**ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования**

**Национальный исследовательский университет**

**«Высшая школа экономики»**

**Московский институт электроники и математики**

**Национального исследовательского университета**

**«Высшая школа экономики»**

**Кафедра**

**высшей математики**

**ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ**

**В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

**Методические указания**

**к домашней контрольной работе**

**по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»**

**Москва**

**2013**

Составители: канд. физ.-мат. наук И. К. Бусяцкая;

канд. физ.-мат. наук К. К. Андреев

УДК 512.8

Линейные операторы в евклидовых пространствах. Методические указа­ния к домашней контрольной работе по курсу «Линейная алгебра и аналитиче­ская геометрия»./ Моск. ин-т электроники и математики Национального иссле­довательского университета «Высшая школа экономики»; Сост.: И. К. Бусяц­кая, К. К. Андреев. М., 2013. – 28 с.

На конкретных примерах излагаются способы решения задач домашней контрольной работы по теме «Линейные операторы в евклидовых пространст­вах». Приводится ряд дополнительных сведений из теории линейных операто­ров в евклидовых пространствах, некоторые из которых доказываются, а неко­торые предоставляются для доказательства студентам.

Для студентов первого курса всех дневных факультетов.

ISBN 978-5-94506-311-2

Условия задач

Общие условия ко всем вариантам

Дана матрица оператора φ в стандартном базисе евклидова пространства **R**3.

**1.** Проверить, что оператор φ − изометрический.

**2.** Найти спектр оператора Spec φ.

**3.** Найти канонический вид матрицы оператора φ.

**4.** Найти канонический базис и матрицу *C* перехода к этому базису.

**5.** Проверить, что *C* − ортогональная матрица.

**6.** Указать геометрический смысл оператора φ.

Условия вариантов

**1.** . **2.** .

**3.** . **4.** .

**5.** . **6.** .

**7.** . **8.** .

**9.** . **10.** .

**11.** . **12.** .

**13.** . **14.** .

**15.** . **16.** .

**17.** . **18.** .

**19.** . **20.** .

**21.** . **22.** .

**23.** . **24.** .

**§ 1. Комплексное евклидово пространство**

Этот параграф является естественным дополнением пособия «Евклидовы пространства», М., МИЭМ, 2008, и предполагает знакомство с основными по­нятиями и идеями, изложенными в нём.

Пусть *V* – линейное пространство над полем комплексных чисел **C**.

**Определение 1.** *Скалярным произведением* в пространстве *V* называется отображение, ставящее в соответствие каждой упорядоченной паре векторов *a*, *b* из пространства *V* комплексное число, обозначаемое (*a*, *b*), причём так, что выполняются условия:

1. (*a*, *a*) > 0 для любого ненулевого вектора *a* ∈ *V*.

2. (*a*, *b*) = для любых *a*, *b* ∈ *V*, т. е. (*a*, *b*) и (*b*, *a*) – комплексно со­пряжённые числа.

3. (λ*a*, *b*) = λ(*a*, *b*) длялюбых *a*, *b* ∈ *V* и λ ∈ **C**.

4. (*a*1 + *a*2, *b*) = (*a*1, *b*) + (*a*2, *b*) для любых *a*1, *a*2, *b*∈ *V*.

Из этих свойств следует, что

3\*. (*a*, λ*b*) = (*a*, *b*). Действительно, (*a*, λ*b*) = = = = = (*a*, *b*).

4\*. (*a*, *b*1 + *b*2) = (*a*, *b*1) + (*a*, *b*2). Действительно, (*a*, *b*1 + *b*2) = = = = + = (*a*, *b*1) + (*a*, *b*2).

При выводе свойств 3\* и 4\* мы воспользовались следующими свойст­вами комплексного сопряжения.

Если *z* = α + *i*β, = α − *i*β, то

1. = *z*.

2. .

3. .

Свойство 2 и вытекающее из него свойство 3\* отличает комплексное евк­лидово пространство от вещественного. Заметим, что сохранить одновременно положительную определённость и симметрию скалярного произведения при переходе от вещественного пространства к комплексному невозможно, т. к. из (*a*, *b*) = (*b*, *a*) следует, что (λ*a*, λ*b*) = λ2(*a*, *b*) и при λ = *i* получаем (*ia*, *ia*) = = *i*2(*a*, *a*) = −(*a*, *a*), т. е. (*a*, *a*) и (*ia*, *ia*) не могут быть одновременно положитель­ными числами.

**Определение 2.** Пространство *V* вместе с заданным в нём скалярным произведением называется *комплексным евклидовым пространством* и обозна­чается *E*.

Сохранив положительную определённость скалярного произведения (свойство 1), можно определить в комплексном евклидовом пространстве длину вектора.

**Определение 3.** *Длиной* вектора *a* ∈ *E* называется число |*a*| = .

Отметим, что неравенство (*a*, *a*) > 0 подразумевает, что число (*a*, *a*) веще­ственное, так как невещественные комплексные числа сравнивать нельзя. Угол между векторами в комплексном евклидовом пространстве не определяется, так как скалярное произведение (*a*, *b*) − комплексное число, однако вводится поня­тие ортогональных векторов.

**Определение 4.** Два вектора *a*, *b* в комплексном евклидовом простран­стве *E* называются *ортогональными* (*a* ⊥ *b*), если (*a*, *b*) = 0.

Эти определения позволяют рассматривать ортогональные и ортонор­мальные системы (в том числе и базисы) в пространстве *E* и его линейных под­пространствах. Причём свойства ортогональных систем, доказанные для веще­ственных евклидовых пространств, сохраняются и в комплексном случае, в ча­стности, из любой линейно независимой системы векторов, применяя процесс ортогонализации и нормирование, можно получить ортонормальный базис в линейной оболочке этих векторов, а также разложить евклидово пространство *E* в прямую сумму *E* = *L* ⊕ *L*⊥, где *L* − линейное подпространство в *E*, а *L*⊥ − его ортогональное дополнение.

Основным примером комплексного евклидова пространства является ли­нейное пространство **C***n* = {; *zi* ∈ **C**} со стандартным скалярным произведе­нием:

(***z***, ***w***) = .

В этом евклидовом пространстве длина вектора ***z*** вычисляется по формуле:

|***z***| = = = ,

а векторы ***e***1 = , …, ***e****n* = образуют ортонормальный базис.

