected Plurality and Probability of Winning Maximization// mimeo, University of Rochester, 2000.
211. Gallagher M. Comparing Proportional Representation Electoral Systems: Quotas, Thresholds, Paradoxes and Majorities// *British Journal of Political Science* 22, 1992, pp.469-496.
212. Hinich M. Equilibrium in spatial voting: The median voter result is an artifact// *Journal of Economic Theory* 16, 1977, pp.208-219.
213. Hinich M., Ledyard J., Ordeshook P. Nonvoting and the existence of equilibrium under majority rule// *Journal of Economic Theory* 4, 1972, pp.144-153.

214. Hojman D. So, Do You Really Want to Be a Senator? The Political Economy of Candidate Motivation and Electoral Defeat in Chile. University of Liverpool Research Paper No 0403, 2004.
215. Laver M., Shepsle K. Making and Breaking Governments: Cabinets and Legislatures in Parliamentary Democracies. – Cambridge University Press, 1996.
216. Ledyard J. The Pure Theory of Large Two-Candidate Elections// *Public Choice*, 44, 1984, pp.7-41.
217. Lijphart A. The Political Consequences of Electoral Laws// *American Political Science Review*, 84, 1990, pp.481-496.
218. Lin T.-M., Enelow J., Dorussen H. Equilibrium in Multicandidate Probabilistic Spatial Voting// *Public Choice*, 98, 1999, pp.59-82.
219. MasCollé A., Whinston M.D., Green J.R. *Microeconomic Theory*. – Oxford University Press, 1995.
220. McKelvey R., Patty J.W. A Theory of Voting in Large Elections// *Games and Economic Behavior*, 57(1), 2006, pp.155-180.
221. Patty J.W. Local Equilibrium Equivalence in Probabilistic Voting Model// *Games and Economic Behavior*, 51(1), 2005, pp.523-536.
222. Patty J.W. Generic Difference of Expected Vote Share and Probability of Victory Maximization in Simple Plurality Elections with Probabilistic Voters// *Social Choice and Welfare*, 29(1), 2007, pp.149-173.
223. Schofield N. The Mean Voter Theorem: Necessary and Sufficient Conditions for Convergent Equilibrium// *Review of Economic Studies*, 74, 2007, pp.965-980.
224. Schofield N., Sened I. *Multiparty Democracy. Elections and Legislative Politics*, – Cambridge University Press, 2006.
225. Zakharov A.V. Candidate Location and Endogenous Valence// *Public Choice*, 138 (3-4), 2009, pp.347-366.
226. Zakharov A.V. Probabilistic voting equilibria under nonlinear candidate payoffs// *Journal of Theoretical Politics*, 24(2), 2012, pp.235-247.

227. Zakharov A.V., Sorokin C.S. Policy convergence in a two-candidate probabilistic voting model// Social Choice and Welfare, 2013 (on reviewing).

#### Раздел 10

228. Алескеров Ф.Т. Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по созданию коалиций// ДАН, 414(5), 2007, с.594-597.

229. Бацын М.В., Калягин В.А. Об аксиоматическом определении общих индексов влияния в задаче голосования с квотой. WP7/2009/04. М.: Изд. дом ГУ-ВШЭ. 2009.

230. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М.: Наука, 1986.

231. Шварц Д.А. О вычислении индексов влияния, учитывающих предпочтения участников// Автоматика и Телемеханика, 3, 2009, с.152-159.

232. Шварц Д.А. Аксиоматика для индексов влияния, учитывающих предпочтения участников// Автоматика и Телемеханика, 1, 2010, с.144-158.

233. Шварц Д.А. Аксиоматики для индексов влияния в задаче голосования с квотой// Проблемы управления, 1, 2012, с.33-41.

234. Banzhaf J.F. Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis// Rutgers Law Review, 19, 1965, pp.317-343.

235. Deegan J., Packel E.W. A New Index of Power for Simple n-Person Games// Int. J. Game Theory, 7(2), 1978, pp.113-123.

236. Dubey P. On the Uniqueness of the Shapley Value// Internat. J. of Game Theory, 4, 1975, pp.131-139.

237. Dubey P., Shapley L.S. Mathemaical Properties of the Banzhaf Power Index// Math. Oper. Res., 4, 1979, pp.99-131.

238. Friedman J., McGrath L., Parker C. Achievable hierarchies in voting games // Theory and Decision, 61, 2006, pp.305-318.

239. Holler M.J., Packel E.W. Power, Luck and the Right Index// J. Econom., 43, 1983, pp.21-29.
240. Johnston R.J. On the Measurement of Power: Some Reactions to Laver// Environment d Planning, 10, 1978, pp.907-914.
241. Laruelle A., Valenciano F. Shapley-Shubik and Banzhaf Indices Revisited// Mathematics of Operation Research, 26(1), 2000, pp.89-104.
242. Lehrer E. An Axiomatization of the Banzhaf Value// Int. J. of Game Theory, 17, 1988, pp.88-99.
243. Nowak A.S. An Axiomatization of the Banzhaf Value without the Additivity axiom// Int. J. of Game Theory, 26, 1997, pp.137-141.
244. Penrose L.S. Elementary statistics of majority voting// Journal of the Royal Statistic Society, 109, 1946, pp.53-57.
245. Shapley L.S., Shubik M. A method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System// Amer. Polit. Sci. Rev., 48(3), 1954, pp.787-792.
246. Taylor A.D., Zwicker W.S. Simple Games. – Princeton University Press, 1999.

#### Раздел 11

247. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. – М.: Наука, 1990.
248. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Задача Эрроу в теории группового выбора (анализ проблемы)// Автоматика и телемеханика, 9, 1983, с.127-151.
249. Алескеров Ф.Т., Писляков В.В., Субочев А.Н., Чистяков А.Г. Построение рейтингов журналов по менеджменту с помощью методов теории коллективного выбора// препринт WP7/2011/04. Москва: НИУ ВШЭ. 2011.
250. [Алескеров и др. 2013] Алескеров Ф.Т., Захлебин И.В., Субочев А.Н. Построение альтернативных версий рейтинга экономической конкурентоспособности стран методами теории коллективного выбора// Препринт, 2013 (готовится к печати).



251. Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. – Физматлит, М., 2012.
252. Мельвиль А.Ю. Как измерять и сравнивать уровни демократического развития в разных странах? (По материалам исследовательского проекта «Политический атлас современности»)// А.Ю. Мельвиль, М.В. Ильин, Е.Ю. Мелешкина и др.; Научно-координационный совет по международным исследованиям МГИМО (У) МИД России. – М.: МГИМО-Университет, 2008.
253. Миронюк М.Г., Ваславский Я.И., Тимофеев И.Н. Универсальные сравнения с использованием количественных методов анализа (Обзор прецедентов)// Полис (Политические исследования), 5, 2006.
254. [Субочев 2013] Субочев А.Н. Измеряя демократию: агрегирование противоречивых рейтингов государств мира методами теории коллективного выбора// Препринт, 2013 (подготовлен к печати).
255. Ушаков И.А. Задача о выборе предпочтительного объекта// Известия Академии Наук СССР. Сер.: Техническая кибернетика, 4, 1971, с.3-7.
256. Aleskerov F., Kurbanov E. A Degree of Manipulability of Known Social Choice Procedures// Current Trends in Economics: Theory and Applications / Eds. Alkan A., Aliprantis Ch., Yannelis N. N.Y.: Springer-Verlag, 1999, pp.13-27.
257. Aleskerov F., Subochev A. Matrix-vector representation of various solution concepts// Working paper WP7/2009/03. Moscow: SU - Higher School of Economics. 2009.
258. Aleskerov F., Subochev A. Modeling optimal social choice: matrix-vector representation of various solution concepts based on majority rule// Journal of Global Optimization. 2012. DOI 10.1007/s10898-012-9907-2.
259. Chebotarev Yu., Shamis E. Preference fusion when the number of alternatives exceeds two: indirect scoring procedures// Journal of the Franklin Institute, 336, 1999, pp.205-226.
260. Copeland A.H. A reasonable social welfare function (mimeo). 1951. University of Michigan, Ann Arbor (Seminar on Application of Mathematics to the Social Sciences).

