МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО УНИВЕРСИТЕТА "ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ"

Кафедра

Информационные технологии

и автоматизированные системы

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к дипломной работе

На тему: Синтез регуляторов для АСУТП с использованием СКМ Mathcad и VisSim

Студент Яковлева Анна Александровна

Руководитель работы ____________ (Капалин В.И.)

(подпись)

Допущен к защите « » июня 2013 г.

КОНСУЛЬТАНТ РАБОТЫ

Специальная часть ____________ (Капалин В.И.)

(подпись)

Зав. кафедрой ____________ (Тумковский С.Р.)

(подпись)

Москва, 2013 г.

ВСТАВИТЬ ТЗ

Аннотация.

Целью настоящей дипломной работы явилась подготовка материала для учебного пособия по курсу основ теории управления и разработке соответствующих лабораторных работ по применению системы MathCad + VisSim.

За последние несколько десятилетий были созданы такие известные системы компьютерной математики как Maple, Mathematica, MATLAB и Mathcad. В процессе преподавания курсов теоретических основ автоматизированного управления и основ теории управления в вузах РФ обычно используется система MATLAB — наиболее известная и обширная. Однако, эта исторически сложившаяся ситуация не может рассматриваться как единственно возможная. В настоящей дипломной работе рассматривается возможность замены дорогой и громоздкой системы MATLAB гораздо более компактной и более удобной для учебных приложений системой Mathcad. С этой целью в первой части дипломной работы рассмотрены вопросы моделирования непрерывных и дискретных САУ в системе Mathcad. Во второй части рассмотрены примеры моделирования регуляторов для АСУТП в Mathcad и VisSim, предназначенные для подготовки лабораторных работ по курсу основ теории управления кафедры ИТАС.

Оглавление.

Введение.

Согласно установившейся отечественной терминологии под термином АСУ — автоматизированные системы управления понимают как системы управления технологическими процессами — АСУТП, так и системы управления предприятием — АСУП. По сути это две совершенно разные системы и на предприятиях существуют соответствующие им две независимо друг от друга системы, сопровождаемые отдельными службами разработки, эксплуатации и развития. Программно — аппаратные средства АСУТП принципиально отличаются от средств, используемых в АСУП.

Разработка АСУП — это разработка автоматизированной информационной системы АИС для которой применяется структурный подход с методологиями YDEFO, DFD и CASE - средствами BPWin и ERWin. Другой подход к разработке АИС основан на объектно — ориентированном подходе с использованием UML и CASE — средствами Rational Rose.

Разработка АСУТП в отличии от этого требует разработки программного обеспечения для АРМ (автоматизированного рабочего места) — верхнего уровня управления технологическими процессами. В настоящее время для разработки АРМ используются различные протоколы АСУТП — всего порядка 50 протоколов доступных в РФ. На базовом, нижнем уровне в АСУТП используются системы автоматического управления, управляющие отдельными устройствами. Следующий уровень — это уровень диспетчерского управления, в современных условиях связанного с применением SCADA (Supervisory Control and Data Acquisalion) — систем. При этом для управления технологическим оборудованием используется протокол SNMP (Simple Network Management Protocoul), определяющий стандартный метод контроля над устройствами со станции управления. Этот протокол предлагает единообразное управление всеми типами аппаратных средств, независимо от их назначения и особенностей. Обобщенная структура сетевого оборудования по протоколу SNMP приведена на рис.1.

Рис.1

Сетевая система управления руководит управляемыми устройствами. Агент — это программный модуль, забирающий данные из управляемого устройства. Данные — это переменные, отображающие состояние управляемого устройства, система автоматического управления технологическим процессом. Разработка сетевой системы управления конкретными технологическими процессами — это, в свою очередь, совершенно различные задачи. В первом случае, требуется создать сетевую систему, управляющую оборудованием различных типов. Во втором случае — разработать регуляторы для конкретных технологических процессов. В настоящей дипломной работе рассматривается именно вторая задача, здача синтеза регуляторов для АСУТП.

В настоящее время стандартным способом решения этой задачи является использование систем компьютерной математики — СКМ. К наиболее известным системам компьютерной математики относятся системы Maple, Mathematica, MATLAB и Mathcad. Первые две из них ориентированы, прежде всего, на математические приложения, на пользователей — математиков. Самая известная из этих четырех систем, система MATLAB фирмы Mathworks, ориентирована на технические приложения, хотя первоначально она создавалась как средство доступа к пакетам линейной алгебры LINPACK и EISPACK. Эта система имеет специальные средства анализа и ориентирования систем автоматического управления в виде встроенных команд как для классических корневых и частотных методов, так и для методов пространства состояний. Однако проблемы использования MATLAB в учебном процессе вузов РФ хорошо известны. Во — первых, огромный объем — последние версии MATLAB превышают 10 Гбайт и соответствующая высокая стоимость. Во — вторых, интерфейс MATLAB, унаследованный от 80 — х годов прошлого века — режим командного окна дружественным сегодня назвать вряд ли возможно. В —третьих, наличие встроенных команд, на самом деле, затрудняет преподавательский контроль над усвоением студентами теоретического материала. Для того, чтобы использовать ту или иную встроенную команду пользователю знать по каким формулам действительно производятся расчеты совсем не обязательно.

В указанной связи в данной дипломной работе была выбрана альбернативная и не стыкующаяся с MATLAB система Mathcad, владельцем которой в настоящее время является одна из лидирующих фирм в области САПР

— PTC "Parametric Technology Copmany". В перспективе здесь намечена стыковка Mathcad с системой ProEngineer, владельцем которой является компания PTC.

Различие между MATLAB и MathCad рассмотрим на простом примере построения АФЧХ — годографа Найквиста апериодического звена с передаточной функцией.

$$H(s) = \frac{1}{S+1}$$

В MATLAB для этого нужно в командном окне записать следующие команды:

$$num = 1;$$

$$den = [1,\ 1];$$

$$H = tt(num, den)$$

$$T\text{ransfer function}$$

$$\frac{1}{S+1}$$

$$nyquist(H)$$

$$a\text{xis equal}$$

Результат получается в отдельном графическом окне, причем реальные формулы по которым производится расчет здесь не нужны, нужно лишь знать синтаксис MATLAB и распечатать два окна — командное и графическое — рис.1 и рис.2.

В MathCad все результаты моделирования получаются в одном окне и их без труда можно сопроводить соответствующими комментариями — рис.3.

Рис.3

Соответствующий график построен по конкретным формулам, задающим АФЧХ апериодического звена. На этом же мете можно построить при необходимости графики АЧХ, ФЧХ и ЛАЧХ двена, что потребовало бы в MATLAB вызов ещё трех графических окон.

Хорошо, однако, известно, что популярность MATLAB в условиях вузов РФ обусловлена не столько достаточно редко используемыми командами расширения Control System Toolbox, пример применения которых был приведен выше, сколько системой визуального моделирования Simulink. Аналогичным по сути дополнением Mathcad является система VisSim фирмы Visual Solution. Эта система в версии VisSim 3.0 распространяется бесплатно и уже давно применяется вузами РФ для проведения лабораторных работ, прежде всего, по курсам автоматизированных систем управления и теории автоматического управления. В версии VisSim 6.0 эта система напрямую стыкуется с Mathcad.

В МИЭМ обе системы — Mathcad и VisSim в указанных курсах исользуются в настоящее время только в курсах "Теории систем и методы оптимизации"кафедры кибернетики факультета прикладной математики.

Целью настоящей дипломной работы явилась подготовка материала для учебного пособия и соответствующих лабораторных работ по применению MathCad и VisSim для курса "Основы теории управления"кафедры ИТАС. Задачами, решаемыми в дипломной работе были:

- *и*зучение возможностей применения Mathcad+ VisSim для моделирования непрерывных и дискретных систем управления.
- *р*азработка конкретных примеров расчета регуляторов для АСУТП, которые можно было бы использовать для проведения лабораторных работ на кафедре ИТАС.

Глава 1.Модели непрерывных систем управления.

§1.Понятие абстрактной системы. Классификация систем и структурные схемы.

При исследовании объектов окружающего мира и протекающих в них процессов, исследователь использует метод моделирования, при котором изучаемому объекту или процессу ставится в соответствие некоторая модель, отражающая существенные для исследователя стороны объекта или процесса. Если эта модель адекватна, то есть, если она правильно отражает наблюдавшиеся в экспериментах данные, то на ее основе можно правильно предсказывать результаты будущих экспериментов.

Пусть имеется некоторый объект, внутренне устройство которого неизвестно, и, соответственно, являющийся для исследователя "чёрным ящиком". Исследователь может изучать его, подавая различные воздействия и регистрируя соответствующие воздействиям реакции объекта. Будем предполагать,что эксперимент проводится многократно в том смысле, что его условия (в принципе) многократно воспроизводимы и можно наблюдать реакции "чёрного ящика"на различные входные сигналы для тех же самых условий эксперимента.

Рис.1

Схематически эксперимент с "черным ящиком"показан на рис.1.

Здесь u - воздействие, входной сигнал, из некоторого множества входных сигналов Ω, а y - реакция, выходной сигнал из некоторого множества выходных сигналов Γ. Тогда моделью "чёрного ящика"для данных условий эксперимента будет, в общем случае, некоторое бинарное отношение в соответствии со следующим определением. Пусть даны два множества Ω и Γ, которые могут совпадать и задано декартово или прямое произведение этих множеств $\Omega \times \Gamma$, множество упорядоченных пар (u, y) в которых $u \in \Omega$, а $y \in \Gamma$, т.е.

$$\Omega \times \Gamma = (u, y) \mid u \in \Omega, y \in \Gamma$$

Любое подмножество $S \subseteq \Omega \times \Gamma$ называется *бинарным отношением*. Задание бинарного отношения устанавливает связь входных $u \in \Omega$ и выходных $y \in \Gamma$ сигналов, но не предполагает функциональной, однозначной связи элементов множеств Ω и Γ. В связи с этим дадим следующее определение. *Функциональным* называется бинарное отношение, в котором для любого $u \in \Omega$ "участвующего"в бинарном отношении, существует единственный связанный с ним элемент $y \in \ \Gamma$. Функциональному отношению можно сопоставить функцию, оператор $f : \Omega \to \Gamma$, который в этом случае будет задавать модель "чёрного ящика , его описание "вход - выход"или внешнее описание. Детальная разработка этого подхода приводит к следующему понятию абстрактной системы. Назовем множеством моментов времени непустое линейно - упорядоченное множество

$$T \subseteq \mathbb{R}$$

Назовем множествами значений входных и выходных сигналов соответственно непустые подмножества $U \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^l$

Пусть U^T— множество функций $u : T \to \mho$ и y^T— множество функций $y : T \to Y$.Назовем множествами входных и выходных сигналов соответственно непустые подмножества $\Omega \subseteq U^T$ и $\Gamma \subseteq Y^T$. Назовем внешним описанием или описанием "вход - выход"бинарное отношение $S \in \Omega \times \Gamma$.

Теперь, подводя итог, можно сформулировать следующее определение абстрактной системы.

Пусть даны: множество моментов времени T, множество значений входных и выходных сигналов U и Y, множество входных и выходных сигналов Ω и Γ и внешнее описание $S \subseteq \Omega \times \Gamma$. Абстрактной системой называется следующая шестерка:

$$\sum =< T, U, Y, \Omega, \Gamma, S > \tag{1}$$

Графически абстрактную систему представляют так, как показано на рис.2.

Рис.2

Абстрактная система представляет собой обобщённую математическую модель, и, накладывая на нее различные условия, можно получить различные виды конкретных моделей, отличающихся уровнями детализации, общностью, а так же классами практических задач, на которые эти модели ориентированы.

Дадим классификацию абстрактных систем, исходя из приведенного определения. Абстрактная система называется непрерывной (по времени), если её множество моментов времени T - связное подмножество $\mathbb{R}$.

Абстрактная система называется дискретной (по времени), если ее множество моментов T - подмножество множества целых чисел $\mathbb{Z}$.

Абстрактная система называется системой с одним входом и одним выходом, если $U, Y \subseteq \mathbb{R}$.В общем случае, при $U \subseteq \mathbb{R}^m$ и $Y \subseteq \mathbb{R}^l$, где $l, m > 1$, говорят о системе с несколькими входами и выходами - m входами и l выходами, т.е. многомерной системой.

На практике изучаемый объект обычно не является "чёрным ящиком и исследователю известны математические модели элементов, из которых он состоит и известны взаимосвязи этих элементов, т.е. известна внутренняя структура объекта. Тогда, наряду с описанием "вход — выход объект может быть задан своей структурной моделью.

Структурная модель представляет собой совокупность математических моделей элементов объекта и модели взаимосвязей элементов. Модель взаимосвязей элементов задаётся графически — структурной схемой.

Пусть дана абстрактная система с одним входом и одним выходом, графически представленная на рис.2. Будем предполагать, что рассматриваются только системы, у которых множества входных и выходных сигналов равны $\Omega = \Gamma$,то есть системы, задаваемые *однородными* бинарными отношениями $S \subseteq \Omega \times \Omega$, причём $U = Y = \mathbb{R}$.Обозначим множество таких абстрактных систем через Θ.

Сечением S(u) бинарного отношения S по элементу $u \in \Omega$ называется множество элементов $y \in \Gamma$ таких, что пары $(u, y) \in S$,

$$S(u) = \{y \in \Gamma | (u, y) \in S\}.$$

Сечением $S(\widetilde{A})$ бинарного отношения $S \subseteq \Omega \times \Gamma$ по множеству $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ определяется как объединение сечений S(u) по всем $u \in \widetilde{\Omega}$,

$$S(\widetilde{\Omega}) = \bigcup S(u)$$

С помощью этого определения можно ввести понятие операции композиции абстрактных систем. Композиция $S_1 * S_2$ абстрактных систем $S_1, S_2 \in \Theta$

$$(S_1 * S_2)(u) = S_1 S_2(u). \tag{2}$$

Композиция систем S_1 и S_2 описывает их последовательное соединение, задаваемое структурной схемой на рис.3.

Рис.3

Операция композиции обладает свойством ассоциативности:

$$S_1 * (S_2 * S_3) = (S_1 * S_2) * S_3,\ S_1, S_2, S_3 \in \Theta$$

В самом деле, из определения (3) вытекает, что

$$(S_1 * (S_2 * S_3))(u) = S_1((S_2 * S_3)(u)) = S_1(S_2(S_3(u))),$$
$$((S_1 * S2) * S_3)(u) = (S_1 * S_2)(S_3(u)) = S_1(S_2(S_3(u))).$$

Однако в общем случае операция композиции некоммутативна, $S_1 * S_2$ не равно $S_2 * S_1$, т.е. изменение порядка включения систем на структурной схеме на рис.3 меняет в общем случае описание "вход-выход"последовательного соединения. Введём *единичную* систему I формулой

$$I = [(u, u)|u \in \Omega] \tag{3}$$

Единичная система, очевидно, коммутативна с любой другой системой:$I * S = S * I = S \quad \forall S \in \Theta$

Конверсную, или *симметричную*, систему S^c к системе S введём формулой

$$S^c = (y,u)|(u,y) \in S \tag{4}$$

У конверсной системы S^c по сравнению с исходной системой S вход и выход поменялись местами (рис.4). Очевидно, что для единичной системы $I^c = I$.

Рис.4

Можно показать, что

$$(S_1 * S_2)^c = S_2^c * S_1^c \tag{5}$$

Рассмотрим две элементарные системы, графически изображённые на рис. а)-б) и называемые, соответственно, сумматором и устройством сравнения.