Произвольное *n*-мерное комплексное евклидово пространство *E* можно «отождествить» с евклидовым пространством **C***n*. Для построения изометриче­ского изоморфизма пространств *E* и **C***n* зафиксируем в *E* ортонормальный базис *e*1, …, *en*. Если *z* = − разложение вектора *z* ∈ *E* по базису *e*1, …, *en*, то, поставив этому вектору в соответствие вектор-столбец комплексных чисел ∈ **C***n*, мы получим биективное и линейное отображение φ пространства *E* в **C***n*. Как известно (см. «Евклидовы пространства», М., МИЭМ, 2008, § 2), ска­лярное произведение векторов *z* и *w* пространства *E* в ортонормальном базисе вычисляется по формуле (*z*, *w*) . Следовательно, построенное отображение φ является изометрическим изоморфизмом.

**§ 2. Сопряжённый оператор**

Пусть φ − линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве *E* над полем *P* (**R** или **C**).

**Определение 5.** Оператор φ\* называется *сопряжённым* к оператору φ, если для любых *x*, *y* ∈ *E* выполняется соотношение

(φ(*x*), *y*) = (*x*, φ\*(*y*)).

**Примеры.**

**1.** φ = id – тождественный оператор: φ (*x*) = *x* для любого *x*.

(id (*x*), *y*) = (*x*, *y*) = (*x*, id (*y*)).

Следовательно, id\* = id.

**2.** φ – изометрический изоморфизм, т. е. биективное линейное отображе­ние, сохраняющее скалярное произведение: (*x*, *y*) = (φ (*x*), φ (*y*)). У оператора φ существует обратный оператор φ-1 такой, что если φ (*x*) = *y*, то φ-1 (*y*) = *x*, и, сле­довательно, φ-1 также является изометрией.

(φ (*x*), *y*) = (φ-1(φ (*x*), φ-1(*y*)) = ((φ-1φ) (*x*), φ-1(*y*)) = (id (*x*), φ-1(*y*)) = (*x*, φ-1(*y*)).

Таким образом, φ\* = φ-1.

**Теорема 1** (*единственности*)**.** Если у оператора φ есть сопряжённый, то он единствен.

**Доказательство.** Пусть и − операторы, сопряжённые к φ; тогда

(φ (*x*), *y*) = (*x*, (*y*)) = (*x*, (*y*)) для любых *x*, *y*.

Отсюда

(*x*, (*y*) − (*y*)) = (*x*, − ) (*y*)) = 0 для любых *x*, *y*.

Вектор − ) (*y*) ⊥ *x* для любого *x* и, следовательно, может быть только нулевым. Равенство − ) (*y*) = 0 для любого *y* означает, что оператор − нулевой, т. е. = , QED[[1]](#footnote-1).

**Теорема 2** (*существования*)**.** У любого линейного оператора φ в конеч­номерном евклидовом пространстве существует сопряжённый оператор φ\*.

**Доказательство.** Зафиксируем ортонормальный базис *e*1, …, *en* в про­странстве *E*; *x* = − разложение вектора *x* по этому базису, *A*φ = = − матрица оператора φ в рассматриваемом базисе. Действие оператора φ – это умножение на матрицу *A*φ:

φ (*x*) = *A*φ⋅ = .

Скалярное произведение в ортонормальном базисе имеет стандартный вид:

(φ (*x*), *y*) = ⋅ = ⋅ = =

= = (*x*, *z*),

где *z* = и *zk* = .

Таким образом, вектор ***z*** = получается из вектора ***y*** = =умножением на матрицу , = , а соответствующий оператор удов­летворяет определению сопряжённого, QED. Таким образом, = .

Если оператор φ действует в вещественном евклидовом пространстве и − его матрица в фиксированном ортонормальном базисе, то матрица сопря­жённого оператора φ\* в этом базисе − *A*T, а действие оператора φ\* − умножение на транспонированную матрицу *A*T.

Переход от линейного оператора к сопряжённому обладает следующими свойствами.

1. (φ\*)\* = φ.

2. (φ + ψ)\* = φ\* + ψ\*.

3. (λφ)\* = φ\*.

4. (φψ)\* = ψ\*φ\*.

Проверьте эти свойства.

**Определение 6.** Оператор φ называется *самосопряжённым*, если φ = φ\*.

**Примеры.**

1. id – самосопряжённый оператор.

2. В пространстве **R***n* со стандартным скалярным произведением оператор умножения на симметрическую матрицу (*A*T = *A*) является самосопряжённым.

3. В пространстве **C***n* со стандартным скалярным произведением оператор умножения на матрицу *A* будет самосопряжённым тогда и только тогда, когда = (*A* = ). Матрицы, обладающие этим свойством, называются *эрмито­выми*.

4. Рассмотрим линейный оператор φ, действующий в одномерном ком­плексном евклидовом пространстве **C**1. Такой оператор – оператор умножения на комплексное число α: φ (*z*) = α*z*. Оператор φ будет самосопряжённым тогда и только тогда, когда = α, т. е. α – вещественное число. Этот пример показы­вает, что самосопряжённые операторы во множестве всех линейных операторов являются как бы аналогами вещественных чисел, принадлежащих множеству всех комплексных чисел.

**§ 3. Свойства самосопряжённых операторов**

Рассмотрим линейное подпространство *L* в евклидовом пространстве *E*, инвариантное относительно линейного оператора φ. Это означает, что φ (*x*) ∈ *L* для любого *x* ∈ *L*, т. е. образы векторов из линейного подпространства *L* не вы­ходят за пределы подпространства *L*. Пусть *L*⊥ − ортогональное дополнение пространства *L*, т. е.

*L*⊥ = {*y*; (*x*, *y*) = 0 для любого *x* ∈ *L*}.

**Теорема 1.** Если φ − самосопряжённый оператор и *L* инвариантно отно­сительно φ, то *L*⊥ также инвариантно относительно φ.

**Доказательство.** Требуется доказать, что для любого *y* ∈ *L*⊥ φ (*y*) ∈ *L*⊥, т. е. (φ (*y*), *x*) = 0 для любого *x* ∈ *L*. (φ (*y*), *x*) = (*y*, φ\* (*x*)) = (*y*, φ (*x*)). *L* инвари­антно, и, следовательно, для любого *x* ∈ *L* φ (*x*) ∈ *L*. Поэтому (*y*, φ (*x*)) = 0 для любого *y* ∈ *L*⊥, QED.