261. Daniels H.E. Round-robin tournament scores// *Biometrika*, 56, 1969, pp.295-299.
262. Finnish Social Science Data Archive: Measures of Democracy 1810-2008// [Электронный ресурс]  
(<http://www.fsd.uta.fi/english/data/catalogue/FSD1289/meF1289e.html>) Проверено: 04.05.2012.
263. Forgy E. Cluster Analysis of Multivariate Data: Efficiency vs. interpretability of classifications// *Biometrics*, 21 1965, pp.768-769.
264. Goodman L. A., Kruskal W. H. Measures of Association for Cross Classifications// *Journal of the American Statistical Association*, 49(268), 1954, pp.732-764.
265. Kendall M. A New Measure of Rank Correlation// *Biometrika*, 30, 1938, pp.81-89.
266. Kendall M. Rank correlation methods. 4<sup>th</sup> edition. L.: Griffin, 1970. Русский перевод: Кендэл М. Ранговые корреляции. – М.: Статистика, 1975.
267. Miller N. A new solution set for tournaments and majority voting: Further graph-theoretical approaches to the theory of voting// *American Journal of Political Science*, 24, 1980, pp.68-96.
268. von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior*. – Princeton: Princeton University Press, 1944.
269. Subochev A. Dominant, Weakly Stable, Uncovered Sets: Properties and Extensions// Working paper WP7/2008/03. Moscow: SU - Higher School of Economics, 2008.
270. The Polity IV Project// [Электронный ресурс]  
(<http://www.systemicpeace.org/polity/polity4.htm>). Проверено: 04.05.2012.
271. World Economic Forum, *The Global Competitiveness Report 2010-2011*.
272. The Worldwide Governance Indicators (WGI) project// [Электронный ресурс]  
(<http://info.worldbank.org/governance/wgi/index.asp>). Проверено: 04.05.2012.

## Раздел 12

273. Кисельгоф С.Г. Моделирование приемной кампании: вузы различного качества и абитуриенты с квадратичной функцией полезности// Проблемы управления, 2012, с.33-40.
274. Кисельгоф С.Г. Модель выбора вузов абитуриентами приемной кампании в России// В кн.: XII Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества. В четырех книгах. Книга 2. Москва: НИУ ВШЭ, 2012, с.422-430.
275. Aleskerov F. Simple and simplest semiorders// Doklady Mathematics, 387(2), 2002, pp.175-177.
276. Aleskerov F., Bouyssou D., Monjardet B. Utility Maximization, Choice and Preference. – Springer Verlag, Berlin, 2007.
277. Abdulkadiroglu A., Sonmez T. School choice: A mechanism design approach// The American Economic Review, (93), June 2003, pp.729-747.
278. Erdil A., Ergin H. What's the matter with tie-breaking? Improving efficiency in school choice// American Economic Review, 98(3), June 2008, pp.669-689.
279. Gale D., Shapley L. College admissions and the stability of marriage// American Mathematical Monthly, 69, 1962, pp.9-16.
280. Luce D. Semiorders and a theory of utility discrimination// Econometrica, 24(2), 1956, pp.178-191.

### Раздел 13

281. Коэн Г. Обо всём можно договориться. – М.: АСТ, 2010.
282. Рубчинский А.А. Квазисправедливый делёж с несколькими участниками)// В сборнике трудов XIII международной апрельской конференции по развитию экономики, 2013.
283. Brams, S.J., Taylor, A.D. Fair Division. – Cambridge University Press. 1996.
284. Brams, S.J., Taylor, A.D. The Win-Win Solution. – W.W. Norton & Company, 1999.

285. Rubchinsky A. Fair Division with Divisible and Indivisible Items// Working paper WP7/2009/05. Moscow: NRU Higher School of Economics,
286. Rubchinsky A. Brams-Taylor Model of Fair Division for Divisible and Indivisible Items// Mathematical Social Science, 60(1), 2010, pp.1-14.
287. Willson, S.J. Fair Division Using Linear Programming// Preprint, Department of Mathematics, Iowa State University, 1998.
288. Reijnierse, J.H., Potters, J.A.M. On Finding an Envy-Free Pareto-Optimal Decision// Mathematical Programming 83(2), 1998, pp.291-311.

#### Раздел 14

289. Алескеров Ф.Т., Солодков В.М., Челнокова Д.С. Динамический анализ паттернов поведения коммерческих банков России// Экономический журнал ВШЭ, 1, 2006. с.48-61.
290. Гурин А., Маслов М., Сегалович И. Алгоритм текстового ранжирования Яндекса на РОМИП-2006. – Яндекс, Москва, 2006.
291. Малюков Н.Н. Алгоритм автоматической классификации «КРАБ»// 2010, <<http://prand.ru/content/algorithm-avtomaticheskoi-klassifikatsii-krab>>
292. Словарь по кибернетике / Под редакцией академика [В. С. Михалевича](#). – 2-е. – Киев: Главная редакция Украинской Советской Энциклопедии имени М. П. Бажана, 1989. – 751 с.
293. Aizerman M., Aleskerov F. Theory of Choice. – Elsevier, North-Holland, 1995.
294. Airola A., Boberg J., Pahikkala T., Salakoski T., Tsivtsivadze E. Learning to Rank with Pairwise Regularized Least-Squares. – Turku Centre for Computer Science Department of Information Technology, Turku, 2007.
295. Aleskerov F.T., Alper C.E. A clustering approach to some monetary facts: a long-run analysis of cross-country data// The Japanese Economic Review, 51(4), 2000, pp.555-567.

296. Aleskerov F.T., Ersel H., Mercan M. Structural dissimilarity in Turkish banks// Bogazici Journal Review of Social, Economic and Administrative Studies, 15(1), 2001, pp.57-69.
297. Aleskerov F., Subochev A. Modeling optimal social choice: matrix-vector representation of various solution concepts based on majority rule// Journal of Global Optimization, 5, 2012. DOI 10.1007/s10898-012-9907-2.
298. Braverman E.M., Muchnik I.B. The Structural Methods for Empirical Data Processing, – NAUKA Publishers, Moscow, 1983.
299. Burges C., Tal Shaked, Erin Renshaw, Ari Lazier, Matt Deeds, Nicole Hamilton, Greg Hullender. Learning to Rank using Gradient Descent. Microsoft Research, One Microsoft Way, Redmond, WA 98052-6399.
300. Experian&Hitwise. Google share of searches at 66 percent in July 2011, 11 August 2011, <<http://www.experian.com/hitwise/press-release-experian-hitwise-reports-google-share-of-searches.html>>.
301. Joachims T. SVM<sup>light</sup> Support Vector Machine// 14 August 2008, <<http://svmlight.joachims.org/>>
302. Li H. Learning to Rank: A New Technology for Text Processing. – Tokyo University, Tokyo, 2007.
303. Li H., Liu T.-Y., Qin T., Wang D.-S., Xiong W.-Y., Zhang X.-D. Learning to Rank Relational Objects. – Tsinghua University, Beijing, 2008.
304. Li H., Liu T.Y., Qin T., Xu J. LETOR: A Benchmark Collection for Research on Learning to Rank for Information Retrieval// Information Retrieval Journal, 13(4), 2009, pp.346-374.
305. Lioma C., Schuetze H. Introduction to Information Retrieval. – Institute for National Language Processing, Stuttgart, 2010.
306. Liu T.Y. Learning to Rank for Information Retrieval// Foundations and Trends® in Information Retrieval, 3(3), 2009, pp. 225-331.

307. Levene M. An Introduction to Search Engines and Web Navigation. – Pearson Education Limited, Edinburgh, 2006.
308. Manning C., Raghavan P., Schütze H. Introduction to Information Retrieval. – Cambridge University Press, 2008.
309. Microsoft Research. Microsoft Learning to Rank Datasets// 16 June 2010, <<http://research.microsoft.com/en-us/projects/mslr/>>
310. Mirkin B.G. Core Concepts in Data Analysis: Summarization, Correlation, Vizualization. – Springer, London, 2011.

### Раздел 15

311. Абанкина И.В., Алескеров Ф.Т., Белоусова В.Ю., Бонч-Осмоловская А.А., Городенцева Т., Зиньковский К.В., Князев Е.А., Коган Ю., Огороднийчук Д.Л., Петрущенко В.В. Картина вузов в свете данных из структурированных и неструктурированных источников информации// В кн.: XIII Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества. В 4 кн. Кн. 1. М.: Издательский дом НИУ ВШЭ, 2012. с.297-303.
312. Abankina I.V., Aleskerov F.T., Belousova V.Y., Bonch-Osmolovskaya A.A., Petruschenko V.V., Ogorodniychuk D., Yakuba V.I., Zin'kovsky K.V. University efficiency evaluation with using its reputational component// Proceedings of the 4th International Conference on Applied Operational Research. Bangkok: Tadbir Operational Research Group, 2012. pp.244-253.
313. Abbott M., Doucouliagos C. The efficiency of Australian universities: a data envelopment analysis// Economics of Education Review, 22, 2003, pp.89-97.
314. Athanassopoulos A.D., Shale E. Assessing the Comparative Efficiency of Higher Education Institutions in the UK by the Means of Data Envelopment Analysis// Education Economics, 5, 1997, pp.117-134.