Их уравнения таковы: а)$y = u_1 + u_2$; б)$y = u_1 - u_2$

Определение 5. *Алгебраической суммой* (соответственно,*разностью*) подмножеств $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$ называется множество $\Omega_1+\Omega_2(\Omega_1-\Omega_2)$, определяемое как

$$\Omega_1 + \Omega_2 = u_1 + u_2 | u_1 \in \Omega_1, u_2 \in \Omega_2,$$

$$\Omega_1 - \Omega_2 = u_1 - u_2 \mid u_1 \in \Omega_1, u_2 \in \Omega_2$$

Параллельному соединению систем $S_1, S_2 \in \Theta$ на рис. 5. соответствует их сумма $S_1 + S_2$, задаваемая формулой

$$(S_1 + S_2)(u) = S_1(u) + S_2(u). \qquad (6)$$

Рис. 5

Операция суммирования обладет свойством ассоциативности:

$$S_1 + (S_2 + S_3) = (S_1 + S_2) + S_3,$$

которое доказывается по аналогии с доказательством свойства ассоциативности для операции композиции, а также очевидным свойством коммутативности

$$S_1 + S_2 = S_2 + S_1.$$

Операция суммирования дистрибутивна слева относительно операции композиции

$$(S_1 + S_2) * S_3 = (S_1 * S_3) + (S_2 * S_3),$$

что вытекает из

$((S_1 + S_2) * S_3)(u) = (S_1 + S_2)(S_3(u)) = S_1(S_3(u)) + S_2(S_3(u)) = (S_1 * S_3)(u) + (S_2 * S_3)(u)$.

Левое дистрибутивное свойство операции суммирования проиллюстрировано на рис.6. Абстрактные системы на рис.6 а) и рис.6 б) имеют одинаковые описания "вход-выход".

Рис.6

Дистрибутивность справа для операции суммирования относительно операции композиции в общем случае не имеет места, т.е.

$$S_1 * (S_2 + S_3) \neq S_1 * S_2 + S_1 * S_3.$$

Используя введённые операции, получим математическое описание для системы с отрицательной обратной связью, структурная схема которой приведена на рис.7, в прямой цепи которой находится система 5.

Согласно схеме, содержащей устройство сравнения, для сигнала e, называемого сигналом ошибки, рассогласования, имеем

$$e = u - y.$$

Т.е. $u = e + y$. Учитывая, что $e = I(e)$ и $y = S(e)$ и используя формулу (6) для суммы систем, получаем, что

$$u = I(e) + S(e)) = (I + s)(e).$$

Рис.7

Отсюда, пользуясь операцией конверсии, находим

$$e = (I + S)^c(u).$$

Таким образом, система с обратной связью на рис.7 описывается относительно сигнала ошибки е бинарным отношением S_e:

$$S_e = (I + S)^c. \tag{7}$$

определяющемуся через операцию конверсии. С учётом связи $y = S(e)$ найдём описание рассматриваемой системы с обратной связью S_y относительно выходного сигнала у, задаваемое через операцию композиции

$$S_y = S * (I + S)^c. \tag{8}$$

Рассмотрим важный класс абстрактных временных систем, называемых стационарными, или инвариантными во времени.

Пусть множество моментов времени $T = \mathbb{R}$. Бинарное отношение сдвига $\nabla_\sigma, \quad \sigma \in R$ определим правилом

$$\nabla_\sigma(u(t)) = u(t + \sigma). \tag{9}$$

Если $\sigma = 0$, то уравнение (9) задаёт единичную систему I. Если $\sigma < 0$, то это уравнение задает звено запаздывания, т.е. систему, у которой выходной сигнал повторяет входной с запаздыванием σ.

Из определения (9) вытекает следующее свойство отношений сдвига $\nabla_{\sigma_1}, \nabla_{\sigma_2}, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$:

$$\nabla_{\sigma_1} * \nabla_{\sigma_2} = \nabla_{\sigma_2} * \nabla_{\sigma_1} = \nabla_{(\sigma_1 + \sigma_2)}.$$

Откуда следует, что

$$\nabla_\sigma * \nabla_{-\sigma} = I.$$

и, следовательно, $\nabla_\sigma^c = \nabla_{-\sigma}$. С учётом того, что сумма $u_1+u_2, u_1, u_2 \in \Omega$ и произведение $ku, k \in \mathbb{R}, u \in \Omega$ определяется формулами

$$(u_1 + u_2)(t) = u_1(t) + u_2(t),$$
$$(ku)(t) = ku(t).$$

из определения (9) получаем свойство линейности отношения сдвига ∇_σ:

$$\nabla_\sigma(ku(t)) = k\nabla_\sigma(u(t)), \tag{10}$$
$$\nabla_\sigma((u_1(t)) + u_2(t)) = \nabla_\sigma(u_1(t)) + \nabla_\sigma(u_2(t))$$

Используя понятие отношения сдвига, сформулируем следующее определение:

Система $\sum =< \mathbb{R}, U, Y, \Omega, \Gamma, S >$ называется *стационарной (инвариантной во времени)*, если $\forall\sigma \in \mathbb{R}$

$$\nabla_\sigma * S = S * \bigtriangledown_\sigma \tag{11}$$

Если $\exists\sigma \in \mathbb{R}$, для которого условие коммутативности нарушается, то система Σ называется *нестационарной.*

Очевидно, что единичная система I и звено запаздывания являются стационарными системами.

Покажем, что множество стационарных систем замкнуто относительно всех введённых операций с системами.

С учётом свойства ассоциативности композиции, докажем стационарность композиции стационарных систем:

$$(S_1 * S_2) * \nabla_\sigma = S_1 * (S_2 * \nabla_\sigma) = S_1 * (\nabla_\sigma * S_2) = (S_1 * \nabla_\sigma) * S_2 = \nabla_\sigma * (S_1 * S_2).$$

Стационарность суммы вытекает из левого свойства дистрибутивности и линейности отношения сдвига

$$(S_1+S_2)*\nabla_\sigma = (S_1*\nabla_\sigma)+(S_2*\nabla_\sigma) = (\nabla_\sigma * S_1)+(\nabla_\sigma * S_2) = \nabla_\sigma(S_1+S_2).$$

Из формулы (5) получаем

$$(\nabla_\sigma * S)^c = S^c * \nabla_{-\sigma},$$
$$(S * \nabla_\sigma)^c = \nabla_{-\sigma} * S,$$

откуда следует, что конверсная система S^c стационарна, если стационарна система S. При этом из формул (7) и (8) вытекает, что система с обратной связью на рис.7 стационарна, если стационарна система S. Утверждение доказано.

Доказанное утверждение означает, что любая система, полученная из стационарных подсистем с помощью введённых операций, т.е. с помощью последовательного и всех других видов соединений, рассмотренных здесь, является стационарной системой.

§2. Линейные системы.

Введем в рассмотрение важный класс математических моделей теории управления — линейный системы. Пусть описание "вход-выход"системы Σ с одним входом и одним выходом задается функцией, оператором $f : \Omega \to \Gamma$.

Функция $f : \Omega \to \Gamma$, где Ω и Γ — линейные векторные пространства, называется линейной, если $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in R$ и $\forall u_1, u_2 \in \Omega$

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) \tag{1}$$

В теории управления линейное свойство формулируется как выполнение следующего принципа суперпозиции

$$f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_n f(u_n) \tag{2}$$

для $\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ и $\forall u_1, ..., u_n \in \Omega$.

Если принцип суперпозиции не выполнен, то система называется нелинейной.

Если системы f,g — линейны, то линейной является их сумма и композиция. В случае линейный систем операция суммирования дистрибутивна как слева, так и справа относительно операции композиции:

$$(g + h) * f = g * f + h * f,$$
$$f * (g + h) = f * g + f * h.$$

Дистрибутивность слева иллюстрируется на рис.1.

Рис.1

Системы на рис.1 а)и б) имеют одинаковые описания "вход-выход". Операция конверсии f^cв случае линейных систем заменяется на операцию обращения - инверсию: f^{-1} , если обратный оператор f^{-1} существует. В этом случае сстема называется обратимой. Для обратимых систем выполняется очевидное равенство

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = I$$

Таким образом, любая система полученная из линейных систем при помощи операций суммирования, композиции и обращения, также является линейной системой. Множество линейных систем замкнуто относительно всех введенных операций с системами.

Для вывода общей формулы для представления линейных систем воспользуемся свойством суперпозиции (2) и следующей общей формулой для линейных, функции, действующей из $R^n \to R$ (линейного функционала).

$$y = \sum_{j=1}^{n} h_j u_j, \tag{3}$$

где $u_1, ..., u_n \in R^n$ и $h_j, j = 1, ..., n$ — некоторые числа.

Запишем связь "вход-выход"для линейных систем так

$$y(t) = f[t_1, t_0, u(\tau), t_0 \leq \tau \leq t]. \tag{4}$$

Формула (4) показывает, что выходной сигнал объекта управления зависит: от текущего t и начального момента времени t_0; от входного сигнала u, который действовал на промежутке времени от t_0 до t. Пусть входной сигнал и является непрерывной функцией времени на интервале $[t_0, T]$.

Введем на этом интервале дискретизации с шагом $\triangle = \frac{T-t_0}{N}$, где N - число точек дискретизации. Заменяем входной сигнал на интервале $[t_0, T]$ его кусочно - постоянный аппроксимацией как показано на рис.2.

Рис.3

Тогда, в дискретные моменты времени $i = 1, 2, ..., N$ значения выходного сигнала могут быть приближенно найдены по формуле:

$$y(t_0 + i\triangle) \cong f[t_0 + i\triangle, t_0, u(t_0), u(t_0 + \triangle), ..., u(t_0 + (i-1)\triangle)] \qquad (5)$$

Функция в правой части формулы (5) является, в предположении линейности t, линейным функционалом, действующим из $\mathbb{R}^i \to R$. Поэтому, используя принцип суперпозиции и формулу (3), формулу (5) можно записать так

$$y(t_0 + i\triangle) \cong \sum_{j=0}^{i-1} h(t_0 + i\triangle, t_0 + j\triangle) u(t_0 + j\triangle), \qquad (6)$$

где $h(t_0 + i\triangle, t_0 + j\triangle)$ — некоторые координаты.

При $\triangle \to 0$, заменив конечную сумму на интеграл из (6), получаем следующую основную формулу теории линейных систем

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t, \tau) u(\tau) d\,\tau \qquad (7)$$

Функция $h(t, \tau)$, задающая интегральный оператор (7), называется его ядром или весовой функцией. Оператор (7) определяет в общем случае нестационарную линейную систему. При выводе формулы (7) предполагалось, что реакция объекта управления в любой момент времени не зависит от будущих значений входного сигнала — условие причинности. Поэтому весовая функция удовлетворяет условию причинности в такой форме $h(t, \tau) = 0$ при $\tau > t$.Типичный вид весовой функции линейной нестационарной системы приведен на рис.3 - для случая $h(t, \tau) = e^{(\frac{-t^2-\tau^2}{2})}$

Рис.3

С учетом условия причинности и в предположении, что входной сигнал $u(x) = 0$ при $t < t_0$, оператор (7) в теории управления обычно записывают в такой обобщенной форме

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) u(\tau) d\tau \tag{8}$$

Запишем в такой форме единичную систему I и звено запаздывания -

две стационарные системы. Введем в рассмотрение обобщенную функцию - δ - функцию Дирака, определяемую формулой

$$\sigma(t) = \begin{cases} \infty, t = 0, \\ 0, t \neq 0. \end{cases} . \tag{8}$$

При этом для любой непрерывной функции $u(t)$ справедливо, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)u(\tau)d\tau = u(0) \tag{9}$$

Аналогично, смещенная σ -функция определяется формулой

$$\sigma(t-6) = \begin{cases} \infty & t = 6, \\ 0 & t \neq 6. \end{cases} . \tag{10}$$

и для непрерывной функции $u(t)$справедливо, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau - 6)u(\tau)d\tau = u(\sigma) \tag{11}$$

С учётом формулы (9) единичную систему I в форме интегрального оператора (8) можно записать, взяв в качестве ядра σ-функцию.

$$I(u(t)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau)u(\tau)d\,\tau \tag{12}$$

Звено запаздывания записывается в форме интегрального оператора (8), если в качестве ядра взять смещенную σ-функцию с учетом формулы (11)

$$\nabla_\sigma(u(t)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau-\sigma)u(\tau)d\,\tau \tag{13}$$

В предположении, что ядро $h(t,\tau)$ в (8) является регулярной функцией, т.е. не содержит обобщенных функций,а входной сигнал задается σ- функцией, получим из (1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\sigma(t-\sigma)d\tau = h(t,\sigma) \tag{14}$$

Таким образом, ядро линейной системы $h(t,G)$ имеет физический смысл отклика на импульсное воздействие поступившее в момент времени и в теории управления носит название *импульсной переходной функции.* Если импульсная переходная функция найдена, то реакцию системы на заданное воздействие можно найти по формуле (7) — аналитически, либо численным методом с использованием квадратурной формулы. Рассмотрим преобразования импульсных переходных функций при преобразованиях структурных схем. При параллельном соединении в соответствии со структурной схемой на рис.4 имеем:

Рис.4

$$y(t) = \int k(t,\,\tau)u(\tau)d\tau + \int h(t,\,\tau)u(\tau)d\tau = \int g(t,\,\tau)u(\tau)d\tau \tag{15}$$

$$g(t,\tau) = k(t,\tau) + h(t,\tau)$$

т.е. импульсные переходные функции складываются.

При последовательном соединении в соответствии со структурной схемой на рис.5 имеем:

Рис.5

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)z(\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau) \int\limits_{\infty}^{\infty} k(\tau,\theta)u(\theta)d\theta d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t,\theta)u(\theta)d\theta,$$

откуда

$$g(t,\theta) = \int\limits_{\infty}^{\infty} h(t,\tau)k(\tau,\theta)d\tau, \qquad (16)$$

С учетом условия причинности формула (16) записывается так

$$g(t,\theta) = \int\limits_{\theta}^{t} h(t,\tau)k(\tau,\theta)d\tau, \qquad (17)$$

откуда следует, что если поменять местами $h(t,\tau)$ и $k(\tau,\theta)$, то в общем случае, описание "вход - выход задаваемое весовой функцией $g(t,\theta)$ изменится. Операция суперпозиции линейных систем не коммутативна в общем случае. Рассмотрим систему с обратной связью на рис.6.