Евклидово пространство *E* раскладывается в прямую сумму любого ли­нейного подпространства *L* и его ортогонального дополнения *L*⊥. Причём, если *x* = *y* + *z*, где *y* ∈ *L*, *z* ∈ *L*⊥, то *y* = pr*Lx*, а *z* = ort*Lx*. Таким образом, наличие у са­мосопряжённого оператора φ инвариантного подпространства *L* позволяет рас­сматривать его действие во всём пространстве *E* как совокупность независимых действий в пространствах меньшей размерности *L* и *L*⊥. Напомним, что в этом случае матрица *A*φ оператора φ в базисе *e*1, …, *en*, при условии *e*1, …, *ek* ∈ *L*, *ek*+1, …, *en* ∈ *L*⊥, имеет вид *A*φ = , где − матрица оператора φ, действую­щего в пространстве *L* в базисе *e*1, …, *ek*, а − матрица оператора φ, действую­щего в *L*⊥ в базисе *ek*+1, …, *en*.

Естественными инвариантными подпространствами любого линейного оператора φ являются собственные подпространства *V*λ этого оператора, т. е. множества собственных векторов оператора φ, соответствующих одному собст­венному значению λ, пополненные нулевым вектором. В комплексном линей­ном пространстве собственные векторы у линейного оператора существуют всегда, в то время как в вещественном линейном пространстве их может не быть, например, если характеристический многочлен не имеет вещественных корней.

**Теорема 2.** Все корни характеристического многочлена самосопряжён­ного оператора φ вещественны.

**Доказательство.**

Случай **1.** Пусть *E* − евклидово пространство над полем **C**. В этом случае любой корень характеристического многочлена будет собственным значением, т. е. для любого λ0 такого, что *P*φ (λ0) = 0, существует соответствующий собст­венный вектор *x*0 и (φ (*x*0), *x*0) = (λ*x*0, *x*0) = λ (*x*0, *x*0). Так как оператор φ самосо­пряжённый, то

(φ (*x*0), *x*0) = (*x*0, φ\* (*x*0)) = (*x*0, φ (*x*0)) = (*x*0, λ*x*0) = (*x*0, *x*0).

Собственный вектор всегда (по определению) ненулевой и, следова­тельно, (*x*0, *x*0) ≠ 0. Из равенства λ (*x*0, *x*0) = (*x*0, *x*0) получаем λ = , т. е. λ вещественно.

Случай **2.** Пусть *E* – конечномерное евклидово пространство над полем **R**. Фиксируем *e*1, …, *en* − ортонормальный базис в этом пространстве. Соответ­ствие *x* = → задаёт изометрический изоморфизм *E* и **R***n*. При этом если *A*φ − матрица оператора в базисе *e*1, …, *en*, то соответствующее дейст­вие оператора в **R***n* − умножение на матрицу *A*φ:

φ: → *A*φ

Причём матрица *A*φ − матрица оператора в стандартном базисе пространства **R***n*. Матрица *A*φ, как матрица самосопряжённого оператора в ортонормальном ба­зисе, симметрическая.

Пространство **R***n* является подмножеством пространства **C***n*:

**R***n* = {, *xi* ∈ **R**} ⊂ **C***n* = {, *zi* ∈ **C**}.

Определим в **C***n* оператор − оператор умножения на матрицу *A*φ:

: → *A*φ

*A*φ − матрица оператора в стандартном базисе. Это самосопряжённый оператор в **C***n*, т. к. все элементы вещественны и, следовательно, = и = , т. к. *A*φ – симметрическая матрица. Поэтому = *A*φ.

Характеристический многочлен (λ) вычисляем, используя матрицу *A*φ:

(λ) = det(*A*φ – λ*E*) = (λ).

Характеристические многочлены операторов φ и совпадают, и, следо­ва­тельно, совпадают их корни. Как было доказано в случае **1**, все эти корни ве­щественны, QED.

Из теоремы 2 следует, что у самосопряжённого оператора всегда есть ин­вариантные подпространства. Это, например, собственные подпространства *V*λ. Спектр любого оператора φ − множество корней характеристического много­члена с указанием их кратностей

Spec φ = , …, } −

можно изобразить на комплексной плоскости точками. Так как спектр самосо­пряжённого оператора φ содержит только вещественные числа, то все точки спектра этого оператора располагаются на вещественной оси.

**§ 4. Канонический вид самосопряжённого оператора**

**Теорема 3.** У любого самосопряжённого оператора φ в конечномерном евклидовом пространстве *E* существует ортонормальный базис, в котором мат­рица оператора диагональна.

**Доказательство.** Применим метод математической индукции по размер­ности *n* евклидова пространства *E*. Если dim *E* = *n* = 1, то оператор φ − умноже­ние на вещественное число λ и *A*φ = (λ).

Пусть утверждение теоремы верно для любого евклидова пространства *E* размерности *n*. Покажем, что при этом условии теорема справедлива для про­странства *E* размерности *n* + 1.

Итак, оператор φ (φ = φ\*) действует в евклидовом пространстве *E*, dim *E* = *n* + 1. По теореме 2 все корни характеристического уравнения вещест­венны и, следовательно, существует вещественное собственное значение λ1 и соответствующий собственный вектор *x*1. Рассмотрим линейную оболочку этого вектора *L* = 〈*x*1〉. Это инвариантное подпространство в пространстве *E*, в котором оператор действует как умножение на λ1. По теореме 1 ортогональное дополнение *L*⊥ инвариантно. dim *L* = 1, dim *L*⊥ = *n*. По предположению индук­ции в *L*⊥ существует ортонормальный базис, в котором матрица оператора φ как оператора, действующего в пространстве *L*⊥, диагональна. Это *e*2, …, *en*+1 − ор­тонормальный базис из собственных векторов оператора φ. Обозначим через *e*1 = ∈ *L*, *e*1 ⊥ *L*⊥, и мы получили *e*1, *e*2, …, *en*+1 − ортонормальный базис в *E*, в котором матрица оператора φ диагональна, QED.

Ортонормальный базис, в котором матрица самосопряжённого оператора диагональна, естественно назвать *каноническим*, хотя он и не определён одно­значно. Например, для тождественного оператора любой ортонормальный ба­зис канонический.

Заметим, что сам факт существования базиса, в котором матрица опера­тора диагональна с вещественными числами на диагонали, не гарантирует са­мосопряжённости оператора. Так, если матрица оператора *A*φ в стандартном ба­зисе в евклидовом пространстве **R***n* не симметрическая, а оператор φ диагона­лизируемый, то φ не будет самосопряжённым оператором, однако будет обла­дать базисом из собственных векторов. Этот базис не будет ортонормальным.

