Приложение

к Положению

о выпускной квалификационной

работе бакалавров и специалистов

в НИУ ВШЭ

Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Национальный исследовательский университет   
«Высшая школа экономики»

###### Факультет/отделение факультета/Подразделение Факультет Мировой экономики и мировой политики

###### Кафедра Международных валютно-финансовых отношений

###### ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

На тему «Определение границ валютного коридора для валютной пары швейцарский франк – евро»

Студент группы № 562

Дробин Сергей Алексеевич

Руководитель ВКР

Зам.зав. кафедры МВФО, к.э.н., Камротов Михаил Владимирович

Консультант

Зав.кафедры МВФО, д.э.н, Евстигнеев Владимир Рубенович

Москва, 2013

**Введение.**

В задачах Центрального банка любой страны иногда косвенно или напрямую, прописано, что ЦБ обязуется поддерживать стабильный (или определенный валютный курс) валютный курс и предотвращать его резкие колебания. Одним из прямых инструментов предотвращения такого рода колебаний являются интервенции Центрального Банка на валютном рынке. Обычно, если есть некий целевой валютный коридор, и неважно, осведомлены ли игроки валютного рынка о его существовании или нет, Центральный Банк «включается» в игру только на границах заданного коридора, чтобы курс не вышел за них. Также интервенции могут осуществляться, когда валютный курс находится на уровне центрального паритета, т.е. среднего уровня между заданными границами. Иногда интервенции проводятся, чтобы курс вернулся к центральному паритету. В случае, если границы коридора всем известны, и, если игроки валютного рынка верят в жесткость политики Центрального Банка и в его намерение поддерживать коридор, то рынок сам себя стабилизирует и Центральному банку даже нет необходимости проводить интервенции.

Таким образом, Центральный Банк должен каким-то образом определить тот критический момент, когда необходимо вмешаться. Задача ЦБ состоит в том, чтобы определить границы валютного коридора и спрогнозировать движение валютного курса в рамках этого коридора. Данная задача может быть сведена к решению дифференциального уравнения второго порядка в частных производных имени А.Н. Колмогорова[[1]](#footnote-1) (дифференциального оператора второго порядка имени Е.Б. Дынкина[[2]](#footnote-2)).

**Основная научная гипотеза** данного исследования состоит в следующем: определенным образом составленное дифференциальное уравнение А.Н. Колмогорова может описывать стохастический процесс, заключенный в определенных границах, которому подчинено движение валютного курса[[3]](#footnote-3).

В данной работе **предметом исследования** был выбран **валютный рынок (евро - швейцарский франк)**, т.к. именно на нём существуют явно образом заданные границы коридора (на некоторых из валютных рынков).

**Цель данной выпускной квалификационной работы** состоит в том, чтобы определить необходимость интервенций центрального банка на валютном рынке, т.е. исследователь будет выступать со стороны центрального банк.

В соответствии с целью работы ставятся следующие **задачи**:

* Специфицировать исходное уравнение под выбранный объект исследования
* Разработать алгоритм получения функции плотности вероятности
* Изучить предпосылки и причины введения границы валютного курса Центральным Банком Швейцарии
* Проанализировать работу модели на эмпирических данных.

**Научная новизна** работы заключается в получении стационарной функции плотности вероятности выхода валютного курса за границу коридора. Полученное решение вышеупомянутого уравнения может позволить не только оценить текущую вероятность «пробоя» валютного коридора, но также может позволить построить прогноз с помощью метода пошагового интегрального преобразования. **Теоретическая значимость**  данной работы заключается в поиске аналитического решения дифференциального уравнения второго порядка в виде экспоненциальной функции, которая по свойствам схожа с функцией плотности вероятности. **Практическая значимость** будущих результатов данного исследования состоит в возможности корректировки политики, проводимой ЦБ в отношении валютного курса.