315. Avkiran N.K. Investigating technical and scale efficiencies of Australian Universities through data envelopment analysis// *Socio-Economic Planning Sciences*, 35, 2001, pp.57-80.
316. Beasley J. Determining teaching and research efficiencies// *Journal of the Operational Research Society*, 46, 1995, pp.441-452.
317. Charnes A., Cooper W., Rhodes E. Measuring the efficiency of decision-making units// *European Journal of Operational Research*, 2, 1978, pp.429-444.
318. Charnes A., Cooper W., Rhodes E. Evaluating Program and Managerial Efficiency: An Application of Data Envelopment Analysis to Program Follow Through// *Management Science*, 27, 1981, pp.668-697.
319. Charnes A., Cooper W. Programming with linear fractional functional Cooper// *Naval Research Logistics*, 9, 1962, pp.181-186.
320. Coelli T., Rao D., O'Donnell C., Battese G. *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*. – N.Y.: Springer, 2005.
321. Flegg A., Allen D., Field K., Thurlow T. *Measuring the Efficiency and Productivity of British Universities: An Application of DEA and the Malmquist Approach*// unpublished, 2004, 47 pp.
322. Hüfner K. *Accountability*. In Altbach, Philip (ed.) *International Higher Education: An Encyclopedia*. 1. N.Y.: Garland Publishing, 1991, pp.47-58.
323. Johnes J. Data envelopment analysis and its application to the measurement of efficiency in higher education// *Economics of Education Review*, 25, 2006, pp.273-288.
324. Katharakis G., Katharaki M. A comparative assessment of Greek universities' efficiency using quantitative analysis// *International Journal of Educational Research*, 49, 2010, pp.115-128.
325. Kempkesa G., Pohl C. The efficiency of German universities – some evidence from nonparametric and parametric methods// *Applied Economics*, 42, 2010, pp.2063-2079.
326. Koenker R. *Quantile Regression*. – Cambridge University Press, 2005.

327. McMillan M., Wing H.C. University Efficiency: A Comparison and Consolidation of Results from Stochastic and Non-stochastic Methods// *Education Economics*, 14, 2006, pp.1-30.
328. Pastor T., Ruiz L., Sirvent I. A statistical test for nested radial DEA models// *Operations Research*, 50, 2002, pp.728-735.
329. Podinovski V. Bridging the gap between the constant and variable returns-to-scale models: selective proportionality in data envelopment analysis// *Journal of the Operational Research Society*, 55, 2004, pp.265-276.
330. Podinovski V. The explicit role of weight bounds in models of data envelopment analysis// *Journal of the Operational Research Society*, 56, 2005, pp.1408-1418.
331. Warning S. Performance Differences in German Higher Education: Empirical Analysis of Strategic Groups// *Review of Industrial Organization*, 24, 2004, pp.393-408.



ПРИЛОЖЕНИЕ А ТАБЛИЦЫ ОПИСАТЕЛЬНЫХ СТАТИСТИК РИСКОВ  
БАНКОВСКОЙ СИСТЕМЫ РОССИИ

Таблица А.1 – Размер риска и базы риска, млрд.руб.

Дата	Кредитный риск (%)	База кредитного риска	Рыночный риск (%)	База рыночного риска	Операционный риск (%)	База операционного риска	Совокупный капитал	CAR-фактический (Б I)
Мар/04	-5.5	2,473.0	-60.8	378.2	770.6	6,163.1	162.8	18.7%
Июн/04	-6.1	2,846.2	-100.5	407.4	1,412.0	8,495.6	153.9	18.1%
Сент/04	-15.5	3,170.1	-121.7	423.9	2,325.9	10,823.2	157.6	17.4%
Дек/04	-14.8	3,482.5	-182.3	412.7	3,310.9	14,096.3	159.0	17.0%
Мар/05	-18.6	3,800.2	-40.6	532.0	1,095.7	8,279.2	171.0	17.6%
Июн/05	-18.0	4,185.0	-73.4	478.3	1,762.8	11,204.5	179.8	16.3%
Сент/05	-14.6	4,520.4	-133.2	485.4	2,733.6	14,986.7	183.1	16.4%
Дек/05	-12.4	5,023.3	-200.9	511.1	3,977.5	19,578.0	222.7	16.0%
Мар/06	-16.5	5,387.0	-56.7	695.4	1,386.0	11,184.8	274.7	15.7%
Июн/06	-17.0	5,921.4	-122.7	769.0	2,622.9	16,330.2	279.4	15.0%
Сент/06	-19.5	6,640.4	-172.9	748.6	3,972.8	21,262.3	229.0	14.8%
Дек/06	-19.9	7,595.8	-245.3	813.0	5,684.2	27,415.3	286.1	14.9%
Мар/07	-25.8	8,703.2	-78.6	807.9	2,105.3	16,922.3	1,014.3	16.2%
Июн/07	-29.5	9,514.5	-162.1	825.2	4,140.4	23,456.6	1,330.1	16.8%
Сент/07	-26.1	10,837.0	-371.7	906.0	6,394.5	31,214.7	1,418.7	16.0%
Дек/07	-24.6	12,028.9	-525.6	1,088.4	8,758.9	39,725.6	1,440.3	15.5%
Мар/08	-39.3	14,057.4	-27.8	1,243.9	3,372.1	32,481.2	2,075.3	15.3%
Июн/08	-43.9	15,273.4	-27.5	1,254.8	4,330.7	47,674.1	2,429.0	14.8%
Сент/08	-58.9	16,695.7	-77.1	1,021.7	4,931.2	71,426.7	2,565.0	14.5%
Дек/08	-111.1	16,806.3	94.5	564.8	4,768.2	106,721.0	2,650.1	16.8%
Мар/09	-237.4	17,397.0	290.6	653.1	3,156.3	75,031.2	2,881.7	16.9%
Июн/09	-299.6	16,302.3	84.8	790.7	2,817.9	104,518.3	3,055.5	18.5%
Сент/09	-315.4	16,692.9	-3.6	1,196.9	3,450.5	144,805.7	3,435.1	20.3%
Дек/09	-265.6	16,230.8	50.9	1,373.7	3,603.3	178,856.6	3,425.7	20.9%
Мар/10	-232.1	16,059.4	29.8	1,338.2	3,354.9	49,294.4	3,466.4	20.5%

Таблица А.2 Средние значения и стандартные отклонения индивидуальных рисков

		Кредитный риск	Рыночный риск	Операционный риск
	Среднее	-0.33%	-24.01%	22.78%
Мар/04	Станд.откл.	2.49%	86.23%	17.20%
	Среднее	-0.31%	-60.39%	24.75%
Июн/04	Станд.откл.	1.56%	128.58%	16.93%
	Среднее	-0.43%	-78.42%	30.39%
Сент/04	Станд.откл.	2.19%	172.56%	16.21%
	Среднее	-0.35%	-87.34%	31.93%
Дек/04	Станд.откл.	1.38%	192.53%	13.81%
	Среднее	-0.40%	-36.39%	25.18%
Мар/05	Станд.откл.	1.78%	105.67%	18.14%
	Среднее	-0.49%	-49.91%	27.01%
Июн/05	Станд.откл.	1.78%	133.10%	16.36%
	Среднее	-0.45%	-54.56%	28.48%
Сент/05	Станд.откл.	2.19%	172.18%	15.63%
	Среднее	-0.42%	-68.34%	29.85%
Дек/05	Станд.откл.	1.89%	180.95%	14.50%
	Среднее	-0.66%	-18.74%	22.61%
Мар/06	Станд.откл.	4.53%	68.41%	17.53%
	Среднее	-0.48%	-36.32%	25.08%
Июн/06	Станд.откл.	3.61%	108.18%	15.84%
	Среднее	-0.39%	-38.59%	27.62%
Сент/06	Станд.откл.	1.14%	113.88%	15.07%
	Среднее	-0.32%	-52.72%	29.58%
Дек/06	Станд.откл.	1.43%	160.15%	15.20%
	Среднее	-0.27%	-19.43%	24.04%
Мар/07	Станд.откл.	2.17%	78.73%	17.96%
	Среднее	-0.36%	-28.03%	26.79%
Июн/07	Станд.откл.	1.34%	110.69%	16.22%
	Среднее	-0.29%	-46.68%	28.61%
Сент/07	Станд.откл.	1.17%	231.07%	15.67%
	Среднее	-0.21%	-45.39%	29.09%
Дек/07	Станд.откл.	1.56%	159.36%	15.08%
	Среднее	-0.32%	-9.41%	15.95%
Мар/08	Станд.откл.	0.80%	48.62%	14.89%
	Среднее	-0.35%	-9.18%	14.72%
Июн/08	Станд.откл.	0.89%	63.06%	12.85%
	Среднее	-0.46%	-33.97%	13.22%
Сент/08	Станд.откл.	1.35%	110.34%	11.70%
	Среднее	-0.92%	-45.05%	10.74%
Дек/08	Станд.откл.	2.87%	244.18%	10.94%
	Среднее	-1.40%	8.81%	13.71%
Мар/09	Станд.откл.	3.50%	190.77%	14.65%
	Среднее	-1.75%	19.03%	10.77%
Июн/09	Станд.откл.	5.29%	162.38%	13.02%
	Среднее	-1.97%	-6.88%	9.71%
Сент/09	Станд.откл.	6.44%	196.55%	12.52%
	Среднее	-1.55%	22.48%	8.67%
Дек/09	Станд.откл.	4.78%	190.10%	12.99%
	Среднее	-1.64%	-4.21%	15.89%
Мар/10	Станд.откл.	5.00%	103.09%	18.39%