Из теоремы 3 следует, что любая симметрическая (эрмитова) матрица *A* подобна диагональной матрице с вещественными числами, стоящими на диаго­нали:

*A* ~ .

Матрица *A* задаёт самосопряжённый оператор φ − оператор умножения на эту матрицу – и является матрицей оператора φ в стандартном ортонормаль­ном базисе пространства **R***n* (**C***n*).

Если *P* – матрица перехода от стандартного базиса к каноническому, то

*A* = *PP*-1.

При нахождении канонического базиса для самосопряжённого оператора может оказаться полезным утверждение следующей теоремы.

**Теорема 4.** Собственные векторы самосопряжённого оператора φ, соот­ветствующие различным собственным значениям, ортогональны.

**Доказательство.** Пусть λ1 и λ2 − различные собственные значения опера­тора φ (они вещественны по теореме 2), *x*1 , *x*2 − соответствующие собственные векторы.

(φ (*x*1), *x*2) = (*x*1, φ (*x*2));

(φ (*x*1), *x*2) = (λ1*x*1, *x*2) = λ1(*x*1, *x*2);

(*x*1, φ (*x*2)) = (*x*1, λ2*x*2)) = (*x*1, *x*2) = λ2(*x*1, *x*2).

Итак, λ1(*x*1, *x*2) = λ2(*x*1, *x*2) и так как λ1 ≠ λ2, то (*x*1, *x*2) = 0, QED.

Таким образом, если корни характеристического многочлена самосопря­жённого оператора различны и имеют кратность 1, канонический базис можно получить, выбирая по собственному вектору единичной длины для каждого собственного значения.

**Пример.** Найти канонический вид и канонический базис оператора умножения на матрицу



в пространстве **C**2.

Пусть φ − рассматриваемый оператор, тогда матрица  является матрицей оператора φ в стандартном ортонормальном базисе ***e***1, ***e***2 стандартного комплексного евклидова пространства **C**2, т. е. *А*φ = = . Матрица *А*φ – эрмитова, т. к. *A*φ = , следовательно, опера­тор φ − самосопряжённый. Найдём характеристический многочлен и спектр оператора φ: *P*φ(λ) = det  = (3 − λ)(1 − λ) – (2 + 2*i*)(2 − 2*i*) = λ2 − − 4λ + 3 – 8 = λ2 − 4λ – 5 = (λ + 1)(λ − 5). Корнями характеристического много­члена будут числа λ1 = −1 и λ2 = 5. Спектр оператора φ имеет вид: Spec φ= = {−1[1], 5[1]}. Найдём собственные подпространства *V*-1 и *V*5 оператора φ.

Подпространство *V*-1 – это множество решений системы:



Решая систему, например, методом Гаусса, получаем множество векторов вида α. Подпространство *V*5 − это множество решений системы:



Множество решений этой системы – векторы вида α.

Векторы ***а***1 = , ***а***2 = , порождающие, соответственно, подпро­странства *V*-1 и *V*5, ортогональны и имеют длины и (проверьте это само­стоятельно!). Поделив векторы ***а***1 и ***а***2 на их длины, получим канонический ба­зис оператора φ, в котором матрица φ имеет канонический диагональ­ный вид:

.

**§ 5. Изометрический оператор**

Рассмотрим φ – линейный оператор, действующий в евклидовом про­странстве *E* над полем *P* (**R** или **C**). У каждого такого оператора φ существует сопряжённый оператор φ\* (см. теорему 2 § 2).

**Определение 7.** Оператор φ называется *изометрическим*, если φ⋅φ\* = = φ\*⋅φ = id.

Это определение означает, что оператор φ обратим, а сопряжённый опе­ратор φ\* является обратным к оператору φ, т. е. φ\* = φ-1. В примере 2 § 2 было показано, что изометрический изоморфизм, т. е. биективное линейное отобра­жение, сохраняющее скалярное произведение, обладает этим свойством. Верно и обратное.

**Теорема 1.** Если φ – изометрический оператор, то отображение φ биек­тивно и сохраняет скалярное произведение.

**Доказательство.** Биективность отображения φ вытекает из существова­ния обратного оператора φ-1= φ\*. Проверим, что скалярное произведение со­храняется при отображении φ:

(φ(***x***), φ(***y***)) = (***x***, φ\*(φ(***y***))) = (***x***, (φ\*φ) (***y***)) = (***x***, id ***y***) = (***x***, ***y***),

QED.

Зафиксируем некоторый ортонормальный базис ***e***1, ***e***2, …, ***e****n* в евклидовом пространстве *E*. Пусть *A*φ − матрица изометрического оператора φ в этом ба­зисе. Так как матрица сопряжённого оператора φ\* в этом же базисе имеет вид = (или = в вещественном случае), то матрица изометрического оператора φ обладает свойством:

*A*φ = *E*.

Изучим подробнее такие матрицы.

**Определение 8.** Матрица *O* ∈ *Mn* (**R**) называется *ортогональной*, если *O*-1 = *O*T. Матрица *U* ∈ *Mn* (**C**) называется *унитарной*, если *U* -1 = *U* T.

**Теорема 2.** Строки и столбцы унитарной (ортогональной) матрицы – по­парно ортогональные векторы единичной длины.

**Доказательство.** Пусть

*U* = , ** = .

Перемножим эти матрицы:

*U*⋅**= 

То есть элемент произведения, стоящий в *i*-й строке и в *j*-м столбце,, равен  − соответствующему элементу матрицы *E*. Но  − скалярное произведение векторов, стоящих в *i*-й и *j*-й строках матрицы *U*. Следовательно, строки матрицы попарно ортогональны и имеют единичную длину. Перемно­жим теперь матрицы *U* и ** в другом порядке:

**⋅*U* =

Элемент произведения, стоящий в *i*-й строке и в *j*-м столбце, имеет вид и равен . Но  − скалярное произведение *j*-го и *i*-го столбцов матрицы *U*. Следовательно, и столбцы матрицы *U* попарно ортогональны и имеют единичную длину, QED.

Это утверждение о столбцах матрицы *U* можно получить и из геометри­ческих соображений, если *U* − матрица изометрического оператора в ортонор­мальном базисе. Столбцы матрицы состоят из координат образов базисных век­торов ***e***1, ***e***2, …, ***e****n* в рассматриваемом базисе. Изометрический оператор сохра­няет скалярное произведение. Следовательно, столбцы – векторы φ (***e***1), …, φ (***e****n*) − также образуют ортонормальный базис.