Рис.6

Последовательное соединение линейных систем в прямой цепи описывается линейный интегральным оператором с ядром, задаваемым формулой (16). С учетом того, что $e(t) = r(t) - y(t)$ можно записать

$$e(t) = r(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t, \theta) e(\theta) d\theta \tag{18}$$

Это — интегральное уравнение относительно неизвестного $e(t)$. Его можно решить методом последовательных приближений по схеме

$$e_i(t) = r(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t, \theta) e_{i-1}(\theta) d\theta \tag{19}$$

при $i = 1, 2, \ldots$. Выбирая $e_0(\theta) = r(\theta)$, получаем

$$e_1(t) = r(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t, \theta) r(\theta) d\theta$$

Далее, находим по схеме (20)

$$e_2(t) = r(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t, \theta) e_1(\theta) d\theta = r(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_1(t, \theta) r(\theta) d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_2(t, \theta) r(\theta) d\theta,$$

где обозначено

$$g_1(t,\theta) = g(t,\theta)$$

$$g_2(t,\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t,\sigma)g_1(\sigma,\theta)d\sigma$$

Введем дальнейшее обозначение для $i = 3, 4, \ldots$

$$g_i(t,\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t,\sigma)g_{i-1}(\sigma,\theta)d\sigma$$

Теперь решение задачи об обратной связи можно записать в виде следующего ряда:

$$e(t) = r(t) + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_i(t,\theta)r(\theta)d\theta \tag{20}$$

Вводя обозначение $\Gamma(t,\theta) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^i g_i(t,\theta)$, окончательно находим

$$e(t) = r(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t,\theta)r(\theta)d\theta \tag{21}$$

Ядро $\Gamma(t,\theta)$ называется резольвентным ядром или резольвентой. Если использовать формулу (12) для единичной системы и обозначить $\omega(t,\theta) = \sigma(t-\theta) + \Gamma(t,\theta)$, то окончательно получим решение задачи об обратной связи в виде линейного интегрального оператора

$$e(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(t,\theta)r(\theta)d\theta \tag{24}$$

Таким образом, соединение с обратной связью как и параллельное и последовательное, принципиально, может быть представлено в виде линейного интегрального оператора (8). Следует отметить, что в конкретных задачах применение полученных формул и само отыскание импульсной переходной функции обычно вызывает сложности.

§3. Линейные стационарные системы. Задача идентификации.

Линейные стационарные системы являются основным видом моделей, изучаемых в теории управления. Этот вид моделей имеет наибольшее значение в приложениях.

Если внешнее описание системы задается функцией, оператором $f : \Omega \to \Gamma$, то линейность означает выполнение принципа суперпозиции

$$f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n) \tag{1}$$

для $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ и $\forall u_1, \ldots, u_n \in \Omega$. Стационарность означает, что для оператора (отношения) сдвига $\nabla_\sigma, \sigma \in \mathbb{R}$, задаваемого правилом

$$\nabla_\sigma(u(t)) = u(t + \sigma), \tag{2}$$

выполняется условие

$$f(\nabla_\sigma u) = \nabla_\sigma y. \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что для стационарных систем сдвиг во времени входного сигнала приводит к такому же сдвигу во времени выходного сигнала. Рассмотрим общий вид линейного интегрального оператора

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} n(t,\tau) u(\tau) d\tau \tag{4}$$

где для причинной системы $n(t,\tau) = 0$ для $\tau > t$.

Для того, чтобы линейная система (4) была стационарной, необходимо и достаточно, чтобы ядро интегрального оператора зависело только от разности $t - \tau$, но не от t и τ по отдельности.

Таким образом, стационарная линейная система описывается следующим интегральным оператором:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{5}$$

Докажем достаточность. Сделаем замену переменных $t-\tau = \xi$ и преобразуем формулу (5) к виду

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)u(t-\xi)d\xi$$

Заменим теперь $u(t)$ на $u(t+\sigma)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)u(t+\sigma-\xi)d\xi = y(t+\sigma), \tag{6}$$

что и требовалось доказать.

Уравнение (5) описывает, тем самым, линейный стационарный оператор $f : \Omega \to \Gamma$, а импульсная переходная функция $h(t)$ является функцией одного переменного. Условие причинности для этого оператора имеет вид $h(\xi) = 0$ для $\xi < 0$. Типичный вид импульсных переходных функций линейных стационарных систем приведен на рис.1-а),б),в).

Формула (5) с учетом условия причинности может быть записана так

$$y(t) = \int\limits_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{7}$$

Нижний предел для случая стационарных систем можно выбрать равным нулю. Реакция стационарной системы в любой текущий момент времени t на сигнал поступивший в момент времени t_0 зависит только от разности $t - t_0$, а не от t и t_0 по — отдельности.

При использовании в качестве входного сигнала σ-функции с учетом формулы (9) предыдущего параграфа получим:

$$\int\limits_0^t h(\xi)\sigma(t-\xi)d\xi = h(t), \;\; t \geq 0 \tag{8}$$

Таким образом, импульсная переходная функция находится за один эксперимент с импульсным воздействием. Это - принципиальное решение задачи идентификации, т.е. построения математической модели по результатам эксперимента с физическим объектом. Однако такое решение практически требует реализацию импульсного воздействия с бесконечно большой амплитудой. Поэтому в приложениях для идентификации импульсной переходной функции используется единичное ступенчатое воздействие, задаваемое формулой

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{9}$$

При таком входном сигнале

$$y(t) = \int\limits_0^t h(\xi)1(t-\xi)d\xi = \int\limits_0^t h(\xi)d\xi \tag{10}$$

и импульсную переходную функцию можно найти с использованием формулы

$$h(t) = \frac{dy(t)}{dt} \tag{11}$$

Для произвольного непрерывного входного сигнала задачу идентификации можно решать численно, решая уравнение

$$y(t) = \int\limits_0^t h(\xi)u(t-\xi)d\xi, \quad t \in [0,T] \tag{12}$$

Введем шаг дискретизации $\Delta = \frac{T}{N}$, где N -число точек разбиения. Использование формул прямоугольников - правых, левых и средних дает следующие дискретные уравнения

$$y[i\Delta] = \Delta \sum_{j=1}^{i} \widetilde{h}[j\Delta]u[(i-j)\Delta], \tag{13}$$

$$y[i\Delta] = \Delta \sum_{j=0}^{i-1} \widetilde{h}[j\Delta]u[(i-j)\Delta], \tag{14}$$

$$y[i\Delta] = \Delta \sum_{j=1}^{i} \widetilde{h}[(j-\frac{1}{2})\Delta]u[(i-j+\frac{1}{2})\Delta]. \tag{15}$$

Теперь задача о нахождении решения $h(t)$ уравнения (12) заменена задачей о нахождении решения $\widetilde{h}$ одной из систем линейных алгебраических уравнений (13)-(15). Эти уравнения можно записать в векторно - матричной форме:

$$\Delta AH = Y \tag{16}$$

Для средних прямоугольников

$$Y^T = (y[\Delta], y[2\Delta], \ldots, y[N\Delta]),$$
$$H^T = (\widehat{h}[\frac{\Delta}{2}], \widehat{h}[3\frac{\Delta}{2}], \ldots, \widehat{h}[(N-\frac{1}{2})\Delta]),$$

$$A = \begin{pmatrix} u[\frac{\Delta}{2}] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u[3\frac{\Delta}{2}] & u[\frac{\Delta}{2}] & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u[(N-\frac{1}{2})\Delta] & u[(N-\frac{3}{2})\Delta] & u[(N-\frac{5}{2})\Delta] & \dots & u[\frac{\Delta}{2}] \end{pmatrix} \qquad (17)$$

Матрица А является нижней треугольной и её определитель $detA = u^N[\frac{\Delta}{2}]$ отличен от нуля, если $u[\frac{\Delta}{2}] \neq 0$. При этом условии решение уравнения (16) существует и единственно. Если $u(t)$ - единичная ступенчатая функция, то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad (18)$$

Решение полученной системы с нижней треугольной матрицей может быть найдено с помощью следующей программы в Mathcad

Пусть $y(t) = 1-e^{-t}$ и решение ищется на интервале времени $[0, 1]$ с шагом $\Delta = 0.26$. Предположим, что входным сигналом является единичное ступенчатое воздействие. Тогда из (18) следует, что в программе (19) нужно положить все A_{ii} и $A_{ij} = 1$.

Программа теперь выглядит так

Результаты в виде таблиц и графика приведены ниже. Здесь же приведен график решения полученного применением формулы (11), которая в данном случае дает $h(t) = e^{-t}$. Решение h, полученное с помощью квадратурных формул, будет отличаться от решения h интегрального уравнения (12). В этой связи используется следующее определение.

Решение h системы линейных алгебраических уравнений (16) называется *каркасом приближенных решений* интегрального уравнения (12). Используя формулу средних прямоугольников, введём в рассмотрение функцию

$$\varepsilon[(i-\frac{1}{2})\Delta] = h[(i-\frac{1}{2})\Delta] - \widetilde{h}[(i-\frac{1}{2})\Delta] \tag{21}$$

где $h[(i-\frac{1}{2})\Delta]$ —значения решения интегрального уравнения в узлах квадратуры и $h[(i-\frac{1}{2}\Delta)]$ — соответствующие значения каркаса приближённых решений.

Метод решения интегрального уравнения (12), основанный на формуле средних прямоугольников, называется сходящимся, если при $i \to +\infty$, $\Delta \to 0$.

$$max|\varepsilon[(i-\frac{1}{2})\Delta]| = 0. \qquad (22)$$

Можно показать, что метод является сходящимся со скоростью порядка Δ^2, т.е.

$$max|\varepsilon[(i-\frac{1}{2})\Delta]| = O(\Delta^2). \qquad (22)$$

При использовании аналогичных определений, можно показать, что для формул левых и правых прямоугольников каркасы приближенных решений сходятся со скорость порядка Δ.

Не смотря на их простоту, формулы прямоугольников являются оптимальными квадратурными формулами для решения интегрального уравнения (12) - примечание более точных формул может привести к расходящимся результатам. Рассмотренный метод решения задачи идентификации практически работоспособен при малых уровнях возмущений исходных данных. Значительно менее чувствителен к уровню помех другой метод идентификации, основанный на применении метода наименьших квадратов.

Пусть измерения входного и выходного сигнала системы производятся дискретно с шагом Δ, т.е. на отрезке [0;T] введена равномерная сетка узлов $t_i = \Delta i, i = \overline{1,N}, \Delta = \frac{T}{N}$. Модель идентифицируемой системы будем искать с использованием формулы правых прямоугольников в предположении, что она обладает конечной памятью длины p в том смысле, что $\widetilde{h}[j\Delta] = 0$ при $j > p$. Таким образом, для модели имеем

$$\widetilde{Y}[i\Delta] = \Delta \sum_{j=1}^{i} \widetilde{h}[j\Delta]u[(i-j)\Delta], \quad i = \overline{1,N} \qquad (24)$$

Запишем уравнение модели в векторно-матричной форме:

$$\widetilde{Y} = \Delta \widetilde{A} \widetilde{H} \tag{25}$$

где обозначено

$$\widetilde{Y}^T = (\widetilde{y}[\Delta], \widetilde{y}[2\Delta], \ldots, \widetilde{y}[N\Delta])$$
$$\widetilde{H}^T = (\widetilde{h}[\Delta], \widetilde{h}[2\Delta], \ldots, \widetilde{h}[p\Delta], 0, \ldots, 0),$$

$$A = \begin{pmatrix} u[0] & 0 & \ldots & 0 \\ u[\Delta] & u[0] & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ u[(p-1)\Delta] & u[(p-2))\Delta] & \ldots & u[\frac{\Delta}{2}] \\ u[p\Delta] & u[(p-1))\Delta] & \ldots & u[\Delta] \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ u[(N-1)\Delta] & u[(N-2)\Delta] & \ldots & u[(N-p)\Delta] \end{pmatrix}$$

Используя метод наименьших квадратов, решение $\widetilde{H}$ будем искать путём минимизации квадратичного функционала

$$Q = (Y - \widetilde{Y})^T (Y - \widetilde{Y}) = (Y - \Delta \widetilde{A} \widetilde{H})^T (Y - \Delta \widetilde{A} \widetilde{H}) \tag{25}$$

Дифференциируя по компонентам вектора $\widetilde{H}$ и используя необходимое условие минимума, получаем следующую нормальную систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей размерности p:

$$\Delta \widetilde{A}^T \widetilde{A} \widetilde{H} = \widetilde{A}^T Y. \tag{26}$$

Матрица $\widetilde{A}^T \widetilde{A}$ — симметрично и неотрицательно определённая. Если ранг матрицы $\widetilde{A}$ равен p (для этого достаточно, чтобы $u[0] \neq 0$), то матрица $\widetilde{A}^T\widetilde{A}$ положительно определена и уравнение(26) имеет единственное решение, задаваемое формулой:

$$\widetilde{H} = \frac{1}{\Delta}(\widetilde{A}^T\widetilde{A})^{-1}\widetilde{A}^T Y, \tag{27}$$

которое и представляет собой решение задачи идентификации в рассматриваемом случае. Решение можно также получить не находя обратной матрицы, а решая систему уравнений (26), например, методом Гаусса. В системе Mathcad это требует выполнения трех команд:

$P := augment(\Delta\widetilde{A}^T\widetilde{A}\widetilde{H}, \widetilde{A}^T Y)$;

$R := rref(P)$ и $\widetilde{H} := R^{<>}$.

Рассмотрим решение предыдущей задачи с помощью МНК.

Поскольку эта система задана при помощи положительно определённой симметричной матрицы, то оптимальным методом её решения является метод квадратного корня - схема Холецкого. Для этого используется встроенная команда $L := cholesky(A)$ дающее представление матрицы A в форме $A = L \cdot L^T$, где L — нижняя, а L^T — верхняя треугольная матрицы. Уравнения $Ax = b$ записывается в форме $L \cdot L^T x = b$, откуда получаем две системы с треугольными матрицами $L^T x = y$, $Ly = b$.

Метод Холецкого в два раза быстрее метода Гаусса, что важно при больших размерностях.

Метод Холецкого.

1. Разложение Холецкого $L \cdot L^T = A$.

$L := cholesky(A)$

Проверка:

2. Решение СЛАУ с верхней треугольной матрицей.

Проверка:

3. Решение СЛАУ с нижней треугольной матрицей

Проверка:

Глава 3.Метод пространства состояний.

§1.Описания систем «вход–начальное состояние–выход» .

Центральным понятием теории линейных стационарных систем управления является понятие передаточной функции.При этом использование аппарата передаточных функций означает применение теории преобразований Лапласа и Фурье, т.е. переход к функциям комплексного переменного. Такой переход позволяет заменить исходное дифференциальное уравнение на алгебраическое, что существенно упрощает процесс решения задачи.

Альтернативой к этой классической теории управления, основанной на аппарате передаточных функций, является метод пространства состояний. Центральным понятием здесь является понятие динамической системы. В качестве моделей динамических систем используются дифференциальные уравнения и основным применяемым математическим аппаратом является аппарат теории матриц.

Различие между двумя подходами в теории управления, классическим и методом пространства состояний — это различие между двумя способами описания систем.

При классическом подходе система задается описанием «вход-выход», характеризующим только связь между воздействиями на систему и её реакциями. В методе пространства состояний помимо информации о связях «вход-выход», реализуемых системой, используется также информация о динамике изменения её внутренних состояний под действием входных сигналов. Описание системы в этом случае задается уравнениями динамической системы в пространстве состояний.

Переход от описаний типа «вход-выход» к описаниям в пространстве состояний можно трактовать как этап формализации знаний о внутренних законах, определяющих поведение системы.

Рассмотрим этот переход, предполагая, что дана абстрактная система Σ, заданная описанием «вход-выход», т.е. «шестеркой»

$$\Sigma = \langle \mathrm{T}, \mathrm{U}, \mathrm{Y}, \Omega, \Gamma, \mathrm{S} \rangle \, .$$

Пусть T=$\mathbb{R}$, т.е. рассматривается система с непрерывным временем. Отношение сечения P_σ, $\sigma \in \mathbb{R}$ введем как бинарное отношение, сопоставляющее функции U, определённой для $t \in \mathbb{R}$ её ограничение $U_{(-\infty,\sigma)}$, определённое для $t \in (-\infty, \sigma]$.