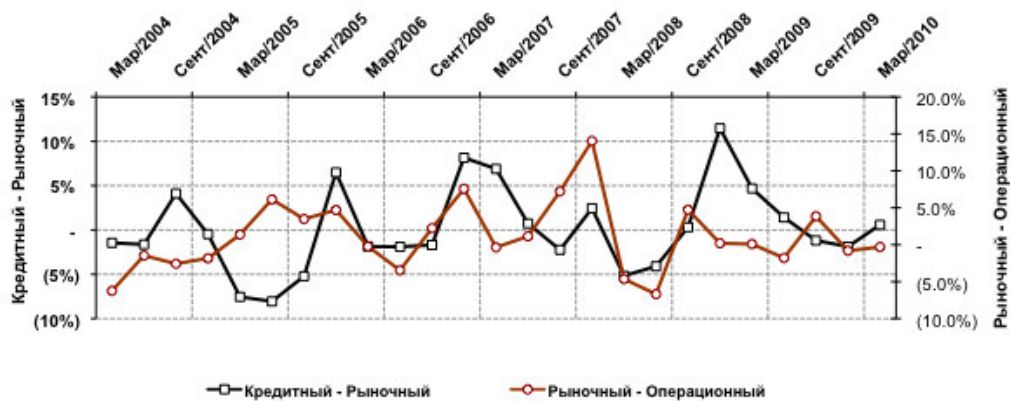


Рисунок А.1 – Динамика корреляции между рисками



Рисунок А.2 – Динамика корреляции между кредитным и операционным рисками

ПРИЛОЖЕНИЕ Б СПЕЦИФИКАЦИИ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ МЕЖДУ  
ДЕРИВАТИВАМИ И СТОИМОСТЬЮ КОММЕРЧЕСКИХ ОРГАНИЗАЦИЙ

Б.1 Дескрипторы переменных

Таблица Б.1 – Дескрипторы переменных

№	Код	Название	Размерность
Общие переменные			
1	<i>ROAA</i>	Средняя рентабельность активов	%
2	<i>ROAE</i>	Средняя рентабельность собственного капитала	%
3	<i>NI</i>	Чистая прибыль	млрд. евро
4	<i>Cap</i>	Рыночная капитализация	млрд. евро
5	<i>MP</i>	Цена акции на конец отчетного периода - 31 декабря	евро
6	<i>Return</i>	Прирост цены акции за год	%
7	<i>Risk</i>	Волатильность доходности цены акции. Рассчитано как стандартное отклонение ежедневного прироста цены акции	%
8	<i>Assets</i>	Активы	млрд. евро
9	<i>Equity</i>	Собственный капитал	млрд. евро
10	<i>q</i>	Коэффициент Тобина - отношение суммы рыночной капитализации и балансовых обязательств к активам	В долях
Абсолютные переменные деривативов			
11	<i>H_IR_N</i>	Номинальная стоимость хеджирующих процентных деривативов (тыс. евро)	тыс. евро
12	<i>H_IR_FVA</i>	Положительная переоценка хеджирующих процентных деривативов	тыс. евро
13	<i>H_IR_FVL</i>	Отрицательная переоценка хеджирующих процентных деривативов	тыс. евро
Относительные переменные деривативов			
14	<i>H_IR_N_AS</i>	Отношение номиналов хеджирующих процентных деривативов к активам	В долях
15	<i>H_IR_FVA_FVL</i>	Чистая доходность хеджирующих процентных деривативов	В долях
16	<i>H_FVA</i>	Отношение положительной переоценки к суммарным номиналам хеджирующих деривативов	В долях
17	<i>H_FVL</i>	Отношение отрицательной переоценки к суммарным номиналам хеджирующих деривативов	В долях
18	<i>H_FVA_FVL</i>	Отношение чистой доходности всех хеджирующих деривативов к номиналам	В долях

## Б.2 Описательные статистики

Наблюдения по некоторым переменным отсутствуют, поэтому их количество не постоянно (см. столбец “Кол-во наблюдений”).

Таблица Б.2 – Описательные статистики

Переменная	Кол-во наблюдений	Среднее	Станд. отклонение	Наименьшее значение	Наибольшее значение	Единица измерения
roae	777	11	12	-72	55	%
roaa	778	1	3	-19	27	%
ni	777	0.7	2	-3	14	млрд. евро
cap	675	9	19	0.01	159	млрд. евро
mp	720	22	30	0.3	184	евро
return	720	3	46	-95	242	%
risk	467	224	130	11	996	%
assets	780	147	348	0	2587	млрд. евро
equity	780	7	16	0	124	млрд. евро
h_ir_n	780	31	143	0	1750	млрд. евро
h_fx_n	780	3	14	0	155	млрд. евро
h_eq_n	780	0.7	3	0	26	млрд. евро
h_cr_n	780	0.1	1	0	19	млрд. евро
t_ir_n	780	1160	5560	0	57400	млрд. евро
t_fx_n	780	132	538	0	5670	млрд. евро
t_eq_n	780	30	171	0	2250	млрд. евро
t_cr_n	780	77	372	0	4240	млрд. евро
t_cm_n	780	9	70	0	943	млрд. евро
h_ir_fva	780	0.4	1	0	12	млрд. евро
h_ir_fvl	780	0.5	2	0	31	млрд. евро
h_fx_fva	780	0.1	0.3	0	5	млрд. евро
h_fx_fvl	780	0.1	0.4	0	6	млрд. евро
h_eq_fva	780	0.02	0.1	0	2	млрд. евро
h_eq_fvl	780	0.02	0.1	0	1	млрд. евро
h_cr_fva	780	0.005	0.1	0	1	млрд. евро
h_cr_fvl	780	0.001	0.01	0	0.1	млрд. евро
t_ir_fva	780	11	54	0	825	млрд. евро
t_ir_fvl	780	11	53	0	807	млрд. евро
t_fx_fva	780	2.9	18	0	348	млрд. евро
t_fx_fvl	780	2.6	13	0	218	млрд. евро
t_eq_fva	780	1.3	7	0	117	млрд. евро
t_eq_fvl	780	1.5	8	0	104	млрд. евро
t_cr_fva	780	1.9	13	0	232	млрд. евро
t_cr_fvl	780	1.7	12	0	214	млрд. евро
t_cm_fva	780	0.5	4	0	62	млрд. евро

t_cm_fvl	780	0.5	4	0	61	млрд. евро
h_ir_n_as	763	8.7	15	0	119	%
h_fx_n_as	763	3.2	11	0	116	%
h_eq_n_as	763	0.4	2	0	35	%
h_cr_n_as	763	0.0	0.1	0	2	%
t_ir_n_as	763	148	392	0	4007	%
t_fx_n_as	763	29	57	0	390	%
t_eq_n_as	763	4	13	0	123	%
t_cr_n_as	763	7	27	0	311	%
t_cm_n_as	763	1	5	0	57	%
h_ir_fva_fvl	771	-0.2	3	-28	71	%
h_fx_fva_fvl	771	-0.3	8	-123	34	%
h_eq_fva_fvl	771	5	133	-401	3650	%
h_cr_fva_fvl	771	0.4	6	-19	130	%
t_ir_fva_fvl	771	0.2	5	-6	108	%
t_fx_fva_fvl	771	0.0	2	-18	25	%
t_eq_fva_fvl	771	-3	80.9	-2233	100	%
t_cr_fva_fvl	771	-1	15.0	-312	48	%
t_cm_fva_fvl	771	0.4	7.6	-4	196	%
h_fva_fvl	774	-0.2	2.7	-16	21	%
t_fva_fvl	774	0.1	2.8	-25	47	%

### Б.3 Корреляции между переменными

Таблица Б.3 – Коэффициенты корреляции

	assets	equity	roaa	roae	ni	cap	q	mp	return	risk	h_n_as	t_n_as	h_fva_fvl	t_fva_fvl
assets	1.00													
equity	0.94	1.00												
roaa	-0.09	-0.07	1.00											
roae	-0.01	0.00	0.51	1.00										
ni	0.42	0.49	0.08	0.38	1.00									
cap	0.78	0.85	-0.04	0.10	0.65	1.00								
q	-0.03	-0.03	0.00	0.10	-0.02	-0.02	1.00							
mp	-0.04	-0.04	0.00	0.06	-0.02	-0.04	-0.01	1.00						
return	-0.07	-0.05	0.17	0.17	0.09	0.04	0.04	-0.01	1.00					
risk	0.13	0.10	-0.28	-0.33	-0.09	-0.07	-0.17	-0.10	-0.16	1.00				
h_n_as	0.06	0.07	-0.02	-0.06	0.05	0.08	-0.02	-0.05	-0.04	-0.18	1.00			
t_n_as	0.71	0.61	-0.08	0.00	0.22	0.44	-0.02	-0.03	0.00	0.06	0.02	1.00		
h_fva_fvl	0.05	0.08	-0.04	0.03	0.06	0.11	0.14	0.01	0.09	-0.02	0.20	0.01	1.00	
t_fva_fvl	-0.01	-0.01	0.00	-0.03	-0.01	-0.01	0.00	-0.01	0.04	-0.05	-0.01	0.04	0.04	1.00

#### Б.4 Анализ выборки. Стоимость деривативов

Степень вовлеченности в операции с деривативами так же растет, несмотря на то, что в 2008 году произошло падение общей стоимости хеджирующих деривативов на 19% от уровня 2007 года.