Заметим, что унитарные (ортогональные) матрицы встречаются также при рассмотрении матриц перехода от одного ортонормального базиса к дру­гому. Действительно, пусть ***e***1, ***e***2, …, ***e****n* и ***e***1′, ***e***2′, …, ***e****n*′ − два таких базиса и *P* − матрица перехода от первого базиса ко второму. Столбцы матрицы *P* состоят из координат векторов ***e***1′, ***e***2′, …, ***e****n*′ в базисе ***e***1, ***e***2, …, ***e****n*. Столбцы матрицы *P* тем самым − попарно ортогональные векторы единичной длины. Поэтому **⋅*P* − матрица, состоящая из попарных скалярных произведений столбцов, − равна *E*, **⋅*P* = *E*. Таким образом, **является обратной матрицей *P*-1, а сама матрица *P* оказывается унитарной (ортогональной).

Рассмотрим теперь определитель унитарной матрицы *U*. det *U* (сумма с соответствующими знаками произведений элементов матрицы, взятых из раз­ных строк и разных столбцов) является комплексным числом.

det *U* = , где σ =  −

подстановка степени *n*, sgn σ − её знак, а *Sn* − множество всех таких подстано­вок.

det ** = .

Так как комплексное сопряжение перестановочно с операциями сложения и умножения комплексных чисел, то det ** =.

Вычислим модуль комплексного числа det *U*.

**Теорема 3.** Пусть *U* − унитарная матрица, тогда |det *U*| = 1.

**Доказательство.** det (*U*⋅**) = det *U*⋅det **= det *U*⋅det **= det *U*⋅= = |det *U*|2.

Но *U*⋅** = *E*, следовательно, |det *U*|2 = 1 и |det *U*| = 1, т. к. модуль ком­плекс­ного числа – вещественное положительное число. Определитель унитар­ной матрицы – комплексное чиcло, по модулю равное единице, − может быть записан в виде:

det *U* = = cos α + *i* sin α, QED.

Если *O* − ортогональная матрица, то все её элементы вещественны и = = *O*. det *O* – вещественное число, а из доказательства теоремы 3 получаем |det *O*|2 = 1. Следовательно, в вещественном случае det *O* = ±1.

**Замечание.** Пусть ***e***1, ***e***2, …, ***e****n* и ***e***1′, ***e***2′, …, ***e****n*′ − два ортонормальных ба­зиса в вещественном евклидовом пространстве, *P* − матрица перехода от пер­вого базиса ко второму. *P* – ортогональная матрица, и, следовательно, det *P* = = ±1. Будем говорить, что базисы ***e***1, ***e***2, …, ***e****n* и ***e***1′, ***e***2′, …, ***e****n*′ имеют *одинаковую ориентацию*, если det *P* = 1, и *противоположную*, если det *P* = −1. Рассмотрим стандартный базис ***e***1 = , ***e***2 = , …, ***e****n*=  в стандартном евклидовом пространстве **R***n*. Любой базис, имеющий одинаковую ориентацию со стандарт­ным базисом, будем называть *положительно ориентированным*. Противопо­ложно ориентированные базисы будем называть *отрицательно ориентирован­ными*. Эти определения обобщают понятия положительно и отрицательно ори­ентированных троек векторов трёхмерного векторного пространства на случай ортонормальных базисов в стандартном евклидовом пространстве **R***n*.

**§ 6. Свойства изометрического оператора**

Рассмотрим линейное подпространство *L* в евклидовом пространстве *E* и его ортогональное дополнение *L*⊥.

**Теорема 1.** Если *L* − инвариантное подпространство изометрического оператора φ, то *L*⊥ − также инвариантное подпространство этого оператора.

**Доказательство.** Для любых *x* ∈ *L* и *y* ∈ *L*⊥ имеем: (*x*, *y*) = 0. Пусть *y* ∈ ∈ *L*⊥; тогда для проверки инвариантности подпространства *L*⊥ относительно действия оператора φ нужно убедиться, что (*x*, φ (*y*)) = 0 для любого *x* ∈ *L*. Подпространство *L* инвариантно относительно действия оператора φ, следова­тельно, φ: *L* → *L* − изометрический оператор в пространстве *L*, т. е. биективное и линейное отображение. Поэтому любой вектор *x* ∈ *L* можно записать как φ (*x*′), где *x*′ = φ-1 (*x*). Таким образом,

(*x*, φ (*y*)) = (φ (*x*′), φ (*y*)) = (*x*′, *y*) = 0,

т. к. *x*′ ∈ *L*, а *y* ∈ *L*⊥, QED.

Напомним, что если линейный оператор (не обязательно изометрический) имеет собственные векторы, то у него есть и инвариантные подпространства, например, собственные подпространства *V*λ. Поэтому поиски инвариантных подпространств изометрического оператора φ целесообразно начать с изучения его спектра.

**Теорема 2.** Корни характеристического уравнения изометрического опе­ратора по модулю равны единице.

**Доказательство.** Случай **1**. Пусть φ – изометрический оператор в ком­плексном евклидовом пространстве *E*.

Многочлен *P*φ (λ), как всякий многочлен степени *n* ≥ 1 над полем **C**, имеет хотя бы один корень λ0 (точнее, *n* корней с учётом их кратности). Этот корень является собственным значением оператора φ, соответствующим собственному вектору *x*0.

(*x*0, *x*0) = (φ (*x*0), φ (*x*0)) = (λ0*x*0, λ0*x*0) = λ0(*x*0, *x*0).

λ0 = |λ0|2. Так как *x*0 − собственный вектор, то (*x*0, *x*0) ≠ 0 и |λ0|2 = 1. Следовательно, |λ0| = 1.

Случай **2**. Рассмотрим изометрический оператор в вещественном евкли­довом пространстве *E*. Зафиксируем ортонормальный базис *e*1, *e*2, …, *en* и уста­новим изометрический изоморфизм пространства *E* и стандартного евклидова пространства **R***n* (см. «Евклидовы пространства», М., МИЭМ, 2008, стр. 12). Пусть *O* − матрица изометрического оператора в рассматриваемом базисе; то­гда φ:  → *O*. Пространство **R***n* является подмножеством стандартного комплексного евклидова пространства **C***n*. Определим оператор  в этом про­странстве, :  → *O*. Оператор  совпадает с φ на подмножестве **R***n*. Матрица *O* является матрицей оператора  в стандартном базисе, и так как *O* вещественна, то *O*⋅**= *O*⋅*O*T = *E* и  − изометрический оператор в простран­стве **C***n*. Характеристические многочлены операторов  и φ одинаковы, т. к.