1. **Спецификация исходного уравнения.**
   1. **Постановка задачи**

На сегодняшний день финансовая наука все больше и больше заимствует у точных наук: у математики, физики, даже биологии (например, построение искусственных нейронных сетей). Но основная проблема состоит не в том, чтобы найти подходящий метод оценки либо прогнозирования в других науках и просто применить его к финансовым рынкам. Проблема состоит в том, чтобы не слепо заимствовать, а адекватно переформулировать поставленную в другой сфере задачу.

В количественных финансах еще с начала прошлого века используют некоторые физические подходы, такие как уравнение Броуновского движения, которое было впервые смоделировано и применено к определению цен на производные финансовые инструменты знаменитым математиком Луи Башелье.[[4]](#footnote-4) Также одним из классических задач, применяемых в финансовой науке, является задача поиска плотности вероятности, которая порождается из дифференциального уравнения второго порядка. Данное уравнение было заимствовано из физики – оно схоже с уравнением теплопроводности, которое описывает распространение тепла по железному стержню[[5]](#footnote-5). Обратное уравнение Колмогорова же описывает вероятности различных состояний в различные моменты времени, вернее будет сказать, решением которого будет переходная вероятность между различными состояниями. Данное уравнение широко применяется в различных сферах для описания множества процессов, например в экологии: для описания загрязнения подземных вод.[[6]](#footnote-6) Иначе говоря, это уравнение в частных производных, которое выглядит следующим образом:

(1)

В однородном случае параметризующие функции *a(x,t)* и *b(x,t)* не будут зависеть от времени и будут равняться *a(x)* и  *b(x)* соответственно.

Для нас ключевым моментом является спецификация параметризующих функций, т.к. они будут влиять на вид функции плотности вероятности, которую мы в конечном итоге планируем получить. Итак, мы будем искать функцию плотности вероятности из следующего уравнения:

, (2)

– это средний валютный курс (центральный паритет)

*k –* скорость обращения к среднему (если *k>>1,* то процесс сходится к , если *k* стремится к нулю, то процесс обращения к среднему по знаку сходится к логнормальному процессу)

*r, r\* -* национальная и зарубежная процентные ставки

*σ* – волатильность курса.

Функция плотности вероятности соответствующая пробитию уровня коридора будет равна (*1-P(S,t)).*

Данная формулировка обратного уравнения Колмогорова описывает изменение во времени функции плотности вероятности P(S,t), где S – это валютный курс, который может выйти за границу коридора H в условиях обращения среднего по знаку. Такого рода спецификация задачи была позаимствована из статьи двух китайских финансовых математиков C.F:Lo и C.H. Hui.[[7]](#footnote-7) В своей статье они используют для решения данного уравнения довольно интересный метод, на котором стоит остановиться поподробнее: задача **first-passage time**.

* 1. **First-passage time (FPT) problem (first passage problem)**

FPT задача – это задача, над которой работают инженеры уже больше века, но широкое использование и распространение она получила только 30 лет назад. FPT задача заключается в определении момента времени *(T)*, в который одномерный стохастический процесс *(X(t))* в первый раз достигнет какой-то определенной границы *(H)*:

Стохастический процесс *X(t) , X(0)=0*. Задача FPT для этого процесса специфицируется следующим образом:

*T=inf{t:X(t)=a}* ,т.е. нам необходимо найти момент во времени *Т*, когда процесс *X(t)* достигнет границы *a.* Обычно задача FPT заключается в поиске функции плотности вероятности для *Т.*

Данная задача имеет очень широкий спектр применения, мы, в частности, будем рассматривать его в контексте определения момента «пробития» валютного коридора и соответственно определения необходимости валютной интервенции центральным банком.