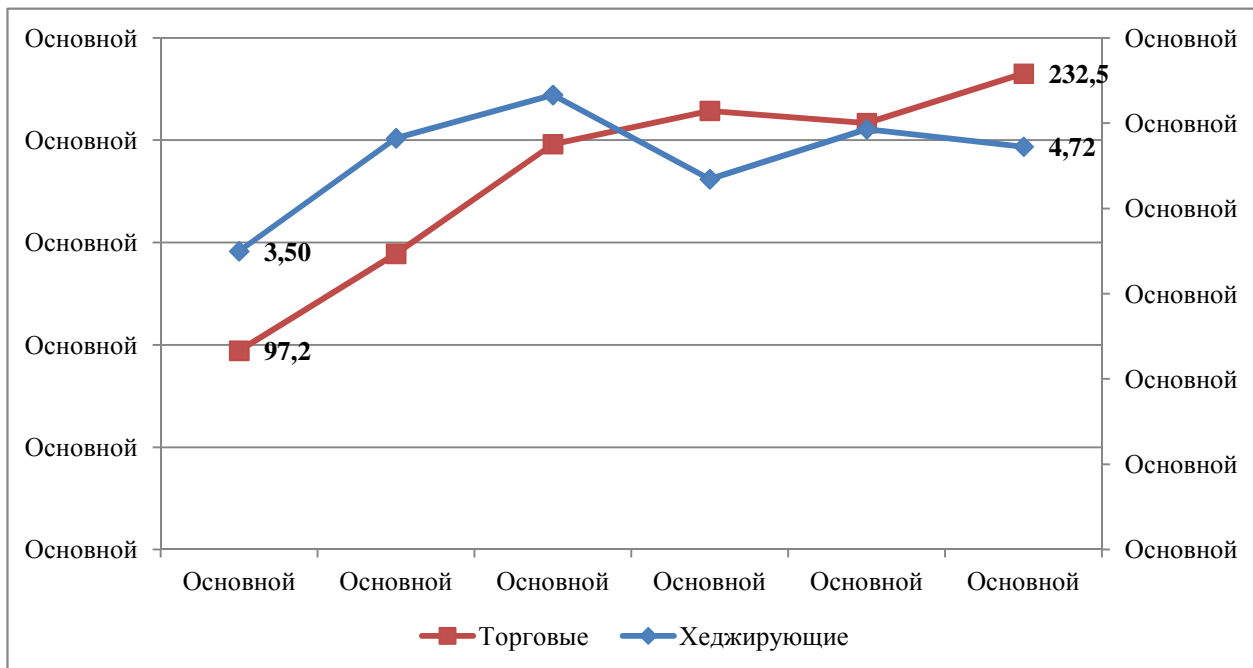


Рисунок Б.1 – Суммарная номинальная стоимость деривативов (в трлн. евро)

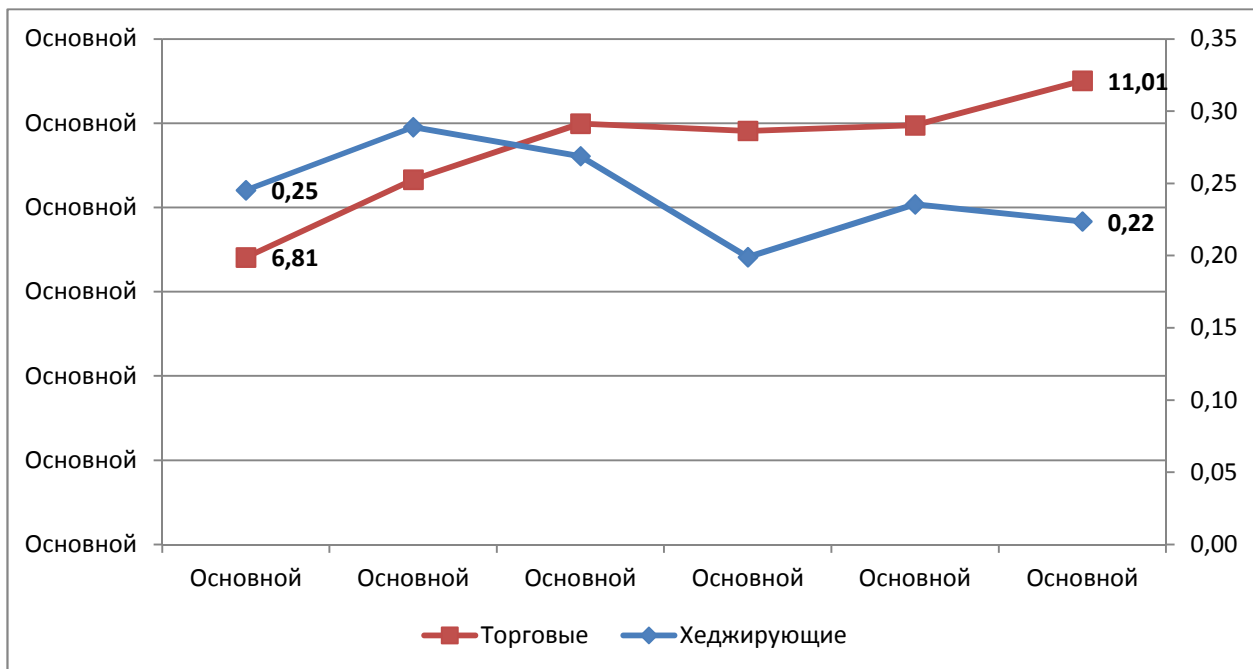


Рисунок Б.2 – Отношение номинальной стоимости деривативов к активам



Ниже приведены диаграммы разброса объясняемых и объясняющих переменных.

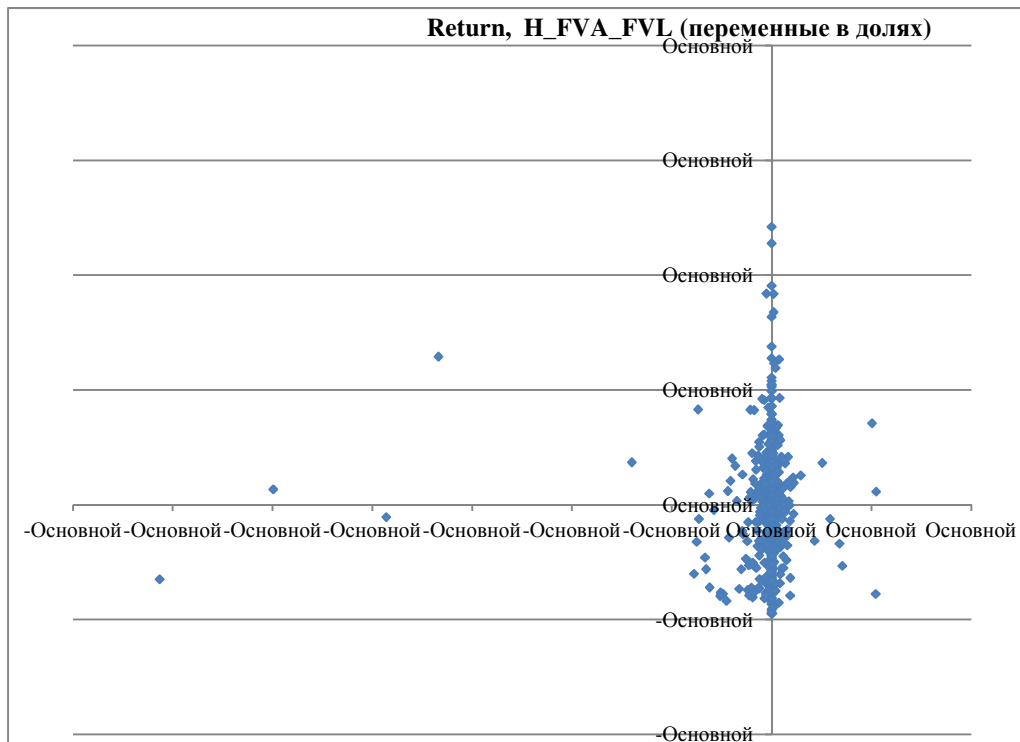


Рисунок Б.3 – Доходность по акциям и чистая доходность по хеджирующим деривативам (в долях)