*P* (λ) = det (*O* – λ*E*), *P*φ (λ) = det (*O* – λ*E*).

Но в случае **1** было показано, что все корни характеристического много­члена оператора  по модулю равны 1, QED.

Так как в комплексном линейном пространстве любой корень характери­стического уравнения является собственным значением, то изометрический оператор имеет инвариантные подпространства. Если *x*0 – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ0, то его линейная оболочка *L* = = 〈*x*0〉 − одномерное инвариантное подпространство изометрического опера­тора.

В вещественном случае, как показывает пример оператора поворота на плоскости на угол α ≠ *k*π, у изометрического оператора может не быть нетриви­альных инвариантных подпространств (т. е. подпространств, отличных от нуле­вого и всего пространства). Это связано с отсутствием вещественных корней у характеристического уравнения.

Рассмотрим изометрический оператор φ в вещественном евклидовом пространстве. Корни его характеристического уравнения по модулю равны единице. Если они вещественны, то это числа ±1, которые будут собственными значениями оператора, а соответствующие собственные подпространства будут инвариантными. Если корень характеристического уравнения λ не является ве­щественным, то λ = , α ≠ *k*π.

**Теорема 3.** Пусть λ =  (α ≠ *k*π) – корень характеристического уравне­ния *P*φ (λ) = 0 изометрического оператора φ, действующего в вещественном евклидовом пространстве *E*; тогда существует двумерное инвариантное под­пространство *L* ⊂ *E* , в котором оператор φ есть поворот на угол α.

**Доказательство.** Зафиксируем ортонормальный базис *e*1, *e*2, …, *en* в про­странстве *E*; *O* – матрица оператора в этом базисе. Как и в доказательстве тео­ремы 2, установим изометрический изоморфизм между пространством *E* и стандартным евклидовым пространством **C***n*, φ:  → *O*.  – оператор, продолжающий это действие в стандартное евклидово пространство **C***n*, :  → *O*. Как было показано в доказательстве теоремы 2,  − изо­метри­ческий оператор с тем же спектром, т. е. Spec φ = Spec . Поэтому λ = =  − собственное значение оператора , а *z* =  − соответствующий собст­венный вектор.

*z* = = = + *i*= *x* + *iy*, где *x*, *y* ∈ **R***n*;

(*z*) = (*x* + *iy*) = *O*(+ *i* )= *O*+*i O*= φ (*x*) + *i*φ (*y*);

(*z*) = *z* = (cos α + *i* sin α)(*x* + *iy*) = (*x*cos α − *y*sin α) + *i*(*x*sin α + *y*cos α).

Отсюда получаем:

φ (*x*) = *x*cos α − *y*sin α, φ (*y*) = *x*sin α + *y*cos α.

Рассмотрим двумерное подпространство, порождённое векторами *x* и *y*: *L* = 〈*x*, *y*〉 ⊂ **R***n*. Это подпространство инвариантно относительно оператора φ. Пусть  = *x* − *iy* − вектор, сопряжённый вектору *z* = *x* + *iy*. () = *O* = =  в силу вещественности матрицы *O* и вышеуказанных свойств ком­плекс­ного сопряжения.

() =  = ⋅ = .

Вычислим скалярное произведение векторов *z* и :

(*z*, ) = ((*z*), ()) = (*z*, ) = λ2(*z*, ).

Но  = *e*2*i*α ≠ 1, т. к. α ≠ *k*π. Следовательно, (*z*, ) = 0, т. е. векторы *z* и  ортогональны.

(*z*, ) = (*x* + *iy*, *x* − *iy*) = (*x*, *x*) – (*y*, *y*) + 2*i*(*x*, *y*) = 0.

Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда его действи­тельная и мнимая части равны нулю. Получаем: (*x*, *x*) = (*y*, *y*), (*x*, *y*) = 0. Векторы *x* и *y* ортогональны и имеют одинаковую длину: |*x*| = |*y*| = *a*. В подпространстве *L* рассмотрим два вектора *e*1 =  и *e*2 = . Это ортогональные векторы единич­ной длины, т. е. ортонормальный базис в линейном подпространстве *L*. Найдём матрицу оператора φ в этом базисе:

φ (*e*1) = φ () = (*x*cos α − *y*sin α) = cos α − sin α = *e*1cos α − *e*2sin α.

Аналогичным образом

φ (*e*2) = φ () = *e*1sin α + *e*2cos α.

Матрица оператора φ, действующего в инвариантном подпространстве *L*, − это , т. е. матрица оператора поворота на угол α, QED. (Под­черкнём, что эта матрица задаёт поворот, только если это матрица опера­тора в ортонормальном базисе.)

**§ 7. Канонический вид изометрического оператора**

**Теорема 1.** Пусть φ – изометрический оператор в комплексном евклидо­вом пространстве *E*; тогда в *E* существует ортонормальный базис из собствен­ных векторов оператора.

**Доказательство** (методом математической индукции). Если оператор φ действует в одномерном пространстве, то он есть умножение на число. Это число λ = *ei*α, любой вектор пространства *E* собственный, в том числе любой вектор *e* единичной длины, являющийся ортонормальным базисом *E*. Предпо­ложим, что теорема верна для евклидовых пространств *E* таких, что dim *E* = *k*, и покажем, что из этого предположения следует справедливость теоремы для евклидовых пространств размерности *k* + 1.

Пусть φ – изометрический оператор в пространстве *E*, у которого dim *E* = = *k* + 1, λ0 = *ei*α − собственное значение оператора φ, соответствующее собст­венному вектору *x*0. Рассмотрим линейную оболочку этого вектора *L* = 〈*x*0〉. Это одномерное линейное подпространство, базисом которого будет вектор *e*1 = = . *L* – инвариантное подпространство оператора φ, и по теореме 1 § 6 его ортогональное дополнение *L*⊥ также инвариантно относительно оператора φ. dim *L*⊥ = *k*, т. к. *E* = *L* ⊕ *L*⊥ и dim *E* = dim *L* + dim *L*⊥. Оператор φ действует в пространстве *L*⊥, и, следовательно, по предположению индукции в пространстве *L*⊥ существует ортонормальный базис *e*2, …, *ek*+1 из собственных векторов опе­ратора φ. Тогда *e*1, *e*2, …, *ek*+1 − ортонормальный базис в пространстве *E*, со­стоящий из собственных векторов оператора φ, QED.