Метод FPT может быть усложнен, например, если в модель включить «злонамеренного игрока». Тогда, если действия этого игрока могут быть описаны каким-то процессом, скажем Броуновским движением, данный метод может быть применен для получения решения закрытой формы функции плотности вероятности для первого прохода (closed-form solution of the PDF for the first passage). Это может интерпретироваться, как группа крупных инвесторов, по какой-либо причине решивших вывести текущий курс за границу коридора. Также стоит отметить, что решение задачи FPT сильно зависит от изначальных и граничных условий соответствующего дифференциального уравнения. Это значит, что мы можем моделировать изменения поведения «злонамеренного» игрока. Очень удобен данный метод в задачах с определенным функциональным видом мгновенного смещения или диффузии.

Существует два метода решения задачи FPT: аналитический и численный. Аналитический метод заключается в решении дифференциального уравнения в частных производных или стохастического дифференциального уравнения, в частности, диффузионного уравнения Фоккера-Планка. Численный метод основан на алгоритме Монте-Карло. Но очевидно, что и здесь основным недостатком численных методов является неточность.

Для практического применения гораздо удобнее использовать функцию плотности вероятности соответствующего стохастического процесса, нежели чем само уравнение процесса. Чтобы получить её необходимо решить дифференциальное уравнение в частных производных, например уравнение Фоккера-Планка. Но в данной работе будет использовать не уравнение Фоккера-Планка (или прямое уравнение Колмогорова), а обратное уравнение Колмогорова. Но, если все-таки отталкиваться от уравнения Фоккера-Планка следующего вида:

, (3)

то задача заключается в том, чтобы найти решение этого уравнения при некоторых граничных условиях, например:

(4)

*, где x=a это начальная точка.*

Вся задача FPT как раз и заключается в спецификации данных граничных условий. Сама же плотность вероятности FPT выводится из «вероятности выживания» (survival probability – обычная вероятностная мера в статистике), которая в свою очередь выводится из решения дифференциального уравнения.

Survival probability – survival analysis – это область статистике, которая применяется в биологии, инженерии, экономики и пытается определить время доживания. В нашем случае, если «смертью» считать момент пробития коридора, то вполне можно использовать данный подход. Суть данного подхода заключается в определении «функции выживания»: , *t –* время, *Pr -* вероятность.

Это невозрастающая функция. Вероятность выжить с каждым прожитым годом уменьшается или остается на том же уровне.

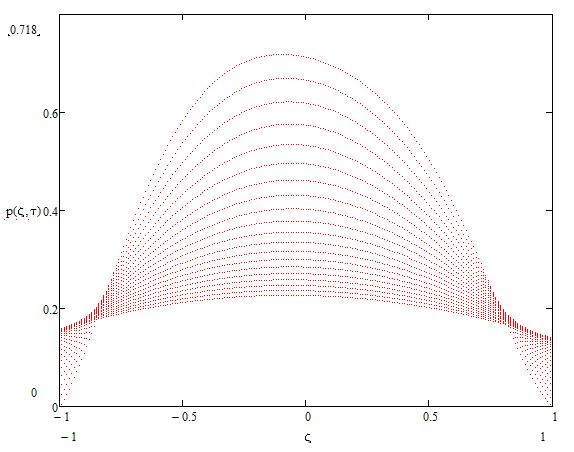
(5)

- функция плотности вероятности наступления события.

(6)

1. **Получение функции плотности вероятности.**

Как уже было сказано выше, идея заключается в том, чтобы получить функцию плотности вероятности выхода уровня валютного курса за границы коридора. В вышеупомянутой модели, разработанной Hui C.H., Lo C.F данная функция плотности вероятности была получена в результате решения одной из спецификаций обратного уравнения Колмогорова, решая задачу FPT. Но недостатком данного метода решения заключается в том, что эволюция функции плотности вероятности будет происходить так же, как и при решении физической задачи по распространению тепла по стальному стержню. Т.е. график ФПВ при увеличении периода, на который строится прогноз, будет становиться более плоским и более растянутым, иными словами будет увеличиваться дисперсия. Один из примеров такого рода поведения функции плотности можно увидеть на *рис.1*



*Рис.1*

Но рыночные процессы не эволюционируют таким образом, это вполне подтверждается эмпирикой, например, если посмотреть на доходности долгосрочных облигаций, то мы не увидим огромнейшего разброса данных. Безусловно, волатильность с увеличением временного горизонта растет, но не так сильно и быстро, как распространяется тепло по стальному стержню.