Абстрактная система Σ называется неупреждающей, если $\forall \sigma \in \mathbb{R}$

$$P_\sigma * S = P_\sigma * S * P_\sigma.$$

Реакция неупреждающей системы в любой момент времени не зависит от будущих значений входного сигнала.

Оператор

$$y\left(t\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h\left(t - \tau\right) u\left(\tau\right) d\tau \tag{1.1}$$

задает неупреждающую систему, если его ядро удовлетворяет условиям причинности $h\left(t - \tau\right) = 0 \quad \forall\; \tau > t$.

Неупреждающая система реализует связь между воздействиями и реакциями, существующую в физическом мире: реакция системы не может предшествовать воздействию на неё.

С использованием преобразования Фурье интегральной модели во временной области можно сопоставить алгебраическую модель в частотной области

$$Y\left(j\omega\right) = H\left(j\omega\right) U(j\omega) \tag{1.2}$$

Для дробно-рациональной передаточной функции

$$H\left(j\omega\right)=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m}b_i\left(j\omega\right)^i}{\sum\limits_{i=0}^{n}a_i(j\omega)^i}\quad,\quad m<n \tag{1.3}$$

уравнение системы во временной области может быть также записано в форме линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^{n}a_iy^{(i)}\left(t\right)=\sum_{i=0}^{m}b_iu^{(i)}\left(t\right). \tag{1.4}$$

Рассмотренные три типа моделей задают описания типа «вход – выход» во временной и частотной областях и являются основными видами моделей классической теории управления.

Однако использование в определении абстрактной системы бинарного отношения $S\subset\Omega{*}\Gamma$ не предполагает в общем случае однозначной, функциональной связи между элементами множеств входных и выходным сигналов Ω и Γ. Это обстоятельство означает, что в условиях одного и того же эксперимента «черный ящик» может, вообще говоря, по-разному реагировать на один и тот же входной сигнал. В частности, реакция абстрактной системы, внешнее описание которой задаётся дифференциальным уравнением (1.4), на сигнал, поступающий начиная с нулевого момента времени, зависит от начальных условий в этот момент времени. Следовательно однозначная связь воздействий и реакций для этой системы не имеет места и она не эквивалентна в общем случае моделям (1.2) и (1.3).

Будем трактовать это свойство модели (1.4) как то, что к моменту начала эксперимента «чёрный ящик» может находиться в разных начальных состояниях, что соответствует заданию разных начальных условий для дифференциального уравнения. Введем следующее определение.

Пусть дана неупреждающая абстрактная временная система $\Sigma = \langle \mathrm{T}, \mathrm{U}, \mathrm{Y}, \Omega, \Gamma, \mathrm{S} \rangle$, причем множество моментов времени T имеет конечный наименьший элемент t_0. Пусть далее существует непустое множество X^{t_0}, называемое множеством начальных состояний, элементами которого являются начальные состояния $x(t_0)$ в момент времени t_0, а также функция
$f:\ X^{t_0} \times \Omega \to \Gamma$, т.е. однопараметрическое семейство операторов
$y = f(x\left(t_0\right), u)$, удовлетворяющее условиям:

1. *согласованности*, т.е. $\forall u \in \Omega$

$$Uf\left(x\left(t_0\right), u\right) = S(u); x\left(t_0\right) \in x^{t_0};$$

2. *неупреждаемости*, т.е. $\forall x\left(t_0\right) \in x^{t_0}, \quad \forall u \in \Omega, \quad \forall \sigma \in T$

$$P_\sigma * f\left(x\left(t_0\right), u\right) = P_\sigma * f\left(x\left(t_0\right), P_\sigma u\right).$$

Тогда абстрактная система $\sum$ называется причинной и задается «семеркой»

$$\Sigma = \left\langle \mathrm{T}, \mathrm{U}, \mathrm{Y}, \Omega, \Gamma, X^{t_0}, f \right\rangle.$$

Семейство операторов $f : x^{t_0} * \Omega \to \Gamma$ называется описанием системы «вход – начальное состояние – выход» и задается тернарным (трехместным) отношением

$$S \subset X^{t_0} \times \Omega \times \Gamma.$$

Параметр начального состояния $x(t_0)$ характеризует всю «предысторию» системы вплоть до момента времени t_0 и позволяет однозначно предсказать реакцию системы на заданное воздействие. При этом вследствие свойства неупреждаемости эта реакция в любой текущий момент времени $t \geq t_0$ не зависит от будущих значений воздействия на систему. Таким образом описание «вход – начальное состояние – выход» сохраняет связь причины и следствия физического мира.

Если абстрактная система Σ имеет в начальный момент времени t_0 множество начальных состояний X^{t_0}, то для каждого момента времени $t > t_0$, если принять его за начальный, существует множество начальных состояний X^t. Будем предполагать, что все эти множества равны и обозначим их через X, т.е. $X = x^t \quad \forall t \in T$.

Нули линейных пространств X, Ω, Γ будем обозначать буквой Θ с соответствующим индексом внизу, т.е. $\Theta_X, \Theta_\Omega, \Theta_\Gamma$. Если функциональная система является неупреждающей, то можно считать, что её множество начальных состояний содержит единственный нулевой элемент Θ_X для заданного t_0, т.е. функциональная неупреждающая система — причинная. Если множество входных сигналов Ω причинной системы Σ содержит единственный нулевой элемент Θ_Ω, то система называется свободной. Свободная система — это такая система, на которую не действует входной сигнал.

Причинная система Σ называется линейной, если одновременно выполнены следующие два условия:

1. Её описание «вход – начальное состояние – выход» обладает свойством аддитивности, т.е. $\forall x\left(t_0\right) \in X, \quad \forall u \in \Omega$

$$f\left(x\left(t_0\right), u\right) = f\left(x\left(t_0\right), \Theta_\Omega\right) + f(\Theta_\mathrm{X}, u)$$

2. Оператор $f\left(x\left(t_0\right), \Theta_\Omega\right)$, задающий свободную систему, линеен по $x\left(t_0\right)$, а оператор $f(\Theta_\mathrm{X}, u)$, задающий функциональную систему, линеен по u.

Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то система называется нелинейной.

Из свойства аддитивности вытекает, что для конкретного представления линейных систем описаниями «вход – начальное состояние – выход» нужно иметь соответствующие описания для свободных и функциональных систем.

Рассмотрим сначала случай свободной системы. Будем предполагать, что $X = \mathbb{R}^n$ и множество выходных сигналов Ω является пространством непрерывных функций C. Тогда описание «состояние – выход» свободной системы будет задаваться функцией $f : \mathbb{R}^n \to C$. При каждом фиксированном значении $t \in T$, эта функция действует из $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, т.е. является функционалом, поскольку из того, что $\Omega = C$ следует, что Y=$\mathbb{R}$. Поэтому здесь можно использовать общую формулу для представления линейных функционалов в конечномерных векторных пространствах и сразу записать требуемое представление

$$f\left(x\left(t_0\right), \Theta_\Omega\right) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\left(t, t_0\right) x_k(t_0). \tag{1.5}$$

Здесь $x_k(t_0)$ – координаты вектора начального состояния в момент времени t_0, а $\gamma_k\left(t, t_0\right)$ – координатные функции. Для стационарного случая они зависят от разности аргументов $t{-}t_0$, причем в этом случае можно положить $t_0 = 0$, т.е. записать (1.5) в следующей форме

$$f\left(x\left(t_0\right), \Theta_\Omega\right) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\left(t\right) x_k(0). \tag{1.6}$$

Если система функций $\{\gamma_k\left(t\right)\}$ линейно независимая, то она называется базисной. Базисная функция $\gamma_k\left(t\right)$ полностью описывает реакцию свободной линейной системы на начальное состояние со всеми нулевыми координатами кроме k-ой. У линейной системы существует бесконечное число базисов, приводимых друг к другу невырожденным линейным преобразованием.

Получим уравнения для базисных функций исходя из однородного дифференциальн уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = 0. \tag{1.7}$$

Будем искать решение этого уравнения при заданных начальных условиях $y^{(n-1)}(0), \ldots, y(0)$, используя для этого преобразование Лапласа.

Согласно теореме о дифференцировании преобразования Лапласа

$$f^{(i)}(t) = s^i F(s) - s^{i-1} f(0) - \cdots - f^{(i-1)}(0).$$

Отсюда для дифференциального уравнения находим

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i Y(s) = \left(a_n s^{n-1} + \cdots + a_1\right) y(0) + \left(a_n s^{n-2} + \cdots + a_2\right) y^{(1)}(0) + \quad (12)$$

$$+ \cdots + (a_n + a_{n-1})\, y^{(n-2)}(0) + a_n y^{(n-1)}(0) \tag{1.8}$$

Обозначив через $L(s) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^i$ – характеристический полином для уравнения (1.7), получим

$$Y(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_n s^{n-k} + \cdots + a_k}{L(s)} y^{(k-1)}(0). \tag{1.9}$$

Из сравнения формул (1.8) и (1.6) и единственности решения дифференциального уравнения вытекает, что в рассматриваемом случае
$x(0) = \left(y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)\right)^T$ и

$$\gamma_k(t) = \frac{a_n s^{n-k} + \cdots + a_k}{L(s)},\ \ k = 1, \ldots, n. \tag{1.10}$$

Для системы, задаваемой дифференциальным уравнением (1.7) начальное состояние и базисный функции можно ввести и иначе. Сгруппировав все слагаемые при одинаковых степенях s, получаем

$$Y(s)=\frac{1}{L(s)}\Big\{S^{n-1}a_ny(0)+S^{n-2}\left(a_ny^{(1)}(0)+a_{n-1}y(0)\right)+\cdots+$$
$$+\left(a_ny^{(n-1)}(0)+\cdots+a_1y(0)\right)\Big\}. \tag{1.11}$$

Отсюда следует, что

$$x(0)=\left(a_ny(0)\,,a_ny^{(1)}(0)+a_{n-1}y(0)\,,\ldots,a_ny^{(n-1)}(0)+\cdots+a_1y(0)\right)^T$$

и новые базисные функции задаются уравнениями

$$\gamma_k(t):=\frac{s^{n-k}}{L(s)},\ k=1,\ldots,n. \tag{1.12}$$

Связь новых координат состояния со старыми, т.е. с начальными условиями на дифференциальное уравнение, задается уравнением

$$\begin{pmatrix} x_1(0)\\ x_2(0)\\ \ldots\\ x_n(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 & \ldots & 0\\ a_{n-1} & a_n & 0 & \ldots & 0\\ . & . & . & . & .\\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(0)\\ y^{(1)}(0)\\ \ldots\\ y^{(n-1)}(0)\end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования координат – нижняя треугольная и является невырожденной при $a_n\neq 0$, т.е. новое начальное состояние однозначно выражается через начальные условия для дифференциального уравнения (1.7). Таким образом, выбирая по-разному координаты начального состояния, можно получить разные координатные функции и разные формулы для описания свободной системы. Выбор конкретной формы определяется удобством исследования.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение, соответствующее однородному дифференциальному уравнению.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = u(t). \tag{1.13}$$

Применяя преобразование Лапласа для нулевых начальных условий, находим решение этого уравнения

$$Y(s) = H(s)\,U(s),$$

где $H(s)$— передаточная функция. Согласно теореме о свёртке это уравнение может быть записано во временной области в виде интеграла

$$y(t) = \int\limits_0^t h(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau,$$

где $h(t-\tau)$ – весовая функция. Это — представление для функциональной системы. Теперь, применяя свойство аддитивности и формулы для представления свободной и функциональной систем, окончательно получаем такое описание «вход – состояние – выход» для системы, задаваемой дифференциальным уравнением (1.13) при произвольных начальных условиях:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(t)\,x_k(0) + \int\limits_0^t h(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau.$$

Это уравнение задаёт и общую формулу для описаний «вход – начальное состояние – выход» для систем, задаваемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t).$$

Пусть однородное дифференциальное уравнение соответствует передаточной функции колебательного звена

$$H(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2Ts + 1}, \tag{1.14}$$

т.е.

$$T^2 y^{(2)}(t) + 2\zeta T y^{(1)}(t) + y(t) = 0. \tag{1.15}$$

Формулы (1.10) для $k = 1, 2$ дают

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &:= \frac{T^2 s + 2\zeta T}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \\ \gamma_2(t) &:= \frac{T^2}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \end{aligned} \tag{1.16}$$

при $x(0) = \left(y(0), y^{(1)}(0)\right)^T$. На Рис. 1.1 приведены графики координатных функций, полученных в Mathcad по формулам (1.16). На Рис. 1.2 приведены графики решений уравнения 1.15, найденных по формуле

$$y(t) := \gamma_1(t)\, y(0) + \gamma_2(t)\, y^{(1)}(0) \tag{1.17}$$

для случаев $x_1(0) = (1, 1)^T$, $x_2(0) = (0, 1)^T$ $x_3(0) = (1, 0)^T$ $T = 1$, $\zeta = 0.25$.

Рис. 1.1. Координатные функции линейной системы.

Рис. 1.2. Переходные процессы в линейной системе.

Рассмотрим для предыдущего примера применение координатных функций, определяемых формулами (1.12), т.е.

$$\gamma_1(t){:=}\frac{s}{T^2s^2+2\zeta Ts+1},$$
$$\gamma_2(t){:=}\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}.$$

Соответствующие графики приведены на Рис. 1.3.

Рис. 1.3. Координатные функции линейной системы.

При $x(0) = \left(T^2 y(0), T^2 y^{(1)}(0) + 2\zeta T y(0)\right)$ и трех случаях начальных условий: 1) $y(0) = 1, y^{(1)}(0) = 1$; 2) $y(0) = 0, y^{(1)}(0) = 1$; 3) $y(0) = 1, y^{(1)}(0) = 0$,

по формуле (1.17) получаем те же самые результаты, как и в предыдущем примере при других координатных функциях.

Рис. 1.4.Переходные процессы в линейной системе.

Численные решения (блок *Given/Odesolve*) для дифференциального уравнения (3.25), полученные в Mathcad для выбранных начальных условий приведены на Рис.3.5. Очевидно, они совпадают с решениями, полученными выше через координатные функции.

Рис. 1.5. Решение дифференциального уравнения.

Рассмотрим колебательное звено при ненулевых начальных условиях $x(0) = (1,1)^T$ и линейно нарастающем воздействии, т.е. при $u(t) = t$. Выберем координатные функции (1.10). С учетом изображения линейно нарастающего воздействия $1/s^2$ получаем следующие формулы для моделирования в Mathcad.

$$\frac{T^2 s + 2\zeta T}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1},\ \frac{T^2}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1},\ \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}\frac{1}{s^2}.$$

Полагая здесь $T = 1, \zeta = 0.5$ получаем решение, показанное на графике.

Рис.1.6.Реакция на линейное нарастающее воздействие.

Аналогично находятся реакции и на другие типовые воздействия при заданных начальных условиях.

§2. Понятие динамической системы. Структурные схемы.

Рассмотрим причинную систему, задаваемую «семеркой»

$$\Sigma = \langle \mathrm{T}, \mathrm{U}, \mathrm{Y}, \Omega, \Gamma, \mathrm{x}^{t_0}, t \rangle$$

Как уже отмечалось в предыдущей главе, существование начального состояния в начальный момент времени t_0 подразумевает, что начальное состояние существует и в любой другой момент времени $t \geq t_0$. Соответствующие множества начальных состояний обозначаются через X^t, причем $\forall t \in T$, $x^t = x$ Множество X называется пространством состояний системы, а параметр $x\left(t\right) \in X$- состоянием системы в момент времени $t \in T$.