Матрица изометрического оператора в базисе из собственных векторов диагональна, и на диагонали стоят числа, по модулю равные единице. Таким образом, для любой унитарной матрицы *U* существует другая унитарная мат­рица *V* такая, что *V*-1*UV* − диагональная матрица. Матрица *V* − это матрица пе­рехода от исходного стандартного ортонормального базиса, в котором оператор задаётся как оператор умножения на матрицу *U*, к каноническому базису из собственных векторов, существование которого доказано в теореме 1. Другими словами, можно сказать, что любая унитарная матрица подобна диагональной специального вида:

*U* ~ .

Если φ – изометрический оператор в вещественном евклидовом про­странстве, то у него может не существовать ортонормального базиса из собст­венных векторов, как, например, у оператора поворота на угол α ≠ *k*π на плос­кости. Однако и в вещественном случае у изометрического оператора сущест­вует специальный (канонический) ортонормальный базис.

**Теорема 2.** Пусть φ – изометрический оператор в вещественном евклидо­вом пространстве *E*; тогда в этом пространстве существует ортонормальный ба­зис, в котором матрица оператора имеет вид:

,  
называемый *каноническим*.



Это клеточно-диагональная матрица, одномерные клетки которой суть числа 1 или −1, а двумерные – матрицы поворота на углы α*i*.

**Доказательство** (методом математической индукции). Пусть φ действует в одномерном евклидовом пространстве *E*. В этом случае оператор φ − умно­жение на число, которое в силу изометрии равно ±1. Вектор *e* единичной длины в пространстве *E* и есть требуемый базис.

Предположим, что теорема верна для евклидовых пространств *E* размер­ности, меньшей *n* (dim *E* < *n*), и рассмотрим евклидово пространство *E* размер­ности *n* (dim *E* = *n*) и спектр оператора φ. Если в спектре оператора есть веще­ственные числа λ0 (а это могут быть только числа ±1), то это собственное зна­чение, которому соответствует собственный вектор *x*0. Рассмотрим *L* = 〈*x*0〉, dim *L* = 1. Вектор *e*1 =  − базис пространства *L*. По теореме 1 § 6 подпростран­ство *L*⊥ инвариантно относительно φ, т. е. φ действует в простран­стве *L*⊥. dim *L*⊥ = *n* − 1, и по предположению индукции пространство *L*⊥ обла­дает ортонормальным базисом *e*2, …, *en*, в котором матрица оператора φ имеет требуемый клеточно-диагональный вид. Векторы *e*1, *e*2, …, *en* − ортонормаль­ный базис пространства *E*, в котором матрица оператора φ имеет требуемый клеточно-диагональный вид.

Если в спектре оператора φ нет вещественных чисел, то рассмотрим ком­плексный корень λ0 = ** характеристического уравнения. Согласно теореме 3 § 6 в пространстве *E* существует двумерное инвариантное подпространство *L*, в котором оператор φ действует как поворот на угол α0. Пусть *e*1, *e*2 − ортонор­мальный базис подпространства *L*. Ортогональное дополнение *L*⊥ инвариантно относительно оператора φ, и dim *L*⊥ = *n* − 2. По предположению индукции в *L*⊥ существует ортонормальный базис *e*3, …, *en*, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид. Заметим, что в этом случае все клетки на диагонали двумерны, QED.

Из этой теоремы следует, что для каждой ортогональной матрицы *O* су­ществует другая ортогональная матрица *Q* (матрица перехода к каноническому базису) такая, что *Q*-1*OQ* − клеточно-диагональная матрица, описанная в тео­реме 2.

Наконец, заметим, что канонический вид ортогональной матрицы опре­делён однозначно с точностью до перестановки местами клеток на диагонали.

**§ 8. Изометрические операторы на плоскости и в пространстве**

Теорема 2 предыдущего параграфа даёт возможность классифицировать изометрические операторы на плоскости и в трёхмерном пространстве, описав не только все ортогональные матрицы размерности 2 и 3 с точностью до подо­бия, но и геометрическое действие соответствующих операторов.

Рассмотрим изометрический оператор φ на плоскости, т. е. в двумерном стандартном евклидовом пространстве **R**2. Канонический вид матрицы опера­тора φ определён однозначно с точностью до порядка клеток на диагонали. Пусть ***e***1, ***e***2 − ортонормальный базис пространства **R**2, в котором матрица опе­ратора φ имеет канонический вид. Если *O* = , т. е. совпадает с матрицей *E*, то φ = id и Spec φ = {1[2]}.

Если *O* = , то φ = −id и Spec φ = {(−1)[2]}. В этом случае опера­тор φ является центральной симметрией: φ (*x*) = −*x*.

Если *O* = , то Spec φ = {1[1], (−1)[1]}. Вектор ***e***1 является собствен­ным с собственным значением 1, а вектор ***e***2 − собственным вектором с собст­венным значением −1. Оператор φ осуществляет симметрию относительно прямой, проходящей через начало координат на плоскости, направление кото­рой задаёт вектор ***e***1. Наконец, если *O* = , то оператор φ – пово­рот на угол α, Spec φ = {*ei*α [1], *e*-*i*α [1]}.

Других изометрических операторов на плоскости нет.

Пусть φ – изометрический оператор, действующий в стандартном евкли­довом пространстве **R**3, ***e***1, ***e***2, ***e***3 − ортонормальный базис, в котором матрица *O* оператора φ имеет канонический вид. (Теорема 2 § 7.)

Если *O* = , т. е. *O* = *E*, то φ = id и Spec φ = {1[3]}. Если *O* = = , то Spec φ = {1[2], (−1)[1]}.

В двумерном подпространстве *L* = 〈***e***1, ***e***2〉 оператор φ действует как тож­дественный, а в пространстве осуществляет симметрию относительно плоско­сти, порождённой векторами ***e***1 и ***e***2, проходящей через начало координат.

Если *O* =, то Spec φ = {1[1], (−1)[2]}. *L*1 = 〈***e***1〉 − собственное под­пространство, соответствующее собственному значению 1, а *L*2 = 〈***e***2, ***e***3〉 − собственное подпространство, соответствующее собственному значению −1. Оператор φ действует в пространстве как симметрия относительно прямой, проходящей через начало координат в направлении вектора ***e***1.

Если *O* =, то φ = −id, Spec φ = {(−1)[3]}. Все векторы про­странства, кроме **0**, являются собственными векторами оператора φ с собствен­ным значением −1. Оператор φ осуществляет в пространстве центральную симметрию относительно начала координат: φ (***x***) = −***x***.