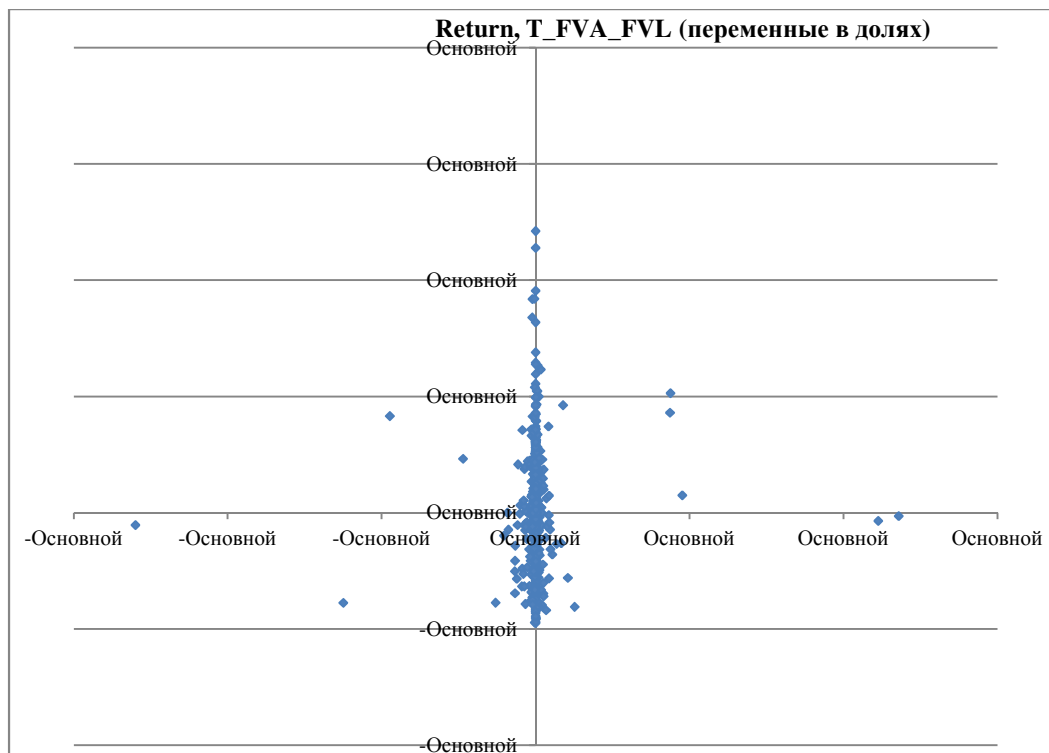


Рисунок Б.4 – Доходность по акциям и чистая доходность по торговым деривативам (в долях)

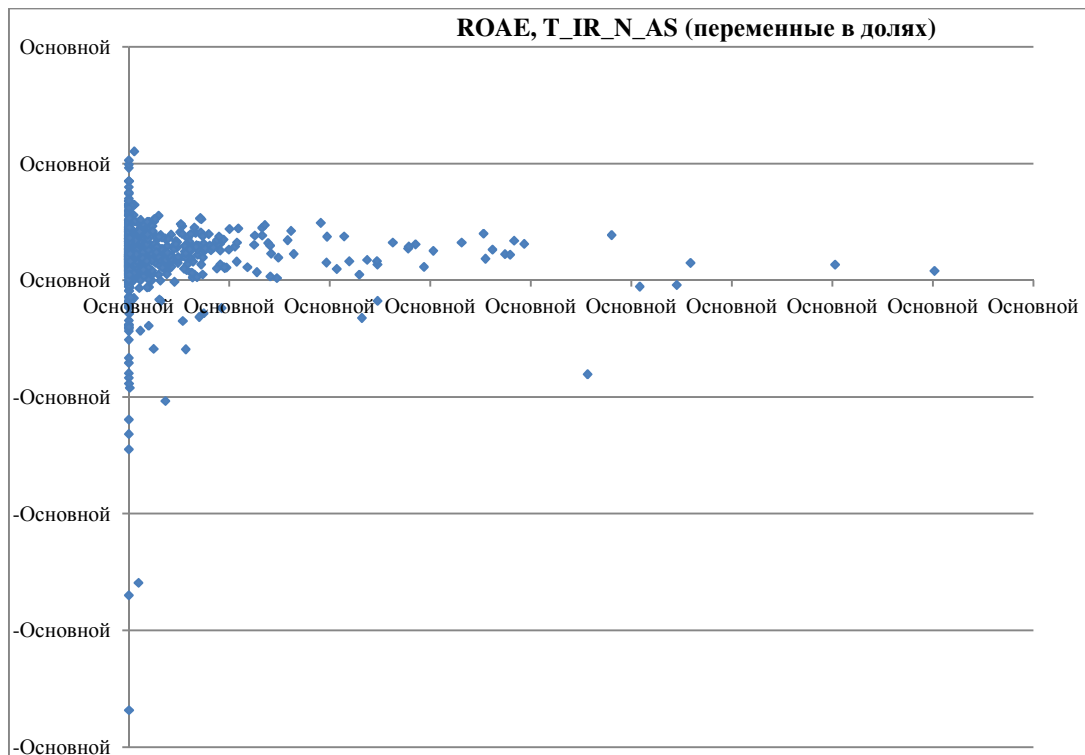


Рисунок Б.5 – Рентабельность собственного капитала и отношение номиналов торговых деривативов к активам (в долях)

Б.5 Анализ результатов. Оценки моделей регрессионной зависимости

Таблица Б.4 – Выборочные спецификации

	Модель	1	3	4	5	6	7
	Зависимая переменная	<i>q</i>	<i>q</i>	<i>Return</i>	<i>Return</i>	<i>Risk</i>	<i>ROAE</i>
	Наблюдения	663	663	711	711	464	740
	R2	0.98	0.98	0.45	0.46	0.85	0.56
Доходности	H_FVA_N	-0.45	-	-		-	-
	H_FVL_N	0.73	-	-		-	-
	T_FVA_N		-	-	1.66	-	-
	T_FVL_N		-	-	-1.83	-	-
Чистая доходность	H_FVA_FVL	-	-0.69		-	-2.54	
	T_FVA_FVL	-		205.99	-		-22.08
Годы	2005	1.09	1.02	83.75	0.06	-1.94	9.04
	2006	1.10	1.01	83.33		-1.67	10.64
	2007	1.08	0.99	49.07	-0.32	-1.55	10.63
	2008	0.99	0.92		-0.73		
	2009	1.02	1.05	84.11	0.37		
	2010	1.02	0.95	50.14	-0.24	-1.04	
Регионы	Euro	-0.05	-	-58.67	-	3.18	3.74
	North		-	-48.50	-	3.02	6.30
	South		-	-49.61	-	4.13	10.56
	CEE	0.08	-	-42.96	-	3.61	11.54
	GB		-	-54.41	-	3.70	8.24
Макро	GDP	-		-	5.25	-	-
	GDPGR	-	0.01	-	0.04	-	-
	INF	-	0.02	-	0.03	-	-
White test	p-value	0.27	0.17	0.80	0.05	0.05	0.82
Wooldrige test	p-value	0.00	0.00	0.13	0.18	0.07	0.10

	Модель	8	9	11	12	13	14
	Зависимая переменная	<i>Q</i>	<i>q</i>	<i>Risk</i>	<i>Risk</i>	<i>ROAE</i>	<i>ROAA</i>
	Наблюдения	658	658	453	456	760	739
	R2	0.98	0.98	0.85	0.85	0.56	0.25
Суммарные номиналы	H_N_AS	-			-	-	
	T_N_AS	-	-0.002	0.05	-	-	-0.08
Номиналы	H_IR_N_AS	0.14	-	-		13.24	-
	H_FX_N_AS		-	-		-15.37	-
	H_EQ_N_AS		-	-	-1.78		-
	H_CR_N_AS		-	-		-245.48	-
	T_IR_N_AS	-0.003	-	-	0.07	-0.27	-
	T_FX_N_AS		-	-		1.76	-
	T_EQ_N_AS		-	-	-0.59	3.63	-
T_CR_N_AS	-0.02	-	-		-4.90	-	
T_CM_N_AS	0.08	-	-		20.63	-	
Годы	2005	0.08	1.02	1.69	1.82	7.46	-1.27
	2006	0.09	1.01	1.96	2.07	9.37	-1.41
	2007	0.07	0.99	1.96	2.13	10.33	-1.20
	2008		0.92	3.61	3.69		-3.09
	2009		1.05	3.49	3.57		
	2010		0.96	2.53	2.62		-1.91
Регионы	Euro	0.95	-	-	-	2.80	-
	North	1.00	-	-	-	6.00	-
	South	1.03	-	-	-	10.63	-
	CEE	1.08	-	-	-	10.61	-
	GB	1.04	-	-	-	6.70	-
Макро	GDP	-		-29.35	-33.98	NA	96.68
	GDPGR	-	0.01			NA	0.18
	INF	-	0.02			NA	0.52
White test	p-value	0.00	0.96	0.00	0.28	1.00	0.22
Wooldrige test	p-value	0.00	0.00	0.25	0.18	0.34	0.52

Таблица Б.5 – Тест Чоу

	Спецификация 3		
	GSIB	NON-GSIB	POOLED
	<i>Return</i>		
<i>T_FVA_FVL</i>	-1571	220	206
<i>y5</i>	75	85	84
<i>y6</i>	82	83	83
<i>y7</i>	45	49	49
<i>y9</i>	91	83	84
<i>y10</i>	59	49	50
<i>EURO</i>	-60	-58	-59
<i>NORTH</i>	-50	-48	-48
<i>SOUTH</i>	(omitted)	-49	-50
<i>CEE</i>	(omitted)	-43	-43
<i>GB</i>	-67	-52	-54