Поэтому мы постараемся получить стационарное решение обратного уравнения Колмогорова, которое мы затем сможем использовать для пошаговой трансформации, тем самым эмитируя непрерывную эволюцию функции плотности вероятности, сохраняя при этом норму функции, т.е. избегая «расплывания».

Как я уже говорил, мы не будем решать данное уравнение таким же образом, как это сделали Hui C.H., Lo C.F., мы будем пытаться решить его аналитически, но первый шаг по преобразованию данного уравнения будет таким же, т.е мы будем проводить некоторые замены, которые приведут к каноническому виду обратного уравнения Колмогорова. Замены будет следующие:

(7)

(8)

Данные замены приводят к следующему виду уравнения:

(9)

Это канонический вид обратного уравнения Колмогорова для процесса Улинбека-Орнштайна. Используется именно этот процесс, так как он описывает обращение к среднему по знаку, что очень характерно для финансовых рынков, в особенности для валютного курса, который движется в коридоре.

На этом моменте наше решение расходится с решением китайских ученых. Мы постараемся найти стационарное решение данного уравнения. Для этого мы сначала применим метод разделения переменных, т.к мы хотим отделить зависимость ФПВ от времени *(t)* от зависимости ФПВ от финансовой переменной (*x)*:

(10)

Данная замена приведет к следующему виду уравнения:

(11)

Затем мы раскрываем производные и переносим зависимые от времени функции в одну сторону уравнения, а зависимые от финансовой переменной функции в правую часть уравнения:

(12)

Теперь мы можем перейти к поиску стационарных решений, для этого мы правую и левую часть данного равнения приравниваем к некой константе λ. Таким образом, мы получим два уравнения: одно в отношении временной переменной, другое в отношении финансовой переменной:

(13)

(14)

Для уравнения в отношении времени решение будет иметь следующий вид:

(15)

Затем, после получения решения второго уравнения мы сможем совместить их Но если мы это сделаем, то получим такую же эволюции функции плотности вероятности, как и в случае с решением с помощью FPT. Именно поэтому мы хотим получить решение второго уравнения, т.е. стационарное решение изначального уравнения, а уже затем использовать его для построения пошаговой эволюции путем интегрального преобразования. Итак, второе уравнение после некоторое преобразования выглядит следующим образом:

(16)

Если некоторым образом переформулировать его, проведя некоторые замены, то мы перейдем к уравнению Льенара, которое показано далее:

(17), (18)

*- это уравнение Льенара.* (19)

Уравнение Льенара – это дифференциальное уравнение второго порядка, чтобы решить которое, необходимо применить некоторую замену[[8]](#footnote-8):

(20)

Данная замена позволит перейти от уравнения Льенара (от дифференциального уравнения второго порядка) к уравнению Абеля второго рода (к уравнению первого порядка):

(21)

(22)

Уравнение Абеля приводится к более простой для решения форме с помощью очередной замены переменной:

*, в данном случае* (23)

После данной замены уравнение Абеля обретает следующий вид и имеет вполне определенное решение:

, (24)

где , здесь *X* выступает как параметр, а не как переменная. Параметрическое решение данного уравнения имеет следующий вид:

(25)

Из данного уравнения, выразив *V(ξ),* мы получим решение, которое обращает уравнение Абеля второго порядка в ноль. Теперь необходимо перейти от самого последнего этапа (уравнения Абеля (24)) к первому (уравнению Колмогорова (2)). Для этого необходимо провести все замены, обратные к тем, которые проводились на пути к решению. При проведении замен возникает проблема на самом последнем этапе, т.е. на переходе от *V(X)* к *Х(х)* (см. ур. (20))*,* так как в решении уравнения (25) включает в себя функцию Ламберта:

(26)

При подстановки ξ и *А* мы перейдем к *V(X)*, а затем при финальном переходе к *X(x)*нам необходимо решить дифференциальное уравнение первого порядка:

(27)

Решение данного уравнения будет иметь следующий вид:

(28)

Но проблема состоит в том, что функция *V(X)* не интегрируема, даже при приближении функции Ламберта с помощью ряда, мы не сможем получить решение. Поэтому, чтобы решить данную проблему нам необходимо избавиться каким-либо образом от функции Ламберта на более ранних стадиях.

Для этого мы попробуем решить уравнение (24) с помощью разложения решения в ряд Тейлора.[[9]](#footnote-9) Таким образом, решение будет раскладываться через ряд производных, а начальную точку мы можем подобрать из решения, которое мы получили ранее и которое включает функцию Ламберта, с помощью разложения функции Ламберта в ряд. Затем, подставив *A, ξ,*  совершим переход к уравнению (27) и решим его. Тем самым мы получим стационарную функцию плотности вероятности выхода валютного курса за границу коридора, установленного центральным банком. К сожалению, из-за технических сложностей и отсутствия необходимых вычислительных мощностей у используемого при расчетах ЭВМ данную функцию не удалось получить. Возможно, её удастся получить в другой математической среде (расчеты для данной работы проводились в среде MathCad), например Matlab или Wolfram Matematica.

1. **Предпосылки и причины введения валютного**

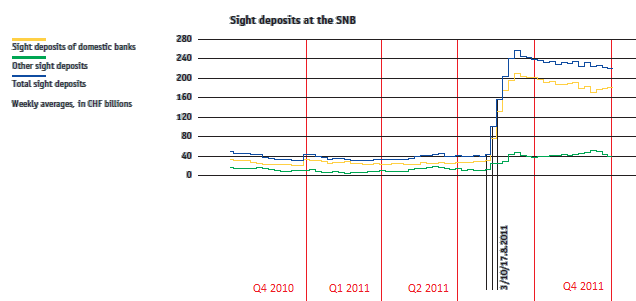
**коридора в Швейцарии.**

После кризиса 2008-2009гг., который значительно ослабил большинство экономик мира, отразился и на Швейцарии. Даже в 2011 еще чувствовались его последствия, а также подступающие проблемы с Европейским суверенным долгом только усугубляли ситуацию, так как большинство игроков на валютном рынке потеряли уверенность в европейской валюте и переходили в более стабильные денежные единицы. Это привело к росту спроса на Швейцарский франк, и с середины 2010 началось постепенное укрепление Швейцарского франка: укрепился с 1.35-1.4 в 2010 года (за 2010 год укрепление к Евро составило 9%, к доллару – 4%) к практически паритетному соотношению к лету 2011 года (сравнивая с декабрем 2010 г. франк укрепился на 19% к евро, максимальный уровень составил 1.01 франков за евро, а к доллару укрепление составило 25%)[[10]](#footnote-10).

Швейцарский франк был настолько сильно переоценен, что это не могло не повлиять на экономическое состояние страны, т.к. основным риском, связанным с сильным франком, является риск дефляции, а также сильное влияние на реальный сектор: на экспортеров, а также опасность резкого роста рынка недвижимости. Поэтому в августе 2011 года Центральный Банк Швейцарии принял решительные меры по сдерживанию укрепления франка. Для этого на внеочередном заседании ЦБ была принята мера по снижению ставки процента. Было решено поддерживать 3-месячную ставку LIBOR ближе к нижней границы целевой зоны, т.е. в районе 0.25% (целевая зона была от 0 до 0.75%), см. рис.2.

*Рис.2*

Также ЦБ Швейцарии предпринимал попытки по увеличению предложения ликвидности: за первые две недели августа лимиты по бессрочным вкладам в ЦБ выросли почти в 7 раз (с 30 млрд. до 200 млрд. швейцарских франков).