Пусть теперь в спектре оператора φ есть невещественные числа. Опера­тор φ – изометрический, поэтому по теореме 2 § 1 это числа вида *ei*α. Характе­ристический многочлен *P*φ(λ) имеет вещественные коэффициенты. Как из­вестно, невещественные корни вещественных многочленов встречаются па­рами, т. е. если *z*0 – корень, то  − также корень. Следовательно, Spec φ = = {*ei*α [1], *e*-*i*α [1], 1[1]} или Spec φ = {*ei*α [1], *e*-*i*α [1], (−1)[1]}. В первом случае кано­ни­ческий вид матрицы оператора φ в ортонормальном базисе ***e***1, ***e***2, ***e***3: *O* = = . Вектор ***e***1 − собственный вектор, соответствующий собст­венному значению 1, *L* = 〈***e***1, ***e***2〉 − двумерное инвариантное подпростран­ство, в котором оператор φ действует как поворот на угол α. В трёхмерном про­странстве **R**3 оператор φ осуществляет поворот вектора вокруг оси, проходящей через начало координат и идущей в направлении вектора ***e***1, на угол α. Направ­ление вращения зависит от ориентации базиса ***e***1, ***e***2, ***e***3.

Если матрица оператора φ имеет канонический вид *O* = =  в базисе ***e***1, ***e***2, ***e***3, то ***e***1 − собственный вектор, соответст­вующий собственному значению −1, а *L* = 〈***e***2, ***e***3〉 − инвариантное подпростран­ство, в котором φ действует как поворот на угол α. Оператор φ осуществляет поворот вокруг оси, проходящей через начало координат в направлении век­тора ***e***1, на угол α с последующей симметрией относительно перпендикулярной к вектору ***e***1 плоскости, проходящей через начало координат.

Описав все возможные изометрические операторы в пространстве **R**3, можно по матрице *O* изометрического оператора φ, заданной в некотором ба­зисе, описать действие оператора в пространстве геометрически.

**§ 9. Пример**

Рассмотрим конкретный пример (вариант № 24). Дано, что некоторый линейный оператор φ в стандартном базисе стандартного евклидова простран­ства **R**3 имеет матрицу

*A* = .

**1.** Проверим, что оператор φ является изометрическим. Для этого доста­точно убедиться в том, что матрица *A* является унитарной, в данном случае ор­тогональной, так как все её элементы вещественны. Убеждаемся в этом непо­средственным вычислением скалярных произведений строк (и столбцов) друг на друга.

**2.** Найдём спектр оператора φ. Спектр Spec φ – это совокупность всех собственных значений с указанием их кратностей. Вычисляем собственные значения. Для этого надо следующий определитель

det (*A* – λ*E*) = 

приравнять нулю и решить полученное уравнение. Здесь удобно положить λ = = . Тогда имеем:

= −μ3 – 729 = 0,

откуда λ = −1 и ещё двум невещественным кубическим корням из −1:

Spec φ = {−1, = cos + *i*sin}.

**3.** Канонический вид матрицы нашего линейного оператора (т. е. матрицы оператора в каноническом базисе), как это следует из § 6, будет таков:

 = .

**4.** Сам же канонический базис ищется следующим образом. Первый его вектор – это собственный вектор нашего оператора с собственным значением −1. Он ищется обычным образом, т. е. составляем матрицу

*A* – λ*E* = *A* + *E* =  = 

и рассматриваем её как матрицу линейной однородной системы. Все решения этой системы, кроме нулевого, суть собственные векторы. Так как решений бесконечно много, ищем базис подпространства решений (фундаментальную систему решений, ФСР). В данном случае мы можем взять, конечно, матрицу . Приведём её к главному ступенчатому виду:. Из вида этой матрицы ясно, что подпространство решений одномерно и базисом в нём будет вектор . Это и есть собственный вектор, все остальные будут ему коллинеарны.

Для нахождения других векторов канонического базиса вспомним, что остальные два вектора являются базисом двумерного подпространства *L*⊥, где *L* = 〈〉. Геометрически это есть плоскость, проходящая через начало коор­динат и перпендикулярная вектору {5; −1; −1}. Из аналитической геометрии мы знаем, что уравнение такой плоскости есть 5*x* – *y* – *z* = 0. Это и есть подпро­странство *L*⊥. Теперь надо найти в этой плоскости два ненулевых ортогональ­ных вектора. Первый вектор просто подбираем, например, вектор {0; 1; −1} ле­жит в нашей плоскости (точнее, компланарен ей). В качестве второго вектора можно взять векторное произведение двух уже найденных, т. е. вектор {2; 5; 5}; он автоматически будет лежать в указанной плоскости. Остаётся нормировать найденные три вектора, и это будет канонический базис нашего оператора.

Что же касается матрицы перехода от стандартного базиса к найденному каноническому, то надо просто записать три наших нормированных вектора в столбцы матрицы:

*C* = .

**5.** Убеждаемся, что матрица *C* ортогональна, непосредственным вычисле­нием скалярных произведений строк (и столбцов) друг на друга.

**6.** Геометрический смысл нашего оператора φ, как это ясно из § 6, заклю­чается в том, что этот оператор осуществляет поворот вокруг оси, проходящей через начало координат в направлении вектора , на угол  с последующей симметрией относительно плоскости 5*x* – *y* – *z* = 0.

Учебное издание

Линейные операторы в евклидовых пространствах

Составители: БУСЯЦКАЯ Ирина Константиновна

АНДРЕЕВ Кирилл Кириллович

Редактор Е. С. Резникова

Технический редактор О. Г. Завьялова

Подписано в печать 02.04.2013. Формат 60×84/16.

Бумага офсетная № 2. Ризография. Усл. печ. л. 1,75. Уч.-изд. л. 1,58.

Изд. № 22. Тираж 200 экз. Заказ . Бесплатно.

Московский институт электроники и математики Национального исследова­тельского университета «Высшая школа экономики».

109028, Москва, Б. Трёхсвятительский пер., 3/12.

Редакционно-издательский отдел Московского института электроники и мате­матики Национального исследовательского университета «Высшая школа эко­номики».

Участок МИЭМ типографии НИУ ВШЭ.

113054, Москва, ул. М. Пионерская, 12.

1. Quod erat demonstrandum (*лат*.) ‘что и требовалось доказать’. [↑](#footnote-ref-1)