$F_{11; 689}$	0.95
p-value	0.49

	Спецификация 1		
	GSIB	NON-GSIB	POOLED
	<i>q</i>		
<i>H_FVA_N</i>	0.17	-0.52	-0.45
<i>H_FVL_N</i>	0.27	0.75	0.73
<i>y5</i>	1.03	1.10	1.09
<i>y6</i>	1.03	1.10	1.10
<i>y7</i>	1.01	1.09	1.08
<i>y8</i>	0.98	0.99	0.99
<i>y9</i>	0.99	1.03	1.02
<i>y10</i>	0.98	1.02	1.02
<i>EURO</i>	-0.02	-0.06	-0.05
<i>CEE</i>	(omitted)	0.07	0.08

$F_{10; 643}$	0.56
p-value	0.91

	Спецификация 2		
	GSIB	NON-GSIB	POOLED
	<i>Risk</i>		
<i>H_FVA_FVL</i>	-5.67	-2.19	-2.54
<i>y5</i>	-3.57	-1.73	-1.94
<i>y6</i>	-3.31	-1.45	-1.67
<i>y7</i>	-2.87	-1.38	-1.55
<i>y10</i>	-1.93	-0.93	-1.05
<i>EURO</i>	4.44	3.02	3.18
<i>NORTH</i>	4.56	2.87	3.03
<i>SOUTH</i>	(omitted)	4.02	4.13
<i>CEE</i>	(omitted)	3.49	3.61
<i>GB</i>	4.62	3.50	3.70

$F_{10; 444}$	3.90
p-value	0.00

$$F = \frac{(RSS_{POOLED} - (RSS_{GSIB} + RSS_{NON-GSIB})) / k}{(RSS_{GSIB} + RSS_{NON-GSIB}) / (n - 2k)} \sim F_{k; n-2k}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В АГРЕГИРОВАННЫЕ РЕЙТИНГИ СТРАН МИРА,  
ПОСТРОЕННЫЕ НА ОСНОВАНИИ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ СТРАН ПО ПЯТИ  
ИНДЕКСАМ ДЕМОКРАТИИ С ПОМОЩЬЮ ПРАВИЛА КОЛЛЕКТИВНОГО  
ВЫБОРА

Таблица В.1 – Ранжирования государств по уровню развития демократии

	Индекс демократии журнала Economist	Индекс проекта Polity IV	Индекс Ванханена	Индекс свободы слова и ответственности властей (WGI-VA)	Индекс институциональных основ демократии	Коупланд (1)	Коупланд (2)	Коупланд (3)	UC	MES	Марков
Число позиций в рейтинге	147	21	120	158	136	121	111	108	47	30	158
Дания	4	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1
Швейцария	7	1	2	3	1	2	2	2	1	1	2
Нидерланды	3	1	3	5	3	3	3	2	2	1	3
Норвегия	2	1	7	2	5	3	3	2	2	2	4
Швеция	1	1	5	4	8	4	3	3	2	2	5
Финляндия	5	1	8	6	6	5	4	4	3	3	6
Новая Зеландия	6	1	18	7	7	6	5	5	4	4	7
Канада	9	1	35	9	2	7	6	6	5	5	8
Ирландия	10	1	23	8	11	7	6	6	5	5	9
Австрия	12	1	4	12	9	8	7	7	6	6	11
Бельгия	8	1	25	10	20	9	10	7	6	6	17
Германия	11	1	9	11	27	9	8	8	6	7	15
Испания	17	3	1	13	10	10	8	9	7	7	12
Австралия	13	1	11	17	13	11	9	9	8	7	10
США	15	1	13	19	15	12	10	10	9	7	13
Великобритания	18	1	22	14	17	13	11	11	10	7	14
Греция	19	1	6	29	21	14	12	12	10	7	18
Чехия	16	3	12	20	28	15	13	14	10	8	21
Франция	25	1	10	23	20	15	15	13	10	8	31
Италия	14	1	14	27	32	15	15	13	10	8	20
Япония	21	2	33	15	16	16	14	15	11	8	19
Уругвай	20	1	17	21	59	17	16	14	11	8	22
Португалия	22	1	29	16	33	18	17	15	12	8	23
Венгрия	34	1	16	37	12	19	19	14	11	8	32
Коста-Рика	32	1	7	22	54	20	19	15	11	8	25
Кипр	23	1	51	28	29	21	19	17	13	9	24
Израиль	36	1	31	24	23	21	18	18	12	9	16
Словения	26	1	35	25	34	21	19	17	13	9	26
Тайвань	29	1	30	36	18	21	20	16	13	9	27
Литва	38	1	27	33	25	22	21	18	13	9	33
Маврикий	23	1	44	34	36	23	21	19	14	10	28

Эстония	33	2	21	18	43	24	22	22	12	9	35
Польша	30	1	53	32	32	25	24	21	14	10	34
Кабо-Верде	28	1	52	26	49	25	25	20	14	10	30
Чили	41	1	45	30	31	26	23	23	14	10	29
Тринидад и Тобаго	44	1	20	45	38	27	26	25	15	11	38
Словакия	31	2	36	48	14	28	28	24	14	10	36
Индия	40	1	47	31	45	28	27	25	15	11	39
Болгария	47	2	15	39	35	29	29	26	15	11	40
Республика Корея	24	3	48	38	26	30	29	27	14	10	37
Бразилия	42	3	28	35	40	31	30	29	16	11	42
Латвия	37	3	26	44	39	32	30	30	15	11	43
Хорватия	46	2	33	43	22	32	31	28	18	11	41
Панама	39	2	32	41	56	33	31	30	17	11	47
Румыния	45	2	44	46	25	34	32	31	19	12	44
Монголия	27	2	84	40	64	35	35	30	17	12	54
Аргентина	44	2	68	42	52	36	34	32	18	12	45
Ямайка	53	1	66	56	30	37	33	34	17	12	49
Южная Африка	51	3	38	53	24	38	34	33	20	13	48
Черногория	50	3	40	64	19	39	37	35	20	13	51
Мексика	58	2	39	54	41	39	36	36	20	13	46
Сербия	56	3	39	52	41	40	37	37	21	14	53
Украина	71	2	34	60	42	41	38	37	22	13	57
Албания	48	4	19	66	32	41	37	38	21	14	52
Папуа Новая Гвинея	35	3	78	47	61	42	41	38	20	13	63
БЮР Македония	64	2	50	59	55	42	40	39	22	13	55
Ботсвана	54	7	27	62	46	43	39	40	22	15	50
Перу	61	3	24	70	60	44	42	40	23	14	56
Индонезия	62	2	41	65	62	44	41	41	23	14	59
Доминиканская Респ.	65	3	50	58	48	45	43	40	23	14	58
Филиппины	68	3	41	72	47	46	44	42	23	14	60
Молдова	55	3	49	88	57	47	45	43	24	14	61
Тимор-Леште	43	4	55	57	81	48	46	45	24	14	65
Шри-Ланка	59	3	67	74	50	49	48	44	24	16	64
Гайана	68	5	54	63	41	50	48	46	24	16	66
Парагвай	52	5	37	95	56	50	47	47	23	16	62
Сальвадор	59	4	56	61	67	51	49	48	24	16	69
Боливия	67	3	60	67	70	52	50	49	24	17	67
Никарагуа	81	3	54	50	77	53	51	49	25	14	73
Гана	69	2	38	90	69	53	50	50	24	14	68
Лесото	63	3	83	69	72	54	51	51	25	18	70
Колумбия	54	4	88	77	61	55	52	52	25	18	78
Эквадор	76	4	46	92	53	55	53	51	25	16	71
Гватемала	74	4	57	71	68	56	53	53	26	18	79
Ливан	84	4	81	76	44	57	54	53	25	16	72
Турция	69	3	87	82	66	58	53	54	25	18	80
Замбия	66	4	75	87	58	58	55	53	25	18	74
Гондурас	75	6	43	81	51	59	53	56	24	18	83
Малави	70	4	74	51	102	60	57	55	26	19	75
Бенин	85	5	58	80	37	61	56	57	25	18	81
Мали	73	4	104	55	73	61	57	56	26	19	76
Сенегал	80	4	77	78	80	62	58	58	27	19	85
Таиланд	49	7	61	98	71	63	58	59	25	18	82
Либерия	57	5	87	49	86	64	59	58	26	19	88
Намибия	77	4	80	86	71	65	60	58	28	19	77