Динамические изменения, происходящие внутри чёрного ящика под действием входного сигнала можно трактовать как его переход из одного состояния в другое. Для описания таких переходов вводится переходная функция состояния $\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$, обладающая следующими свойствами:

1. *согласованности*, т.е. $\forall t \in T, \forall x\left(t_0\right) \in X, \forall u \in \Omega$

$$\lim_{t \to t_0+0} \varphi(t,\, t_0, x\left(t_0\right), u_{[t_0,t]}) = x(t_0);$$

2. *неупреждаемости*, т.е. $\forall u, \tilde{u} \in \Omega, \forall x\left(t_0\right) \in X$ и $\forall t \in T$

   из $u_{[t_0,t]} = \tilde{u}_{[t_0,t]} \Longrightarrow \varphi(t, t_0, x\left(t_0\right), u_{[t_0,t]}) = \varphi(t, t_0, x\left(t_0\right), \tilde{u}_{[t_0,t]})$;

3. *композиции*, т.е. $\forall t_1 < t_2 < t_3, \forall x\left(t_1\right) \in X, \forall u \in \Omega$

$$\varphi\left(t_3, t_1, x\left(t_1\right), u_{[t_1,t_3]}\right) = \varphi\left(t_3, t_2, \varphi\left(t_2, t_1, x\left(t_1\right), u_{[t_1,t_2]}\right) u_{[t_2,t_3]}\right).$$

Для описания связи состояния причинной системы и её выходного сигнала в каждый момент времени с учётом действующего значения входного сигнала в тот же самый момент времени вводится выходная функция

$$\eta : T \times X \times U \rightarrow Y.$$

Основное определение динамической системы теперь может быть сформулировано следующим образом.

Динамической системой, определённой в пространстве состояний, называется «восьмёрка»

$$\Sigma = \langle T, U, Y, \Omega, \Gamma, X, \varphi, \eta \rangle \,,$$

где T — множество моментов времени, U и Y — множества значений входных и выходных сигналов, Ω и Γ — множества входных и выходных сигналов, X — пространство состояний, φ — переходная функция и η — выходная функция. В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $U = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^l, X = \mathbb{R}^n, m, l, n.$ — целые положительные числа.

Размерность динамической системы определяется размерностью её пространства состояний X, т.е. $\mathbb{R}^n$. Тройка (X, φ, η) называется динамическим представлением или динамической реализацией системы.

Динамическая система называется обыкновенной дифференциальной, если её переходная функция является единственным решение обыкновенного дифференциального уравнения с заданным начальным условием $x\left(t_0\right) = x_0$. Уравнения обыкновенной дифференциальной системы в пространстве состояний выглядят следующим образом:

$$\dot{x}\left(t\right) = \Phi\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right),$$

$$y\left(t\right) = \eta\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right).$$

Первое уравнение в этой системе задает в неявном виде переходную функцию φ, являющуюся решением этого дифференциального уравнения.

Обыкновенная дифференциальная система называется стационарной, если функции Φ и η не зависят явно от аргумента t не зависят, т.е. если

$$\dot{x}(t) = \Phi(x(t), u(t)),$$
$$y(t) = \eta(x(t), u(t)).$$

Обыкновенная дифференциальная система называется линейной, если её уравнения в пространстве состояний линейны и нелинейны в противном случаем.

Выведем уравнения линейной системы в пространстве состояний. Используя свойство аддитивности линейной системы, получаем:

$$\dot{x}(t) = \Phi(x(t), u(t), t) = \Phi(x(t), \Theta_U, t) + \Phi(\Theta_x, u(t), t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$
$$y(t) = \eta(x(t), u(t), t) = \eta(x(t), \Theta_U, t) + \eta(\Theta_U, u(t), t) = C(t)x(t) + D(t)u(t).$$

здесь $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ — матрицы соответствующих размерностей. Матрица $A(t)$, системная матрица — квадратная и её размерность определяет размерность линейной системы.

Таким образом, уравнения линейной обыкновенной дифференциальной системы в пространстве состояний таковы:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t).$$

Обычно уравнение выхода, выходная функция, не содержит $u(t)$, т.е. уравнения в пространстве состояний имеют вид:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$
$$y(t) = C(t)x(t).$$

В этом случае изменения входного сигнала мгновенно на выход не передаются. Это — инерционные, гладкие системы и они задают основной вид моделей, описывающих процессы, протекающие в реальных объектах. Для случая стационарной системы уравнения в пространстве состояний выглядят следующим образом:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Здесь A, B, C, D — постоянные матрицы.

Для стационарных систем обычно уравнения в пространстве состояний записываются так:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t).$$

Для систем с одним входом и одним выходом, т.е. когда $u(t) \in \mathbb{R}^1, y(t) \in \mathbb{R}^1$ уравнения в пространстве состояний записываются в следующей форме:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),$$
$$y(t) = cx(t) + du(t),$$

где b — вектор-столбец, c — вектор-строка и d — скаляр.

Для случая систем с одним входом и одним выходом при $d = 0$ уравнения имеют следующий вид:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),$$
$$y(t) = cx(t),$$

где c — вектор-строка. Это основной вид уравнений, который будет использоваться в дальнейшем.

Динамические системы могут быть по-разному соединены друг с другом, образуя системы сложной структуры. Три типа соединений линейных систем такие же как и соединения линейных систем, заданных передаточными функциями: параллельное, последовательное и соединение с обратной связью. Уравнения линейной системы с одним входом и одним выходом (2.1) могут быть представлены структурной схемой, приведённой на (Рис. 2.1), где жирной линией обозначаются шинные проводники для векторных сигналов.

Рис. 2.1. Структурная схема динамичной системы.

С учётом этого представления для параллельного соединения двух гладких систем можно использовать следующую структурную схему.

Рис. 2.2. Параллельное соединение динамических систем.

Уравнения для этой структурной схемы записываются так:

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u,\ y_1 = c_1 x_1,$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u,\ y_2 = c_2 x_2,$$

$$y = y_1 + y_2$$

Введём новый вектор состояния $x = (x_1, x_2)^T$, тогда уравнения параллельного соединения систем в пространстве состояний получатся такими:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u,$$

$$y = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь структурную схему последовательного соединения двух линейных систем Рис. 2.3.

Рис. 2.3. Последоватльные соединения динамических систем.

Уравнения в пространстве состояний записываются теперь так:

$$\dot{x_1} = A_1 x_1 + b_1 u_1, \quad y_1 = c_1 x_1, \quad u_1 = y_2,$$

$$\dot{x_2} = A_2 x_2 + b_2 u_2, \quad y_2 = c_2 x_2, \quad u_2 = u,$$

$$y = y_1.$$

После введения нового вектора состояния $x = (x_1, x_2)^T$ получаем такие уравнения:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & b_1 c_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} u, \tag{2.3}$$

$$y = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай соединения динамических систем с обратной связью Рис. 2.4.

Рис. 2.4. Соединения динамических систем с обратной связью.

Из структурной схемы следует, что

$$\dot{x_1} = A_1x_1 + b_1u_1, \quad y_1 = c_1x_1, \quad u_1 = y_2, y = y_1,$$

$$\dot{x_2} = A_2x_2 + b_2u_2, \quad y_2 = c_2x_2, \quad u_2 = u - y_1,$$

$u_1 = c_2x_2$ и $u_2 = u - c_1x_1$. Отсюда для нового вектора состояний $x = (x_1, x_2)^T$ имеем такие уравнения:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & b_1c_2 \\ -b_2c_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} u,$$

$$y = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \qquad (2.4)$$

Рассмотрим случай, когда

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и

$$A_2 = -3, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = 1.$$

Реализация в Mathcad формул (2.2),(2.3) и (2.4) для трех типов соединений этих двух систем дает следующие результаты.

Для параллельного соединения:

Для последовательного соединения:

Для соединения с обратной связью:

Эти результаты легко проверяются непосредственно. Соединения систем второго и первого порядков дает во всех случаях систему третьего порядка — порядки динамических систем суммируются.

Решение линейных уравнений в пространстве состояний осуществляется с помощью встроенной команды $statespace(x0, 0, T, M, A, B, u)$, здесь M— число шагов, остальной синтаксис очевиден. Начальные условия — нулевые, входной сигнал — единичная ступенька.

Графики решений выводятся так, как показано Рис. 2.5 — Рис. 2.10.

Рис. 2.5. Переходные процессы - параллельные соединения.

Рис.2.6. Переходные процессы - последовательные соединения.

Рис. 2.7. Переходные процессы - соединение обратной связью.

Соответствующие графики выходных сигналов — переходные характеристики систем приведены на (Рис.3.14)—(Рис. 3.15).

Рис.2.8. Переходная характеристика - паралллельное соединение.

Рис. 2.9. Переходная характеристика — последовательное соединение.

Рис. 2.10. Переходная характеристика — соединение с обратной связью.

§3. Задача о динамической реализации.

Одной из основных задач метода пространства состояний является задача о построении динамической реализации. Пусть дана некоторая система, заданная своим внешним описанием $\Sigma = \langle \mathrm{T}, \mathrm{U}, \mathrm{Y}, \Omega, \Gamma, \mathrm{S} \rangle$. Требуется найти тройку $\langle x, \varphi, \eta \rangle$ такую, чтобы соответствующая динамическая система $\Sigma = \langle \mathrm{T}, \mathrm{U}, \mathrm{Y}, \Omega, \Gamma, x, \varphi, \eta \rangle$ имела заданное внешнее описание.

Рассмотрим методы решения этой задачи для случая линейной стационарной системы с одним входом и одним выходом:

$$\dot{x}\left(t\right) = Ax\left(t\right) + bu\left(t\right),$$
$$y\left(t\right) = cx\left(t\right). \tag{3.1}$$

Внешнее описание, соответствующее этим уравнениям задаётся некоторой передаточной функцией $H(s)$. Найдём эту передаточную функцию. Применяя преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях к левой и правой части этих уравнений, получаем

$$sX\left(s\right) = AX\left(s\right) + bU\left(s\right),$$

$$X\left(s\right) = [sI - A]^{-1} bU\left(s\right),$$

т.е.

$$Y\left(s\right) = c[sI - A]^{-1} bU\left(s\right).$$

Отсюда следует, что искомая передаточная функция

$$H\left(s\right) = c[sI - A]^{-1} b. \tag{3.2}$$

Для $c := \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ в Mathcad записываем

Для $c := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ получаем

Упрощение полученного выражения осуществляем с помощью команды *factor*, что даёт

и команды *simplify*, что даёт окончательный ответ

Таким образом, если тройка $\langle A,\ b,\ c\rangle$ задана, то по ней передаточная функция находится однозначно. Если же задана передаточная функция и по ней надо найти $\langle A,\ b,\ c\rangle$, то есть решить задачу о построении динамической реализации, то из (3.1) следует, что эта задача может быть решена по-разному при разных тройках $\langle A,\ b,\ c\rangle$.

Будем предполагать, что передаточная функция $H(p)$ не имеет сокращающихся множителей в числителе и знаменателе, т.е. однозначно соответствует дифференциальн уравнению

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots a_0 y(t) =$$
$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 u(t),\ m < n. \qquad (3.3)$$

Основная идея рассматриваемых ниже метода жордановой формы и метода простых множителей решения задачи о динамической реализации заключается в переходе от дифференциального уравнения к системе дифференциальных уравнений первого порядка, для которых задача о построении уравнений в пространстве состояний.

Пусть дана передаточная функция системы первого порядка:

$$H(s) = \frac{b_0}{s + a_0},$$

соответствующая дифференциальному уравнению

$$y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t).$$

Выбирая в качестве состояний системы $x(t) = y(t)$ записываем это уравнение в следующем виде:

$$\dot{x}(t) = -a_0 x(t) + b_0 u(t),$$
$$y(t) = x(t).$$

Это – уравнения в пространстве состояний для системы первого порядка, где $A = -a_0, b = b_0$ и $c = 1$.

Запишем передаточную функцию, соответствующую дифференциальному уравнению (3.3) порядка n в форме $H(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$, где *M(s)* и *N(s)* – полиномы от s степени m и n соответственно, $m < n$.

Пусть сначала характеристический полином *N(s)* имеет только простые корни, т.е. передаточная функция $H(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$ имеет только простые полюсы $S_1, \dots, S_n$. Запишем $N(s) = (S_1)\dots(s - S_n)$ и представим H(s) в следующей форме

$$H\left(s\right) = \frac{c_1}{s - S_1} + \dots + \frac{c_n}{s - S_n},$$

где c_i – коэффициенты разложения на простые дроби. Эти коэффициенты можно найти по формуле вычетов

$$c_i = \left(s - \lambda_i\right) \left. \frac{M\left(s\right)}{N\left(s\right)} \right|_{s=\lambda_i}.$$

Теперь структурную схему для рассматриваемой системы можно представить так, как показано на Рис.3.1.

Рис. 3.1. Структурная схема для моделирования для простых полюсов.

В качестве координат вектора состояния выбираем значения выходных сигналов систем первого порядка. В комплексной области уравнения для введённых координат состояния записываются так:

$$X_1\left(s\right) = \frac{1}{s - \lambda_1} U\left(s\right),$$

$$\dots$$

$$X_n\left(s\right) = \frac{1}{s - \lambda_n} U\left(s\right).$$

Переходя во временную область, получаем:

$$\dot{X}_1(t) = \lambda_1 x(t) + u(t),$$

$$\dots$$

$$\dot{X}_n(t) = \lambda_n x(t) + u(t)$$

Поэтому для уравнений в пространстве состояний получаем в рассматриваемом случае:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \; c = (c_1, \ldots, c_n)\,. \tag{3.4}$$

Рассмотрим передаточную функцию второго порядка:

$$H\left(s\right) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

Находим в Mathcad корни характеристического полинома: $S_1 = -1$, $S_2 = -3$.

Это даёт матрицу A в следующей форме:

Разложение на простые дроби дает такой результат:

Окончательно, с использованием формулы (3.4) для вектора b, получаем следующую динамическую реализацию:

$$\dot{x}_1\left(t\right) = -x_1\left(t\right) + u\left(t\right)$$

$$\dot{x}_2\left(t\right) = -3x_2\left(t\right) + u\left(t\right)$$

$$y\left(t\right) = 1/2x_1\left(t\right) + 1/2x_2\left(t\right)$$

Находим переходную характеристику системы, задаваемой этими уравнениями с помощью команды *statespace* при $u(t) = \Phi(t)$. Графики координат состояния входного и выходного сигнала приведены на (Рис. 3.2) и (Рис. 3.3).

Рис. 3.2. Координаты состояния.

Рис. 3.3. Выходной сигнал.

Расчет с использованием преобразования Лапласа, т.е. по формулам

$X_1(s) = \frac{1}{s+1}U(s)\ X_2(s) = \frac{1}{s+2}U(s)\ Y(s) = \frac{1}{2}X_1(s) - \frac{1}{2}X_2(s)$

дает такие же результаты, показанные на Рис. 3.4

Рис. 3.4. Координаты состояния и выходной сигнал.