*Рис.3 (Источник:* Swiss National Bank, 104th Annual Report, 2011)

Меры по управлению ликвидности ЦБ Швейцарии достигли определенного успеха, но неопределенность на мировых финансовых рынках только усиливалась, что еще сильнее подстегивало спрос на франк. И ЦБ Швейцарии 6 сентября 2011 года решился на крайнюю меру: проведение прямых интервенций на валютном рынке с тем, чтобы поддержать минимальный обменный курс на уровне 1.2 франка за евро. ЦБ также объявил, что даже курс в районе 1.2 франка за евро является завышенным, и впоследствии будут предприниматься меры по дальнейшему ослаблению франка. Таким образом, в рамках монетарной политики Швейцарского Национального Банка появилась новая цель, при этом отпала необходимость контроля процентной ставки, которая после введения минимального обменного курса стала постепенно повышаться (см. рис.1).

**Заключение.**

В данной работе был рассмотрен аналитический метод решения обратного уравнения А.Н. Колмогорова, описывающего процесс Улинбека-Орнштайна, т.е. процесса с обращением к среднему по знаку, что характерно для финансовых рынков, в особенности для валютного рынка, в контексте которого и было рассмотрено данное уравнение. А также был представлен численный алгоритм приближения к решению с помощью разложения искомой функции в ряд Тейлора.

В практической части данной работы был рассмотрен валютный курс евро - швейцарский франк, как временной ряд, который будет использоваться впоследствии для получения численных результатов и оценки адекватности данных методов решения поставленной задачи.

Следующим этапом в данном исследовании будет получение с помощью другой математической среды стационарного решения уравнения Колмогорова в описанной спецификации, которая выступит как функция плотности вероятности выхода валютного курса за границу коридора. Также на следующем этапе будет проведена оценка данной теории на реальных данных, и, в случае успешной проверки, к данной стационарной функции плотности вероятности будет применена процедура интегрального преобразования с тем, чтобы получить возможность построить прогноз движения валютного курса, ограниченного двумя или одной границей, как в случае с Швейцарским франком. В заключении данное исследование, подтвержденное будущими результатами, может быть использовано для корректировки политики центрального банка в отношении валютных интервенций.

1. Советский математик, основоположник теории вероятности. [↑](#footnote-ref-1)
2. Дынкин Е.Б., Броуновское движение в некоторых симметрических пространствах и неотрицательные собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами, Известия Академии Наук СССР (серия математическая) №30 (1966г.), стр. 455-478 [↑](#footnote-ref-2)
3. Jonathan E. Ingersoll, Jr., Theory of Financial Decision Making, Rowman&Littlefield Publishers, 1987, p.350 [↑](#footnote-ref-3)
4. L.Bachelier, The Theory of Speculation, 1900 [↑](#footnote-ref-4)
5. <http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/lpde/heat-toc.pdf> [↑](#footnote-ref-5)
6. Fang J. Tacher L. Parriaux A., Backward simulation of the probability of a trace particle reaching a given region, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.20, 2005, pp.97-101. [↑](#footnote-ref-6)
7. Hui C.H., Lo C.F., A note on estimating realignment probabilities – a first-passage-time approach, Journal of International Money and Finance, Vol.28 (2009), pp.804-812. [↑](#footnote-ref-7)
8. Стоит отметить, что искомая функция *Х(х)* после замены становится аргументом и дальше будет восприниматься как обычная переменная, а не как функция от *х,* а как аргумент функции *V(X)*. [↑](#footnote-ref-8)
9. Korn G.A., Korn T.M., Mathematical handbook for scientists and engineers – definitions, theorems and formulas for reference and review, Second Edition, 1968, p.271 [↑](#footnote-ref-9)
10. Swiss National Bank, 104th Annual Report, 2011. [↑](#footnote-ref-10)