Мадагаскар	84	5	73	79	70	66	59	60	27	18	86
Кения	97	4	70	75	84	67	62	59	27	19	89
Сьерра-Леоне	89	4	72	84	80	68	61	61	28	19	87
Малайзия	60	5	64	102	88	69	63	62	26	19	91
Венесуэла	82	6	62	107	74	70	64	64	27	19	93
Мозамбик	98	6	39	111	50	71	66	63	29	18	95
Армения	79	6	99	68	83	72	65	65	27	19	84
Бангладеш	90	5	65	89	112	73	66	67	29	20	101
Грузия	111	5	94	93	65	73	67	66	29	18	96
Нигер	78	17	86	94	67	74	66	68	29	20	94
Россия	93	7	59	114	63	75	67	68	27	19	92
Коморские о-ва	106	2	91	83	89	76	68	70	29	20	102
Фиджи	92	5	60	108	100	77	70	69	29	20	103
Гвинея-Биссау	140	5	71	104	78	77	69	70	29	20	90
Танзания	99	5	42	100	118	78	70	70	30	20	105
Бурунди	86	15	120	96	51	79	69	71	30	20	97
Непал	83	12	106	73	85	79	69	71	29	20	100
Сингапур	72	13	90	91	93	80	70	72	29	20	104
Камбоджа	88	9	81	119	75	81	71	73	31	20	106
Эфиопия	91	10	79	136	82	82	72	75	29	20	107
Пакистан	94	6	76	110	104	82	73	74	30	20	98
Гаити	96	6	81	103	97	83	74	75	30	21	99
Нигерия	107	7	92	105	79	84	74	76	33	20	110
Уганда	87	12	83	97	109	85	75	77	32	22	108
Алжир	116	9	89	120	87	86	76	78	34	22	111
Буркина-Фасо	105	11	108	85	98	87	77	78	30	22	109
Бутан	95	8	111	101	116	88	78	79	34	22	114
Замбия	96	16	107	117	90	89	79	80	35	22	112
Того	131	15	63	123	89	90	80	81	35	22	115
Марокко	99	8	108	125	107	91	82	82	36	22	121
Камерун	103	17	110	109	91	91	81	83	35	23	117
Кыргызстан	109	15	96	124	95	92	82	84	35	22	113
ЦАР	142	12	93	121	96	93	83	85	35	22	118
Иордания	100	14	119	106	114	93	84	84	35	23	119
Габон	120	15	105	115	101	94	85	86	35	22	116
Кот-д'Ивуар	102	14	117	130	106	95	86	87	37	23	120
Египет	117	11	120	134	76	96	86	88	35	23	127
Руанда	104	14	100	138	103	96	87	87	37	23	123
Азербайджан	118	18	91	135	92	97	88	88	37	23	122
Чад	146	13	85	141	99	98	88	89	37	23	124
Казахстан	110	17	109	126	107	99	88	90	37	23	130
Ангола	114	13	112	127	134	100	89	90	37	23	129
Кувейт	112	18	115	99	108	100	89	90	37	23	128
Йемен	123	13	98	131	121	101	90	91	37	23	133
Тунис	122	15	103	133	107	102	91	92	37	23	136
Таджикистан	129	15	96	144	94	103	92	92	38	23	134
Зимбабве	130	14	78	137	122	104	92	93	37	23	125
Конго	113	18	116	113	119	105	94	93	39	24	138
Бахрейн	115	18	82	145	105	105	94	93	37	24	131
Белоруссия	124	15	108	128	110	105	93	94	38	24	137
Дем. Респ. Конго	134	6	69	140	132	106	95	96	37	23	126
Иран	126	17	112	142	113	107	96	97	39	24	144
Джибути	101	16	120	118	136	107	98	95	39	24	135
Мавритания	132	9	114	129	133	108	97	98	37	23	132

Экватор. Гвинея	138	12	120	139	115	109	100	98	40	23	145
Сирия	136	18	95	150	110	109	99	99	40	25	146
Гвинея	135	16	113	153	117	110	99	101	40	24	139
Оман	121	19	120	122	123	110	100	100	40	25	141
Вьетнам	129	18	101	143	127	111	101	102	40	25	148
Лаос	125	21	120	112	125	112	103	102	42	25	150
Катар	119	20	120	132	124	112	103	102	40	25	140
Свазиленд	137	18	118	148	120	113	102	104	41	25	143
Судан	127	15	120	146	134	114	104	103	40	25	147
Куба	108	18	120	151	126	115	105	103	41	25	149
Китай	119	18	120	147	128	116	106	104	42	25	151
ОАЭ	128	19	120	116	131	116	106	104	43	26	142
Ливия	139	18	120	152	130	117	107	105	43	26	153
Узбекистан	144	20	97	154	111	117	107	105	42	27	152
Туркменистан	141	21	120	149	131	118	109	106	44	28	157
Эритрея	145	20	102	155	134	118	108	107	44	28	155
Саудовская Аравия	133	18	120	156	135	119	109	107	45	28	154
Мьянма	143	17	120	157	136	120	110	108	46	29	158
КНДР	147	20	120	158	129	121	111	108	47	30	156



# ПРИЛОЖЕНИЕ Г ВХОДНЫЕ И ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ МОДЕЛИ DEA

Таблица Г.1 – Входные и выходные параметры для модели DEA

Авторский коллектив	Входные параметры DEA		Выходные параметры DEA	
Johnes (2006)	Качество обучающихся в университете студентов; Численность аспирантов; Численность ППС; Амортизация ВУЗа; Расходы на библиотечные нужды и компьютерное оснащение; Административные расходы не входящие в амортизацию.		Показатель исследовательской деятельности; Количество ученых степеней выданных на программах послевузовской подготовки; Качество выпускников.	
Athanassopoulos and Shale (1997)	Эффективность по издержкам	Эффективность по ресурсам	Эффективность по издержкам	Эффективность по ресурсам
	Совокупные издержки; Доходы от научных проектов.	Численность студентов; Численность аспирантов; Численность ППС; Рейтинг качества абитур-ов; Доходы от научных проектов; Расходы на библиотеки и компьютерное оснащение.	Численность выпускников; Количество выданных научных степеней; Рейтинг научной и публикационной активности.	Численность выпускников; Количество выданных научных степеней; Рейтинг научной и публикационной активности.
Beasley (1995)	Численность студентов бакалавриата; Численность студентов магистратуры <sup>24</sup> ; Численность студентов аспирантуры <sup>25</sup> ; Рейтинг публикационной и научной деятельности.		Сумма заработной платы, выплачиваемой сотрудникам; Расходы на техническое оборудование; Доходы от исследований.	
Flegg et al. (2004)	Численность сотрудников университета; Численность студентов бакалавриата; Численность магистров и аспирантов; Совокупные расходы (включаются все издержки, кроме расходов на профессорско-преподавательский состав).		Доход от исследовательской и консультационной деятельности ВУЗа; Количество выданных дипломов бакалавриата; Количество магистерских и аспирантских дипломов.	
Katharakis and Katharaki (2010)	Численность ППС; Численность административных сотрудников; Численность студентов; Операционные издержки, не включающие в себя расходы на заработные платы сотрудникам университета.		Численность выпускников; Доходы от научно-исследовательской деятельности университета.	
Avkiran (2001)	Численность студентов; Численность аспирантов;		Процент отчисленных студентов; Средняя успеваемость студентов; Доля студентов, работающих полный рабочий день в течение обучения.	
Abbott and Doucouliagos (2003)	Численность ППС в эквиваленте полной занятости; Численность неакадемического персонала; Издержки университета, не связанные с выплатой заработных плат;		Численность студентов в эквиваленте полной занятости; Размер грантов, полученных университетом для проведения научных исследований	

<sup>24</sup> Имеются в виду студенты программ taught postgraduate;

<sup>25</sup> Имеются в виду студенты программ research postgraduate.

	Внеоборотные активы, как прокси- переменная для акционерного капитала.			
Kempkesa and Pohl (2010)	Численность технического персонала; Численность ППС; Текущие расходы.		Количество грантов; Численность выпускников.	
Warning (2004)	Расходы на персонал; Все прочие издержки.		Количество публикаций по естественным наукам; Количество выпускников по естественным наукам; Количество публикаций по социальным наукам; Количество выпускников по социальным наукам.	
Abankina et al. (2012)	Модель А	Модель В	Модель А	Модель В
	Численность студентов (бюджетный и внебюджетный контингенты); Доля штатных ППС с ученой степенью (д.э.н. и к.э.н.); Фондовооруженность.		Рейтинг качества приема (среднее значение ЕГЭ); Рейтинг научной и публикационной активности.	Рейтинг качества приема (среднее значение ЕГЭ); Рейтинг научной и публикационной активности Объем внебюджетных доходов/ объем бюджетного финансирования.
Модель 1	Удельное бюджетное финансирование вузов; Удельный вес обладателей ученых степеней ППС в общей численности ППС; Совокупная численность ППС.		Средний балл первокурсников, поступивших по ЕГЭ; Численность студентов, обучающихся на бюджетных и платных местах.	
Модель 2	Удельное бюджетное финансирование вузов; Удельный вес обладателей ученых степеней ППС в общей численности ППС; Средний балл ЕГЭ.		Взвешенный удельный вес молодых ППС в общей численности ППС; Публикационная активность сотрудников вуза, а именно, число научных статей в рецензируемых журналах в расчете на 100 сотрудников.	