Рассмотрим случай кратных корней характеристического полинома. Без ограничения общности можно считать, что имеется один корень S_1 кратности k, т.е. $N(s) = (s - S_1)^k (s - S_2) \ldots (s - S_n)$. Разложение $H(s)$ на простые дроби даёт:

$$
\begin{aligned}
H(s) = \frac{c_{11}}{(s-\lambda_1)^k} + \frac{c_{12}}{(s-\lambda_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{1k}}{s-\lambda_1} + \\
+ \frac{c_2}{s-\lambda_2} + \frac{c_3}{s-\lambda_3} + \cdots + \frac{c_n}{s-\lambda_n},
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

где коэффициенты разложения можно найти по формулам для вычетов:

$$
\begin{aligned}
c_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left((s-\lambda_1)^k \frac{M(s)}{N(s)} \right)_{s=\lambda_1}, \ j = 1, \ldots, k \\
c_i = (s-\lambda_i) \left. \frac{M(s)}{N(s)} \right|_{s=S_i}, \ i = 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Структурная схема для моделирования приведена на Рис. 3.5.

Рис. 3.5. Структурная схема для одного полюса.

В качестве координат вектора состояния выбираем значения выходных сигналов на выходе систем первого порядка так, как показано на структурной схеме. Уравнения состояния в комплексной области записываются так:

$$X_1(s) = \frac{1}{s-\lambda_1} X_2(s),$$

$$\ldots$$

$$X_k(s) = \frac{1}{s-\lambda_1} U(s),$$

$$X_{k+1}(s) = \frac{1}{s-\lambda_2} U(s),$$

$$\ldots$$

$$X_{n+k-1}(s) = \frac{1}{s-\lambda_n} U(s).$$

Во временной области отсюда получаем:

$$\dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + x_2(t),$$

$$\ldots$$

$$\dot{x}_k(t) = \lambda_1 x_k(t) + u(t),$$

$$\dot{x}_{k+1}(t) = \lambda_2 x_{k+1}(t) + u(t),$$

$$\ldots$$

$$\dot{x}_{n+k-1}(t) = \lambda_n x_{n+k-1}(t) + u(t).$$

Окончательно для уравнений в пространстве состояний находим:

$$c = (c_{11}, \ldots, c_{1k}, c_2, \ldots, c_n)\,.$$

Используем следующие определения. Жордановой клеткой называется верхняя треугольная матрица размерности $k \times k$ следующего вида:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & . & \ddots & \\ & & . & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix},$$

причем $J_1(\lambda) = \lambda$.

Жордановой матрицей называется блочно-диагональная матрица вида:

$$J = \begin{pmatrix} J_{n1}(\lambda) & & & \\ & J_{n2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{nk}(\lambda) \end{pmatrix},$$

где порядки n_i клеток могут совпадать и числа S_i — собственные числа матрицы J — не обязательно различны.

На основании сравнения формул для матрицы A можно сделать вывод, что в рассматриваемом методе матрица A получается в жордановой форме, поэтому данный метод называется методом жордановой формы. Отметим, что при наличии комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения матрица A получается комплексной.

Рассмотрим передаточную функцию

В этом случае $S = 0$ кратности 2 и динамическая реализация в жордановой форме записывается сразу:

что вытекает из структурной схемы на Рис.3.6

Рис. 3.6.

Для передаточной функции

разложение (3.5) имеет вид

$$H\left(s\right) = \frac{c_{11}}{\left(s+1\right)^2} + \frac{c_{12}}{s+1} + \frac{c_2}{s+3}.$$

Формулы (3.6) дают следующие значения коэффициентов:

$$c_{11} = \left.\frac{s+2}{s+3}\right|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

$$c_{12} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{s+2}{s+3}\right)\right|_{s=-1} = \frac{1}{4}$$

$$c_2 = \left.\frac{s+2}{\left(s+1\right)^2}\right|_{s=-3} = -\frac{1}{4}$$

Разложение на простые дроби в Mathcad дает такой же результат

Окончательно, динамическая реализация получается такой:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = (1/2,\ 1/4,\ -1/4).$$

Результаты моделирования с помощью блока *statespace* приведены на (Рис.3.6) и (Рис. 3.7) — для координат системы и выходного сигнала при реакции системы на ступенчатое воздействие.

Рис. 3.7. Координаты состояния.

Рис. 3.8. Переходная характеристика.

Другой метод решения задачи о динамической реализации — *метод простых множителей*. Начнем с рассмотрения случая передаточной функции

$$H(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

Пусть корни характеристического полинома $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — действительные. Записываем передаточную функцию в таком виде:

$$H(s) = \frac{b_0}{(s-\lambda_1)\ldots(s-\lambda_n)}$$

и представляем её последовательным соединением систем первого порядка так, как показано на (Рис. 3.9).

Рис.3.9. Структурная схема для моделирования.

Вводя координаты вектора состояния так, как показано на схеме, получаем:

$$X_1(s) = \frac{1}{s-\lambda_1}U(s),$$
$$X_2(s) = \frac{1}{s-\lambda_2}X_1(s),$$
$$\ldots$$
$$X_n(s) = \frac{1}{s-\lambda_n}X_{n-1}(s),$$
$$Y(s) = b_0 X_n(s).$$

Во временной области это даёт:

$$\dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + u(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t) + x_1(t),$$
$$\ldots$$
$$\dot{x}_n(t) = \lambda_n x_n(t) + x_{n-1}(t),$$
$$y(t) = b_0 x_n(t).$$

Окончательно получаем отсюда следующую динамическую реализацию:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ 1 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, c = (0, \ldots, 0, b_0).$$

Рассмотрим теперь общий случай передаточной функции:

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0},\ m < n$$

и представим её в виде:

$$H(s) = b_m \prod_{i=1}^{m} \frac{s - Z_i}{s - \lambda_i \prod_{i=m+1}^{n} \frac{1}{s-\lambda_i}}$$

Здесь λ_i – полюса (корни полинома N(s)) и Z_i – нули (корни полинома M(s)). Используем формулу выделения целой части дроби:

$$\frac{s - Z_i}{s - \lambda_i} = 1 + \frac{\lambda_i - Z_i}{s - \lambda_i}$$

и построим структурную схему, т.к. показано на Рис.3.10.

Рис.3.10. Структурная схема — общий случай.

Введя координаты вектора состояния так, как показано на схеме, получим следующие уравнения в пространстве состояний:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + (\lambda_1 - z_1)u(t),\\
&\dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t) + (\lambda_2 - z_2)(x_1(t) + u(t)),\\
&\dot{x}_3(t) = \lambda_3 x_3(t) + (\lambda_3 - z_3)(x_1(t) + x_2(t) + u(t)),\\
&\ldots\\
&\dot{x}_n(t) = \lambda_n x_n(t) + x_{n-1}(t),
\end{aligned}$$

Это даёт такой результат:

$$c = \big(0, \ldots, 0, b_m\big).$$

Это — решение задачи о динамической реализации для рассматриваемого случая. Данный метод удобен для применения, когда передаточная функция задана в виде последовательного соединения передаточных функций первого порядка.

Для передаточной функции (3.7) получаем следующую динамическую реализация для $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3, Z_1 = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \big(0\,0\,1\big). \tag{3.8}$$

Это следует непосредственно из структурной схемы на (Рис. 3.11)

Рис. 3.11.

В самом деле:

$$X_1(s) = \frac{\lambda_1 - Z_1}{s - \lambda_1} U(s)$$
$$X_2(s) = \frac{1}{s - \lambda_1}\left(X_1(s) + U(s)\right)$$
$$X_3(s) = \frac{1}{s - \lambda_3} X_2(s)$$
$$Y(s) = X_3(S)$$

Отсюда следуют уравнения:

$$\dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + (\lambda_1 - Z_1)\, u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \lambda_1 x_2(t) + x_1(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \lambda_3 x_3(t) + x_2(t)$$

и построенная динамическая реализация получается в форме (3.8) для $\lambda_1 = -1, \lambda_3 = -3, Z_1 = -2$.

Результаты моделирования в системе Mathcad приведены на рис.3.12 и рис.3.13.

Рис. 3.12. Координаты состояния.

Рис. 3.13. Переходная характеристика.

Из сравнения этих графиков с графиками на (Рис. 3.7) и (Рис. 3.8) вытекает, что при одинаковых выходных сигналах графики координат состояния получаются различными. Это — свойство метода пространства состояний, в котором можно выбирать разные координаты состояния при сохранении описания «вход-выход».

Глава 3.Модели дискретных систем в Mathcad.

§1.Дискретные модели систем и z—преобразование.

Дискретными или цифровыми называются системы, у которых множество моментов времени является подмножеством множества целых чисел $\mathbb{Z}$. К дискретным относится широкий класс систем, в состав которых входят микрокомпьютеры. Дискретные системы управления имеют ряд преимуществ по сравнению с непрерывными системами управления, таких как большая надежность, большая точность, большая устойчивость к возмущениям, меньшие габариты и стоимость. Модели дискретных систем задаются разностными уравнениями или уравнениями в конечных разностях. Пусть $y[k]$ — функция, определенная для целых значений аргумента, т.е. для $k \in \mathbb{Z}$, называемая решетчатой функцией. Конечная разность (обратная) первого порядка $\Delta^{-1}y[k]$ определяется формулой

$$\Delta^{-1}y[k] = y[k] - y[k-1] \qquad (1)$$

Конечная разности второго и третьего порядков определяются так:

$$\begin{aligned} \Delta^{-2}y[k] =& \Delta^{-1}y[k] - \Delta^{-1}y[k-1] = y[k] - 2y[k-1] + y[k] \\ \Delta^{-3}y[k] =& \Delta^{-2}y[k] - \Delta^{-2}y[k-1] = y[k] - 3y[k-1] + 3y[k+2] - y[k-3]. \end{aligned} \qquad (2)$$

В общем случае

$$\Delta^{-n}y[k] = \sum_{j=0}^{n} C_n^j(-1)^j y[k-j]. \qquad (3)$$

где $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ — биноминальные коэффициенты.

Описание "вход — выход"линейной стационарной дискретной системы с одним входом и одним выходом задается разностным уравнением :

$$\sum_{i=0}^{n} C_i \Delta^{-i} y[k] = \sum_{i=0}^{m} d_i \Delta^{-i} u[k]. \tag{4}$$

Это — аналог дифференциального уравнения для дискретных систем. Однако такая форма записи неудобна для приложений. Используя формулу (3), это уравнение можно преобразовать к следующему виду, который и будет использоваться в дальнейшем:

$$\sum_{i=0}^{n} a_n y[k-i] = \sum_{i=0}^{m} b_i u[k-i]. \tag{5}$$

В предположении нулевых начальных условий решение этого уравнения можно записать с использованием формулы дискретной свертки:

$$y[k] = \sum_{j=0}^{k} h[k-j] u[j]. \tag{6}$$

Весовая функция дискретной системы, $h[k-j]$, удовлетворяет условию причинности $h[k-j] = 0$ при $j > k$. С помощью замены переменных, формулу свертки можно записать также в таком виде

$$y[k] = \sum_{i=0}^{k} h[i] u[k-i]$$

где $h[i] = 0, \forall i < 0$.

Для дискретных систем роль δ — функции играет единичная импульсная функция

В этом случае

$$\sum_{i=0}^{k} h[i]\widehat{\delta}[k-i] = h[k], \tag{9}$$

т.е. $h[k]$ — это импульсная переходная функция дискретной системы.

Для введенной решетчатой функции дискретные отсчеты отстоют друг от друга на единицу. Для произвольного интервала дискретности (квантования) T можно положить $k = nT$ и обобщить результаты на этот случай — как на рис. 1 для $y[k] = e^k$ и $y[1/2\Delta] = e^{k/2}$, т.е. для $T = 1/2$.

Рис.1

Решетчатая функция задает значения функции только в дискретные моменты времени, т.е. на конечном или счетном множестве точек. Как следствие, преобразование Лапласа от решетчатой функции равно нулю

$$\int_{0}^{\infty} y[k] = e^{-ks} dk = 0. \tag{10}$$

Поэтому для решетчатых функций вводится дискретное преобразование Лапласа

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] e^{-ks}. \tag{11}$$

Наличие в правой части этой формулы множителя e^{-ks} приводит к тому, что изображение $Y(s)$ будет трансцендентной функцией. Полагая $z = e^s$ получаем следующую формулу, определяющую z — преобразование.

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] z^{-k}. \tag{12}$$

Эта формула позволяет получать дробно — рациональные изображения решетчатых функций. Правая часть формулы (12) представляет собой ряд по отрицательным степеням z, ряд Лорана, правильная часть которого имеет только один член $y[0]$.

Поэтому этот ряд сходится вне некоторого круга С с центром в начале координат. Формула обратного z— преобразования является при этом формулой для коэффициентов ряда Лорана

$$y[k] = \frac{1}{2\Pi j} \int\limits_{\Gamma} Y(z) z^{k-1} dC \tag{13}$$

Здесь контур интегрирования Г — произвольная окружность, охватывающая круг С. Для дробно - рациональных функций $Y(z)$ интеграл в формуле (13) может быть вычислен с помощью формулы вычетов

$$y[k] = \sum Res[Y(z) z^{k-1}]. \tag{14}$$

Здесь сумма вычисляется по всем особым точкам функции $Y(z)$, лежащим внутри контура Г. Однако обращение z — преобразования можно осуществить и не используя теоремы о вычетах. Для этого нужно многочлены в числителе и знаметеле изображения записать по возрастающим степеням z^{-1}. Деление числителя на знаменатель дает ряд по возрастающим степеням z^{-1}. Но, согласно, теореме запаздывания преобразования Лапласа, умножение на $e^{-s} = z^{-1}$ соответствует сдвигу на единицу времени во временной области. Поэтому коэффициенты полученного ряда дают значения искомого оригинала $y[k]$ для $k = 0, 1, 2...$

Пример. Пусть $Y(z) = \frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}$. Находим вычеты в полюсах $z = 2$ и $z = 1$(кратности 2):

$$y[k] = \frac{2z\cdot^{k-1}(z-2)}{(z-2)(z-1)^2}\,|_{z=2} + \frac{d}{dz}(\frac{2zz^{k-1}(2-1)^2}{(z-2)(z-1)^2})|_{z=1} = 2\cdot 2^k + (-2)(k+1) = 2[2^k - k - 1].$$

Таким образом $y[0] = 0, y[1] = 0, y[2] = 2, y[3] = 8, y[4] = 22\ldots$

В MathCad получаем

Для способа деления

и нужно положить $q = z^-1$ и использовать команды variable, Expand to Series ... т.е.

Применим способ деления, записываем $\frac{2z}{z^3-4z^2+5z-2}$, т.е.

$\frac{2z^{-2}}{1-4z^{-1}+5z^{-2}-2z^{-3}} = 2z^{-2} + 8z^{-3} + 22z^{-4} + \ldots$

Это дает тот же самый результат. График соответствующей решетчатой функции приведен на рис. 1.

Рис.1

В виду того, что z— преобразование было введено через преобразование Лапласа, его свойства подобны свойствам последнего. Рассмотрим эти свойства, обозначая связь оригиналов и изображений также, как для преобразования Лапласа, т.е. $y[k] \doteq Y(z)$.

Теорема линейности. Для любых комплексных чисел α и β

$$\alpha f_1[k] + \beta f_2[k] \doteq \alpha F_1(z) + \beta F_2(z). \qquad (15)$$

Теорема запаздывания. Для $f[k] = 0$ при отрицательных значениях k и любого положительного m.

$$f[k-m] \doteq z^{-m} F(z). \qquad (16)$$

Теорема смещения. Для любого действительного числа α.

$$e^{\pm\alpha k} f[k] \doteq F(ze^{\pm\alpha}) \tag{17}$$

Теорема о свертке. Произведение изображений $F_1(z)$ и $F_2(z)$ тоже является изображением, причем

$$F_1(z) \cdot F_2(z) \doteq \sum_{k=0}^{n} f_1[k] f_2[n-k]. \tag{18}$$

Изображение конечных разностей. Для конечной разности первого порядка применение формулы (18) дает

$$\Delta^{-1} f[k] = f[k] - f[k-1] \doteq F(z) - z^{-1}F(z) = \frac{z-1}{z}F(z) \tag{19}$$

Аналогично, для конечной разности порядка n

$$\Delta^{-k}[-k] = (\frac{z-1}{z})F(z). \tag{20}$$

В формулах (19) и (20) предполагается, как и в теореме запаздывания, что $f[k] = 0$ при отрицательных значениях аргумента, т.е. является оригиналом z — преобразования.

Используем эти теоремы для отыскания изображений типовых сигналов дискретных систем управления. Изображение единичного импульса, имеем, используя формулу (8)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\delta}[k] z^{-k} = z^{-0} = 1 \tag{21}$$

Изображение аналога единичной ступенчатой функции:

$$\widehat{1} = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, ... \\ 0 & k = -1, -2, ... \end{cases}. \qquad (22)$$

Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $a_j = a_0 q^j, j = 0, 1, 2, \ldots$ при $|q| < 1$ её сумма находится по формуле

$\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 = a_0 \sum\limits_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{a_0}{1-q}$.

Поэтому при $|z| > 1$, используя (22), получаем

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \widehat{1}[k] z^{-k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{z})^k = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$.

Изображение дискретной экспоненты $e^{\alpha k}$.

Используя теорему о смешении и предыдущий результат, записав экспоненту как $e^{\alpha k}\widehat{1}k$, имеем

$e^{\alpha k} 1[k] \doteq \frac{1}{1-\frac{1}{ze^{-\alpha}}} = \frac{ze^{-\alpha}}{ze^{-\alpha}-1} = \frac{z}{z-e^{\alpha}}$

для $|z| > e^{\alpha}$.

Изображения гармонических сигналов. Используя формулу Эйлера для косинуса:

$$\cos \omega k \doteq \frac{1}{2}(e^{j\omega k} + e^{-j\omega k})$$

и изображение экспоненты, получаем для $|z| > 1$.

$$\cos \omega k \doteq \frac{1}{2}(\frac{z}{z-e^{j\omega}} + \frac{z}{z-e^{-j\omega}}) = \frac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$$

Для $\omega = \frac{\Pi}{2}$

$\cos \frac{\Pi}{2} k \doteq \frac{z^2}{z^2+1}$.

Аналогично, для синуса использование формулы Эйлера и изображение для экспоненты дает для $|z| > 1$

$\sin \omega T = \frac{1}{2j}(e^{j\omega k} + e^{-j\omega k})$,

$\ldots \sin \omega k \doteq \frac{1}{2j}(\frac{z}{z-e^{j\omega}} - \frac{z}{z-e^{-j\omega}}) = \frac{z \sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$.

Для $\omega = \frac{\Pi}{2}$

$\sin\frac{\Pi}{2}k \doteq \frac{z}{z^2+1}$

z — преобразование в MathCad, прямое и обратное, как и преобразование Лапласа находятся с помощью палитры Symbolic. Для единичного импульса, обозначенного в MathCad как $\delta(n,0)$ находим

Для единичного импульса, запаздывающего на единицу времени

Для аналога единичной ступеньки, обозначенной как 1:

Для экспоненты e^n

Для гармонических сигналов

Применение обратного z — преобразования дает

Построение графиков показывает, что последние два результата задают функции $\cos(\frac{\Pi}{2})n$ и $\sin(\frac{\Pi}{2})n$ по точкам, т.е. $n = 0, 1, 2, \ldots$

Рис.2

Для $Y(z) = \frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}$ — примера, расчитанного ранее, получаем т.е. результат полученный по формуле вычетов.

В дискретных системах управления непрерывными объектами обязательно присутствуют два элемента: аналогово—цифровой преобразователь — АЦП и цифро — аналоговый преобразователь — ЦАП, как показано на рис.3.

Первый преобразует непрерывный выходной сигнал объекта управления $y(f)$ в решетчатый сигнал $y[k]$, пригодный для обработки на компьютере. Второй осуществляет преобразование дискретного выходного сигнала компьютера $u[k]$ в непрерывный сигнал управления $u(t)$. Задающий сигнал на

Рис.3

такую систему задается в цифровой форме — решетчатой функцией $r[k]$

Входным сигналом АЦП является непрерывный сигнал $y(t)$, а выходным — решетчатая функция $y(k)$, значения которой равным значениям $y(v)$ в дискретные моменты времени.

Описание "вход — выход"такого преобразователя задается уравнением

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \widehat{\delta}(t-k)y(t). \tag{23}$$

Таким образом, весовая функция АЦП задается формулой

$$h[n] = \widehat{\delta}[n] \tag{24}$$

В MathCad формула (24) записывается так

$$h(n) = \delta(n, 0) \tag{25}$$

Соответствующий график приведен на рис.4

Рис.4

На рис. 5 приведены совместно графики выходного сигнала объекта управления $y(t) = 1 - e^{-t}$ и соответствующего сигнала на выходе АЦП — оцифрованного сигнала, полученного по формуле

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} \delta(n-k, 0)(1 - e^{-k}) \tag{26}$$

Рис.5

Цифрово — аналоговый преобразователь, ЦАП, восстанавливает непрерывный сигнал управления $u(t)$ по решетчатой функции $u[k]$, вырабатываемой компьютером. Он решает, фактически, задачу экстраполяции, т.к. значение непрерывного сигнала восстанавливается по предыдущим значениям решетчатых функций. Для этого можно воспользоваться формулой Тейлора и записать:

$u(t) = u[k] + u'[k](t-k) + \frac{1}{2}u"[k](t-k)^2 + \dots$

Производные в этой формуле можно найти,используя обратные разности

$$u'[k] \approx u[k] - u[k-1]u"[k] \approx u[k] - 2u[k-1] + u[k-2] \tag{27}$$

Чем выше порядок производной, тем эти формулы получаются сложнее. Поэтому в формуле (26) используют одно или два слагаемых. Это дает формулы для экстраполяторов нулевого

$$u(t) = u[k] \tag{28}$$

и первого порядков

$$u(t) = u[k] + u'[k](t-k) \tag{29}$$

Рассмотрим чаще всего применяющийся экстраполятор нулевого порядка. Если на его вход подается единичный импульс $\widehat{\delta}[k]$, то на его выходе будет единица вплоть до следующего момента времени — рис.6а) и б)

Рис.6

Учитывая, что из графика следует, что

$$u(t) = 1(t) - 1(t-1) \tag{30}$$

и применяя преобразование Лапласа и теорему запаздывания, получаем

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} = \frac{1-e^{-s}}{s} \tag{31}$$

Это — передаточная функция экстраполятора нулевого порядка. Весовая функция при этом задается формулой (30). Передаточная функция прямой цепи $G(s)$ системы с обратной связью на рис.3 при этом будет задаваться формулой

$$G(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}H(s) \tag{32}$$

Здесь $H(s)$ — передаточная функция непрерывного объекта управления. По передаточной функции $G(s)$, используя обратное преобразование Лапласа, можно найти непрерывную весовую функцию $g(\tau)$. Находя по $g(\tau)$ соответствующую дискретную весовую функцию $g[k]$ для дискретных моментов времени $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Применение z — преобразования дает дискретную передаточную функцию

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k]z^{-k}) \tag{33}$$

После отыскания $G(s)$ дискретная передаточная функция $W(z)$ замкнутой системы со структурной схемой на рис.3 может быть получена по обычной формуле:

$$W(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \tag{34}$$

Примеры. Для передаточной функции $H(s) = \frac{1}{s+1}$

$$G(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s} \frac{1}{s+1} = (1 - e^{-s})(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}) \tag{35}$$

Отсюда находим оригиналы правой части для формулы (35):

$$\begin{gathered}
(1 - e^{-s}\frac{1}{s}) \doteq 1(t) - 1(t-1) \doteq \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} = 1 \\
(1 - e^{-s})\frac{1}{s+1} \doteq e^{-t} - e^{-(t-1)} \doteq \frac{z}{z-e^{-1}} - \frac{1}{z}\frac{z}{z-e^{-1}} = \frac{z-1}{z-e^{-1}}
\end{gathered} \tag{36}$$

Окончательно получаем с учетом (35) и (36)

$$G(z) = 1 - \tfrac{z-1}{z-e^{-1}} = \tfrac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}} = \tfrac{0.632}{z-0.368}$$

Для системы с обратной связью по формуле (34) находим:

$$W(z) = \frac{0.632}{z + 0.264} \tag{37}$$

Если использовать формулы соответствия преобразования Лапласа и z — преобразования:

$$\begin{gathered} \frac{1}{S} \to \frac{z}{z-1}; \\ \frac{1}{s+1} \to \frac{z}{z-e^{-1}} \end{gathered} \tag{38}$$

то передаточную функцию

$$G(z) = (1 - z^{-1})(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}}) = \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}}\frac{1}{S} \to \frac{z}{z-1}; \tag{39}$$

т.е. тот же результат.

Для передаточной функции $H(s) = 1/s(s+1)$ воспользуемся соответствиями (38) и следующим:

По формуле (32) находим

Используя соответствии (38) и (39), находим

$$G(z) = (1 - z^{-1})(\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-1}}) = \frac{ze^{-1} + 1 - 2e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})} =$$
$$= \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.3678)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368} \qquad (41)$$

Передаточная функция дискретной системы с обратной связью получается такой по формуле:

Рассмотрим соответствующие операции в MathCad.

Разложение на простые дроби для передаточной функции $H(s) = \frac{1}{(s+1)}$

Передаточная функция (35)

Соотношения (38)

Передаточная функция разомкнутой системы

$G(z) := (1 - z^{-1})(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}}) factor \rightarrow \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}}$

Передаточная функция замкнутой системы

Так как

то получаем в результате передаточную функцию (37). Для передаточной функции $H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

соотношения (39) получается так

Разложение на простые дроби получается так

Передаточная функция (40) выглядит так

Передаточная функция разомкнутой системы

Передаточная функция замкнутой системы

Графики реакций для дискретных моментов на ступенчатое воздействие, полученное по формуле

$$Y(z) := \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.0z + 0.632} \cdot \frac{z}{z-1} \tag{43}$$

приведены на рис.7 а) и б)

Для этого записываем в MathCad

и применяем обратные z—преобразование:

Для передаточной функции (37) аналогично записываем

Исследования устойчивости дискретных систем имеет свою специфику по сравнению с непрерывным случаем. Замкнутая непрерывная линейная и стационарная система устойчива ОВОВ тогда и только тогда, когда все корни её характеристического полинома лежат в левой полуплоскости. Граница устойчивости — это мнимая ось. При применнеии z—преобразования делается замена $z = e^s$ и так как

$s = \sigma + j\omega$, то $z = e^{\sigma}e^{j\omega}$ т.е. $|z| = e^{\sigma}$, $arg z = \omega$.

На мнимой оси $\sigma = 0$, т.е. $|z = 1|$, а в левой полуплоскости $\sigma < 0$ и $|z| < 1$. Таким образом левой полуплоскости аргументу s соответствует внутренность единичного круга. Таким образом замкнутая система устойчива тогда и только тогда, когда все корни её характеристического полинома лежат внутри единичного круга.

В обоих рассмотренных случаях замкнутые системы получились устойчивыми. В первом случае $z + 0.264 = 0$ и $z = -0.264$, а во втором — $z^2 - z + 0.632 = 0$ получаем в MathCad

Если однако вместо единичного коэффициента усиления, что подразумевает использование формулы (34), взять общую формулу

$$W(z) = \frac{G(z) \cdot K}{1 + G(z)K}.$$

то построение корневого годографа по уравнению $1 + G(z) \cdot K \ K \in [0, 5]$ показывает, что замкнутая система теряет устойчивость при $K = 5$. При этом значение коэффициента усиления корневой годограф пересекает окружность единичного радиуса, границу устойчивости - рис.8

Корневой годограф дискретной системы в Mathcad строится также как и корневой годограф непрерывной системы. С использованием формулы (41) получаем уравнение корневого годографа.

$$z^2 + 1.368z + 0.368 + k(0.368z + 0.264).$$

Изменяя значения коэффициента усиления К от 0 до 5 с шагом единица, получаем следующие корни, которые и наносим на график на рис.8. При $= 3$ получаем в Mathcad.

$z^2 - 1.368z + 0.368 + 3(0.368z + 0.264)$

$|0.132 - 1.069i| = 1.077$

Это свидетельствует, что при $k = 3$ система становится неустойчивой.

Одним из существенных преимуществ дискретных систем, связанных с наличием компьютера в контуре обратной связи (рис.3), является возможность программной реализации ПИ и ПИД — регуляторов. При интервале квантования Т интегральный регулятор:

$$u(t) = \int_0^t e(\xi) d\xi$$

заменяется на интервале длины Т уравнением

$$u[kT] = u[(k-1)T] + Te[kT] \tag{44}$$

Применение теоремы запаздывания z — преобразования дает

$$U(z) = z^{-1}U(z) + TE(z)./tag45 \tag{13}$$

Таким образом передаточная функция дискретного аналога интегрального регулятора имеет вид

$$H(z) = \frac{Tz}{z-1} \tag{46}$$

При этом передаточная функция ПИ — регулятора получается такой:

$$H(z) = K_1 + K_2\frac{Tz}{z-1}. \tag{47}$$

Соответствующее разностное уравнение имеет вид:

$$u[kT] = K_1e[kT] + K_2u[(k-1)T] + Te[kt] = (K_1 + K_2T)e[kT] + K_2u[(k-1)T]. \tag{48}$$

Уравнение (48) легко реализуется программно. Использование формулы (44) означает, что для реализации операции интегрирования в дискретной форме здесь использовалась формула прямоугольников. Возможны и более точные апроксимации, использующие формулы трапеций и парабол(Симпсона). ПИД — регулятор требует дискретной апроксимации операции дифференцирования. Для этого воспользуемся формулой (1) обратной разности для $t = kT$.

$$\frac{de}{dt} \simeq \frac{1}{T}(e[kT] - e[(k-1)T]) \tag{49}$$

Передаточная функция дискретного дифференциатора получается такой:

$$H(z) = \frac{z-1}{Tz} \qquad (50)$$

и передаточная функция ПИД — регулятора записывается так

$$H(z) = K_1 + K_2\frac{Tz}{z-1} + K_3 z - 1Tz \qquad (52)$$

Это дает такое разностное уравнение для программной реализации дискретного ПИД — регулятора

$$u[kT] = (K_1 + K_2 T + \frac{K_3}{T})e[kT] - \frac{K_3}{T}e[(k-1)T] + K_2 u[(k-1)T.] \qquad (52)$$

.

§2. Дискретные динамические системы.

Динамическая система, задаваемая «восьмеркой»

$$\Sigma = \langle \mathrm{T}, \mathrm{U}, \mathrm{Y}, \Omega, \Gamma, \mathrm{x}, \varphi, \eta \rangle \tag{8.1}$$

называется дискретной по времени, если её множество моментов времени T является подмножеством множества целых чисел $\mathbb{Z}$. Часто одному и тому же объекту можно сопоставить как непрерывную во времени модель, так и дискретную модель, и выбор определяется целями исследования.

Рассмотрим переход от непрерывных по времени моделей к дискретным. Пусть даны уравнения в пространстве состояний линейной стационарной системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{8.2}$$

причем эти уравнения рассматриваются в дискретные моменты времени $t_0 = 0$, $t_1 = \triangle$, $t_2 = 2\triangle, \ldots$ где $\triangle$ – шаг, интервал дискретизации (квантования). Предположим, что на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ входной сигнал $u(t)$ постоянен:$u_{[t_k, k+1]} \cong u_k$. Произведём аппроксимацию производной $\dot{x}(t)$ на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ конечной разностью

$$\dot{x}(t) \cong \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\Delta}. \tag{8.3}$$

Обозначив $x(t_{k+1}) = x_k + 1/$ и $x(t_k) = x_k$ из уравнений (8.2) получаем такие уравнения для $k = 0, 1, 2 \ldots$

$$x_{k+1} = (\Delta A + I)x_k + \Delta B u_k$$
$$y_k = Cxk + D_u k \tag{8.4}$$

или, в обозначениях $\tilde{A} = TA + I$, $\tilde{B} = TB$

$$x_{k+1} = \widetilde{A} x_k + \widetilde{B} u_k$$
$$y = Cxk + D_u k \tag{8.5}$$

Это — уравнения в пространстве состояний дискретной динамической системы, которые можно рассматривать и независимо от уравнений (8.2).

Переход от непрерывных уравнений (8.2)к дискретным уравнения (8.2) был осуществлён, фактически, методом Эйлера численного интегрирования дифференциальных уравнений. Рассмотрим динамическую систему, заданную уравнением

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} u(t), \tag{8.6}$$

Соответствующая дискретная система задается уравнением:

$$\begin{pmatrix} x1_{k+1} \\ x2_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta \\ -2\Delta & 1-3\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1_k \\ x2_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix} u_k, \tag{8.7}$$

Моделирование в MathCad дает для шага $\triangle = 0.25$ следующие результаты:

Метод Эйлера обеспечивает, как известно, невысокую точность — погрешность имеет порядок $\triangle$. Более совершенный метод дискретизации основан на аппроксимации переходной функции системы (8.2). Сопоставим первому уравнению в системе (8.2) переходную функцию

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau. \tag{8.8}$$

Для интервала $[t_k, t_{k+1}]$ отсюда получаем

$$x\left(t_{k+1}\right) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}x\left(t_k\right) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}Bu\left(\tau\right)d\tau =$$

$$= e^{A\triangle}x\left(t_k\right) + (\int_0^{\triangle} e^{A\sigma}Bd\sigma u(t_k)), \qquad (8.9)$$

где обозначено $t_{k+1} - \tau = \sigma$. Обозначив

$$e^{AT} = \tilde{A} = e^{\triangle}, \tilde{B} = \int_0^{\triangle} e^{A}\sigma B d\sigma \qquad (8.10)$$

получаем уравнения дискретной динамической системы в форме (8.5)

Снова рассмотрим непрерывную систему (8.6). Резольвентная матрица для неё получается такой:

Матричная экспонента получается так:

Для $\triangle = 0.25$ по формуле (8.10) находим $\tilde{A}$:

Аналогично для $\tilde{B}$ из (8.10) получаем

Это дает такую дискретную модель для $\triangle = 0.25$.

Рис.8.2 Выходной сигнал непрерывной системы

График дискретного решения получаемого таким способам, как это следует из рис.8.2 представляет точнее непрерывную модель, чем метод Эйлера.

Рассмотрим вопрос об аналитическом решении дискретных уравнений. Для случая свободной системы имеем однородное уравнение для $k = 0, 1, 2, ...$

$$x_k + 1 = \tilde{A} x_k$$

.

Для этого уравнения последовательно получаем $x_1 = \tilde{A}x_0; x_2 = \tilde{A}^2 x_0, ...$ откуда следует, что переходный оператор(переходная матрица) задаётся уравнением

$$\Phi(k) = \tilde{A}^k$$

Для рассматриваемого случая решение однородной системы находим:

Рис.8.3

Для случая неоднородного уравнения

$$x_{k+1} = \widetilde{A}^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \widetilde{A}^{k-j-1} \widetilde{B} u_j \tag{8.12}$$

последовательно получаем $x_1 = \widetilde{A}x_0 + \widetilde{B}u_0$, $x_2 = \widetilde{A}x_1 + \widetilde{B}u_1 = \widetilde{A}^2 x_0 + \widetilde{A}\widetilde{B}u_0 + \widetilde{B}u_1, \ldots$ Таким образом решение неоднородного уравнения записывается в виде

$$x_k = \widetilde{A}^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \widetilde{A}^(k-j-1)\widetilde{B}u_j \tag{8.13}$$

Используя второе уравнение в 8.5, выходную функцию, описание «вход – начальное состояние – выход» дискретной линейной динамической системы можно записать в следующей форме:

$$y_k = C\widetilde{A}^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} C\widetilde{A}^(k-j-1)\widetilde{B}u_j + Du_k \tag{8.14}$$

Импульсная переходная функция системы $h[j]$ определяется при этом формулой

$$h\left[j\right] = \begin{cases} D & ,j = k, \\ c\tilde{A}^{(k-j-1)}\tilde{B} & ,j = 0, \ldots, k-1. \end{cases}$$

При нулевом начальном состоянии описание «вход – выход» дискретной линейной системы (8.5) записывается с помощью импульсной переходной функции следующим образом:

$$y_k = \sum_{j}^{k} = 0 h_{k-j} u_j \tag{8.15}$$

Для дискретной линейной системы с одним входом и одним выходом уравнения в пространстве состояний имеют такой вид:

$$x_k = \widetilde{A}^k x + \widetilde{b}u_k$$

$$y_k = cx_k + du_k \tag{8.16}$$

где $\tilde{b}$ – вектор-столбец, c – вектор-строка и d – скаляр. Правила преобразований тройки $(\tilde{A}, \tilde{b}, c)$ при последовательном, параллельном соединениях и соединении с обратной связью аналогичны соответствующим правилам для непрерывных систем, рассмотренным в §2.

Передаточная функция дискретной линейной системы определяется с помощью z-преобразования по формуле:

$$H\left(z\right) = \frac{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + \cdots + b_0}{z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + \cdots + a_0}. \qquad (8.17)$$

Переход к уравнениям в пространстве состояний (8.5) от передаточной функции (8.17) осуществляется аналогично соответствующему переходу для непрерывных систем, рассмотренному в §3§4.

Так, для передаточной функции

$$W\left(z\right) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.0 * z + 0.632} \qquad (8.15)$$

применение метода управляемой формы дает уравнения:

$$\begin{pmatrix} x_1\left[k+1\right] \\ x_2\left[k+1\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.632 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\left[k\right] \\ x_2\left[k\right] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u\left[k\right],$$

$$y\left[k\right] = \begin{pmatrix} 0.264 & 0.368 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\left[k\right] \\ x_2\left[k\right] \end{pmatrix} \qquad (8.16)$$

Результаты моделирования уравнений (8.15) и (8.16) при единичной ступеньке на входе показаны на рис. 8.4 и рис.8.5.

Рис. 8.5. Решение методом пространства состояний.

Глава 4.Синтез регуляторов в задачах управления технологическими процессами.

Данная глава посвящена примерам применения системы Mathcad+VisSim для синтеза регуляторов, предназначенным для проведения лабораторных работ по курсу "Основы теории управления."Выбор примеров определялся ограничением на сложность и время лабораторных работ. Все рассмотренные примеры взяты из уже ставшей классической книги Р.Дорфа и Р.Бишопа "Современные системы управления в которой, однако, для решения этих задач предлагается использовать систему MATLAB.

Лабораторная работа №1. "Синтез регулятора для системы управления производством бумаги."

Бумажное производство, столь важное в современном мире, характеризуется наличием различных стадий технологического процесса, одной из которых является поддержание постоянной плотности бумажной массы. Плотность определяется количеством воды, добавляемой в смеситель, как показано на схеме системы на рис.1.

Рис.1 Схема управления

Соответствующая структурная схема в терминах передаточных функций приведена на рис.2. Предполагается, что $H(s) = 1$ (идеальный датчик плотности),передаточная функция объекта $G(s) = \frac{1}{4s+1}$, передаточная функция регулятора $G_C = \frac{K}{8s+1}$ задана с точностью до коэффициента усиления K.

Рис.2

Здесь требуется:

- найти передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы;
- Сделать вывод об устойчивости системы по критерию Стодолы.
- Построить соответствующий график переходного процесса и определить по нему показатели качества — выброс и время переходного процесса.
- Вычислить коэффициент статической ошибки и вобрать такое значение K, при котором ошибка будет составлять 1% от заданного значения плотности.
- Проварьировать величину K в меньшую сторону от найденного значения, построив графики переходных характеристик,проверить как эти изменения влияют на характер переходных процессов. Вычислить соответствующие значения установившейся ошибки.
- Построить блок — схему системы в VisSim и получить соответствующие переходные характеристики.

Решение(документ в Mathcad).

Расчет системы управления плотностью бумаги.

Передаточная функция регулятора

Передаточная функция объекта

Передаточная функция разомкнутой системы

Передаточная функция замкнутой системы

Проверка устойчивости. Характеристический полином

при положительном значении K имеет все положительные коэффициенты, что означает по критерию Стодолы для системы второго порядка её устойчивости.

Вычисление коэффициентов ошибки.

Передаточная функция по сигналу ошибки:

Расчет коэфициента статической ошибки.

Записываем:

и в меню панели Symbolics выбираем позиции Variable и Expand to Series, что дает для 1 % ошибки и команды Solve.

Построение переходного процесс

Синтезированная система обладает выбросом в 70 % и временем переходного процесса 18 с. Снижение коэффициента усиления до значения $k = 9$ дает выброс в 20 %, ошибка $\frac{1}{K+1} = 0.1$

Таким образом, повышение значения коэффициента усиления приводит к повышению точности САУ, но при этом ухудшается её показатель качества.

Моделирование системы управления плотностью бумажной массы.

Вывод по годографу Найквиста: замкнутая система устойчива при всех

$K > 0$.

АЧХ и ФЧХ(замкнутые системы) (кнопка Analyze).

Лабораторная работа №2. Моделирование системы дуговой сварки.

Одним из важных применений промышленных роботов является дуговая сварка. В большинстве ситуаций неопределенность размеров деталей, геометрии стыка и самого сварочного процесса требует применения специальных датчиков для обеспечения качества сварки. С этой целью работы оснащаются системой технического зрения, с помощью которой измеряется геометрия расставленного металла. Структурная схема такой системы изображена на рис.1. Она обеспечивает постоянную скорость движения сварочного стержня вдоль шва.

Рис.1

Требуется: найти предельное значение коэффициента усиления регулятора K при котором система теряет устойчивость; выбрав значение K в два ряда меньше найденного найти величину перерегулирования, построив переходную характеристику системы в Mathcad и VisSim.

Решение(документ в Mathcad.)

Передаточная функция прямой цепи

Передаточная функция системы технического зрения

Передаточная функция замкнутой системы

Характерический полином

при $k = 18$ имеет корни с положительной действительной частью

При $k = 17$ все корни еще имеют отрицательные действительные части

Выбираем поэтому $k = 9$

Установившееся значение - 0,82. Максимальное значение - 1.27

Выброс $\frac{1.27-0.82}{0.82} = 54,878\%$ — это слишком большой выброс. Поэтому уменьшаем значения коэффициента усиления в три раза, полагаем $k = 3$. Тогда

Максимальное значение — 0.716 Установившееся значение — 0.599

Выброс $\frac{0.716-0.544}{0.599} = 19,533\%$ — это приемлимое значение выброса.

Решение(документ в VisSim).

Годограф Найквиста и суждение об устойчивости и запасах устойчивости.

Лабораторная работа №3.Система управления гравировальной машиной.

В гравировальной машине осуществляется перемещение гравировальной иглы вдоль координаты X с помощью двух двигателей и направляющих винтов. Перемещение иглы по координатам y и Z осуществляется отдельными двигателями. Структурная схема системы управления гравировальной машины по оси X приведена на рис.1.

Рис.1

Цель синтеза — получить приемлемое качество переходного процесса за счет выбора коэффициента усиления K. С этой целью воспользуемся показателем устойчивости по амплитуде. Будем выбирать K из условия того, чтобы этот запас ΔA был равен 0.5 — стандартное значение с заданным показателем колебательности $M = 1.5$.

Решение (документ в Mathcad).

Структурная схема системы

Передаточная функция объекта.

Годограф Найквиста строится по формулам для последовательного соединения интегрирующего и двух апериодических звеньев.

Для интегрирующего звена:

$$A1(\omega) := \frac{1}{w}, \text{И } 1(\omega) := -\frac{\Pi}{2}$$

Для апериодических звеньев:

$$A2(\omega) := \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}},\ \varphi 2(\omega) := atan(\omega);\ A3(\omega) = \frac{0.5}{\sqrt{0/25w^2+1}},$$
$$\varphi 3(\omega) := -\operatorname{atan}(0.5 \cdot \omega).$$

Годограф Найквиста:

для разных значений K

$$A(\omega) := KA1(\omega) \cdot A2(\omega) \cdot A3(\omega)$$
$$\varphi(\omega) := \varphi 1(\omega) + \varphi 2(\omega) + \varphi 3(\omega)$$

При k=5 система теряет устойчивость — годограф найквиста проходит через критическую точку — рис.2. Положим $k = 2.5$, тогда запас устойчивости будет желаемым $\Delta A = 0.5$ при запасе по фазе несколько меньше 30 — тоже стандартное значение.

Переходный процесс в замкнутой системе получается таким при $K = 2.5$

Выброс получился в 50 %, поэтому коэффициент усиления лучше уменьшить до значения $K = 1.5$, что даёт выброс $\sigma = 27\%$

Моделирование в VisSim.

Система управления гравировальной машиной.

Неустойчивая система.

Устойчивая система.

Годограф Найквиста.

Заключение.

1. Показана возможность демонстрации основных методов теории управления Mathcad И VisSim.

2.В дипломной работе разработан материал для учебного пособия по методу пространства состояний, ориентируемый на системы Mathcad и VisSim.

3. Разработаны лабораторные работы по построение регуляторов для АСУТП в следующих задачах:

- Синтез регуляторов для системы управления производством бумаги.

- Моделирование системы дуговой сварки.

- Система управления гравировальной машиной.

Список используемой литературы.

1. Капалин В.И., Кудряшов Г.Ю. Введение в теорию систем и теорию управления. — Москва.: МГИЭМ, 2002.

2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — Москва.: Наука, 1972.

3. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. — Москва.: Энергия, 1980.

4. Бишоп Р., Дорф Р. Современные системы управления — Москва: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.

5. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов и инженеров. Русская версия. — Санкт–Петербург.: «БХВ-Петербург» , 2009.

Приложения.

Схема управления производством бумаги.

Расчет системы управления в Mathcad. Выброс 70%

Расчет системы управления в Mathcad. Выброс 20%

Моделирование системы управления плотностью бумажной массы.

Замкнутая система устойчива при всех $k > 0$

Структурная схема системы дуговой сварки.

Структурная схема системы дуговой сварки.

Годограф Найквиста.

Система управления гравировальной машиной по оси X.

Структурная схема системы.

Расчет системы управления гравировальной машиной.

Система управления гравировальной машиной(неустойчивая)

Система управления гравировальной машиной(устойчивая)

Годограф Найквиста.